Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет»

На правах рукописи

Губайдуллина Рушания Айратовна

МОДЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Мустафин М.Г.

Санкт-Петербург – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В современной геодезической практике координаты играют значительную роль. С их помощью не только задают местоположение объекта в пространстве, но и решают широкий спектр задач, таких как определение формы и размеров объекта, вынос его в натуру, отображение на плане или карте, проверки соответствия размещения объектов и их элементов проектным данным и др. Для решения этих актуальных задач создаются системы закрепленных на местности точек (геодезические сети), которые согласно ГОСТ Р 55024-2012 могут быть различными по назначению.

Координаты точек геодезических сетей чаще всего определяют по результатам линейно-угловых измерений. Перед обработкой из результатов стремятся в полной мере исключить грубые и систематические ошибки. Последние исключить не всегда возможно, поэтому их влияние стараются уменьшить. Это особенно важно, если решение задачи подразумевает выполнение повторных измерений и дальнейшее установление стабильности геодезической сети, как например, при создании геодезической основы перед строительством особо ответственных сооружений, реконструкции геодезических сетей, контроле геодезической разбивочной сети, оценке деформаций различных объектов и т.д. Данные виды работ регламентированы нормативными документами и, как правило, выполняются посредством сравнения координат точек в соседних циклах наблюдений. Тем не менее, систематические ошибки могут оказаться и не вполне учтёнными из-за изменений условий наблюдений от цикла к циклу. Результат – ошибочные выводы о стабильности сети. Для того, чтобы учесть влияние систематических ошибок выполняют обязательную аттестацию средств измерений, а непосредственно перед началом работ и их проверку, определяют поправки в результаты измерений, разрабатывают и совершенствуют методики наблюдений.

Вопросами устранения систематических ошибок геодезических измерений в той или иной степени интересовались и интересуются практически все специалисты в области геодезии. Наиболее весомый вклад в изучение данной проблемы внесли такие видные ученые, как: А.П. Ворошилов, А.В. Виноградов, Н.Х. Голыгин, П.А. Карев, А.П. Карпик, М.М. Карсунская, А.В. Комиссаров, А.В. Кошелев, Г.В. Лифашина, А.В. Никонов, И.И. Менухов, А.В. Мерзенин, И.С. Пандул, С.В. Травкин, Г.А. Уставич, И.Н. Чешева, О.Б. Хиноева, Н.В. Яковлев, Х.К. Ямбаев и др.

Однако, известные на сегодняшний день средства борьбы с систематическими ошибками зачастую требуют выполнения большого объема работ, в частности лабораторных, создания и обслуживания специальных стендов, изучения и анализа факторов, оказывающих влияние на результаты измерений, установления их математической зависимости.

В данной диссертационной работе предложен принципиально иной подход к решению вышеперечисленных геодезических задач. Он основан на принципе моделирования, при котором используются не сами измеренные величины, а отношения между ними (безразмерные соотношения между линейными величинами, соотношения между тригонометрическими функциями углов). Тогда, величины, полученные по результатам начальных измерений, принимаются как базовые, формирующие некоторую начальную безразмерную модель сети, фиксирующую её состояние на начальный момент времени. Все последующие измерения позволяют установить, сохраняются ли эти базовые элементы (базовая модель) неизменными. Такой подход позволяет получить ряд преимуществ по сравнению с подходом традиционным: обеспечивается автоматическое исключение систематических ошибок, линейных относительно измеряемых величин, а при определённых условиях и нелинейных. В связи с этим становится проще обеспечивать преемственность и непрерывность выполнения работ, в случаях, когда требуется возобновить контроль другими средствами измерений.

Объект исследования − геодезические сети.

Предмет исследования − процесс построения геодезических сетей и обработки результатов геодезических измерений.

Цель работы − повышение эффективности работ при построении и оценки геодезических сетей различного назначения.

Идея работы заключается в представлении геодезической сети как единой системы, а элементов, определяющих её форму и размер – однородными элементами в виде безразмерных (относительных) величин. Это обеспечивает получение дополнительного параметра: коэффициента отношений, который может служить масштабным коэффициентом, и дает возможность применения альтернативных равноточных приборов при определении координат точек геодезических сетей (в том числе многократном).

Задачи исследований:

1. Анализ существующих подходов к определению координат пунктов геодезической сети и устранению систематических ошибок линейных и угловых измерений.

2. Разработка принципов использования соотношений элементов геодезической сети, как альтернативного способа определения ее координат.

3. Обоснование использования элементов теории подобия при решении задач деформационного мониторинга.

4. Обоснование методики определения координат пунктов геодезической сети по соотношениям измеренных элементов сети.

5. Практическая проверка предлагаемой методики на моделях и в натурных условиях.

Методология и методы исследования

Заключаются в последовательном и обоснованном применении следующих методов исследования: анализа существующих методов определения и оценки координат пунктов геодезических сетей (метода наименьших квадратов и обобщенного метода наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений); обработки геодезических измерений на основе относительных величин, статистического анализа, теории подобия при теоретических и экспериментальных исследованиях, а также сопоставлении полученных результатов с результатами, полученными по традиционным методикам и, таким образом, установлении области применения разработанной методики.

Научная новизна:

1. Доказана принципиальная возможность использования соотношений элементов геодезических сетей для определения координат пунктов, в том числе и при повторных измерениях.

2. Впервые предлагается применять относительные безразмерные параметры в геодезических сетях для учета систематических ошибок при измерении линейных величин.

3. Предложен метод совместной обработки коэффициентов отношений, полученных по результатам линейных и угловых измерений.

4. Разработана методика определения степени деформирования геодезических сетей любого назначения, основанная на анализе результатов повторных измерений, дополняющая традиционные подходы и обеспечивающая возможность применения альтернативных равноточных приборов в различных циклах наблюдений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Использование относительных, нормированных величин является весьма эффективным средством исключения систематических ошибок из результатов измерений при построении геодезических сетей любого назначения.

2. Определение координат точек геодезической сети возможно по коэффициентам отношений линейных и угловых величин, вычисленных и уравненных по результатам измерений, в том числе и неравноточных.

3. Применение при решении задач деформационного мониторинга коэффициентов отношений линейно-угловых величин, обеспечивает контроль деформаций при вариативности приборов и преемственность конечных результатов.

Практическая значимость работы состоит в том, что предложенная методика построения сетей и обработки результатов измерений, основанная на применении безразмерных коэффициентов отношений, может быть широко использована не только в геодезической практике, но и в других областях науки, имеющих дело с измерениями. Выводы и методические разработки могут быть использованы в учебном процессе по специальности «Прикладная геодезия», а также в геодезических организациях, в частности в ЗАО «Геодезические приборы» и ООО НПП «БЕНТА» (Санкт-Петербург).

Теоретическая значимость работы заключается в теоретическом обосновании применения при обработке результатов полевых работ и оценки геодезических сетей не самих измерений, а их соотношений.

Степень достоверности результатов исследования подтверждается использованием современных, широко применяемых в разных областях науки методов, использованием сертифицированных приборов и методик при проведении экспериментальных исследований и обработки данных натурных наблюдений, хорошей сходимостью при сравнении полученных результатов с данными независимых исследовательских работ; качественным и количественным согласованием результатов расчетов с экспериментальными данными. Полученные результаты не противоречат и дополняют раннее опубликованные работы по теме диссертации в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией, а также в других изданиях отечественных и зарубежных исследователей.

Апробация результатов исследования

Основные положения и выводы, полученные в ходе данного научного исследования, докладывались на 7 научно-практических конференциях, в том числе на шести международных: Международной конференции «58 Konferencja Studenckich Kół Naukowych Pionu Górniczego AGH» (г. Краков, Польша, декабрь 2017 г.); Международной научно-практической конференции «Современные проблемы инженерной геодезии» (г. Санкт-Петербург, ноябрь 2019 г.); Российско-германской сырьевой конференции (Молодежный день) (г. Санкт-Петербург, ноябрь 2019 г.); получен диплом I степени на XV Международном форуме-конкурсе студентов и молодых ученых «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, май 2019 г.); Международном симпозиуме EUROCK 2018 (г. Санкт-Петербург, май 2018 г.); Международной конференции во Фрайбергской горной академии (г. Фрайберг, Германия, июнь 2018 г.); и одна всероссийская: II Всероссийская научно-практическая конференция «Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов в области топогеодезического и навигационного обеспечения» (г. Санкт-Петербург, апрель 2018 г.).

Публикации

Результаты диссертационной работы в достаточной степени освещены в 11-ти печатных работах, в том числе две – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, одна – в издании, входящем в международную базу данных и систему цитирования Scopus; получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора заключается в анализе литературы по теме исследования; постановке цели и задач диссертации; теоретическом обосновании предложенных рекомендаций; оценки их эффективности на моделях; проведении экспериментальных исследований; интерпретации полученных результатов; подготовке публикаций и апробации основных результатов работ.

Структура работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав с выводами по каждой из них, заключения, списка литературы, включающего 189 наименований, и 6 приложений. Диссертация изложена на 171 странице машинописного текста, содержит 24 рисунка и 58 таблиц.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессорско-преподавательскому составу и сотрудникам кафедры инженерной геодезии Санкт-Петербургского горного университета, а также личную благодарность научному руководителю д.т.н. М.Г. Мустафину за помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Искреннюю благодарность и глубокую признательность автор выражает к.т.н. Ю.Н. Корнилову за идеи, предложения и весомый вклад в развитие данного исследования, а также неоценимую поддержку на разных этапах написания работы.

ГЛАВА 1 МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ФОРМЫ И РАЗМЕРОВ ОБЪЕКТОВ (СЕТЕЙ)

1.1 Геометризация и координирование пространства

Двумя важнейшими задачами (целями) геодезических работ являются геометризация объектов и их позиционирование.

Геометризация в геодезии заключается в описании пространственных отношений и форм объектов и явлений средствами их геометрической интерпретации (представлении в виде геометрических фигур, образов или аналитической зависимости) через измерения и моделирование. Помимо этого, принцип геометризации включает в себя оценку (контроль) взаимного положения структурных элементов объектов, сооружений или комплексов, как на этапе их строительства, так и в процессе их эксплуатации, через создания геометрической структурной информационной модели пространства.

