

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**

  
Руководитель ОПОП ВО  
доцент Ю.В. Ильюшин

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ  
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ**

<b>Уровень высшего образования:</b>	Подготовка кадров высшей квалификации
<b>Направление подготовки:</b>	09.06.01 Информатика и вычислительная техника
<b>Направленность (профиль):</b>	Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность)
<b>Форма обучения:</b>	очная
<b>Нормативный срок обучения:</b>	4 года
<b>Составитель:</b>	д.т.н., профессор Д.А. Первухин

Санкт-Петербург

## СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1. Описание математических моделей гидролитосферных процессов. Модель гидроминеральных «пластов» .....	3
Практические занятия 2 и 3. Дискретная модель объекта управления.....	4
Практические занятия 4 и 5. Анализ и моделирование гидролитосферных процессов.....	6

**Практическое занятие 1. Описание математических моделей гидролитосферных процессов.  
Модель гидроминеральных «пластов»**

Математическая модель трех гидроминеральных «пластов» записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= 1/\eta_1 * \left( \frac{d(k_{y1} \cdot dS_1)}{dx^2} + \frac{d(k_{y1} \cdot dS_1)}{dy^2} + \frac{d(k_{z1} \cdot dS_1)}{dz^2} \right) \\ \frac{dS_2}{dt} &= 1/\eta_2 * \left( \frac{d(k_{y2} \cdot dS_2)}{dx^2} + \frac{d(k_{y2} \cdot dS_2)}{dy^2} + \frac{d(k_{z2} \cdot dS_2)}{dz^2} \right) - F_{x2} \cdot \frac{dS_2}{dx}; \\ \frac{dS_3}{dt} &= 1/\eta_3 * \left( \frac{d(k_{y3} \cdot dS_3)}{dx^2} + \frac{d(k_{y3} \cdot dS_3)}{dy^2} + \frac{d(k_{z3} \cdot dS_3)}{dz^2} \right) - \\ &- F_{x3} \cdot \frac{dS_3}{dx} - \hat{S}_i(t) \cdot \delta(x_i, y_i, z_i); \\ \frac{dS_4}{dt} &= 1/\eta_4 * \left( \frac{d(k_{y4} \cdot dS_4)}{dx^2} + \frac{d(k_{y4} \cdot dS_4)}{dy^2} + \frac{d(k_{z4} \cdot dS_4)}{dz^2} \right) - F_{x4} \cdot \frac{dS_4}{dx} \\ 0 < x < X_L, 0 < y < Y_L, 0 < z < Z_j; (j=1,2,3,4), \end{aligned}$$

где:  $\eta_j$  - коэффициенты упругости коллектора и относительно водоупорных пород соответственно;

$F_{y,j}$  - скорость движения воды j-го водоносного пласта;

$k_{xj}, k_{yj}, k_{zj}$  - коэффициенты фильтрации по пространственным координатам;  $S_j(x, y, z, t)$  - понижение уровня (от статического) в водоносных горизонтах и водоупорах;

$\hat{S}_i$  - понижение уровня в точке расположения i-ой водозаборной скважины;

$\delta(x_i, y_i, z_i)$  - функция, значение которой равно 1 при  $x=x_i, y=y_i, z=z_i$ , а в остальных случаях значение  $\delta(x_i, y_i, z_i)=0$ ;

$x_i, y_i, z_i$  - координаты i-ой водозаборной скважины ( $i=1,2,3,4,5$ ).

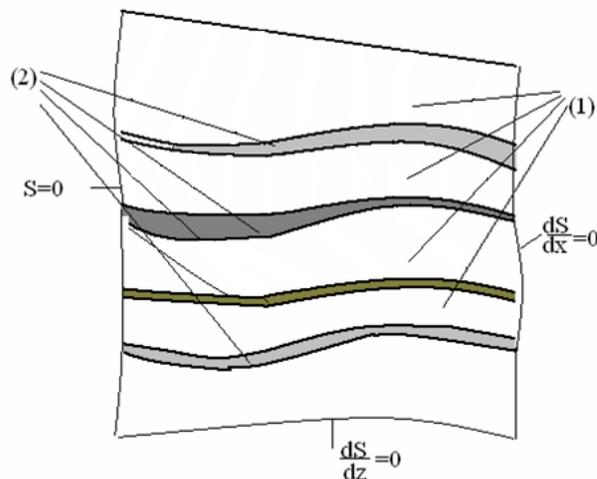


Рис. 1 Граничные условия

Условия на границах водоносных и слабопроницаемых пропластков (рис.1) выражает закон неразрывности движения (закон Дарси), и записывается в виде:

