ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

____
Руководитель ОПОП ВО
доцент Ю.В. Ильюшин

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Уровень высшего образования:	Подготовка кадров высшей квалификации
Направление подготовки:	09.06.01 Информатика и вычислительная техника
Направленность (профиль):	Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность)
Форма обучения:	очная
Нормативный срок обучения:	4 года
Составитель:	д.т.н., профессор Д.А. Первухин

Санкт-Петербург

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа № 1
«Планирование и реализация линейных
полнофакторных экспериментов»

Цель работы: изучение и освоение методики составления и практической реализации плана первого порядка полного факторного эксперимента.

Задание

1. Для условий точения детали типа вал на токарно-винторезном станке определить факторы, влияющие на шероховатость обработанной поверхности.
2. Определить основной, нижний и верхний уровни факторов, а также интервал варьирования.
3. Закодировать факторы и составить план полного факторного эксперимента и матрицу планирования.
4. Реализовать матрицу планирования, предварительно рандомизировав проведение опытов во времени.
5. Рассчитать коэффициенты регрессии и проверить их значимость.
6. Проверить гипотезу адекватности найденной линейной модели, связывающей средне-арифметическое отклонение профиля обработанной поверхности с независимыми факторами.
7. Построить графики зависимостей средне-арифметического отклонения профиля обработанной поверхности.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При проведении однофакторного эксперимента варьируют один фактор, стабилизируя на выбранных уровнях все прочие факторы. Обработав результаты эксперимента, находят зависимость исследуемой величины только от одного фактора. Производя большое число однофакторных экспериментов при изучении многофакторной системы, получают частотные зависимости, представленные многими графиками, имеющими иллюстративный характер. Найденные таким образом частные зависимости невозможно объединить в одну общую модель процесса.

Использование однофакторного эксперимента для всестороннего исследования многофакторного процесса требует постановки очень большого числа опытов. Для их выполнения в ряде случаев необходимо значительное время, в течение которого влияние неконтролируемых факторов на результаты опытов может существенно измениться.

Отсюда следует, что результаты однофакторных экспериментов, полученные при исследовании многофакторных систем, малопригодны для практического использования. Кроме того, при решении экстремальных задач данные значительного числа опытов однофакторного эксперимента оказываются ненужными, так как получены они для области, далекой от оптимума.

Для изучения многофакторных систем наиболее целесообразным является применение статистических методов планирования эксперимента.

Под планированием эксперимента понимают определение числа и условий проведения опытов в многофакторном процессе, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Планирование эксперимента – это новый раздел математической статистики. В нем всесторонне рассматриваются статистические методы планирования эксперимента. Эти методы позволяют во многих случаях при минимальном числе опытов получать модели многофакторных процессов.

Эффективность использования статистических методов планирования эксперимента при исследовании технологических процессов объясняется тем, что многие важные характеристики этих процессов являются случайными величинами, распределения которых близки к нормальному закону.

Характерными особенностями процесса планирования эксперимента являются стремление минимизировать число опытов; одновременное варьирование всех исследуемых факторов по специальным правилам – алгоритмам; применение математического аппарата, формализующего многие действия исследователя; выбор стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эксперименты, которые ставят для решения задач оптимизации, называют экстремальными. Для решения экстремальной задачи необходимо иметь математическую модель исследуемого объекта. Математическая модель – это система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление.

При планировании эксперимента под **математической моделью понимают уравнение,** связывающее параметр оптимизации с факторами. Такое уравнение называют также **функцией отклика.**

При постановке экстремальных экспериментов на первом этапе находят область оптимума. На втором этапе стремятся получить более полное представление о поверхности отклика в области оптимума. Решение экстремальной задачи предусматривает получение функции отклика и нахождение с помощью ее оптимальных условий протекания процесса.

В общем виде **функция отклика** η, являющаяся и параметром оптимизации, может быть представлена выражением

$$\eta = f(x_1, x_2, ... x_K), \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, ... x_K$ – независимые переменные факторы.

Если функция отклика известна, то оптимальные условия процесса находят аналитически, без постановки эксперимента. Однако, часто приходится решать экстремальные задачи при неполном знании механизма процесса. В этом случае выборочную оценку функции отклика можно представить **уравнением регрессии**

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + \ldots, \qquad (2)$$

где b_1, b_2, b_{12}, b_{11} – **коэффициенты регрессии** при соответствующих переменных.

По результатам эксперимента можно определить только выборочные коэффициенты регрессии b_i $(b_0, b_1, b_2, \ ...)$, которые являются оценками теоретических коэффициентов регрессии.

На первом этапе планирования эксперимента для определения направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика функцию отклика выражают полиномом первой степени.

Метод Бокса-Уилсона предусматривает проведение опытов несколькими сериями и позволяет оптимизировать параметры процесса крутым восхождением по поверхности отклика. В каждой серии одновременно варьируют все факторы по определенным правилам. Опыты проводят так, чтобы после математической обработки результатов предыдущей серии можно было спланировать следующую серию опытов.

При планировании экстремального эксперимента цель исследования должна быть четко сформулирована и должна иметь количественную оценку.

Характеристику цели, заданную количественно, называют параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией, или откликом, на воздействие факторов, определяющих поведение процесса. Результаты эксперимента используют для получения математической модели исследуемого процесса.

Для определения коэффициентов линейного уравнения регрессии достаточно реализовать факторный эксперимент типа $2^к$, где *к* — число факторов. Планы экспериментов типа 2^h называют планами первого порядка.

Крутое восхождение заканчивают после достижения области оптимума. Область оптимума чаще всего удается описать полиномом второй степени. Планы эксперимента, позволяющие оценить коэффициенты полинома второй степени, называют планами второго порядка.

Объект исследования. Для определения параметра оптимизации и выбора схемы планирования эксперимента предварительно изучают объект исследования на основе априорной информации, которую получают, изучая литературные данные и анализируя результаты ранее проведенных работ. При планировании эксперимента к объекту исследования предъявляют следующие требования.

1. Объект исследования должен удовлетворять требованию воспроизводимости. При многократном повторении опыта его результат имеет разброс значений, который характеризует воспроизводимость результата. Объект исследования удовлетворяет требованию воспроизводимости, если многократно повторенные опыты дают результаты с разбросом значений, не превышающим некоторой заданной величины.

2. Объект должен быть управляемым. На реальный объект действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Последние влияют на воспроизводимость результатов эксперимента и могут служить причиной ее нарушения. Если требование воспроизводимости удовлетворяется, выявляют возможность проведения активного эксперимента, предусматривающего активное вмешательство в исследуемый процесс и выбирают для каждого опыта управляемые факторы на тех уровнях, которые представляют интерес для исследования.

Объект, на котором возможен активный эксперимент, называют управляемым.

Параметр оптимизации. При планировании эксперимента важно правильно выбрать параметр оптимизации. Движение к оптимуму возможно, если выбран один параметр оптимизации, а другие выступают в качестве ограничений. Возможно также построение обобщенного параметра как функции от множества исходных параметров. Параметр оптимизации должен быть количественным, доступным для измерения и должен выражаться одним числом.

Если измерение параметра невозможно, то пользуются ранговой оценкой. **Ранг – это оценка параметра оптимизации по заранее выбранной шкале:** двухбалльной, пятибалльной, десятибалльной и т. п. Ранговый параметр имеет ограниченную дискретную область определения. В простейшем случае область содержит два значения: да – нет; хорошо – плохо; брак – годные детали и т. д. При прочих равных условиях предпочтение необходимо отдавать количественному измерению, так как ранговая оценка носит субъективный характер.

Параметр оптимизации должен быть однозначным в статистическом смысле, т. е. заданному сочетанию уровней факторов должно соответствовать одно (с точностью до ошибки эксперимента) значение параметра оптимизации; эффективным в статистическом смысле, т. е. определяться с наибольшей точностью, что позволяет сократить до минимума число параллельных опытов; существовать для всех состояний исследуемого объекта; иметь физический смысл.

Параметры оптимизации могут быть экономическими, технико-экономическими, технико-технологическими и другими. Экономическими являются прибыль, себестоимость, рентабельность. К технико-экономическим относят производительность, надежность, долговечность.

Технико-технологическими параметрами являются механические, физические, физико-химические и некоторые другие характеристики изделия. Большинство параметров оптимизации прямо или косвенно связано с экономичностью производства или экономичностью эксплуатации изделия. **Фактором называют независимую переменную величину, влияющую на параметр оптимизации.**

Каждый фактор имеет область определения – совокупность всех значений, которые он может принимать. При исследовании процесса необходимо учитывать все существенные факторы. Если по каким-либо причинам влияние некоторых факторов невозможно учесть в эксперименте, то эти факторы должны быть стабилизированы на определенных уровнях в течение всего эксперимента.