Под координированием пространства подразумевается формирование (выбор начальных направлений и масштаба), распространение системы координат на все окружающее пространство и ее обновление. Добиваются этого, как правило, построением геодезических сетей. В книге [143] встречается термин координатизация, под которой подразумевается совокупность процессов по созданию и распространению систем координат (созданию опорной сети).

Было время, когда геометрию пространства описывали простейшими геометрическими фигурами, но уже достаточно давно для этого применяются методы аналитической геометрии, которые посредством координат точек позволяют выражать как отдельные геометрические структуры объектов и систем (форму, размер, взаимное положение), так и всё пространство, которому они принадлежат. Таким образом, координаты стали использовать не только для позиционирования объектов, но и для аналитического задания их геометрических свойств. В результате чего повысилась значимость систем координат, появилась необходимость выполнения измерений в единой (для анализируемого пространства) системе координат и как следствие необходимость создания опорных геодезических сетей [143].

В самом деле, координаты в современной геодезии играют важную роль. Они используются для определения местоположения объекта (конечная продукция – карта, план, разрезы, цифровые модели); в строительстве, при выполнении разбивочных работ (размещении на местности элементов зданий и сооружений, например, осей и проектных границ) [87, 165]. Также координатный метод используется при выполнении исполнительной съемки, для оценки качества выполненных работ по размещению объектов в процессе проведения строительно-монтажных работ и выполнении исполнительных съемок фасадов зданий [83]. И, наконец, координаты точек используются при решении задач деформационного мониторинга, где о стабильности объекта (сети) судят по изменениям координат точек в различных циклах наблюдений.

На основании вышеизложенного можно выделить два основных способа задания геометрии объекта (земной поверхности), которыми пользуются геодезисты: по координатам характерных точек (узлов регулярных или нерегулярных сеток) и по геометрическим параметрам, таким, как длины линий или их сочетаниям с углами. Второй вариант и положен в основу исследований настоящей диссертационной работы.

1.2 Координатный метод описания формы и размера объекта (сети)

Форму и размер объекта (сети) можно задать на плоскости с использованием плоских систем координат и в пространстве с использованием пространственных координат. При этом как на плоскости, так и в пространстве широко используются декартовая и полярная системы координат.

На плоскости положение точки определяется двумя величинами (x, y) в прямоугольной системе координат, ρ и ϕ – в полярной. При этом размер, форма и местоположение объекта определяется координатами всех его точек. Нет проблем перехода из одной системы в другую.

Для задания точки пространственного объекта, требуется уже три компоненты. Наиболее популярны: прямоугольная декартовая система координат (помимо осей абсцисс и ординат добавляется ось z - аппликат); а также полярные – сферическая и цилиндрическая. В сферической системе координаты точки, как известно, задаются радиальным расстоянием ρ, зенитным ϴ и азимутальным φ углами. В цилиндрической системе координат положение точки задается полярными координатами ρ и φ точки N, являющейся проекций заданной точки M на плоскость XY, и числом z, которое получается при проецировании точки M на ось Z. Особенность цилиндрической системы координат состоит в том, что все точки имеют одинаковое значение радиус-вектора ρ [64]. В этом случае также достаточно прост переход от полярной к прямоугольной системе координат и обратно. Из трёх представленных пространственных систем координат реже в геодезии используется - цилиндрическая.

Однородные координаты

Недостаток рассмотренных выше плоских и пространственных систем координат заключается в том, что они не позволяют описать положение точки, находящейся в бесконечности. Устраняют его, так называемые, однородные координаты, которые широко используются в проективной геометрии, но малоизвестны в геодезии. Целесообразность их применения состоит не только в том, что они обеспечивают описание бесконечно удаленной точки, но, так же, позволяют выявить различия между вектором и точкой в пространстве, упрощают матричную форму аффинных преобразований, позволяют описать проективные преобразования (например, от трёхмерных координат переходить к плоским) в матричном виде. Эти свойства оказались очень полезны в компьютерной визуализации, и нашли свое применение в цифровой фотограмметрии [53].

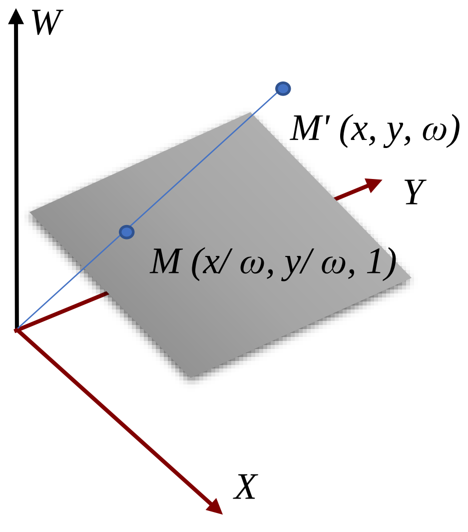

Рисунок 1.1 – Однородные координаты в двумерном пространстве

По определению, представленному в [53] «однородными координатами точки $M=(x_1,\ldots, x_n)$, $M\in R^n$ являются координаты $P_{hom}=(\omega x_1, \omega x_2,\ldots, \omega x_n, \omega)$, $P_{hom}\in R^{n+1}$, при условии, что хотя бы один элемент отличен от нуля». То есть количество компонент координат, описывающих точку в n-мерном пространстве всегда на одно больше, чем размерность пространства. Говоря проще, однородными координатами, например, точки M на плоскости, является любая тройка одновременно не равных нулю чисел x_1, x_2, ω, связанных с заданными числами x и y соотношениями: $\frac{x_1}{\omega} = x, \frac{x_2}{\omega} = y$.

Рассмотрим геометрическое представление вышесказанного. Пусть дана точка M' в пространстве $OXYW$ (рисунок 1.1) с координатами (x, y, ω). Проведем прямую, соединяющую эту точку с началом координат O. Как видно из рисунка 1.1 в принципе однородным координатам соответствует бесчисленное множество точек, находящихся на прямой OM'. Значит, такой подход описывает координаты не одной точки, а множество точек, принадлежащих прямой OM', при этом для того, чтобы перейти от координат прямой к координатам точки, необходимо пересечь эту прямую плоскостью, которая не проходит через начало координат и параллельна плоскости OXY [53, 63].

В случае, если $\omega=1$, плоскость пересечет прямую в точке (x/ω, y/ω, 1), то это и есть евклидовы координаты точки M (x/ω, y/ω). То есть, для получения евклидовых координат нужно каждую из компонент однородных координат разделить на ω.

Представление декартовых координат точек в виде однородных координат позволяет, как сказано выше, упростить аналитическое представление аффинных преобразований и как следствие, дальнейшую вычислительную работу с ними. В доказательство этого приведем несколько примеров. Известно, что преобразования сдвига, поворота, масштабирования и отражения удобнее представить в матричной форме. В общем случае преобразования координат точек на плоскости задаются выражением (1.1):

$$\begin{cases} x' = t_{11}x + t_{12}y + x'_0 \\ y' = t_{21}y + t_{22}y + y'_0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

где x, y – координаты точки в заданной системе координат x', y' – в преобразованной системе координат.

Тогда в матричной форме они будут иметь вид (1.2):

$$|x' \;\; y'| = |x \;\; y| \cdot T, \tag{1.2}$$

где Т- матрица преобразований, причем $T^T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \\ x'_0 & y'_0 \end{vmatrix}$.

Как видим, размерности матриц не совпадают, следовательно, их перемножение невозможно. Решить эту проблему позволяются однородные координаты, которые задают точку на плоскости тремя компонентами (х: у: ω), а значит матрицы выражения (1.2) будут согласованными и их можно перемножать. Таким образом, представляется возможным аналитическое описание сложных аффинных преобразований (например, одновременный сдвиг и поворот), для этого нужно их представить в виде последовательности частных преобразований.

Для того чтобы представить точку M в трехмерном пространстве с однородными координатами (*x: y: z: ω*), где ω – любое произвольное число, отличное от 0, в евклидовых координатах нужно разделить все компоненты на скалярный множитель *ω*. Тогда, (*x/ω, y/ω, z/ω*) – евклидовы координаты точки М в пространстве. Следовательно, в том случае, если *ω=1* – преобразованные однородные координаты равны исходным евклидовым, при *ω=0,5* – точка будет отдаляться в положительном направлении от начала координат по прямой ОМ, а вот если ω равно 0, то точка находится в бесконечности [53].

Тогда, в трехмерном пространстве общий вид аффинных преобразований при задании точек в однородных координатах задается соотношением вида (1.3):

$$|x' \;\; y' \;\; z' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; z \;\; 1| \cdot T, \tag{1.3}$$

где T − матрица преобразований. Так, например, когда известны направляющие косинусы наклона систем координат, матрица поворота объекта будет иметь вид (1.4):

$$RT = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

С учетом того, что обычно повороты системы координат задаются тремя углами поворота, например, $\varphi,\ \omega,\ \theta$. Тогда матрица поворота вокруг оси x' для (левой системы координат) на угол φ будет иметь вид (1.5):

$$RT_{\varphi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

Аналогичные преобразования необходимо выполнить вокруг остальных осей, тогда координаты точки будут получены после перемножения всех трех матриц.

Помимо аффинных преобразований имеют место быть преобразования проецирования. Такой подход в компьютерной графике используется при проецировании трехмерных координат точек на плоскость экрана. Рассмотрим этот случай на примере перспективного преобразования, которое обычно не задается в матричном виде, так как связано с делением. После перехода к однородным координатам матрица центральной перспективной проекции вдоль оси z примет вид (1.6):

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z_v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

В результате преобразований точка М с однородными координатами (x: y: z: 1) после выполнения перспективных преобразования будет иметь новые координаты (xSh: ySh: zSh: h), которые вычисляются по формулам (1.7):

$$x_s h = x,\ y_s h = y,\ z_s h = 0,\ \ h = \left(\frac{z}{z_v}\right) + 1 \tag{1.7}$$

При этом переход к декартовым координатам осуществляется путем деления всех компонент на четвертую компоненту, то есть по формулам (1.8):

$$x_s = \frac{x}{(1+\frac{z}{z_v})},\ y_s = \frac{y}{(1+\frac{z}{z_v})},\ z_s = 0 \tag{1.8}$$

Таким образом, однородным представлением n-мерного объекта является представление его (n+1)-компонентами. Одна дополнительная координата, представляет собой безразмерный множитель, число ω [73]. Таким образом, преимущество описания положения объекта в однородных координатах, в сравнении с евклидовыми координатами, состоит в том, что при умножении/делении координат на одно и то же число геометрия объекта остается неизменной.