$$k_{zj} \frac{dS_j(x, y, Z_j, t)}{dz} = k_{z,j+1} \frac{dS_{j+1}(x, y, Z_{j+1}, t)}{dz} \quad (j=1,2),$$

$$\frac{dS_1(x, y, z = Z_1, t)}{dz} = 0, \quad \frac{dS_3(x, y, z = Z_3, t)}{dz} = 0,$$

$$0 < x < X_L, 0 < y < Y_L.$$

Граничные условия на контурах месторождения, выражаются через соотношения:

$$\frac{dS_j(X_L, y, z, t)}{dx} = 0,$$

$$S_j(0, y, z, t) = 0,$$

$$\frac{dS_j(x, 0, z, t)}{dy} = \frac{dS_j(x, Y_L, z, t)}{dy} = 0, \quad (j=1,2,3).$$

Начальные условия записываются следующим образом:

$$S_j(x, y, z, t = 0) = 0, \quad (j=1,2,3,4).$$

### Практические занятия 2 и 3. Дискретная модель объекта управления

Выше описана математическая модель объекта, решение выполняется численными методами. Это означает, что вместо дифференциальных уравнений в частных производных решается аналогичная система конечно-разностных уравнений, в которых дифференциалы искомой функции представлены в дискретной форме по координатам пространства и времени.

Чтобы получить такую модель, исследуемая область разбивается равномерной или неравномерной сеткой на элементарные сопряженные блоки с шагом по пространственным координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y, \Delta z$ , и все физические характеристики объекта в пределах выделенного блока, относят к его центру тяжести (узловой точке). То есть, вместо непрерывного изменения функции во времени и пространстве рассматриваются изменения ее в отдельных точках и через определенные дискретные моменты времени  $\Delta t$ .

Пусть число точек дискретизации по оси X равно I, по оси Y равно J, а по оси Z равно K.

Введем прямоугольную сетку  $\{i, j, k, 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K, \Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ ,

где  $i, j, k$  - координаты узлов сетки;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  - шаг дискретизации по осям прямоугольной системы координат X, Y, Z соответственно.

На рис. 2 изображена прямоугольная сетка применительно к рассматриваемому объекту.

Итак, для составления дискретной модели выделим на рассматриваемой сетке восемь близлежащих друг к другу узлов, расположенных таким образом, что в случае их соединения

прямыми отрезками, получим прямоугольный параллелепипед. Полученный в результате этих действий параллелепипед и имеющий в узлах точки A, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 изображен на рис. 3.

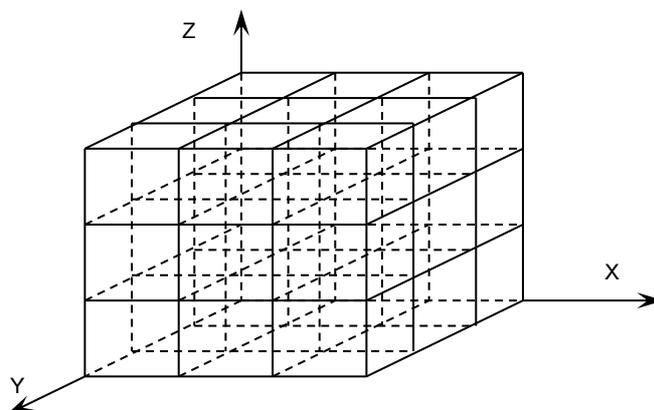


Рис. 2 Прямоугольная сетка

Пусть данные точки имеют координаты:

$A(i, j, k)$ ,  $A_1(i+1, j, k)$ ,  $A_2(i, j+1, k)$ ,  $A_3(i, j, k+1)$ ,

$A_4(i+1, j, k+1)$ ,  $A_5(i+1, j+1, k)$ ,  $A_6(i, j+1, k+1)$ ,  $A_7(i+1, j+1, k+1)$ .