Уровнем фактора называют численное значение фактора в эксперименте. Если число факторов велико, то необходимо отсеять те факторы, которые оказывают незначительное влияние на параметр оптимизации. Отсеивание несущественных факторов производят на основе априорного ранжирования или с помощью постановки отсеивающих экспериментов. Факторы должны быть:

1) управляемыми, т. е. позволяющими экспериментатору устанавливать их требуемые значения и поддерживать постоянными эти значения в течение опыта;

2) непосредственно воздействующими на объект исследования, так как трудно управлять фактором, который является функцией других факторов;

3) совместимыми, т. е. все комбинации уровней факторов) должны быть осуществимы и безопасны;

4) независимыми, т. е. позволяющими экспериментатору устанавливать требуемые уровни любого фактора независимо от уровней других факторов.

3. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

К оптимизации приступают при наличии некоторых результатов предварительных исследований изучаемого объекта. Решение задачи оптимизации начинают с выбора области эксперимента. Выбор этой области производят на основе анализа априорной информации. В области эксперимента устанавливают основные уровни и интервалы варьирования факторов. **Основным или нулевым уровнем фактора называют его значение, принятое за исходное в плане эксперимента.** Основные уровни выбирают таким образом, чтобы их сочетание отвечало значению параметра оптимизации, по возможности более близкому к оптимальному. Каждое сочетаний уровней факторов является многомерной точкой в факторном пространстве. Сочетание основных уровней принимают за исходную точку при построении плана эксперимента. Построение плана эксперимента состоит в выборе экспериментальных точек, симметричных относительно исходной точки.

Интервалом варьирования фактора называют число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень фактора, а вычитание – нижний уровень. Интервал варьирования не может быть выбран меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, а также не может быть столько большим, чтобы верхний или нижний уровни выходили за пределы области определения фактора.

При этом необходимо учитывать, что увеличение интервалов варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика. Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни факторов кодируют.

В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний – 1, а основной – 0. Кодированное значение фактора *xi* определяют по выражению

$$Xi = \frac{H - x^0}{\grave{E}}, \qquad (3)$$

где Н – натуральное значение фактора; x^0 – натуральное значение основного уровня фактора; И – интервал варьирования фактора.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора *m,* а число факторов *к,* то число *N* всех сочетаний уровней факторов, а следовательно, и число опытов в полном факторном эксперименте, определяется выражением

$$N = m^k. \qquad (4)$$

Цель первого этапа планирования экстремального эксперимента – получение линейной модели. Он предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Возможное количество сочетаний уровней факторов в этом случае равно $2^к$.

Факторный эксперимент реализуют с помощью матрицы планирования, в которой используют кодированные значения факторов. Так, например, для двух факторов полный факторный эксперимент типа $2^к$ можно представить матрицами, приведенными в табл. 1. Число строк в матрице равно количеству опытов. Знаками +1 и –1 обозначают уровни факторов x_1 и x_2 в опытах. Значения функции отклика, полученные при выполнении опытов, обозначены через y_1, y_2.

Для упрощения записи условий эксперимента в матрице планирования вместо +1 пишут только « + », а вместо –1 - только «–». При k=2 моделью будет уравнение регрессии вида $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Значения коэффициентов в этом уравнении определяют с помощью значений функции отклика, полученных в результате опытов.

Таблица 1

Матрицы полного факторного эксперимента типа 2^2

Номер опыта	X_1	X_2	Y
1	–	–	Y_1
2	+	–	Y_2
3	–	+	Y_3
4	+	+	Y_4

Номер опыта	X_1	X_2	$X_1\,X_2$	Y
1	+	–	–	Y_1
2	+	+	+	Y_2
3	–	+	–	Y_3
4	–	–	+	Y_4

Под числом степеней свободы в статистике понимают разность между числом опытов и количеством коэффициентов модели, вычисленных по результатам опытов.

Так, например, при двух факторах число N опытов равно четырем, а для определения коэффициентов уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ достаточно результатов трех опытов. Таким образом, в рассматриваемом случае, число степеней свободы, равное единице, может быть использовано для проверки адекватности модели.

Величина и знак коэффициента регрессии указывают на вклад данного фактора в общий результат при переходе с нулевого на верхний или нижний уровень фактора.

Линейным называют эффект, характеризующий линейную зависимость параметра оптимизации от соответствующих факторов. **Эффектом взаимодействия** называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на параметр оптимизации. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценить линейные эффекты и все эффекты взаимодействия.

Для полного факторного эксперимента типа 2^2 уравнение регрессии с учетом эффектов взаимодействия можно представить выражением (2), но без последнего члена.

При увеличении числа факторов количество возможных сочетаний уровней быстро возрастает, поэтому возникает необходимость в некоторых приемах построения матриц. Рассмотрим два наиболее простых приема.

Первый прием основан на правиле чередования знаков. В первом столбце (x_1) знаки чередуются поочередно, во втором они чередуются через 2, в третьем – через 4, в четвертом – через 8, в пятом – через 16 и т. д. по степеням двойки.

Второй прием основан на последовательном достраивании матрицы. Для этого при добавлении нового фактора необходимо повторить комбинации уровней исходного плана сначала при 'значении нового фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем.

Таблица 2

Схема построения матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 4

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
1	+	+	+	+	+
2	+	-	+	+	+
3	+	+	-	+	+
4	+	-	-	+	+
5	+	+	+	-	+
6	+	-	+	-	+
7	+	+	-	-	+
8	+	-	-	-	+
9	+	+	+	+	-
10	+	-	+	+	-
11	+	+	-	+	-
12	+	-	-	+	-
13	+	+	+	-	-
14	+	-	+	-	-
15	+	+	-	-	-
16	+	-	-	-	-

Последовательное достраивание матрицы при увеличении числа факторов от 2 до 4 показано в табл.2.

4. СРЕДСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Токарно-винторезный станок, режущие инструменты,
2. Заготовки типа валик,
3. Прибор для измерения шероховатости обработанной поверхности,
4. Персональный компьютер.

5. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. На основании паспортных данных станка выписать ряды продольных подач суппорта станка и частот вращения шпинделя.

2. Назначить режимы резания для обработки заготовки, отдавая предпочтение тем элементам, которые в наибольшей степени влияют на шероховатость обработанной поверхности.

3. Выполнить обработку ступеней валика на различных режимах в соответствии с матрицей планирования многофакторного эксперимента.

4. Измерить шероховатость обработанных поверхностей.

5. Обработать результаты экспериментов:

- проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии,
- проверить уравнение регрессии на адекватность,
-построить графики зависимостей шероховатости обработанной поверхности от выбранных значимых факторов.

6. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ

После выбора плана эксперимента, основных уровней и интервалов варьирования факторов переходят к эксперименту. Каждая строка матрицы – это условия опыта. Для исключения систематических ошибок рекомендуется опыты, предусмотренные матрицей, проводить в случайной последовательности.

Порядок проведения опытов следует выбирать по таблице случайных чисел (табл. 3). Например, если требуется провести восемь опытов, то из случайного места таблицы последовательно выписывают числа, лежащие в интервале от 1 до 8, при этом отбрасывают уже выписанные числа больше восьми.

Так, например, начиная с числа 87 (1-я строка табл. 3), получаем следующую последовательность реализации опытов:

Номер опыта в матрице планирования

Порядок реализации опытов

1 2 3 4 5 6 7 8

7 2 8 3 1 4 5 6

Таблица 3

Фрагмент таблицы случайных чисел

87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36
07	76	85	37	84	37	47	32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22
03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69	44	61	88	23
13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48
00	83	48	94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82
24	07	78	61	89	42	58	88	22	16	13	24	40	09	00	65	46	38
61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	34	21	80	78
27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	21	31	92	99	06
96	53	99	25	13	63												

Для компенсации влияния случайных погрешностей каждый опыт рекомендуется повторить *n* раз.

Опыты, повторенные несколько раз при одних и тех же значениях факторов, называют параллельными.

Под дублированием опытов понимают постановку параллельных опытов.

Обычно число *n* параллельных опытов принимают равным 3, иногда 4 или 5. При проведении исследований приходится иметь дело с тремя вариантами дублирования:

1) эксперимент проведен при равномерном дублировании опытов;

2) эксперимент выполнен при неравномерном дублировании опытов;

3) эксперимент поставлен без дублирования опытов.

При равномерном дублировании все строки матрицы планирования имеют одинаковые числа параллельных опытов. В случае неравномерного дублирования числа параллельных опытов неодинаковы.

При отсутствии дублирования параллельные опыты не проводятся. Наиболее предпочтительным из трех вариантов дублирования является первый. При этом варианте эксперимент отличается повышенной точностью, а математическая обработка экспериментальных данных – простотой. По этой причине мы будем использовать первый вариант дублирования опытов.

Рассмотрим методику обработки результатов эксперимента для первого варианта дублирования опытов.

Обработка результатов эксперимента при равномерном дублировании опытов. Для каждой строки матрицы планирования по результатам *n* параллельных опытов находят среднее арифметическое значение параметра оптимизации:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} y_{ju}, \qquad (5)$$

где u – номер параллельного опыта; y_{ju} – значение параметра оптимизации в u-том параллельном опыте j-той строки матрицы.