1.2.1 Геодезические методы получения координат точек

В геодезии координаты точек получают путем выполнения линейных и угловых измерений в принятой системе координат. При этом основными методами определения координат отдельной точки являются различные вариации засечек. Помимо этого, координаты точек сетей можно определять посредством проложения различного вида ходов, где выполняются и линейные и угловые измерения. Совсем недавно были популярны методы триангуляции и трилатерации. Также сети могут быть линейно-угловыми, в которых расстояния измеряют непосредственными или косвенными способами, углы − угломерными приборами. Выбор оборудования и технологии измерений зависит от требуемой точности, необходимой для решения поставленной задачи и особенностей измеряемого объекта.

Для того чтобы определить высоты точек выполняют нивелирование: гидростатическое, геометрическое, тригонометрическое или барометрическое. Перечислены наиболее популярные в геодезии.

Помимо инструментальных методов определения координат точек могут применяться более сложные технологии, такие как фотограмметрия и лазерное сканирование. Кроме того, на сегодняшний день широкое применение получили спутниковые методы позиционирования.

Вышеперечисленные методы определения координат применяются в геодезии повсеместно, и как сказано выше, всё множество координат точек объекта обеспечивает получение максимальной информации о нём, его размерах, форме, пространственном расположении (локализации) и его положении относительно других объектов. Однако, и сами измерения и вычисление координат выполняются в определенной системе, которую при повторных измерениях зачастую не просто использовать. Например, повторное использование разбивочной основы без новых измерений в том же объеме, чревато получением неверных результатов. В случае использования деформационных сетей выполняют циклические наблюдения, и если происходит смещение исходных реперов, то все наблюдения практически не поддаются интерпретированию [94]. В этой связи остро встаёт вопрос об обеспечении единства измерений, а также устранении грубых и систематических ошибок.

1.3 Описание объекта (сети) с использованием линейных элементов

Как отмечалось, возможен и другой вариант описания формы и размеров объекта (сети), он основан на применении линейных элементов. Простые геометрические фигуры, такие как треугольник и окружность определяются линейными элементами (отрезками) [73]. Окружность задается радиусом, эллипс длинами его полуосей, а форма и размер треугольника – длинами его сторон. Поверхность и форма сложного объекта могут быть представлены сочетаниями простых геометрических фигур, являющихся как бы «строительным материалом» для этого. Значит, для определения формы и размеров фигур необходимо знать соответствующие расстояния. В этом случае также возникает необходимость обеспечения единства измерений и исключения ошибок измерений, в особенности систематических. Кроме того, возникают сложности с описанием более сложных фигур. Например, многоугольники, можно описать только в том случае, если их разбить на простейшие фигуры, а это требует дополнительных измерений. Более того, при такой технологии можно узнать только форму и размеры объекта, но невозможно определить его местоположение.

1.3.1 Абсолютные и относительные измерения и величины

Из предыдущих разделов следует, что форму и размер объекта (сети) можно определить как с использованием координат, которые геодезисты получают, как правило, путем измерения расстояний, углов и выполнения нивелирования, так и с использованием соответствующих его (ее) элементов, характеризующих геометрию объекта (сети), для определения которых также необходимы линейные и угловые измерения. При этом результаты измерений могут быть получены как в абсолютных величинах, так и в относительных. Для того чтобы понять в чем их различие обратимся к статистике и метрологии, так как именно оттуда эти понятия и пришли. Согласно принятой в метрологии [119] классификации, измерения, по получаемым результатам, могут быть как абсолютными, так и относительными. При абсолютных измерениях значение искомой величины получают путем её сравнения с эталоном или шкалой, следовательно, она всегда имеет единицы измерений. Тогда как относительные измерения представляют собой отношения одноименных размерных величин или функций этих отношений [119], а, значит, они безразмерны. В статистике относительная величина является количественной мерой соотношения двух сопоставляемых величин и вычисляется как отношение сравниваемой (текущей) величины с основанием сравнения (база сравнения) [36]. Здесь также относительные величины не имеют единиц измерения и могут быть представлены в форме коэффициента, полученного при делении одной абсолютной величины на другую, в процентном соотношении (получают путем умножения отношения на 100) и в форме промилей (при умножении на 1000) [108].

Обычно геодезисты имеют дело с абсолютными измерениями и абсолютными величинами. В то время как использование относительных величин в ряде случаев может оказать более рациональным, в частности они могут служить эффективным инструментом для устранения систематических погрешностей, линейных относительно измеряемых величин.

1.3.2 Погрешности геодезических измерений. Обзор путей устранения систематических погрешностей геодезических измерений

Известно, что все измерения сопровождаются ошибками. Их принято подразделять на грубые, случайные и систематические. При обработке результатов, измерения, содержащие грубые ошибки исключают [11].

Случайные ошибки устранить невозможно, их влияние минимизируют, например, выполнением многократных измерений, используя более совершенные приборы или в процессе обработки измерений, с учетом того, что большинство случайных погрешностей, с которыми сталкиваются геодезисты, подчиняются какому-то закону распределения, чаще всего нормальному.

Систематические ошибки могут быть описаны в виде математической функции, зависящей от одного или нескольких факторов, оказывающих влияние на результат измерений. Обнаружить эти факторы порой очень сложно. Кроме того, исключить полностью влияние систематических ошибок практически невозможно. Но с ними необходимо бороться, так как они имеют свойство накапливаться, и зачастую неучтенная систематическая ошибка больше, чем случайная «отдаляет» измеренную величину от истинной [145]. Поэтому во всех отраслях наук, деятельность которых связана с измерениями, систематические ошибки стараются исключить, путем ввода поправок, совершенствования приборов и методов измерений.

Также как и другие виды ошибок, систематические ошибки бывают: личными, инструментальными, внешними (ошибки влияния условий среды). Кроме того, выделяют еще и теоретические ошибки [154]. Несмотря на то, что большинство личных ошибок носят случайных характер, встречаются также систематические ошибки, которые возникают, например, при наведении на наблюдаемые цели, совмещении штрихов угломерных кругов, взятии отсчета. При использовании современного автоматизированного оборудования, например, при измерении углов электронным тахеометром влияние личных ошибок сводится к минимуму.

Инструментальные ошибки появляются из-за остаточных погрешностей юстировки прибора. Они также могут быть как случайными, так и систематическими. Например, при измерении расстояний некомпарированной лентой возникает систематическая ошибка, которая к тому же еще и накапливается. Поэтому все специалисты перед началом работ проводят тщательную проверку приборов и оборудования, их юстировку и регулировку.

Внешние ошибки обусловлены влиянием внешней среды, будь то температура, давление и др. К ним относится, например, ошибка за рефракцию [43].

Теоретическая систематическая ошибка возникает в случае, если нет полного представления о причинах её возникновения, а значит, отсутствует возможность разработки алгоритма её устранения. Наглядным примером такой ошибки служит аберрация света, обнаруженная Брадлеем. До его исследований ученые имели ошибочное представление о ходе светового луча и не учитывали влияние этого фактора, а значит, полученные ранее результаты измерений содержали систематическую ошибку, обусловленную ее влиянием [154].

Согласно другой классификации, систематические ошибки делят на три группы: односторонне действующие, периодически действующие и постоянно действующие. В первом случае величина меняется, а знак остается постоянным, например, ошибка, возникающая из-за наклона нивелирной рейки. Устраняют ее путем ввода поправок в отсчет. Во втором случае величина постоянная, а знак меняется, например, ошибка влияния эксцентриситета алидады горизонтального круга теодолита. Устраняют ее введением поправки в измерение горизонтального угла. В третьем – величина и знак постоянны, например, ошибка, возникающая при измерении длин линий некомпарированной землемерной лентой. Устраняют путем введения поправки за компарирование) [3].

Для уменьшения влияния систематических ошибок выполняют специальные лабораторные исследования и последующий их анализ, будь то корреляционный и дисперсионный, гармонический [120, 136] или другие виды анализа. Важно при этом, влияние каждого фактора изучать отдельно. На основании полученных данных разрабатывают методы учета или устранения погрешностей. Систематическую ошибку также можно обнаружить в процессе обработки измерений, при определении разности двойных измерений [125].

В работах Голыгина Н.Х., Хиноевой О.Б., Ямбаева Х.К [27, 150, 151] предлагается использовать нейронные сети для обнаружения и учета систематических погрешностей. Так, например, известно, что повысить точность угловых измерений электронно-оптическими приборами можно путем выявления, например, места нуля вертикального круга и других ошибок и записи их в память прибора. В результате, при измерении углов (направлений) эти погрешности учитываются автоматически в режиме реального времени [27]. Более подробное описание технологии можно найти в работах М.М. Карсунской, Х.К. Ямбаева [62], [61].

Заметим, что систематические ошибки по характеру своего влияния на измеряемую величину могут быть линейными и нелинейными. В этой главе рассматриваются способы учета как тех, так и других. Но особое внимание уделяется линейным, так как они представляют наибольший интерес для данного исследования. Линейные систематические ошибки возникают, например, при измерении расстояний. Наиболее яркий тому пример – ошибка, возникающая вследствие отличия действительной длины ленты от номинальной. Эта ошибка постоянная и действует пропорционально измеренному расстоянию [11]. Однако, большинство современных приборов, таких как тахеометры, лазерные сканирующие системы, расстояния определяют косвенными методами.

Так, при определении расстояний свето- и радиодальномерами измеряют не само расстояние, а либо время, за которое электромагнитная волна проходит дистанцию между точками (дальномеры импульсного типа), либо разность фаз колебаний излученной и принятой электромагнитных волн (фазовые дальномеры). Во втором случае важно количество волн, которое укладывается между концами измеряемого отрезка. Но и время и длина волны зависят от условий среды, следовательно, в этом случае возникает систематическая ошибка из-за влияния внешних условий, и она линейна относительно измеряемого расстояния.