Запись координат  $i+1$ ,  $j+1$  и  $k+1$  указывает на то, что координаты  $i$ ,  $j$  и  $k$  соответственно увеличились на один шаг по введенной сетке.

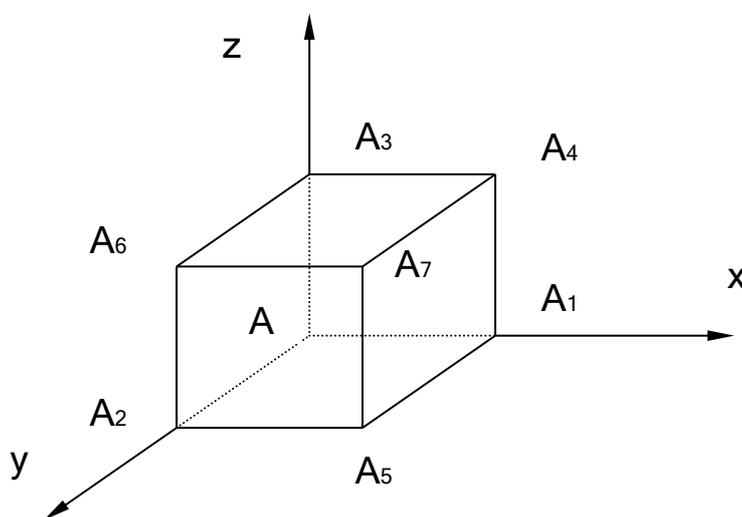


Рис. 3 Прямоугольный параллелепипед

Рассматриваемые пласты разнесены по координате Z.

Дискретная модель, описывающая процессы в первом пласте, имеет вид:

$$\Delta S_1[i, j, k] = \Delta t \cdot \left( (1 / \eta_1[i, j, k]) \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot \left( \frac{S_1[i, j, k] - S_1[i-1, j, k]}{\Delta x} \right)) \right),$$

где  $\Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_1[i-1, j, k] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i+1, j, k]) / \Delta x^2$   
 $\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_1[i, j-1, k] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i, j+1, k]) / \Delta y^2$   
 $\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_1[i, j, k-1] - 2 \cdot S_1[i, j, k] + S_1[i, j, k+1]) / \Delta z_2^2$   
 $i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_1 + 1, k_2 - 1}$ .

Дискретная модель, описывающая процессы во втором пласте, имеет вид:

$$\Delta S_2[i, j, k] = \Delta t \cdot \left( (1/\eta_2[i, j, k] \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot \left( \frac{S_2[i, j, k] - S_2[i-1, j, k]}{\Delta x} \right))) - S_1[i, j, k] \cdot \delta[i, j, k]) \right),$$

где  $\Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_2[i-1, j, k] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i+1, j, k]) / \Delta x^2$   
 $\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_2[i, j-1, k] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i, j+1, k]) / \Delta y^2$   
 $\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_2[i, j, k-1] - 2 \cdot S_2[i, j, k] + S_2[i, j, k+1]) / \Delta z_3^2$   
 $i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_2 + 1, k_3 - 1}$ .

Дискретная модель, описывающая процессы в третьем пласте, имеет вид:

$$\Delta S_3[i, j, k] = \Delta t \cdot \left( (1/\eta_3[i, j, k] \cdot (\Delta s_1[i, j, k] + \Delta s_2[i, j, k] + \Delta s_3[i, j, k]) - (F[i, j, k] \cdot \left( \frac{S_3[i, j, k] - S_3[i-1, j, k]}{\Delta x} \right))) \right),$$

где  $\Delta s_1[i, j, k] = K_1[i, j, k] \cdot (S_3[i-1, j, k] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i+1, j, k]) / \Delta x^2$   
 $\Delta s_2[i, j, k] = K_2[i, j, k] \cdot (S_3[i, j-1, k] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i, j+1, k]) / \Delta y^2$   
 $\Delta s_3[i, j, k] = K_3[i, j, k] \cdot (S_3[i, j, k-1] - 2 \cdot S_3[i, j, k] + S_3[i, j, k+1]) / \Delta z_4^2$   
 $i = \overline{1, I} \quad j = \overline{1, J} \quad k = \overline{k_3 + 1, k_4 - 1}$ .