С целью оценки отклонений параметра оптимизации от его среднего значения для каждой строки матрицы планирования вычисляют дисперсию S_j^2 опыта по данным *n* параллельных опытов.

Статистической дисперсией называют среднее значение квадрата отклонений случайной величины от ее среднего значения:

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{u=1}^{n}\left(y_{ju} - \bar{y}_j\right)^2. \qquad (6)$$

Ошибка S_j опыта определяется как корень квадратный из дисперсии опыта:

$$S_j = +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum^{n}\left(y_{ju} - \bar{y}_j\right)^2}. \qquad (7)$$

В математической статистике для проверки гипотез пользуются критериями согласия. Для того, чтобы принять или забраковать гипотезу при помощи этих критериев, устанавливают уровни их значимости.

Уровень значимости α представляет собой достаточно малое значение вероятности, отвечающее событиям, которые в данной обстановке исследования можно считать практически невозможными.

Обычно принимают 5%-, 2%- или 1%-ный уровень значимости, в технике чаще всего принимают 5%-ный уровень. Уровень значимости α называют также уровнем риска, который соответственно может быть принят равным 0,05, 0,02 или 0,01.

Так, например, при уровне значимости) α = 0,05 вероятность при проверке нашей гипотезы $P = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ или 95%. Это значит, что в среднем только в 5% случаев возможна ошибка при проверке гипотезы.

После вычисления по формуле (6) дисперсий опытов проверяют гипотезу однородности. Проверка однородности двух дисперсий производится с помощью F-критерия, который называется критерием Фишера и который представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad \text{где } s_1^2 > s_2^2.$$

Если расчетное значение Fр-критерия меньше табличного Fт (табл. 4) для соответствующих чисел степеней свободы и принятого уровня значимости α, то дисперсии однородны.

Однородность ряда дисперсий проверяют по критерию Кохрена или по критерию Бартлета.

При равномерном дублировании опытов однородность ряда дисперсий проверяют с помощью G-критерия Кохрена, представляющего собой отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$Gp = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_N^2}.$$

Дисперсии однородны, если расчетное значение Gр-критерия не превышает табличного значения G_T-критерия. Индекс *N* показывает число сравниваемых дисперсий, а *n* – число параллельных опытов.

Если $G_p > G_T$, то дисперсии неоднородны, а это указывает на то, что исследуемая величина *y* не подчиняется нормальному закону.

В этом случае нужно попытаться заменить *y* случайной величиной, *q=f(y),* достаточно близкой к нормальному закону.

Если дисперсии S_j^2 опытов однородны, то дисперсию s_y^2 воспроизводимости эксперимента вычисляют по выражению

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j^2 \,, \qquad (8)$$

где N — число опытов или число строк матрицы планирования.

По результатам эксперимента вычисляют коэффициенты модели. Свободный член b_0 определяют по формуле

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{Y}_j \qquad (9)$$

Таблица 4

Значения F-критерия (Фишера) при 5% – уровне значимости

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Значения критерия при числе степеней свободы для большей дисперсии								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4.5	4.4	4.3	4.0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1,8

24	4,3	3,4	3,0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Таблица 5

G – критерий при уровне значимости 5%

n-1

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098
14	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736
16	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0.1357

Коэффициенты регрессии, характеризующие линейные эффекты, определяют по выражению

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ij}\bar{y}_j \ . \qquad (10)$$

Коэффициенты регрессии, характеризующие эффекты взаимодействия, определяют по формуле

$$b_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ij}X_{lj}\bar{Y}_j \ , \qquad (11)$$

где i, l – номера факторов; X_{ij}, X_{lj} – кодированные значения факторов i и l в j-м опыте.

Вычислив коэффициенты регрессии, проверяют их значимость.

Проверку значимости коэффициентов можно проводить двумя способами: 1)-сравнением абсолютной величины коэффициентов с доверительным интервалом; 2)-с помощью t-критерия, который называется критерием Стьюдента.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии. Дисперсию $s^2\{b_i\}$ i-го коэффициента определяют по выражению

$$s^2\{b_i\} = \frac{1}{nN} S_y^2 . \qquad (12)$$

Доверительный интервал Δb_i находят по формуле

$$\Delta b_i = \pm t_T S(b_i), \qquad (13)$$

где t_T – табличное значение критерия Стьюдента при принятом уровне значимости α и числе степеней свободы f, с которым определялась дисперсия воспроизводимости s_y^2. При равномерном дублировании опытов число степеней свободы находится по выражению f= (n – 1)N, где N – число опытов в матрице планирования, а n – число параллельных опытов; $s\{b_i\}$ – ошибка в определении i-го

коэффициента регрессии, вычисляемая по формуле $s\{b_i\} = +\sqrt{s^2}(b_i)$.
Значения t-критерия приведены в табл. 6.

Таблица 6

Значения t- критерия при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8
Значения t- критерия	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,30
Число степеней свободы	9	10	11	12	13	14	15	16
Значения t- критерия	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,12
Число степеней свободы	17	18	19	20	21	22	23	24
Значения t- критерия	2,11	2,10	2,09	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06
Число степеней свободы	25	26	27	28	29	30	40	60
Значения t- критерия	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,04	2,02	2,00

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала.

При проверке значимости коэффициентов регрессии вторым способом вычисляют $t_р$ – критерий по выражению

$$t_p = \frac{|b_i|}{s(b_i)} \qquad (14)$$

и сравнивают его с табличным $t_Т$.

Коэффициент значим, если $t_р > t_Т$ для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы f, с которым определялась дисперсия s_y^2. Критерий Стьюдента вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Статистически незначимые коэффициенты могут быть исключены из уравнения.

После расчета коэффициентов модели и проверки их значимости определяют дисперсию адекватности $S^2_{àä}$.

Остаточная дисперсия, или дисперсия адекватности, характеризует рассеяние эмпирических значений параметра оптимизации относительно расчетных его значений, определенных по найденному уравнению регрессии. Дисперсию адекватности определяют по формуле

$$S^2_{àä} = \frac{n\sum_{j=1}^{N}\left(\overline{Y}_j - \widetilde{Y}_j\right)^2}{f} = \frac{n\sum_{j=1}^{N}\left(\overline{Y}_j - \widetilde{Y}_j\right)^2}{N-(k+1)}. \qquad (15)$$

$\overline{Y}_j$ – среднее арифметическое значение параметра оптимизации в j-м опыте; $\widetilde{Y}_j$ – значение параметра оптимизации, вычисленное по модели для условий j-го опыта; *f* – число степеней свободы, равное *N*—*(к+1); к* – число факторов.

Последним этапом обработки результатов эксперимента является **проверка гипотезы адекватности найденной модели.** Проверку этой гипотезы производят по F-критерию (Фишера)

$$F_p = \frac{S^2_{àä}}{S^2_y}. \qquad (16)$$

Если значение $F_Р < F_Т$ для принятого уровня значимости и соответствующих чисел степеней свободы, то модель считают адекватной. При $F_Р > F_Т$ гипотеза адекватности отвергается.

Таким образом, обработка результатов эксперимента при равномерном дублировании опытов следующая:

1. Для каждой строки матрицы планирования по формуле (5) вычисляют среднее арифметическое значение $\bar{y}_j$ параметра оптимизации.

2. По формуле (6) определяют дисперсию S_j^2 каждого опыта матрицы планирования.

3. Используя критерий Кохрена, проверяют гипотезу однородности дисперсий S_j^2 опытов.

4. Если дисперсии опытов однородны, то по формуле (8) вычисляют дисперсию S_y^2 воспроизводимости эксперимента.

5. По формулам (9), (10), (11) определяют коэффициенты уравнения регрессии.

6. По выражению (12) находят дисперсии $s^2\{b_i\}$ коэффициентов регрессии.

7. По формуле (13) устанавливают величину доверительного интервала Δb_i.

8. Проверяют статистическую значимость коэффициентов регрессии.

9. По выражению (15) определяют дисперсию адекватности $S_{àä}^2$.

10. С помощью F-критерия проверяют гипотезу адекватности модели.

В заключение необходимо отметить, что использование критерия Кохрена, Стьюдента и Фишера предполагает нормальное распределение результатов эксперимента.

7. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА И СДАЧА ЗАЧЕТА ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

После выполнения практической работы студент оформляет отчет, в котором приводятся кратко теоретические положения, матрица планирования полного факторного эксперимента первого порядка, заполненная с учетом результатов проведенных опытов и результатов измерения шероховатости шлифованных поверхностей.

В отчете приводятся расчеты, на основании которых получена многофакторная линейная модель.

Приводится проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии и адекватности модели, а также графики зависимостей, связывающих параметр оптимизации с независимыми факторами. Отчет студента по Практической работе состоит в правильных ответах студента на вопросы преподавателя, касающихся как методики планирования, постановки и проведения экспериментов, их статистической обработки, так и объяснения физической сущности влияния того или иного фактора на параметр оптимизации.