Разумеется, влияние ряда систематических погрешностей теодолитов, тахеометров, нивелиров, вращающихся лазерных систем и спутниковой аппаратуры исследуют еще на этапе сборки, стандартизации и сертификации оборудования, и результаты отражаются в паспорте прибора. В последствии специализированные службы периодически их переопределяют в процессе калибровки и метрологической аттестации приборов [34, 121]. Однако, значения некоторых величин могут меняться, поэтому их определяют прямо в поле, непосредственно перед началом работ. Порядок проведения процедур проверки, как правило, регламентирован в соответствующих частях ГОСТ Р ИСО 17123 ГСИ или представлен в инструкции по эксплуатации. Другие же ошибки могут незначительно меняться, но, несмотря на это, нужно следить за их постоянством. В работе [135] выявлена периодичность выполнения метрологических поверок, в зависимости от непостоянства параметров. Для этого, как правило, используют специализированные поверочные стенды и установки [35, 111, 113, 114, 164]. Известен опыт применения полевых проверочных стендов [147, 148]. Также обязательно выполняют поверки вспомогательного оборудования, такого как рейки, штативы [26]. Таким образом, большинство инструментальных ошибок исключают еще перед выполнением измерений. Так, например, в процессе проверки тахеометра определяют ошибки, возникающие вследствие наклона оси вращения прибора и оси вращения зрительной трубы, коллимационную ошибку, место нуля (зенита) вертикального круга; определяют постоянную поправку лазерного дальномера. При проверке нивелиров обязательно выполняют проверку круглого уровня и соблюдения главного условия. Если нивелир с компенсатором, выполняют проверку работы компенсатора [26, 122].

Инструментальную систематическую ошибку измерения расстояния электронным тахеометром исключают путем определения и учета постоянной поправки дальномера [183]. Изучением этого вопроса занимались Никонов А.В., Лифашина Г.В., Чешева И.Н., Ворошилов А.П., Середович В.А., Сучков И.О., Зубов А.В., Зубова Т.В., а также и зарубежные ученые. Данная задача решается при аттестации прибора и при его проверке. Для этого используется базисный способ [74, 75, 76, 111, 131, 141, 168, 170, 182], при котором возникает необходимость применения эталонных расстояний. Однако, постоянная может несколько отличаться от указанной в паспорте, и при выполнении высокоточных измерений это нужно учитывать [49]. Кроме того, сами производители также рекомендуют периодически переопределять величину постоянной тахеометра [123]. В связи с чем непосредственно перед началом работ выполняют проверку прибора. Некоторые производители электронных тахеометров и специалисты предлагают применения безбазисного метода, при котором осуществляют построения створа, выставляя прибор и отражатели на одной высоте с использованием трехштативной системы [104, 123]. Кроме того, известен и другой безбазисный метод определения постоянной тахеометра, в котором помимо линейных измерений выполняются также угловые [21]. Преимущество такой методики состоит в том, что определение постоянной поправки дальномера можно выполнять непосредственно в поле, без точного центрирования и измерения базисных (эталонных) расстояний, и необходимости выставления прибора и марок в створе.

Одним из факторов, оказывающих влияние на точность измерения расстояний электронным тахеометром, является выбор режима измерений – отражательный (марки, призмы) или же безотражательный [82, 137]. Никонов А.В. экспериментальным путем выяснил, что точность измерения расстояний в отражательном режиме на светоотражающую пленку выше в три раза, чем в безотражательном режиме [103].

Что касается измерений горизонтальных углов, то некоторые систематические погрешности устраняются посредством выполнения поверки, другие же за счет методики измерений. Современные тахеометры не позволяют выполнять перестановку лимба как на теодолите, поэтому ученые исследуют погрешность нанесения штрихов лимба более детально, путем поверки инструмента на специальных метрологических стендах [29, 30, 111]. В диссертации [41] предложено выполнять поворот подставки тахеометра на штативе и измерять неизменный горизонтальный угол между двумя коллиматорами (теодолитами 4Т30П) для определения систематической ошибки угловых измерений на различных участках лимба. На основании метода гармонического анализа выявлены факторы, влияющие на точность угловых измерений, и предложены пути их устранения. Исследованием точности измерений углов электронным тахеометром и вопросами устранения систематических погрешностей также занимались Д.А. Бахарев, М.М. Карсунская, С.Б. Шишкин и другие [5, 9, 28, 30, 157]. Согласно исследованию, представленному в статье [157], инструментальные систематические ошибки угловых измерений могут появляться и по другим причинам, например, при несоблюдении параллельности соответственных осей тахеометра и призмы или погрешности эксцентриситета. Влияние этих погрешностей и было исследовано в лабораторных условиях на «Универсальном метрологическом комплексе МИИГАиК». Комплекс УМК-М состоит из блоков линейных, горизонтальных и вертикальных угловых измерений, благодаря чему он применяется для поверки и калибровки высокоточных дальномеров, лазерных сканеров, трекеров, тахеометров, теодолитов, нивелиров и реек [111]. Методики определения погрешностей эксцентриситета алидады горизонтального круга тахеометра изложены в работах [13, 166]. Помимо этого, авторы статьи [48] выяснили, что из-за неуравновешенности алидады тахеометра возникают упругие деформации (азимутальные повороты), которые оказывают существенное влияние на точность измерений.

В ходе исследования, представленного в диссертационной работе [69] была предложена математическая модель учета влияния ряда факторов на точность измерения горизонтального угла электронным тахеометром (1.9):

$$\sigma_i = \Delta A + \left(\Delta_0 + \Delta_1 t_i + \Delta_2 t_i^2\right) cos\phi_i \qquad (1.9)$$

где ΔA – поправка, учитывающая постоянную ошибку визирования и влияние рефракции при измерении направлений на пункте, $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ − коэффициенты учета рефракции, зависящие от градиентов температуры, влажности во времени, t_i – время от начала наблюдения до измерения направления i-пункта, $\phi_i = \phi_0 + A_{изм.i}$− углы, между измеряемым направлением и направлениями максимальных градиентов температур и влажности, ϕ_0− фазовый сдвиг максимальных градиентов температуры и влажности, $A_{изм.i}$− измеренное i-ое направление.

Некоторые инструментальные ошибки удается исключить благодаря применению специально разработанных методик измерений. Как правило, они также регламентированы нормативными документами. Например, применение способа круговых приемов при измерении горизонтальных углов позволяет уменьшить влияние ошибки деления лимба угломерного прибора [10]. Способ симметричных комбинаций, разработанный В.Н. Ганьшиным также позволяет учесть влияние инструментальных систематических ошибок, вызванных, например, люфтом подъемных винтов при вращении алидады [161]. Способ круговых приемов, разработанный И.М. Конопальцевым позволяет учесть влияние рефракции. Суть методики состоит в том, чтобы добиться равной среднеквадратической ошибки измеренного угла по направлениям [161]. Наиболее подробно основные принципы, позволяющие повысить точность угловых измерений за счет правильно подобранной методики рассмотрены в [155, 161]. Измерение углов при круге лева и круге права позволяет учитывать коллимационную ошибку и влияние эксцентриситета горизонтального круга. Личные систематические ошибки при угловых измерениях в основном проявляются при наведении сетки нетей на цель с какой-то постоянной ошибкой. Влияние этой ошибки можно уменьшить путем повышения контрастности цели относительно фона или ввести соответствующую поправку в измеренные горизонтальные углы [140, 163].

Также на результаты угловых и линейных измерений влияют ошибки центрирования – случайные и систематические. Систематическая ошибка при работе с нитяным отвесом возникает из-за несовпадения нити отвеса и оси вращения прибора (в рабочем положении). При центрировании оптическим отвесом фактором, обуславливающим влияние систематической ошибки, является неточность установки сетки нитей центрира [12]. Эти ошибки устраняют при проверке инструмента или учитывают путем ввода соответствующих поправок [60]. Ошибка центрирования оказывается влияние и при проведении GNSS измерений, в связи с чем в работе [18] предложена технология выполнения проверки встроенного в адаптер GNSS-антенны оптического центрира.

Для устранения методических систематических погрешностей наземных лазерных сканирующих систем (вызванных влиянием окружающей среды и характеристиками объекта сканирования) применяются два основных способа. Первый способ позволяет устранить ошибки в процессе предварительной обработки сканов, на основании анализа влияния каждого отдельного фактора на результаты измерений углов и расстояний. Второй способ подразумевает комплексный подход, при котором рассматривается влияние множества факторов.

В этом случае, путём использования полиномиальных моделей, вводят поправки непосредственно в координаты точек облака скана [177, 179, 186, 188, 186]. Первый способ позволяет устранить большую часть погрешностей, второй используется для уменьшения влияния оставшихся погрешностей.

Систематические ошибки, вызванные несовершенством оборудования наземных лазерных сканирующих систем, определяются в процессе калибровки прибора и называются параметрами калибровки. Разумеется, для каждой модели количество параметров калибровки, их значения и функции зависимостей измерений от различных факторов различны. Большой вклад в развитие лазерных сканирующих систем в России внесли В.А. Середович, А.В. Комиссаров, Д.В. Комиссаров. В частности, исследования систематических ошибок наземных лазерных сканирующих систем и пути их уменьшения отражены в работах [66, 67, 129]. К общим для всех моделей сканеров факторам, оказывающим влияние на точность измерений, относятся следующие параметры: постоянная поправка дальномера, масштабный коэффициент b, вызванный разностью плотности воздуха, который определяется для каждого дальномера по результатам лабораторных испытаний (в процессе которых выполняют измерения эталонной длины). Здесь, также, следует учитывать, что дальномеры бывают двух типов – фазовые и импульсные. И в зависимости от того какой положен принцип измерения расстояния возникают другие факторы, которые также имеют систематическую составляющую. Ошибка, вызванная несинхронностью регистрации измерений расстояния, полярного и вертикального угла устраняется на этапе сборки оборудования. Кроме того, как и у электронных тахеометров, необходимо устранять влияние эксцентриситета, определять место нуля вертикального круга и коллимационную ошибку горизонтального круга [130].

Благодаря специализированному программному обеспечению современных сканеров, эти параметры учитываются автоматически в процессе измерения углов и расстояний. Однако, в этом есть свой недостаток – некоторые производители не дают доступ к «сырым» неисправленным данным измеренных угловых и расстояний, а значит нельзя внести корректировки, если параметры калибровки со временем отличаются от указанных в паспорте. В таком случае, для уменьшения влияния остаточной систематической погрешности, некоторые производители предлагают использовать функцию самокалибровки, другие позволяют проверять актуальность заводских поправок и, в случае необходимости, внести изменения через специализированное программное обеспечение. Третий вариант подразумевает вычисление углов и расстояний по полученному облаку точек и последующее определение остаточных (после внесения заводских) поправок. Этот случай и рассматривается в статье [19]. Комплекс работ, предложенный авторами, по решению поставленной задачи подразумевает использование специального тестового полигона, параметры которого известны с более высокой точностью. Исследователями также разработано специальное программное обеспечение, позволяющее вычислить поправки в измеренные величины. В целом методика схожа с технологией калибровки цифровых неметрических камер [130]. При этом, при выполнении калибровки сканера очень важно свести к минимуму ошибку внешнего ориентирования сканов, поэтому в работе [156] предлагается использовать радиальное месторасположение марок, а для определения постоянной дальномера сканировать металлические пластины на разных расстояниях от сканера.