#### Практические занятия 4 и 5. Анализ и моделирование гидролитосферных процессов

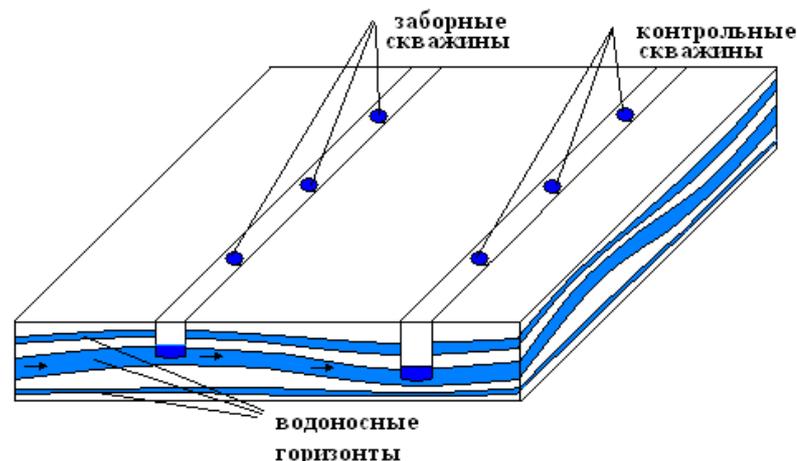


Рис. 4 Объект управления

Добыча минеральной воды в регионе Лермонтова осуществляется с помощью трех рабочих скважин. Измерение уровня понижения давления осуществляется с использованием контрольных скважин расположенных на расстоянии 100 метров от заборных скважин (см. рис. 4).

Рассматриваемая система управления имеет 3 входа и три выхода.

Используя возможность экспериментальных исследований, по известной методике были получены графики переходных процессов, связывающие входы (уровень понижения давления в зоне расположения рабочих скважин) и выходы (уровень понижения в зоне расположения контрольных скважин).

Входное воздействие - уровень понижения в зоне  $i$  рабочей скважины.

Функция выхода - уровень понижения в зоне  $j$  контрольной скважины.

По результатам моделирования работы объекта были построены графики, которые приведены на рис. 5 - 13.