Практическая работа № 2
«Планирование и реализация линейных дробных факторных экспериментов»

Цель работы: изучение и освоение методики составления и практической реализации плана первого порядка дробного факторного эксперимента.

Задание

1. Для условий плоского шлифования детали на плоскошлифовальном станке определить факторы, влияющие на волнистость обработанной поверхности.
2. Определить основной, нижний и верхний уровни факторов, а также интервал варьирования.
3. Закодировать факторы и составить план дробного факторного эксперимента и матрицу планирования.
4. Реализовать матрицу планирования, предварительно рандомизировав проведение экспериментов во времени.
5. Рассчитать коэффициенты регрессии и проверить их значимость.
6. Проверить гипотезу адекватности найденной линейной модели, связывающей волнистость обработанной поверхности с независимыми факторами.
7. Построить графики зависимостей волнистости обработанной поверхности от независимых факторов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При большом числе факторов (к>3) проведение полного факторного эксперимента связано с большим числом опытов, значительно превосходящим число коэффициентов линейной модели. Если при получении модели можно ограничиться линейным приближением, т. е. получить адекватную модель в виде полинома $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_n X_n$, то число опытов можно резко сократить в результате применения дробного факторного эксперимента.

Таблица 1

Матрица планирования

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3(X_1 X_2)$	Y
1	+	+	+	+	Y_1
2	+	–	+	–	Y_2
3	+	+	–	–	Y_3
4	+	–	–	+	Y_4

Так, например, в полном факторном эксперименте типа 2^2 при линейном приближении коэффициент регрессии b_{12} можно принять равным нулю, а столбец X_1 X_2 матрицы (табл. 1) использовать для третьего фактора X_3.

В этом случае линейная модель будет выражаться уравнением $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$. Для определения коэффициентов этого уравнения достаточно провести четыре опыта вместо восьми в полном факторном эксперименте типа 2^3.

План эксперимента, предусматривающий реализацию половины опытов полного факторного эксперимента, называют полурепликой. При увеличении числа факторов (к>3) возможно применение реплик большей дробности.

Дробной репликой называют план эксперимента, являющийся частью плана полного факторного эксперимента. Дробные реплики обозначают выражением 2^{k-p}, где p – число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия. При $p = 1$ получают полуреплику; при $p = 2$ получают 1/4-реплику; при $p = 3$ получают 1/8-реплику и т. д. по степеням двойки.

Так, например, если в полном факторном эксперименте 2^3 (табл. 2) один из эффектов взаимодействия (X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, $X_1X_2X_3$) заменим четвертым фактором X_4 то получим полуреплику 2^{4-1} от полно факторного эксперимента 2^4. Если два эффекта взаимодействия заменить факторами X_4 и X_5, то получим 1/4 – реплику 2^{5-2} от полного факторного эксперимента 2^5. Можно получить 1/8 – реплику от полного факторного эксперимента, заменив три эффекта взаимодействия факторами X_4, X_5 и X_6.

Таблица 2

Матрица полного факторного эксперимента типа 2^3

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$	Y_i
1	+	–	–	+	+	–	–	+	Y_1
2	+	+	–	+	–	+	–	–	Y_2
3	+	–	+	+	–	–	+	–	Y_3
4	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_4
5	+	–	–	–	+	+	+	–	Y_5
6	+	+	–	–	–	–	+	+	Y_6
7	+	–	+	–	–	+	–	+	Y_7
8	+	+	+	–	+	–	–	–	Y_8

Если заменить четыре эффекта взаимодействия факторами X_4, X_5 и X_6 и X_7, то получим 1/16 – реплику 2^{7-4} от полного факторного эксперимента 2^7. Реплики, которые используют для сокращения числа опытов в 2^m раз, где m = 1, 2, 3, ..., называют регулярными.

В связи с тем, что в дробных репликах часть взаимодействий заменена новыми факторами, то найденные коэффициенты уравнения регрессии будут являться совместными оценками линейных эффектов и эффектов взаимодействия.

Коэффициенты b_1, b_2, b_3 будут оценками совмещенных эффектов, а именно

$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23};$

$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13};$

$b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}.$

Коэффициент b_1 является оценкой влияния фактора X_1 и парного взаимодействия X_2X_3 на функцию отклика. Влияние фактора X_1 в этом случае характеризуется величиной β_1, а влияние взаимодействия – величиной β_{23}. Оценки, в которых невозможно разделить линейный эффект и эффект взаимодействия, называют смешанными. Линейные эффекты рекомендуется смешивать, прежде всего, с их взаимодействиями, которые согласно априорной информации незначимы.

Число смешанных линейных эффектов в дробной реплике называют ее разрешающей способностью.

Часто приходится решать задачи, в которых заранее можно полагать, что эффекты взаимодействия, хотя и малы по сравнению с линейными, но все же не равны нулю. В таких случаях необходимо заранее определить, какие коэффициенты являются смешанными оценками. Тогда в зависимости от условий поставленной задачи, подбирается такая дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию из эксперимента. Прямая оценка разрешающей способности дробной реплики затруднена. Поэтому дробные реплики задают с помощью генерирующих соотношений.

Генерирующим называют соотношение, которое показывает, какое из взаимодействий принято незначимым и заменено новым фактором.

План типа 2^{3-1} может быть представлен двумя полурепликами (табл. 3), которые задаются одним из следующих генерирующих соотношений:

$$x_3 = x_1 x_2; \qquad x_3 = -x_1 x_2. \tag{1}$$

Генерирующие соотношения умножим на новую независимую переменную x_3:

$$x_3^2 = x_1 x_2 x_3; \qquad x_3^2 = -x_1 x_2 x_3. \tag{2}$$

Таблица 3

Две полуреплики 2^{3-1}

Номер опыта	$X_3 = X_1 X_2$			Номер опыта	$X_3 = -X_1 X_2$		
	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
1	–	+	–	1	–	+	+
2	+	+	+	2	+	+	–
3	–	–	+	3	–	–	–
4	+	–	–	4	+	–	+

Поскольку всегда $x_i^2 = 1$, то получим следующие выражения:

$$1 = x_1 x_2 x_3; \qquad 1 = -x_1 x_2 x_3. \tag{3}$$

В результате умножения генерирующего соотношения на новую переменную получают так называемый определяющий контраст. Для указанных выше полуреплик определяющими контрастами будут выражения (3). Зная определяющий контраст, можно найти соотношения, задающие совместные оценки. Для этого необходимо помножить независимые переменные x_1, x_2 и x_3 на определяющий контраст. Умножая определяющие контрасты (3) на x_1; получим соотношения

$$x_1 = x_2 x_3; \qquad x_1 = -x_2 x_3.$$

Умножая определяющие контрасты на x_2 и x_3, получаем следующие соотношения

$$x_2 = x_1 x_3; \qquad x_2 = -x_1 x_3;$$

$$x_3 = x_1 x_2; \qquad x_3 = -x_1 x_2.$$

Это означает, что коэффициенты регрессии будут оценками

$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_1 \to \beta_1 - \beta_{23};$

$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_2 \to \beta_2 - \beta_{13};$

$b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}. \quad b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}.$

Определяющим контрастом полуреплики является соотношение

$1 = x_1 x_2 x_3 x_4$.

Совместные оценки будут определяться следующим образом: $x_1 = x_2 x_3 x_4$ $x_2 = x_1 x_3 x_4$ $x_3 = x_1 x_2 x_4$ $x_4 = x_1 x_2 x_3$ $x_1 x_2 = x_3 x_4$ $x_1 x_3 = x_2 x_4$ $x_1 x_4 = x_2 x_3$

$b_1 \to \beta_1 + \beta_{234}$ $b_2 \to \beta_2 + \beta_{134}$ $b_3 \to \beta_3 + \beta_{124}$

$b_4 \to \beta_4 + \beta_{123}$ $b_{12} \to \beta_{12} + \beta_{34}$ $b_{13} \to \beta_{13} + \beta_{24}$ $b_{14} \to \beta_{14} + \beta_{23}$

Таблица 4

Полуреплика 2^{4-1} с определяющим контрастом $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	+	–	–	+	+	Y_1
2	+	+	–	+	–	Y_2
3	+	–	+	+	–	Y_3
4	+	+	+	+	+	Y_4
5	+	–	–	–	-	Y_5
6	+	+	–	–	+	Y_6
7	+	–	+	–	+	Y_7
8	+	+	+	–	-	Y_8

Таблица 5

Полуреплика 2^{4-1} с определяющим контрастом $1 = x_1 x_2 x_4$

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	+	–	–	+	+	Y_1
2	+	+	–	+	–	Y_2
3	+	–	+	+	–	Y_3
4	+	+	+	+	+	Y_4
5	+	–	–	–	+	Y_5
6	+	+	–	–	–	Y_6
7	+	–	+	–	–	Y_7
8	+	+	+	–	+	Y_8

Полуреплика 2^{4-1} может быть также задана генерирующим соотношением $X_4 = X_1 X_2$. Матрица планирования этой полуреплики представлена в табл. 5.