Для тех моделей лазерных сканеров, которые позволяют работать с первичными данными, параметры калибровки рассчитывают по измеренным расстояниям, вертикальным и горизонтальным углам [180, 181].

Еще один фактор, который оказывает влияние на результаты линейных и угловых измерений лазерными сканирующими системами и является систематической ошибкой, обусловлен низкой температурой внутренних блоков сканера. На основании исследований двух сканеров фирм Riegl и Mensi [67, 68] выяснилось, что сканер необходимо включать за 5-7 минут перед началом измерений.

Что касается геометрического нивелирования, то перед работой с прибором выполняют проверку главного геометрического условия нивелира и если нивелир с компенсатором, то выполняют проверку работы компенсатора. Также, согласно

[26] для нивелиров с компенсатором в лабораторных условиях определяют систематическую ошибку компенсатора при помощи автоколлиматора или теодолита. Если значение этой систематической ошибки существенно, то необходимо выполнять порядок действий на станции согласно пункту 15.14 настоящей Инструкции по нивелированию I-IV классов. Кроме того, перед нивелированием обязательно выполняют проверку правильности нанесения дециметровых делений, определяют длину метровых интервалов, прогиб корпуса рейки. При измерении превышений цифровыми нивелирами со штрих-кодовыми рейками кроме вышеперечисленных проверок, что и для оптических нивелиров с компенсатором также обязательно контролируется масштаб штрих-кода рейки и ее геометрия, которые поверяются также на интерферометре или компараторе [33]. В статье [17] доказывается необходимость ввода поправки за температурное расширение дюралюминиевых штрих-кодовых реек, так как оно в 4 раза больше, чем у древесины. В статье также предложена технология проверки дециметровых интервалов штрих-кодовой рейки фирмы Trimble. Кроме того, влияние на точность взятие отсчет по штрих-кодовой рейке оказывает освещение, ее наклон и неподходящий масштаб рейки. Поэтому необходимо избегать «засветок», держать рейку отвесно и учитывать то обстоятельство, что при определенном расстоянии от нивелира ширина интервала кода рейки проецируется на пиксель, в результате чего может возникнуть систематическая ошибка интерполяции [138].

При выполнении геометрического нивелирования способом из середины устраняют ошибку за кривизну Земли и такая методика рекомендуется Инструкцией [26]. Кроме того, этот способ позволяет учитывать и влияние земной рефракции, однако это удается не всегда [42]. Известно, что влияние земной рефракции тем больше, чем меньше расстояние между осью визирования и земной поверхность. Это учитывают при высокоточном нивелировании, устанавливая минимальное расстояние между земной поверхностью и осью визирования. Так, согласно Инструкции по нивелированию I-IV классов оно составляет не менее 0,5 м, а в случае, если расстояние от рейки до прибора больше 25 м, то не менее 0,8 м [26]. При закладке реперов для нивелирования I-II классов необходимо учитывать особенности территории и выбирать наиболее благоприятное время для выполнения работ. Это также позволяет минимизировать влияние систематических ошибок.

Влияние внешних условий

Долгое время специалисты в области геодезических измерений трудились над тем, чтобы установить общие закономерности, позволяющие учитывать влияние внешних условий на результаты измерений. Эти знания, в том числе, отражены и в инструкциях по выполнению геодезических работ. Так, например, инструкцией по нивелированию строго ограничены расстояния, высота визирного луча над подстилающей поверхностью, а измерения при одинаковых плечах позволяют исключить некоторые приборные ошибки и ошибку рефракции (если речь идет о нивелировании) [26]. Исследованием влияния рефракции (в том числе астрономической) интересовался И.С. Пандул [110, 112]. В его работе [109] предлагается методика нивелирования, которая позволяет уменьшить влияние рефракции благодаря наведению углового биссектора на крайние верхние положения колеблющегося штриха. В цехах, на промышленных предприятиях и объектах электроэнергетики, существенное влияние на результаты измерений могут оказывать такие факторы, как плохое освещение (предпочтение в данном случае стоит отдавать оптическим нивелирам), вибрации, значительные перепады температур (в особенности вблизи работающего оборудования). Влияние этих внешних факторов учитывают при планировании работ. Поэтому в цехах, где имеют место быть вибрации, не рекомендуется использовать нивелиры с компенсатором, а ножки штатива предлагается оснащать резиновыми накладками. С целью уменьшения влияния перепадов температур (а в цехах они значительнее, чем в поле) необходимо избегать приближения луча визирования к нагретым поверхностям. Кроме того, авторы статьи [105] считают, что в ряде случаев целесообразно геометрическое нивелирование заменить тригонометрическим.

Что касается угловых измерений, то исследованием зависимостей влияния окружающей среды (температуры, давления, влажность и др.) интересовались

А.С. Саюнов, Н.В. Яковлев, А.В. Мерзенин. Ошибки, вызванные боковой рефракции, величина которых варьируется от 0,5" до 7" рассмотрены в работах [86, 162, 163]. Значения поправок значительно изменяются во времени, поэтому величину поправки нужно рассматривать как параболическую функцию от времени. Кроме того, в работе [126] было установлено, что для учета влияния боковой рефракции необходимо вводить поправки по измеренным горизонтальным градиентам температуры и влажности воздуха. Также авторы вывели формулу для расчета соответствующих поправок. При этом согласно исследованию [160] ошибка влияния градиента давления очень мала и ее можно не учитывать. Что касается горизонтальной рефракции, то авторы работ [52, 152, 161] пришли к мнению, что она зависит от температуры, давления и влажности воздуха и при съемки вблизи сооружений (менее 1,5 м), поправка в значение измеренного угла может достигать 20".

Стоит отметить, что влияние внешних условий среды может быть минимально, при выборе правильного времени проведения измерений. Специалисты рекомендуют некоторые наблюдения выполнять утром и вечером. Работы И.И. Менухова, А.В. Никонова, М.К. Дрок посвящены поиску наиболее благоприятного времени для выполнения наблюдений [44, 84, 85, 99]. Таким образом, измерения лучше выполнять в пасмурные дни, при невысоких температурах, желательно в холодное время года-зимой, не рекомендуется выполнять измерения в первые 1,5-2 часа после восхода и до захода солнца. Однако другие исследователи утверждают, что при постоянном атмосферном давлении влияние внешних условий будет минимально при температуре воздуха равной 10°С [123]. Согласно [115] с целью минимизации влияния рефракции и турбулентности атмосферы на результаты измерений горизонтальных углов наблюдения следует выполнять в один из двух благоприятных промежутков дня: в течение 1,5-2 часов через час после восхода солнца, вечером с 15-16 часов и прекращать за час до захода солнца.

Все современные тахеометры автоматически вычисляют поправки за влияние атмосферы, для этого нужно ввести в данные о станции параметры о температуре воздуха и атмосферном давлении [121].

При выполнении одностороннего тригонометрического нивелирования электронным тахеометром возникают систематические ошибки, вызванные вертикальной рефракцией (нормальной и аномальной). Влияние нормальной рефракции уменьшают путем ввода соответствующих поправок, которые вычисляются по известным формулам [80, 88, 89, 99, 100, 101]. Как правило, коэффициент рефракции принимают равным +0,13. На самом деле в течение дня это значение меняется от +3,0 до -4,4 [80]. Учесть влияния аномальной рефракции возможно путем ввода поправки, но также можно свести ее влияние к минимуму, при наведении зрительной трубы на верхнюю границу колебания изображения [107]. Авторы статей [22, 23] предлагают комбинированный способ учета влияния вертикальной рефракции при тригонометрическом нивелировании. Он основан на использовании измерений как метеорологических, так и геодезических.

Применение для тригонометрического нивелирования электронным тахеометром методики двустороннего нивелирования и нивелирования способом из середины, увеличение высоты визирного луча (не менее 1 метра, а высота цели не менее 1,5 метров) над подстилающей поверхностью позволяют уменьшить влияние вертикальной рефракции [101].

Подытожим накопленный учеными опыт по решению задачи учета систематических ошибок. В геодезии, как и в любой другой науке, связанной с измерительной техникой, выявлены следующие варианты уменьшения влияния систематической ошибки:

1. В случае, если удается установить закон появления систематической ошибки, ее влияние уменьшают путем ввода соответствующей поправки в измеренные величины. Ясно, что поправка будет определяться с погрешностью и что также можно учесть, например, в процессе уравнивания зависимых величин способом, предложенным в [81, 98].

2. Совершенствуют методику выполнения измерений так, чтобы величина систематической ошибки меняла знак (перестановка лимба между приемами при измерении горизонтальных углов – уменьшает влияние ошибок нанесения штрихов лимба).

3. Применяют определенную методику обработки измерений (например, обработка двойных измерений) [125].

Подробное описание работ, посвященных выявлению и учету систематических ошибок измерений, сделано для подчеркивания этого вопроса и необходимости поиска его решений. Кроме того, факторы, вызывающие систематическую ошибку измерений, могут быть неизвестны, но при этом могут оказывать существенное влияние на результаты измерений. Одним из способов учета такой ошибки является выполнение измерений разными независимыми методами и при разных условиях наблюдений.

1.4 Описание объекта (сети) с использованием коэффициентов отношений и масштабного коэффициента

Выше рассмотрены варианты описания объекта (сети) с помощь координат и геометрических элементов. В действительности, возможен третий вариант – с использованием безразмерных величин (коэффициентов отношений и масштабного коэффициента). Для пояснения рассмотрим треугольник. Пусть измерены все три его стороны в метрах – 100.00 м, 86.60 м, 50.00 м. В результате, определены форма и его размер. Так обычно поступают в геодезии, и такие измерения, как сказано выше, называются абсолютными. Но можно отнестись к этим числам как к безразмерным величинам, то есть, если одной стороне соответствует 100 некоторых единиц, то другой 86.6, а третьей 50. Таким образом, форма треугольника тоже определена. Но эту форму описывает и бесчисленное множество других троек чисел, например 1.0000, 0.8660 и 0.5000. Значит, тройка (t_1, t_2, t_3) чисел описывает множество подобных фигур разного размера (рисунок 1.2). Умножение и деление их на одно и то же число ничего не меняет. То есть это однородные величины, в том же смысле, в котором это определено для однородных координат, рассмотренных выше.