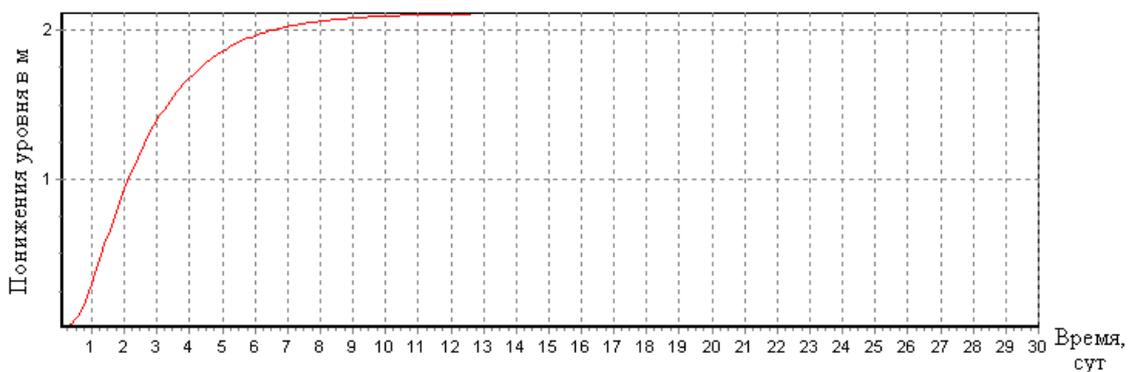


Рис. 5 График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

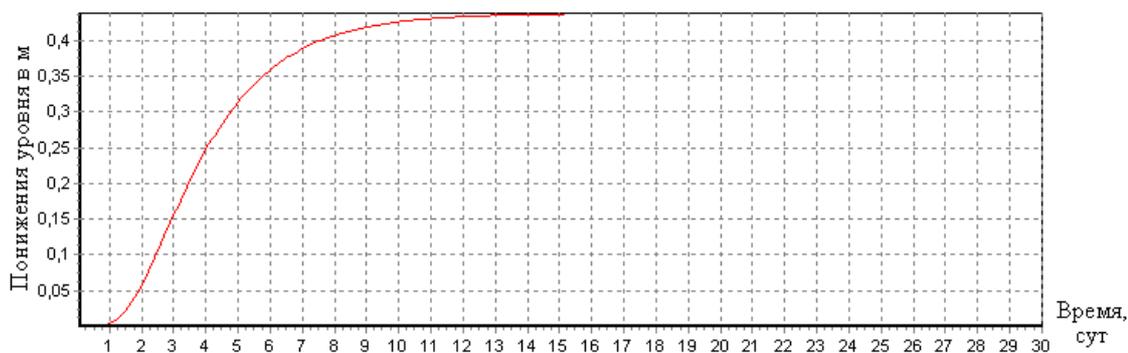


Рис. 6 График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

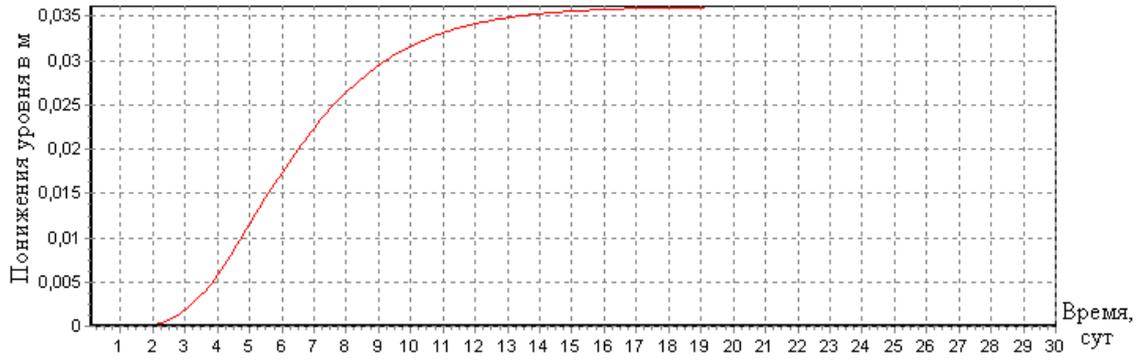


Рис. 7 График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_1$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