Определяющим контрастом полуреплики является соотношение

$1 = x_1 x_2 x_4$.

Совместные оценки в этом случае будут следующие:

$x_1 = x_2 x_4$ $x_2 = x_1 x_4$ $x_3 = x_1 x_2 x_3 x_4$

$x_4 = x_1 x_2$ $x_1 x_3 = x_2 x_3 x_4$ $x_2 x_3 = x_1 x_3 x_4$

$x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3$ $b_1 \to \beta_1 + \beta_{24}$ $b_2 \to \beta_2 + \beta_{14}$

$b_3 \to \beta_3 + \beta_{1234}$ $b_4 \to \beta_4 + \beta_{12}$ $b_{13} \to \beta_{13} + \beta_{234}$

$b_{23} \to \beta_{23} + \beta_{134}$ $b_{34} \to \beta_{34} + \beta_{123}$

В практических задачах тройные и более высокого порядка взаимодействия значительно чаще, чем двойные, бывают равны нулю, и ими обычно можно пренебречь.

Полуреплика 2^{4-1}, заданная генерирующим соотношением $x_4 = x_1 x_2 x_3$, позволяет получить раздельные оценки четырех линейных эффектов и три совместные оценки парных взаимодействий. В этом случае раздельными оценками будут b_1, b_2, b_3 и b_4 так как тройными взаимодействиями, вследствие их незначимости, можно пренебречь. В полуреплике, заданной генерирующим соотношением $x_4 = x_1 x_2$, три линейных эффекта, а именно b_1, b_2, b_4 – оказались смешанными с парными взаимодействиями.

Разрешающая способность полуреплики, заданной генерирующим соотношением $x_4 = x_1 x_2 x_3$ получилась значительно выше, чем у полуреплики, заданной генерирующим соотношением $x_4 = x_1 x_2$. Следовательно, разрешающая способность полуреплики зависит от генерирующего соотношения, которым она задана.

Таким образом, получили весьма сложную систему смешивания. Все линейные эффекты оказались смешанными с несколькими парными взаимодействиями, поэтому разрешающая способность дробной реплики очень низкая. Пользоваться такой репликой можно лишь в том случае, если все парные взаимодействия близки к нулю.

Выбор дробной реплики зависит от конкретной задачи. Для получения линейной модели рекомендуют выбирать дробные реплики с возможно большей разрешающей способностью, т. е. реплики, у которых линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия, близкими к нулю. При выборе дробной реплики важно учитывать насыщенность плана, т. е. соотношение между числом опытов и числом коэффициентов, определяемых по результатам этих опытов.

Дробная реплика, полученная заменой всех эффектов взаимодействия новыми факторами, называется насыщенной. Применение насыщенных планов требует минимального числа опытов.

Число опытов в матрице насыщенной дробной реплики равно числу коэффициентов линейной модели. Дробные реплики широко применяют при получении линейных моделей. Эффективность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия.

При построении дробных реплик используют следующее правило: новый фактор, введенный в планирование, нужно поместить в столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.

2. СРЕДСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Плоско-шлифовальный станок
Заготовки типа пластина
Прибор для измерения волнистости обработанной поверхности
Персональный компьютер

3. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. На основании паспортных данных станка выписать ряды продольных, поперечных подач стола станка и частот вращения шпинделя.
2. Выбрать факторы, влияющие на волнистость шлифованной поверхности, определить их верхний, нижний уровни и интервалы варьирования.
3. Выбрать план дробного факторного эксперимента, генерирующее соотношение и составить матрицу планирования.
4. Назначить режимы резания и выполнить обработку плоскостей детали на различных режимах.
5. Измерить волнистость обработанных поверхностей.
6. Обработать результаты экспериментов.
7. Проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии.
8. Проверить уравнение регрессии на адекватность.
9. Построить графики зависимостей волнистости обработанной поверхности от независимых факторов.

4. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА

РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ

После выбора плана эксперимента, основных уровней и интервалов варьирования факторов переходят к эксперименту. Каждая строка матрицы — это условия опыта. Для исключения систематических ошибок рекомендуется опыты, предусмотренные матрицей, проводить в случайной последовательности. Последовательность проведения опытов следует выбирать по таблице случайных чисел (табл.3). Например, если требуется провести восемь опытов, то из случайного места таблицы последовательно выписывают числа, лежащие в интервале от 1 до 8, при этом отбрасывают уже выписанные числа и числа больше восьми. Для компенсации влияния случайных погрешностей каждый опыт рекомендуется повторить *n* раз. Опыты, повторенные несколько раз при одних и тех же значениях факторов, называют параллельными. В дальнейшем обработку экспериментальных данных следует проводить аналогично обработке данных в Практической работе № 1.

5. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА И СДАЧА ЗАЧЕТА ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

После выполнения практической работы студент оформляет отчет, в котором приводятся кратко теоретические положения, матрица планирования первого порядка, заполненная с учетом результатов проведенных экспериментов и результатов измерения шероховатости шлифованных поверхностей. В отчете приводятся расчеты, на основании которых получена многофакторная модель.

Приводится проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии и адекватности модели, а также графики зависимостей, связывающих параметр оптимизации с независимыми факторами.

Отчет студента по Практической работе состоит в правильных ответах студента на вопросы преподавателя, касающихся как методики планирования, постановки и проведения экспериментов, их статистической обработки, так и объяснения физической сущности влияния того или иного фактора на параметр оптимизации.

Практическая работа № 3
«Планирование и реализация центрального композиционного ротатабельного многофакторного эксперимента второго порядка»

Цель работы: изучение и освоение методики планирования и практической реализации центрального композиционного ротатабельного многофакторного эксперимента второго порядка.

Задание

1. На основании результатов обработки данных и получения неадекватной линейной многофакторной модели разработать матрицу центрального композиционного рототабельного многофакторного эксперимента второго порядка.
2. Реализовать матрицу планирования второго порядка, предварительно рандомизировав проведение опытов во времени.
3. Рассчитать коэффициенты регрессии и проверить их значимость.
4. Проверить гипотезу адекватности найденной модели второго порядка, связывающей параметр оптимизации с независимыми факторами.
5. Построить графики зависимостей параметра оптимизации от независимых факторов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В процессе реализации центрального композиционного ортогонального плана функцию отклика в области оптимума обычно удается аппроксимировать полиномом второй степени вида

$$Y = b_0 + \sum_{1 \le i \le k} b_i X_i + \sum_{1 \le i \prec l \le k} b_{il} X_i X_l + \sum b_{ii} X_i^2.$$

Для оценки всех коэффициентов полинома второй степени необходимо, чтобы в плане эксперимента каждый фактор принимал не менее трех значений. Применение планов типа 3^k связано с большим числом опытов. Более рациональным является центральное композиционное планирование.

Центральный композиционный план второго порядка получают достройкой некоторого количества точек к «ядру», образованному линейным планом. При числе *к* факторов менее пяти за «ядро» центрального композиционного плана обычно принимают план полного факторного эксперимента типа 2^k.

Если число факторов более пяти, то за «ядро» центрального композиционного плана принимают полуреплику от полного факторного эксперимента. Такой выбор «ядра» центрального композиционного плана обусловлен тем, что от «ядра» плана требуется раздельная оценка всех линейных эффектов и парных эффектов взаимодействия.

Для двух факторов центральный композиционный план второго порядка может быть представлен следующей схемой (рис. 1).

К полному факторному эксперименту 2^2 (точки 1, 2, 3, 4) добавляют некоторое число n_0 опытов в центре плана (точка 9) и четыре «звездных» точки 5, 6, 7, 8 *с* координатами $(+\alpha; 0)$; $(-\alpha; 0)$; $(0, +\alpha)$; $(0; -\alpha)$.

План второго порядка для двух факторов может быть представлен матрицей (табл.1).

Чтобы получить центральный композиционный план второго порядка для трех факторов, к полному факторному эксперименту 2^3 добавляют шесть «звездных» точек с координатами $(+\alpha; 0; 0)$; $(-\alpha; 0; 0)$; $(0; +\alpha; 0)$; $(0; -\alpha; 0)$; $(0; 0; +\alpha)$; $(0; 0; -\alpha)$ и некоторое число n_0 точек в центре плана.

Центральный композиционный план второго порядка для трех факторов может быть выражен матрицей (табл. 2).