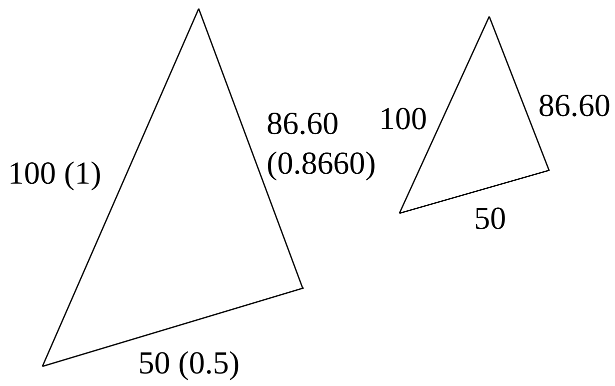

Рисунок 1.2 – Подобные треугольники

В таком случае возникает вопрос, как от относительных величин перейти к абсолютным, принятым в геодезии. Как уже упоминалось ранее, такая технология применяется в статистике и электроэнергетике, где существует понятие система относительных единиц (*per-unit system*) [133]. Система относительных единиц, применяемая в электроэнергетике для расчета параметров, величины которых определяются относительно базовой величины, принятой за единицу. Эта система используется для обозначения параметров трансформаторов, генераторов и другого электротехнического оборудования. Помимо этого, применение систем относительных единиц значительно упрощает решение ряда задач и позволяет вычислить параметры в системах передачи электроэнергии. После выполнения расчетов в относительных (безразмерных) величинах возможен переход к абсолютным (системным) величинам, путем умножения на базовую величину [20, 24]. Основное преимущество применения такой технологии заключается в том, что отсутствует необходимость применять различные шкалы измерений, а значит величины не «привязаны» к единицам измерений.

Если же это перенести, например, на линейные геодезические построения, то возникает ещё одно очевидное преимущество. При постоянстве условий наблюдений такой подход к линейным измерениям позволяет автоматически учитывать влияние систематических ошибок, линейных относительно измеряемой величины, а если стороны более или менее равны – то и не линейных.

То есть, если нужна только форма треугольника, то она определяется тройкой чисел (t_1, t_2, t_3), но если требуется и его размер, то, по аналогии с рассмотренной ранее системой однородных координат, для описания требуется уже четвёрка чисел (t_1, t_2, t_3, w). Причём w это масштабный коэффициент. Это тоже четвёрка однородных величин, так как умножение и деление их на одно и то же число ни форму, ни размер треугольника не меняют. Коэффициенты t будут показывать истинные значения сторон, если $w=1$. Получить масштабный коэффициент, как уже говорилось ранее, можно сопоставлением любого из коэффициентов t его длине в заданных единицах (метрах, футах и т.д.). Причём это может быть измеренный отрезок (базис) и не связанный с самим треугольником.

Предположим, в связи с этим, что измеряется совокупность однородных параметров x_i, характеризующих некоторое явление (объект), но результатом этого процесса являются не конкретные их значения, а однородные безразмерные величины K_i (по аналогии с однородными координатами). Значения самих параметров неизвестны, и полученная совокупность не характеризует рассматриваемое явление (объект), так как и другим явлениям она может соответствовать (пример, подобные треугольники). Предположим теперь, что одному из коэффициентов поставлено в соответствие некоторое число ω в той размерности, в которой было бы желательно его изучать. Теперь пара (вектор K_i и число ω) совершенно однозначно определяют рассматриваемое явление (объект), причём она образует систему однородных элементов в том смысле, что умножение или деление их на одно и то же число ничего не меняет. Понятно, что точность описания явления (объекта) зависит от точности полученных коэффициентов и точности назначенного числа ω (а она связана с качеством исходных данных).

Заметим, что форма треугольника может быть определена и путём измерения его внутренних углов (β_1, β_2, β_3). Ясно, что между тройкой линейных элементов и тройкой углов есть связь. Но более чётко она проявляется, если использовать не сами углы, а их синусы, так как, исходя из теоремы синусов, получается, что они также являются коэффициентами отношений противолежащих сторон. То есть в вышеприведённом примере (100.000, 86.60, 50.00) – это коэффициенты, полученные по результатам линейных измерений, (1.000, 0.8660 и 0.5000) – угловых. Описывают они один и тот же объект. Но для оценки его размеров потребуются разные масштабные коэффициенты.

Похоже, что такая технология может быть применена для решения множества геодезических задач, и её преимущество в том, что она позволяет учитывать влияние систематических ошибок линейных относительно измеряемых величин. Но наиболее актуально ее применение при решении задач деформационного мониторинга, так как решение этой задачи предполагает исследование изменений формы и размеров объекта (сети) во времени и связано с многократными измерениями одних и тех же величин. Очевидно, что в этом случае, коэффициенты отношений, полученные посредством угловых или линейных измерений, будут описывать состояние системы в данный момент времени. Сопоставление коэффициентов, полученных из первого цикла наблюдений и из последующих циклов, может многое рассказать о состоянии исследуемого объекта. Так, например, если коэффициенты отношений, полученные в первом и втором циклах измерений равны друг другу, можно считать, что размер и форма со временем не меняются. Причём, если базис – один из элементов объекта, то речь идёт только о неизменности формы. Если он с объектом не связан и стабилен во времени, то будут оценены равномерные расширения и сжатия.

1.5 Геодезические методы определения деформаций зданий, сооружений и земной поверхности

В предыдущем параграфе отмечалось, что применение коэффициентов отношений может быть весьма эффективным средством решения задач деформационного мониторинга. В связи с этим, важно понять, а как обстоят дела в настоящее время. Деформации определяют по разностям координат, полученных в различных циклах наблюдений [4].

Согласно [32] при определении вертикальных деформаций зданий и сооружений используют реперы (исходные точки) и деформационные марки, по изменениям координат которых во времени и определяют наличие или отсутствие деформаций. Местоположение деформационных марок определяется для каждого объекта в отдельности и зависит от конструктивных особенностей зданий (сооружения), нагрузок, ожидаемого значения осадки, особенностей эксплуатации и ряда других факторов, упомянутых в нормативных документах. Способы и средства измерений также представлены в соответствующих документах. Так, для определения вертикальных смещений возможно использование геометрического, тригонометрического и гидростатического нивелирования и фотограмметрических методов.

Что касается определения смещений в плане, то помимо наличия устойчивых опорных знаков и деформационных марок, здесь также необходимо наличие неподвижных исходных пунктов и ориентирных знаков. Причем стабильность исходных пунктов необходимо контролировать. Горизонтальные перемещения могут определяться по измерениям, полученным методами триангуляции, фотограмметрии, створных наблюдений, отдельных направлений, трилатерации и полигонометрии.

Благодаря непрерывно растущему технологическому прогрессу для оценки стабильности зданий и сооружений стали применяться и другие методы – наземные лазерные сканирующие системы, роботизированные тахеометры, спутниковые методы измерений. При этом, как правило, определяют пространственные координаты точки. Для оценки стабильности объекта посредством измерений роботизированным тахеометром необходимо тщательно выбирать точку стояния прибора, так как она должна быть стабильная и с нее должен обеспечиваться широкий обзор на объект наблюдений. Желательно, чтобы точка совпадала с точкой опорной геодезической сети. Если это невозможно, то координаты точки стояния можно определить, например, методом обратной засечки. Далее посредством цикличного наблюдения положения деформационных марок (контрольных точек) определяют изменения их местоположения и по полученным смещениям делают заключение о стабильности объекта [55]. Недостаток – необходимость наличия стабильной опорной сети, выполнение всех измерений в единой системе координат, тщательное устранение систематических погрешностей. Существуют технологии уравнивания, которые позволяют все же учесть влияние систематической ошибки, но для этого величина систематической ошибки должна быть неизменна [25].

Спутниковые технологии также применяются для оценки стабильности зданий и сооружений [178, 184, 187]. На основании спутниковых измерений стали использовать так называемые геодинамические сети, на опорных пунктах которых установлены постоянно работающие спутниковые приёмники. Эти пункты служат основой для дальнейшего развития деформационных сетей. В том случае, если нет возможности расположить эти пункты на земной поверхности, их располагают на крышах. Достоинства такой системы – постоянное уточнение координат опорных пунктов, возможность использования технологии в сейсмоактивных регионах. Недостаток – пункты, находящиеся на зданиях или нестабильных участках земной поверхности, сами могут быть подвержены деформациям. В таком случае нужно определять смещения, вызванные нестабильностью самих пунктов (например, деформациями зданий) [149].

Широкое применение для решения поставленной задачи получили наземные лазерные сканирующие системы [7, 15, 47, 167, 189]. При этом на объекте закрепляются деформационные марки, координаты которых определяются посредством линейно-угловых измерений электронными тахеометрами, следовательно такая технология также требует наличия опорных пунктов геодезической сети. Одновременным преимуществом и недостатком технологии является большая избыточных данных, с одной стороны это позволяет получить большой объем информации об объекте, построить ее трехмерную модель, с другой стороны значительно усложняется обработка результатов измерений, необходимо выполнять фильтрацию точек посредством специальных алгоритмов, выявлять и проводить отбраковку грубых измерений.

По мнению специалистов более эффективными и точными являются комбинированные методы наблюдений. Так, например, в статье [158] описывается опыт совместного использования технологий ГНСС и наземного лазерного сканирования. Такое сочетание позволило определить деформации крена и изгиб.