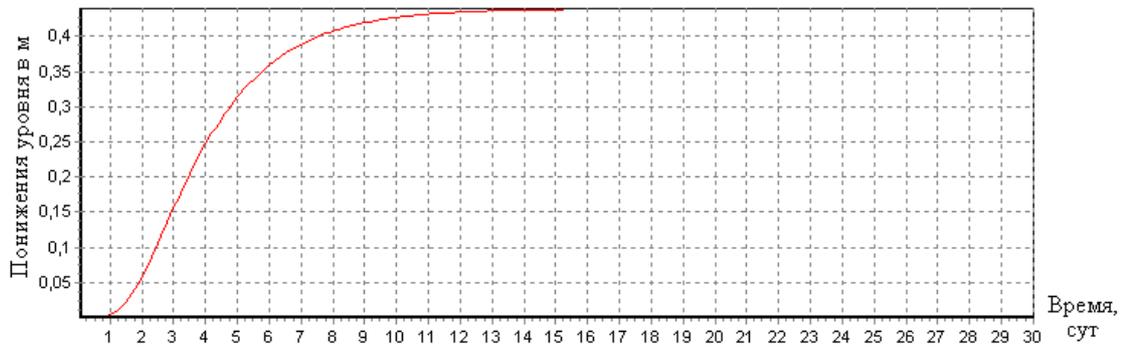


Рис. 8 График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

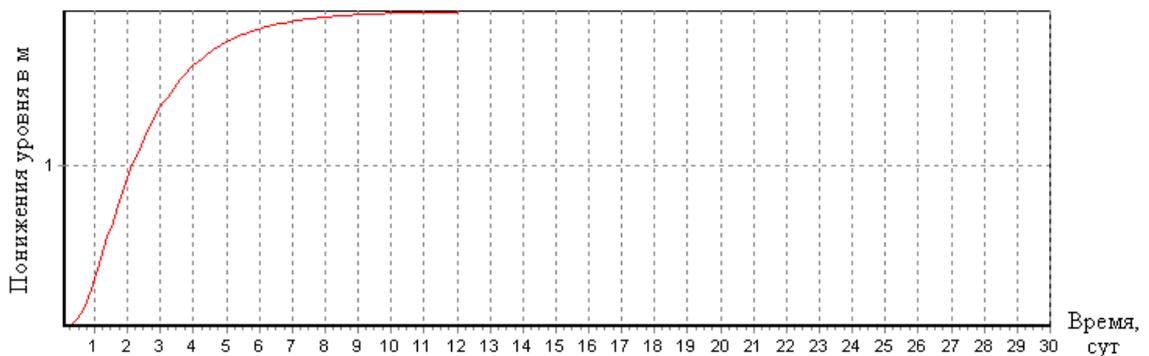


Рис. 9 График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

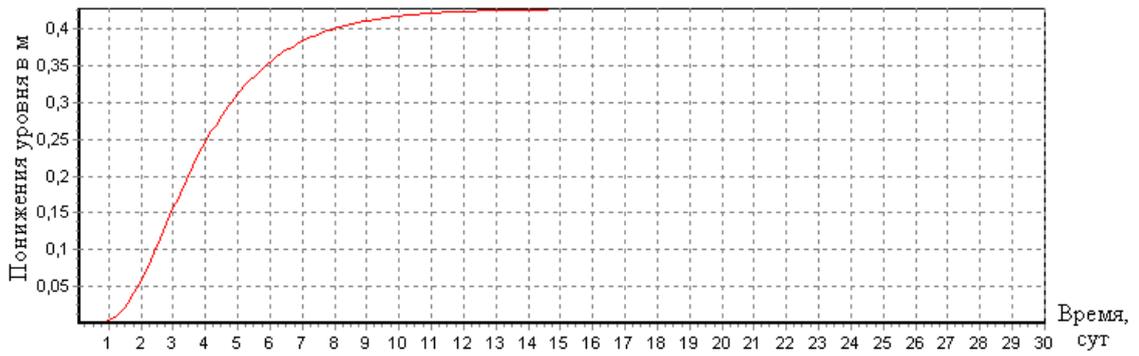


Рис. 10 График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_2$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )



Рис. 11 График функции выхода первой контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

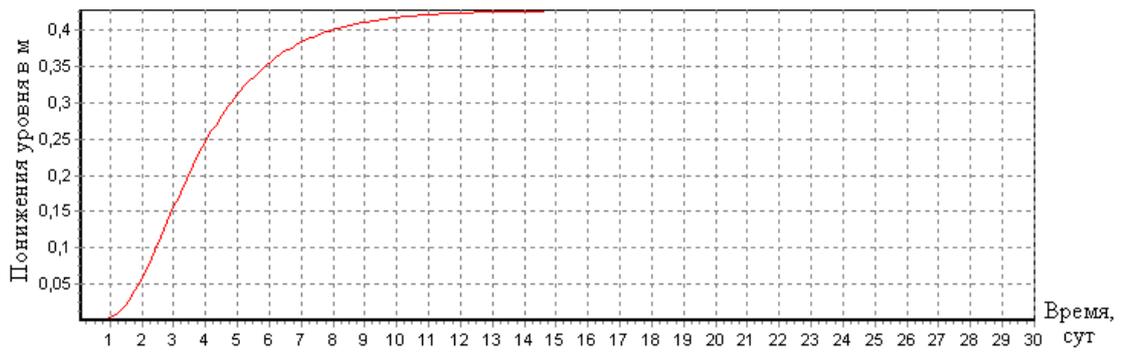


Рис. 12 График функции выхода второй контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