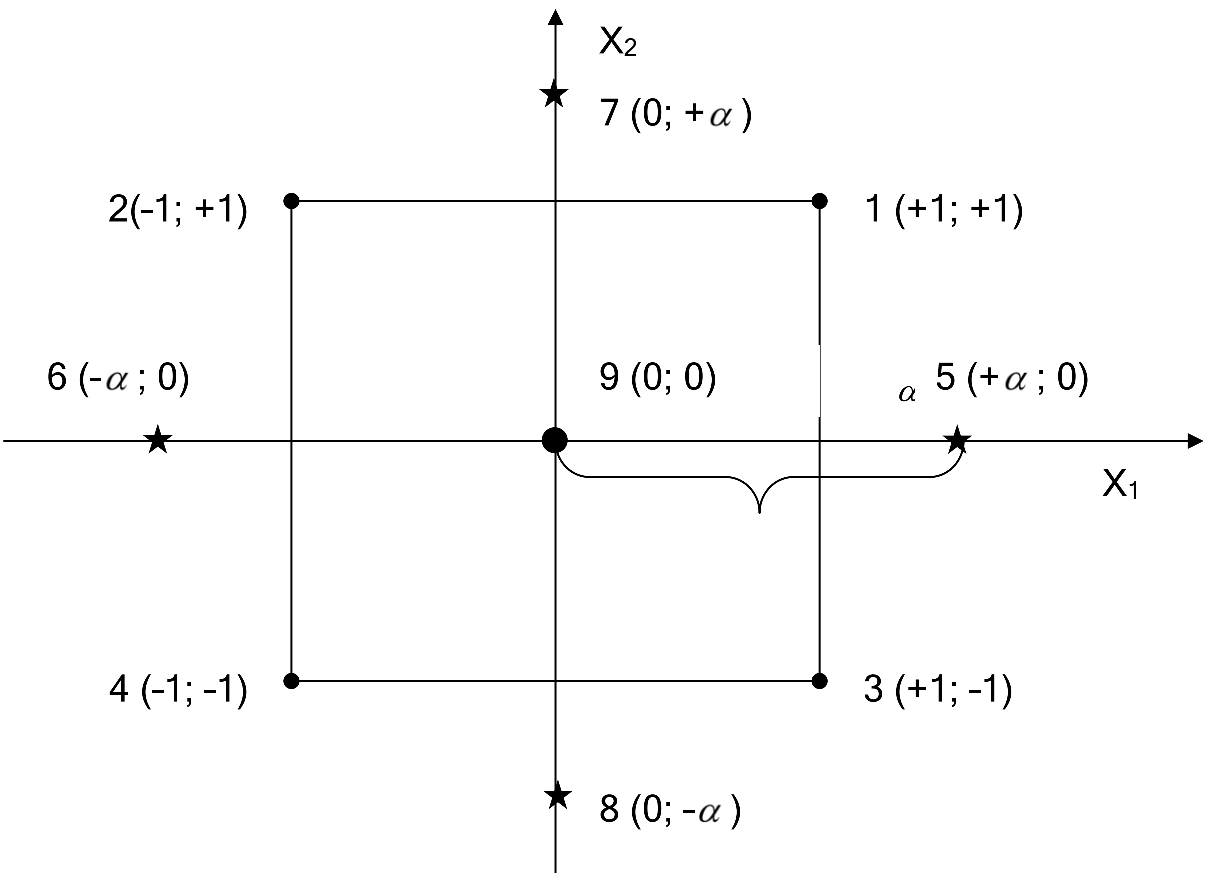

Рис. 1. Схема центрального композиционного плана второго порядка для двух факторов

Таблица 1

Матрица центрального композиционного плана второго порядка
для двух факторов

Содержание плана	Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_1 X_2$	X_1^2	X_2^2	Y
План Типа 2^2	1	+	+	+	+	+	+	Y_1
	2	+	-	+	-	+	+	Y_2
	3	+	+	–	-	+	+	Y_3
	4	+	-	–	+	+	+	Y_4
«Звездные» точки	5	+	$+\alpha$	0	0	α^2	0	Y_5
	6	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0	Y_6
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	α^2	Y_7
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2	Y_8
Нулевая точка	9	+	0	0	0	0	0	Y_9

Таблица 2

Матрица центрального композиционного плана второго порядка
для трех факторов

Содержа-ние плана	Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	X_1^2	X_2^2	X_3^2	Y
План Типа 2^2	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_1
	2	+	-	+	+	–	-	+	+	+	+	Y_2
	3	+	+	-	+	–	+	–	+	+	+	Y_3
	4	+	-	-	+	+	-	–	+	+	+	Y_4
	5	+	+	+	–	+	-	–	+	+	+	Y_5
	6	+	-	+	–	–	+	–	+	+	+	Y_6
	7	+	+	-	–	–	-	+	+	+	+	Y_7
	8	+	-	-	–	+	+	+	+	+	+	Y_8
«Звездные» точки	9	+	$\div\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	Y_9
	10	+	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	Y_{10}
	11	+	0	$\div\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	Y_{11}
	12	+	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	Y_{12}
	13	+	0	0	$\div\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	Y_{13}
	14	+	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	Y_{14}
Нулевая точка	15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{15}

Общее число N опытов центрального композиционного план; зависит от числа k факторов и определяется по выражению $N = 2^k + 2k + n_0$.

Величину «звездного» плеча α и число опытов n_0 в центре плана выбирают в зависимости от принятого критерия оптимальности. За критерий оптимальности обычно принимают ортогональность или ротатабельность плана.

Ортогонализация планов достигается выбором «звездного» плеча α. Значения «звездного» плеча α, вычисленные для различного числа факторов, приведены в табл. 3.

Если ортогональность принять за достаточный критерий оптимальности плана эксперимента, то на число опытов в центре плана не накладывается какого-либо ограничения.

Таблица 3

Величина «звездного» плеча α

Число независимых переменных	Ядро плана	Число дополнительных опытов	Величина плеча α
2	2^2	5	1,000
3	2^3	7	1,215
4	2^4	9	1,414
5	2^{5-1}	11	1,547

Ортогональный центральный композиционный план второго порядка для двух факторов может быть представлен матрицей (табл. 4).

Таблица 4

Ортогональный центральный композиционный план второго порядка
для двух факторов

Содержание плана	Номер операции	X_0	X_1	X_2	$X_1 X_2$	X_1^2-2/3	X_2^2-2/3	Y
План типа 2^2	1	+	+	+	+	+ 1/3	+ 1/3	Y_1
	2	+	-	+	–	+ 1/3	+ 1/3	Y_2
	3	+	+	–	–	+ 1/3	+ 1/3	Y_3
	4	+	–	–	+	+ 1/3	+ 1/3	Y_4
«Звездные» точки с плечом	5	+	+	0	0	+ 1/3	– 2/3	Y_5
	6	+	–	0	0	+ 1/3	– 2/3	Y_6
	7	+	0	+	0	– 2/3	+ 1/3	Y_7
	8	+	0	–	0	– 2/3	+ 1/3	Y_8
Нулевая точка	9	+	0	0	0	– 2/3	– 2/3	Y_9

2. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ

Для получения модели второй степени, связывающей параметр оптимизации с независимыми факторами, необходимо провести дополнительные к плану первого порядка опыты согласно матрице планирования, представленной в табл.4 (приведенная матрица соответствует двум факторам, в случае числа факторов больше двух необходимо составить новую матрицу планирования).

Обработку экспериментальных данных проводим, с учетом результатов опытов в звездных точках факторов.

Благодаря ортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{ij} Y_j}{\sum_{i=1}^{N} X_{ij}^2},$$

где i – номер столбца матрицы; j – номер опыта; X_{ij} – элементы соответствующего столбца матрицы; Y_i – значение параметра оптимизации в i-м опыте.

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формуле

$$S^2\left(b_i\right)=\frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2}.$$

Дисперсии коэффициентов не равны, так как суммы квадратов элементов столбцов матрицы

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2$$

не равны друг другу.

Реализация опытов по матрице планирования с квадратичной переменной позволяет построить модель вида

$$Y=b_0+\sum_{1\le i\le k} b_i X_i+\sum_{1\le i\prec l\le k} b_{il} X_i X_l+\sum b_{ii} X_i^2.$$

Неизвестный коэффициент b_0 находят по выражению

$$b_0=b_0^{'}-b_{11} X_i^2-\ldots-b_{kk} X_k^2$$

с дисперсией

$$S^2\left(b_0\right)=S^2\left(b_0\right)+X_1^2 S^2\left(b_{11}\right)+\ldots+X_k^2 S^2\left(b_{kk}\right).$$

Проверка адекватности уравнения второго порядка, полученного после центрального композиционного ортогонального планирования, производится так же, как и проверка адекватности линейной модели, полученной при реализации плана первого порядка.

3. СРЕДСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Плоскошлифовальный станок
2. Заготовки типа пластина
3. Прибор для измерения волнистости обработанной поверхности
4. Персональный компьютер

4. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. По данным матрицы центрального композиционного ортогонального планирования второго порядка назначить режимы резания для обработки заготовки.
2. Выполнить обработку плоскостей деталей на уровнях, соответствующих звездным точкам и основному уровням факторов.
3. Измерить волнистость обработанных поверхностей.
4. Обработать результаты экспериментов.
5. Проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии.
6. Проверить уравнение регрессии на адекватность.
7. Построить графики зависимостей волнистости обработанной поверхности от независимых факторов.

5. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА И СДАЧА ЗАЧЕТА ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

После выполнения всех пунктов раздела 6 студент оформляет отчет по Практической работе, в котором приводятся кратко теоретические положения, матрица центрального композиционного планирования второго порядка, заполненная с учетом результатов проведенных экспериментов и результатов измерения волнистости шлифованных поверхностей. В отчете приводятся расчеты, на основании которых получена многофакторная модель второго порядка.

Приводится проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии и адекватности модели второго порядка, а также графики зависимостей, связывающих параметр оптимизации с независимыми факторами.

Отчет студента по Практической работе состоит в правильных ответах студента на вопросы преподавателя, касающихся как методики планирования, постановки и проведения экспериментов, их статистической обработки, так и объяснения физической сущности влияния того или иного фактора на параметр оптимизации.

Практическая работа № 4
«Оптимизация параметров методом крутого восхождения по поверхности отклика»

Цель работы: изучение и освоение методики отыскания оптимума функции, полученной в результате практической реализации плана первого или второго порядка и адекватно описывающей изучаемый процесс.

Задание

1. Для полученного в результате выполнения лабораторных работ №№1-3 уравнения регрессии, связывающего исследуемый параметр с независимыми факторами, найти оптимальное значения функции отклика.
2. Изучить методику расчета шага каждого фактора при крутом восхождении по поверхности отклика.
3. Выполнить крутое восхождение по поверхности отклика и добиться оптимального значения исследуемого параметра.
4. Построить графики зависимостей оптимального параметра обработанной поверхности от независимых факторов для адекватной линейной модели или модели второго порядка.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Под математической моделью понимают вид функции отклика $y = f(X_1, X_2, ..., X_k)$. Выбор модели зависит от задачи исследования и от предъявляемых требований к модели.

Экстремальные задачи часто решают, используя шаговый метод. В этом случае модель должна удовлетворять требованиям этого метода.

В основе шагового метода лежит предположение, что совокупность значений параметра оптимизации *y,* полученная при различных сочетаниях значений факторов X_i, образует поверхность отклика.

Для наглядности представления о поверхности отклика при наличии Y_{max} рассмотрим простейший случай, при котором число факторов равно двум (X_1 и X_2).

Для каждого фактора установлены два значения: максимальное и минимальное. Между этими значениями каждый фактор может изменяться непрерывно или дискретно.

Границы значений факторов образуют на плоскости *X10X2* (рис. 1), прямоугольник *ABCD,* внутри которого лежат точки возможных значений X_1 и X_2.

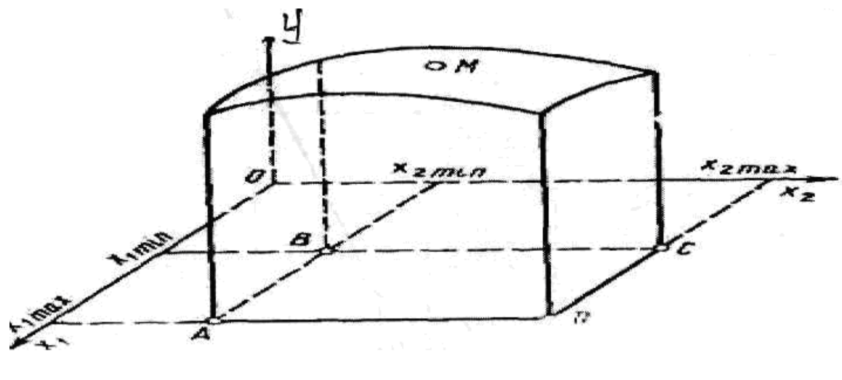

Рис. 1. Поверхность отклика

Если по оси y откладывать значения Y_i полученные при различных сочетаниях значений факторов, то точки Y_i будут лежать на поверхности отклика.

На этой поверхности будет находиться точка *M,* соответствующая оптимальному значению *y.* Для нахождения этой точки необходимо шаг за шагом двигаться по поверхности отклика.

Шаговый метод исходит из предположения, что поверхность отклика является гладкой и имеет единственный оптимум. Поверхность отклика расположена в *k+1*–мерном пространстве, которое называют факторным.

Факторное пространство зависит от числа *k* факторов. При большом числе факторов это пространство является многомерным, и геометрическая интерпретация функции отклика становится невозможной.

Для описания в многомерном пространстве поверхности отклика пользуются языком алгебры. Гладкость поверхности отклика и наличие на ней одной точки оптимума позволяют двигаться к последней в любом направлении, независимо от исходной точки.

При шаговом методе каждому фактору придают два значения: максимальное и минимальное. Эти значения составляют только часть возможных значений факторов.

На первом этапе реализации шагового метода выбирается лишь какая-то подобласть из области возможных значений факторов, и в этой подобласти ставится эксперимент.

На основании результатов этого эксперимента строится первая модель, по которой предсказываются отклики для значений факторов, выходящих за пределы выбранной подобласти.

Чем дальше от этой подобласти лежит точка, определяющая значения факторов, тем с меньшей точностью путем экстраполяции можно предсказать значение отклика для этой точки. Поэтому экстраполяцию производят вблизи подобласти эксперимента и используют ее для выбора условий проведения следующего эксперимента, т. е. устанавливают новые интервалы значений факторов или выбирают новую подобласть факторного пространства.

Поставив новый эксперимент, строят вторую модель и на основании ее делают следующий шаг в направлении к оптимуму. В этом и заключается сущность шагового метода.

Исходя из сущности этого метода к модели предъявляется главное требование, заключающееся в способности модели «предсказывать» направление дальнейших опытов с требуемой точностью. Это означает, что предсказанные по модели значения отклика должны отличаться от фактических не более, чем на некоторую наперед заданную величину.

Модель, удовлетворяющую этому требованию, называют адекватной. Если имеется несколько удовлетворяющих

указанному требованию моделей, то из них выбирается наиболее простая. Наиболее простой моделью является полином. Полином линеен относительно неизвестных коэффициентов, что упрощает обработку наблюдений.

Полином может быть первой, второй и более высокой степени, коэффициенты полинома вычисляют по результатам опытов. Чем больше число коэффициентов в полиноме, тем большее количество опытов необходимо поставить для их определения. Число коэффициентов зависит от степени полинома: чем выше степень, тем больше число коэффициентов. На первом этапе планирования – определении направления движения к оптимуму и крутого восхождения по поверхности отклика – наиболее целесообразно неизвестную функцию отклика аппроксимировать полиномом первой степени. Аппроксимация – это замена одной функции другой функцией, в каком-то смысле эквивалентной первой.

Полином первой степени имеет минимальное число коэффициентов при данном числе факторов и содержит необходимую информацию о направлении градиента, под которым понимают направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации.

После достижения путем постепенного перемещения по поверхности отклика подобласти, в которой лежит точка оптимума, иногда для более полного описания подобласти переходят от полинома первой степени к полиному второй степени.

Движение по градиенту обеспечивает наиболее короткий путь к оптимуму, так как направление градиента – это направление самого крутого склона, ведущего от данной точки к вершине. Если изменять факторы пропорционально их коэффициентам с учетом знака, то движение к оптимуму будет осуществляться по самому крутому пути.

Этот процесс движения к области оптимума называют крутым восхождением. Технику расчета крутого восхождения рассмотрим на примере задачи с одним фактором X_1 (рис.2). Предположим, что кривая 1 представляет собой неизвестную функцию отклика. В результате реализации плана эксперимента с центром в точке *O* получено уравнение регрессии $y = b_0 + b_1 X_1$ адекватно описывающее функцию отклика в области значений фактора X_1 от –1 до +1.

Значение коэффициента регрессии b_1 равно тангенсу угла между линией регрессии и осью данного фактора. Если шаг движения по оси x_1 принять равным Δx , то, умножив его на b_1, получим координаты (Δx и $b_1\ \Delta x$) точки *A,* лежащей на градиенте.

После второго шага расстояние по оси x_1 будет равно $2\Delta x$. Умножив $2\Delta x$ на b_1, найдем координаты $2\Delta x$; и $2b_1\ \Delta x$ точки *B*, лежащей на градиенте, и т. д. Затем проводят опыты с условиями, отвечающими точкам на градиенте. По результатам этих опытов определяют область оптимума.

В практических задачах для сокращения объема эксперимента проводят не все, а только часть опытов, предусмотренных крутым восхождением. Условия опытов выбирают так, чтобы область оптимума можно было заключить в «вилку». После этого опыты проводят в точках интервала, образованного точками «вилки», до нахождения наилучшего результата.