Согласно регламентирующим документам, при оценке стабильности земной поверхности также используются инструментальные и фотограмметрические методы наблюдений. Но основной методикой измерений при этом, согласно нормативным документам и по сей день является технология наблюдений вдоль профильных линий [118]. В частности, на карьере при оценке стабильности его бортов создается система профильных линий, состоящих из группы рабочих и опорных реперов, при этом профильные линии могут располагаться как через оба борта, так и отдельно на каждом борту. Опорные реперы профильных линий закладываются вне зоны деформаций, причем на каждой стороне их должно быть не менее двух. Как правило их совмещают с пунктами рудничной маркшейдерской опорной сети (к пунктам триангуляции, полигонометрии и нивелирным реперам) или выполняют привязку к ним. При этом осуществляют как линейные измерения, так и нивелирование (геометрическое и тригонометрическое), то есть определяют горизонтальные и вертикальные смещения. Не исключается проложение нивелирных ходов I-IV классов и тригонометрического нивелирования. Главное, чтобы они соответствовали предъявляемой точности измерений для выполнения данного вида работ. Помимо этого, с целью определения оползневых процессов карьеров и отвалов используются методы наземной стереофотограмметрической съемки [118]. До настоящего времени наблюдения за деформациями на карьерах проводились методами наземной стерефотограмметрической и фотограмметрической съемки с использованием фототеодолитов [128]. Прогресс не стоит на месте и сейчас, с целью оптимизации съемочного процесса и увеличения производительности при обработке результатов вместо фототеодолитов используют цифровые камеры с высоким разрешением. Контроль устойчивости земной поверхности осуществляется по заранее заложенным контрольным точкам (реперам) на нестабильном участке. С возможностями применения цифровой стереофотограмметрии как одной из методик в системе контроля деформаций бортов карьера можно ознакомиться в работах [96, 106]. Основное преимущество использования методов наземной фотограмметрии заключается в том, что они позволяют наблюдать быстропротекающие процессы, но эта технология также требует наличия стабильных пунктов.

На сегодняшний день помимо методов, предусмотренных регламентирующими документами, применяются дистанционные методы наблюдения за деформациями. В работе [8] описан опыт совместного применения спутниковых наблюдений и космической радиолокационной съемки для оценки вертикальных смещений земной поверхности на месторождениях нефти и газа Западно-Сибирской мегапровинции. Однако, наиболее рациональной технологией для решения данной задачи, по мнению авторов, является технология, основанная на выполнении как интерферометрической съемки и спутниковых наблюдений, так и инструментальных, традиционных методов наблюдений (последние должны выполняться с периодичностью раз в несколько лет).

Метод наземной радиолокационной интерферометрии является одним из самых передовых. Он активно внедряется в область маркшейдерско-геодезического контроля за деформациями. Основные преимущества метода заключаются в том, что он является бесконтактным, всепогодным и позволяет в режиме близкому к реальному времени зарегистрировать смещения и определить величину деформаций с достаточно высокой точностью, первые миллиметры [54]. В работах [171], [65] рассмотрен опыт применения наземной радиолокационной системы IBIS при наблюдении деформаций на карьерах.

В статье [185] рассмотрен опыт применения БПЛА для мониторинга оползневых процессов в горах на Северо-Западе Словении. В работах [39, 71, 172, 175] рассмотрен опыт применения БПЛА при деформационном мониторинге бортов карьера.

Не следовало бы обходить стороной и вопросы оценки стабильности пунктов геодезических сетей. Но пока отметим, что всё разнообразие предлагаемых методов, отраженных в работах [2, 6, 31, 46, 50, 56, 91, 92, 93, 94, 95, 102, 134, 139, 153, 169] основано на результатах периодических линейно-угловых измерений и нивелирования.

Таким образом, подавляющее большинство существующих на сегодняшний день технологий имеют существенный недостаток – необходимость выполнения измерений всегда в одной и той же системе координат, следовательно, необходимо иметь стабильные репера (опорные точки), координаты которых не меняются со временем. Кроме того, существенное влияние на точность определения координат точек оказывают систематические ошибки измерений, которые, как уже было показано ранее, порой бывает очень сложно полностью исключить.

Наихудшим образом это сказывается и на решении задач деформационного мониторинга, так как величина и знак систематической ошибки от цикла к циклу могут меняться из-за влияния внешних факторов и конструктивных особенностей приборов. Рассмотренными выше способами их стремятся исключить. Но, помимо этого, стараются выполнять измерения в разных циклах при относительно одинаковых внешних условиях, с использованием одного и того же комплекта геодезического оборудования и придерживаются одной и той же методики измерений [77, 142]. В связи с чем, необходимость разработки такой методики измерений и обработки результатов, которая обеспечивала бы более простой учёт влияния систематических ошибок, в частности путём использования однородных элементов, является актуальной задачей современной геодезии. Тем более, что по сути своей задачи, например, деформационного мониторинга заключается в оценке изменения формы и размера объекта (сети). А это, как показано выше, возможно и с использованием коэффициентов отношений измеренных величин.

Выводы к главе 1

1. Существует множество современных методов определения и учета систематической ошибки. Однако, как показывает литературный обзор это достаточно трудоемкий процесс. Более того, большинство работ, связанных с определением систематических ошибок, возникающих при геодезических измерениях, или поправок в измеренные величины, предполагают использование специализированных стендов, которые к тому же нужно калибровать [144]. А внешние условия, при которых определены поправки (по результатам

лабораторных исследований) могут существенным образом отличаться от реальных условий наблюдений.

2. К результатам геодезических измерений, по крайней мере, линейным, возможен двоякий подход. С одной стороны, это абсолютные измерения искомых величин в определённых единицах измерений. В этом случае возникают проблемы исключения ошибок, в том числе и систематических. С другой стороны, это коэффициенты отношений, величины безразмерные, применение которых обеспечивает автоматическое исключение систематических ошибок, линейных относительно измеряемой величины, а при определённых условиях и нелинейных, что является большим плюсом. Для перехода к абсолютным значениям нужно масштабирование.

3. Использование коэффициентов отношений может, при определённых условиях, оказаться достаточно эффективным при решении ряда геодезических задач, в частности при деформационном мониторинге. В некоторых случаях это обеспечивает сравнительно большую свободу в процессе измерений, так как нет необходимости знать в каких системах координат, (в том числе, если их и несколько) длины или коэффициенты отношений получены.

Геодезисты проходили мимо такой возможности (использования относительных величин (измерений) и обработки полученных результатов. Нет ни соответствующих методик, ни необходимых алгоритмов. Устранение такого пробела позволило бы расширить арсенал средств специалистов, и решать многие практические задачи более эффективно. Разработке необходимого для этого аппарата и посвящены последующие главы.

ГЛАВА 2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН В ГЕОДЕЗИИ

2.1 Оценка эквивалентности линейных и угловых измерений по точности

Как правило, при определении координат точек местности, геодезисты отдают предпочтение линейно-угловым построениям (такие, например, как различные комбинации линейно-угловых засечек и сетей, состоящих из звеньев треугольников), поскольку считается, что точность результата, получаемая при совместном уравнивании линейных и угловых измерений, выше, точности получаемой по результатам только угловых, или только линейных измерений [1, 132]. Однако в работе [59] авторы утверждают, что выполнять совместное уравнивание линейных и угловых измерений целесообразно в том случае, если соотношения точностей угловых и линейных измерений удовлетворяет некоторому интервалу, то есть, если они в некотором смысле эквивалентны по точности. А это требует оценки, так как форма треугольников сети весьма разнообразна.

Выше отмечалось, что параметры сети могут быть только линейными или только угловыми, и заданы как абсолютными, так и относительными величинами. В частности, для того, чтобы знать и форму треугольника, и его размер нужно выполнить измерения всех его стороны в абсолютных величинах. Если использовать относительные величины, будет определена только форма (один вариант из бесчисленного множества подобных треугольников). При этом их можно получить как путём линейных измерений, так и угловых (через их синусы). В таком случае, можно предположить, что два метода эквивалентны по точности, если равны относительная ошибка измерения линейного коэффициента отношений и относительная ошибка определения синуса противолежащего угла.

Рассмотрим сказанное на примере.

На (рисунок 2.1) изображены два равных треугольника. В одном измерены только длины сторон. Во втором – только горизонтальные углы. Воспользуемся принципом отношений (подобия), рассмотренным в работе [72]. Найдем: в левом

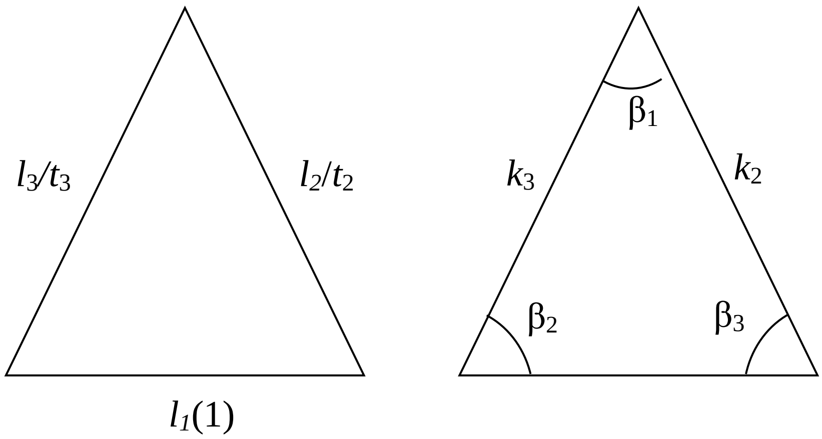

Рисунок 2.1 – Подобные треугольники

треугольнике отношения t сторон относительно первой стороны, в правом – отношения k синусов относительно синуса первого угла. В результате получим следующие зависимости (или выражения) (2.1):

$$t_2 = \frac{l_2}{l_1},\ t_3 = \frac{l_3}{l_1},\ k_2 = \frac{Sin\beta_2}{Sin\beta_1},\ k_3 = \frac{Sin\beta_3}{Sin\beta_1} \qquad (2.1)$$

Тогда ошибки оценки отношений t можно вычислить по формулам (2.2):

$$m_{t_3} = \frac{\sqrt{l_1^2+l_3^2}}{l_1^2} m_l = \frac{\sqrt{1+t_3^2}}{l_1} m_l,\ m_{t_2} = \frac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{l_1^2} m_l = \frac{\sqrt{1+t_2^2}}{l_1} m_l \qquad (2.2)$$

где m_l – ошибка измерения расстояний.

Отсюда, например, следует, что ошибка отношения расстояний в треугольнике зависит не от абсолютных, а от относительных ошибок их измерения.

Если треугольник равносторонний, с длиной сторон l, то ошибка отношений t вычисляется по формуле (2.3):

$$m_t = \frac{m_l}{l}\sqrt{2}, \qquad (2.3)$$

что и следовало ожидать.