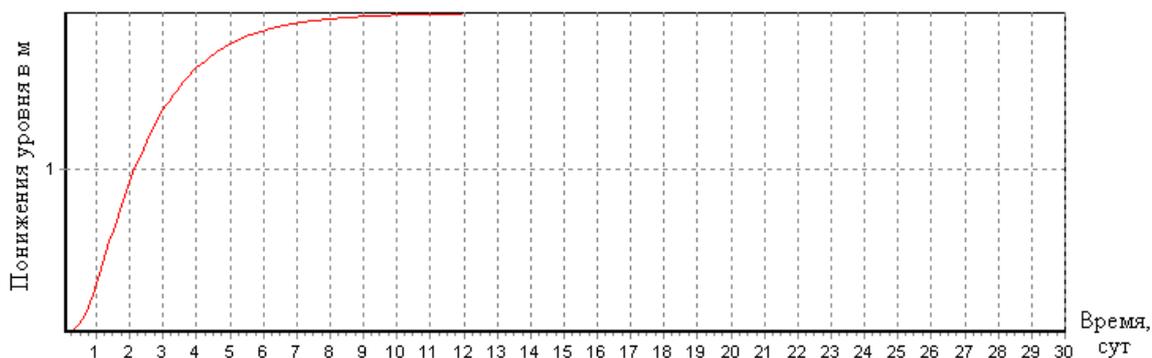


Рис. 13 График функции выхода третьей контрольной скважины при входном воздействии  $U_3$  ( $100 \text{ м}^3/\text{сут}$ )

Таблица 1

Динамические характеристики

Входное воздействие	Наименование	1 секция	2 секция	3 секция
$U_1$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	215	43,75	3,5
	$k$	2,15	0,44	0,035
	$\tau_3, \text{час}$	0,24	24	54
	$T_p, \text{час}$	108	126	180
$U_2$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	37,5	180	35,5
	$k$	0,375	1,8	0,355
	$\tau_3, \text{час}$	24	24	24
	$T_p, \text{час}$	126	126	126
$U_3$	$\Delta S_{\text{уст}}, \text{см}$	3,5	45	190
	$k$	0,035	0,45	1,9
	$\tau_3, \text{час}$	54	0,24	0,24
	$T_p, \text{час}$	186	162	102

Используя графики переходных процессов, запишем матрицу передаточных коэффициентов объекта управления:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{2,15}{6480p+1} e^{-14,4p} & \frac{0,044}{7560p+1} e^{-1440p} & \frac{0,035}{10800p+1} e^{-3240p} \\ \frac{0,375}{7560p+1} e^{-1440p} & \frac{1,8}{7560p+1} e^{-1440p} & \frac{0,355}{7560p+1} e^{-1440p} \\ \frac{0,035}{11160p+1} e^{-3240p} & \frac{0,45}{9720p+1} e^{-14,4p} & \frac{1,9}{6120p+1} e^{-14,4p} \end{vmatrix}$$

(постоянные времени приведены в минутах).

## УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### Основная литература

1. Тимохин А. Н. Моделирование систем управления с применением Matlab: Учебное пособие / А.Н. Тимохин, Ю.Д. Румянцев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 256 с.

Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=590240>

2. Романов В.Н. Системный анализ [Текст] : учеб. пособие / В. Н. Романов ; М-во образования РФ, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования, СЗТУ. - СПб. : Изд-во СЗТУ, 2004. - 187 с.

Режим доступа – <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=82700>

### Дополнительная литература

3. Бирюкова Л. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., - 2-е изд. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5

Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=76845>

4. Балашов А. П. Основы теории управления: Учебное пособие/А.П.Балашов - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 280 с.: 60х90 1/16 (Переплёт) ISBN 978-5-9558-0410-1

Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=491491>

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / 10-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2004. - 479 с.

### ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Информационная справочная система «Консультант плюс».
2. Библиотека ГОСТов [www.gostrf.com](http://www.gostrf.com).
3. Сайт Российской государственной библиотеки. <http://www.rsl.ru/>
4. Сайт Государственной публичной научно-технической библиотеки России. <http://www.gpntb.ru/>
5. Каталог образовательных интернет ресурсов <http://www.edu.ru/modules.php>
6. Электронные библиотеки: <http://www.pravoteka.ru/>, <http://www.zodchii.ws/>, <http://www.tehlit.ru/>.