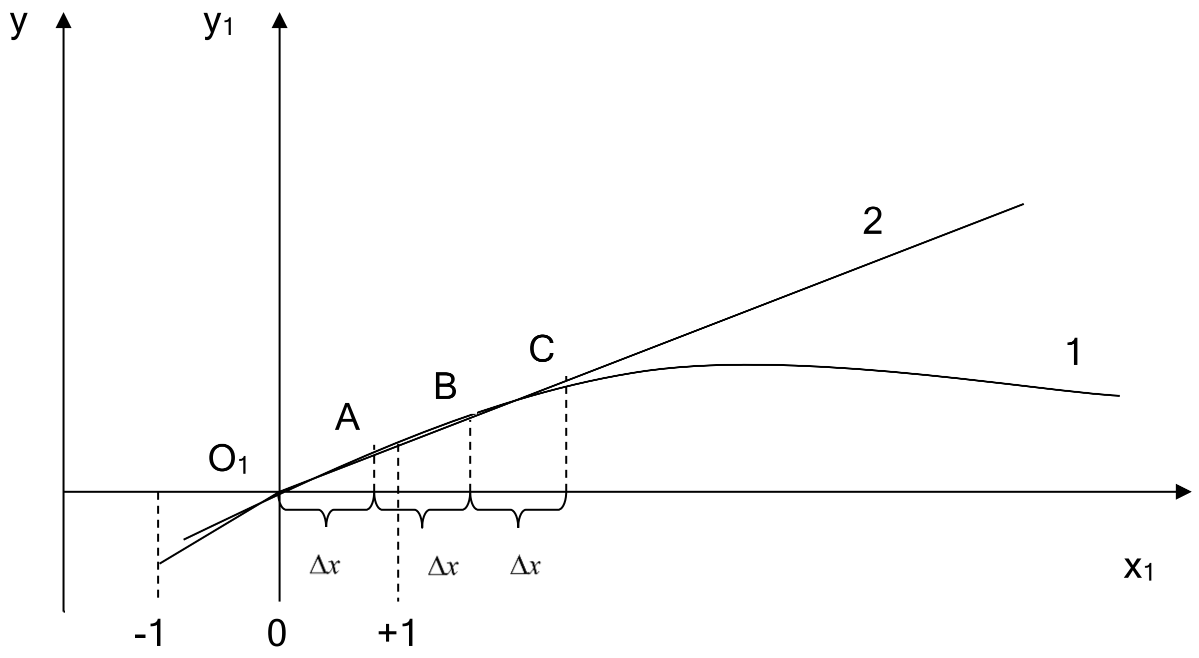

Рис. 2. Схема к расчету координат точек в направлении градиента:
1-график функции отклика; прямая направления градиента.

В случае *k* факторов расчет крутого восхождения по оси каждого фактора производят аналогичным образом, так как коэффициенты b_i определяются независимо друг от друга.

При этом движение по осям осуществляют одновременно.

Шаг движения по градиенту выбирают таким, чтобы его минимальная величина была больше ошибки, с которой фиксируют фактор. Максимальную величину шага ограничивает область определения фактора.

Необходимо учитывать, что при движении к оптимуму малый шаг потребу значительного числа опытов, а большой шаг может привести к проскоку области оптимума.

Шаг движения выбирают для одного фактора, а для остальных его рассчитывают по выражению

$$\Delta_i = \Delta_l \frac{b_i \varepsilon_i}{b_l \varepsilon_l},$$

где Δ_l – выбранный шаг движения для фактора *l*; Δ_i – шаг движения дл: *i*-го фактора; b_i , b_l – коэффициенты регрессии *i*-го и *l*-го факторов; ε_i , ε_l – интервалы варьирования *i*-го и *l*-го факторов.

Движение по градиенту должно начинаться от нулевой точки основного уровня каждого фактора, так как коэффициенты регрессии вычислены дл. функции отклика, разложенной в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки.

Если коэффициенты регрессии значительно отличаются друг от друга, то рекомендуют изменить интервалы варьирования факторов и провести новую серию опытов, ибо при различии коэффициентов на порядок и боле! многофакторный эксперимент при крутом восхождении может превратиться однофакторный.

Рассчитав шаг движения для каждого фактора, находят условия: «мысленных» опытов. «Мысленными» называют опыты, условия, проведения которых на стадии крутого восхождения установлены с учетом шаг; движения для каждого фактора.

С целью проверки результатов крутого восхождения часть мысленных опытов реализуется.

Если при движении к оптимуму возникает ситуация, препятствующая изменению каких-либо факторов, то эти факторы можно фиксировать на оптимальных уровнях, продолжая движение по стальным факторам.

Крутое восхождение прекращается, если найдены условия оптимизации или если ограничения на факторы делают дальнейшее движение по градиент неразумным.

Рассмотренный метод крутого восхождения в область оптимума носит название метода Бокса – Уилсона.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. По полученной ранее адекватной модели найти экстремальное значение параметра оптимизации.
2. Выбрать фактор, наиболее существенно влияющий на параметр оптимизации, и назначить шаг, с которым он будет изменяться фактор при крутом восхождении по поверхности отклика.
3. Рассчитать шаг движения по градиенту для остальных факторов.
4. Рассчитать факторы для мысленных и реализованных опытов при крутом восхождении в область оптимума.

Для выполнения пунктов 3 и 4 удобно пользоваться примером – таблицей.

Таблица

Расчет крутого восхождения

Наименование	X_1	X_2	X_3	y
Основной уровень	0,40	840	60	–
Коэффициент b_i	20	11,9	–5.1	–
$b_i \varepsilon_i$	0,15	100	60	–
Интервал варьирования ε_i	3	1190	–306	–
Шаг Δ_i	0,0252	10	–2,57	–
Округленный шаг	0,03	10	–3	–
Мысленный опыт	0,43	850	57	–
То же	0,46	860	54	–
Реализованный опыт	0,49	870	51	108
Мысленный опыт	0,52	880	48	–
То же	0,55	890	45	–
Реализованный опыт	0,58	900	42	196
Реализованный опыт	0,61	910	39	366
Реализованный опыт	0,64	920	36	313

Как следует из таблицы лучший результат (оптимальное значение параметра *y)* получен в предпоследнем опыте. Величина параметра оптимизации достигла своего максимального значения y =366, на этом работа была закончена, так как цель многофакторного эксперимента достигнута.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА И СДАЧА ЗАЧЕТА ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

После выполнения всех пунктов раздела 4 студент оформляет отчет по Практической работе, в котором приводятся кратко теоретические положения, расчеты шагов факторов при крутом восхождении по поверхности отклика. Рассчитываются значения факторов, как в мысленных, так и реализуемых опытах.

Отчет студента по Практической работе состоит в правильных ответах студента на вопросы преподавателя, касающихся как методики крутого восхождения по поверхности отклика, так и проведения экспериментов, их статистической обработки, а также объяснения физической сущности влияния того или иного фактора на значение параметра оптимизации.

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Карманов Ф.И., Острейковский В.А. Статистические методы обработки экспериментальных данных с использованием пакета MathCad: учеб. пособие. М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2015. 208 с.

Режим доступа – http://znanium.com/bookread2.php?book=508241

2. Волосухин В.А., Тищенко А.И. Планирование научного эксперимента: Учебник/, 2-е изд. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 176 с.

Режим доступа – http://znanium.com/catalog/product/516516

3. Соколов Г.А., Сагитов Р.В. Введение в регрессионный анализ и планирование регрессионных экспериментов в экономике: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2010. 202 с.

Режим доступа – http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=177060

4. Злотников К. А., Ткачева Л. В. Информационные технологии обработки данных и процесс принятия решений [Текст] : учеб.-метод. комплекс / сост.:. - СПб. : Изд-во СЗТУ, 2009. - 180 с.

Дополнительная литература

1. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Методы оптимизации: Учебное пособие /. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 270 с

Режим доступа – http://znanium.com/catalog/author/06e407c8-f77e-11e3-9766-90b11c31de4c

2. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учеб. пособие. 3-е изд. М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2014. 389 с.

Режим доступа – http://znanium.com/bookread2.php?book=424033

3 Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том I. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики: Учебное пособие / - 2-е изд. - :, 2017. - 486 с

Режим доступа – http://znanium.com/catalog/product/958605

4. Власов М.П., Шимко П.Д. Оптимальное управление экономическими системами: учеб. пособие. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. 312 с.

Режим доступа – http://znanium.com/bookread2.php?book=339245

5. Попов В. Н., Шпаков П. С. Статистическая обработка экспериментальных данных Издательство Московского государственного горного университета, 2003 – 261 с.

Режим доступа – http://znanium.com/catalog/product/999904

6. Длин А.М. Математическая статистика в технике [Текст] : учебник для втузов / А. М. Длин. - Изд. 3-е, перераб. - М. : Сов. наука, 1958. - 465 с.

7.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Информационная справочная система «Консультант плюс».
2. Библиотека ГОСТов www.gostrf.com.
3. Сайт Российской государственной библиотеки. http://www.rsl.ru/
4. Сайт Государственной публичной научно-технической библиотеки России. http://www.gpntb.ru/
5. Каталог образовательных интернет ресурсов http://www.edu.ru/modules.php
6. Электронные библиотеки: http://www.pravoteka.ru/, http://www.zodchii.ws/, http://www.tehlit.ru/.
7. Специализированный портал по информационно-коммуникационным технологиям в образовании http://www.ict.edu.ru