Если измерения всех углов треугольника равноточные, то для k справедливо любое из следующих соотношений (2.4):

$$m_{k_3} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_1 Cos^2\beta_3 + Sin^2\beta_3 Cos^2\beta_1}}{Sin^2\beta_1} m_\beta, \quad m_{k_2} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_1 Cos^2\beta_2 + Sin^2\beta_2 Cos^2\beta_1}}{Sin^2\beta_1} m_\beta$$

$$m_{k_3} = \frac{\sqrt{Cos^2\beta_3 + Sin^2\beta_3 Ctg^2\beta_1}}{Sin\beta_1} m_\beta, \quad m_{k_2} = \frac{\sqrt{Cos^2\beta_2 + Sin^2\beta_2 Ctg^2\beta_1}}{Sin\beta_1} m_\beta \tag{2.4}$$

$$m_{k_3} = \frac{\sqrt{Sin^2(\beta_1+\beta_3) - 0.5Sin2\beta_3 Sin2\beta_1}}{Sin^2\beta_1} m_\beta, \quad m_{k_2} = \frac{\sqrt{Sin^2(\beta_1+\beta_2) - 0.5Sin2\beta_2 Sin2\beta_1}}{Sin^2\beta_1} m_\beta,$$

где m_β – ошибка измерения угла.

Согласно формулам (2.2) и (2.4) точность определения величин t и k зависит от формы треугольника. К аналогичному выводу пришёл и автор статьи [146], в которой на примере треугольника установлена зависимость соотношения точностей линейных и угловых измерений от формы фигуры.

Если треугольник равноугольный (равносторонний), то легко подсчитать, что $m_k = 0.82m_\beta$, где угловая ошибка задана в радианной мере. Таким образом, для того, чтобы линейные измерения в равностороннем треугольнике по точности были эквивалентны угловым, должно соблюдаться равенство (2.5):

$$\sqrt{2}\frac{m_l}{l} = 0.82m_\beta \tag{2.5}$$

или

$$m_\beta = 1.72 m_l \rho''/l \tag{2.6}$$

Пусть m_l=5 мм, l = 800 м, (т.е относительная ошибка измерения 1/160 000), тогда m_β=2.2''

Можно составить таблицу эквивалентности линейных и угловых измерений по точности для линейно-угловых сетей с примерно равными сторонами – таблица 2.1.

Таблица 2.1 – Эквивалентность линейных и угловых измерений по точности

Знаменатели относительных ошибок	2 000	5 000	10 000	25 000	100 000
Ошибка измерения углов	3'	1.2'	35''	14''	3.5″

При построении геодезических сетей (трилатерации, триангуляции и др.) к равносторонним треугольникам стремятся, но это не всегда достижимо [116]. С другой стороны утверждается, что углов менее 30º следует избегать [57, 58]. Рассмотрим этот предельный случай с равнобедренным треугольником. Пусть два его угла равны по 30º, а длины сторон: две по 500 м, и третья – 800 м. Если отношения сторон считать по длинной стороне и по противолежащему ей углу (l_1= 800 м, β_1=120º), то

$$m_t = \frac{1.18 m_l}{l_1}, m_k = 1.05 m_\beta,$$

То есть, если длины измерять с погрешностью 5 мм, то углы следует измерять с ошибкой 1.45". Тогда они будут эквивалентны по точности.

Если отношения сторон считать по короткой стороне и по противолежащему ей углу (l_1 = 500 м, β_1=30º), то будем иметь

$$m_{t_2} = \frac{1.89 m_l}{l_1},\ m_{k2} = 3.16 m_\beta$$

$$m_{t3} = \frac{\sqrt{2}\cdot m_l}{l_1}, \qquad m_{k3} = 2.45 m_\beta$$

И в том, и в другом случаях при тех же параметрах треугольника и при той же абсолютной ошибке линейных измерений $m_\beta = 1.2''$.

Отсюда можно сделать вывод, что при вычислении соотношений t или k сторон треугольника правильнее использовать сторону с максимальной длиной или угол ей противолежащий.

Такая проверка весьма полезна, так как если измерения равноточные, то в процессе уравнивания целесообразно совместное использование результатов линейных и угловых измерений. Если они неравноточные − следует от угловых, или от линейных измерений отказаться, либо вводить весовые коэффициенты.

При проектировании линейно-угловых сетей конфигурации треугольников, как правило, различны, что следует учитывать для соблюдения принципа эквивалентности при расчёте точности линейных и угловых измерений.

Рассмотрим, как это работает на примере достаточно популярной в наше время линейно-угловой засечки на плоскости, схема которой представлена на рисунке 2.2.

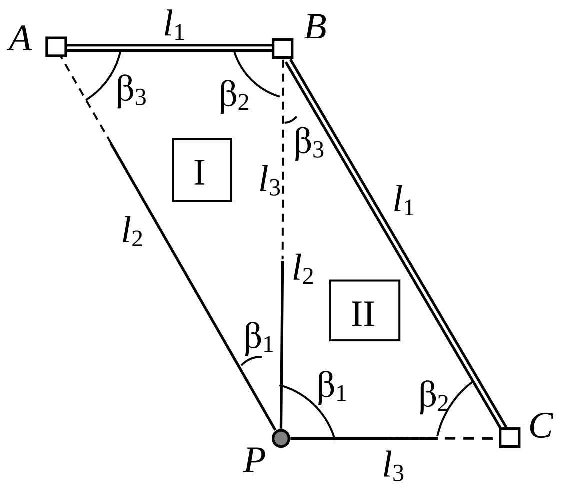

Рисунок 2.2 – Схема обратной линейно-угловой засечки

С учётом соотношений (2.2), (2.4) и того, что стороны l_1 не измеряются, для треугольника I имеем (2.7), (2.8):

$$m_{k_2} = \frac{Sin\beta_2 Cos\beta_1}{Sin^2\beta_1} m_{\beta_2^1},\ \mathrm{m}_{\mathrm{t}_2} = \frac{1}{\mathrm{l}_1}\mathrm{m}_{\mathrm{l}_2} \qquad (2.7)$$

$$m_{k_3} = \frac{Sin\beta_3 Cos\beta_1}{Sin^2\beta_1} m_{\beta_3^1},\ \mathrm{m}_{\mathrm{t}_3} = \frac{1}{\mathrm{l}_1}\mathrm{m}_{\mathrm{l}_3} \qquad (2.8)$$

Если линейные и угловые измерения эквивалентны по точности, то:

$$m_{l_2} = \frac{m_{\beta_2^1} l_1 Sin^2\beta_2 Cos\beta_1}{\rho'' Sin^2\beta_1},\ m_{l_3} = \frac{m_{\beta_3^1} l_1 Sin^2\beta_3 Cos\beta_1}{\rho'' Sin^2\beta_1}, \qquad (2.9)$$

где $m_{\beta_2^1}, m_{\beta_3^1}$ – ошибки определения углов в треугольнике I.

Разделим первое соотношение из формул (2.9) на второе, в результате получим (2.10):

$$\frac{m_{\beta_2^1}}{m_{\beta_3^1}} = \frac{m_{l_2} \sin\beta_3}{m_{l_3} \sin\beta_2} \qquad (2.10)$$

В пропорции (2.10) в числителе и знаменателе слева одна и та же измеряемая величина, то есть дробь равна единице. Значит, чтобы линейные и угловые измерения были эквивалентны по точности, следует длины сторон треугольника l_2 и l_3 измерять с разными абсолютными ошибками (m_{l_2}не должно быть равно m_{l_3}).

Соотношения (2.7-2.10) справедливы и для треугольника II.

Пусть в треугольнике I: β_1=30º, β_2=90º, с точностью до метра l_1=200 м, l_2=400 м, l_3 = 346 м, и примем, что угол m_{β_1}измерен с ошибкой 5″. После подстановки принятых величин в соотношения (2.9), получим m_{l_2}=17 мм, m_{l3}=12 мм.

Если угол β_1 близок к прямому, как в треугольнике II, то из формулы (2.9) получается, что ошибка m_{β_1} на точность оценки соотношений k_2 и k_3 сторон не влияет (в числителях левых формулах 2.7 и 2.8 стоят $Cos\beta_1$). Такой случай нужно изучать отдельно.

Следовательно, для того чтобы линейные и угловые измерения в линейно-угловых построениях могли быть эквивалентны по точности, нужно, чтобы при одинаковой ошибке измерения углов были одинаковы не абсолютные, а относительные ошибки линейных измерений. Этот принцип в полной мере раскрыт в работе [38].

Заметим, что те же результаты можно получить и при других рассуждениях. Как уже говорилось ранее, синусы углов треугольника, являются коэффициентами отношений противолежащих сторон. То есть это однородные элементы, которые играют ту же роль, что и коэффициенты отношений, полученные по результатам линейных измерений. А раз так, то можно полагать, что угловые и линейные измерения эквивалентны по точности, если относительные ошибки определения коэффициентов друг другу равны. То есть, получаем соотношение (2.11):

$$\frac{m_l}{l} = \frac{m_{sin\,\beta}}{Sin\beta} \qquad (2.11)$$

где $m_{Sin\beta} = m_\beta Cos\beta$.

Откуда точность определения угла задается уравнением (2.12):

$$m_\beta = \rho''\frac{m_l}{l}tg\beta \qquad (2.12)$$

Для равностороннего треугольника, например, имеем (2.13):

$$m_\beta = 1.73\rho''\frac{m_l}{l} \qquad (2.13)$$

То есть фактически получено соотношение (2.6).

Таким образом, если приведённые выше расчёты для линейно-угловой засечки показывают, что точность линейных измерений выше точности угловых измерений, то координаты искомой точки целесообразно вычислять по формулам прямой линейной засечки, переходя при этом к коэффициентам отношений. Если линейные и угловые измерения сопоставимы по точности, то необходимо выполнять их совместное уравнивание, при этом переходить от углов к их синусам, и далее вычислять их отношения. Тогда коэффициенты отношений этих синусов и соответственные им коэффициенты отношений измеренных расстояний одинаково точно будут описывать форму треугольника, следовательно, их можно уравнивать как равноточные величины. В случае, если точность угловых измерений выше, то задачу следует решать, как обратную угловую засечку. Конечно, не исключается традиционная методика уравнивания, но при этом придется вводить весовые коэффициенты и в результате может получиться, что какая-то величина будет в меньшей степени участвовать в уравнивании.

Заметим, что полученные выводы справедливы и для обратной линейно-угловой засечки по двум исходным точкам.

Для подтверждения выше сказанного было выполнено уравнивание линейно-угловой сети (рисунок 2.3).

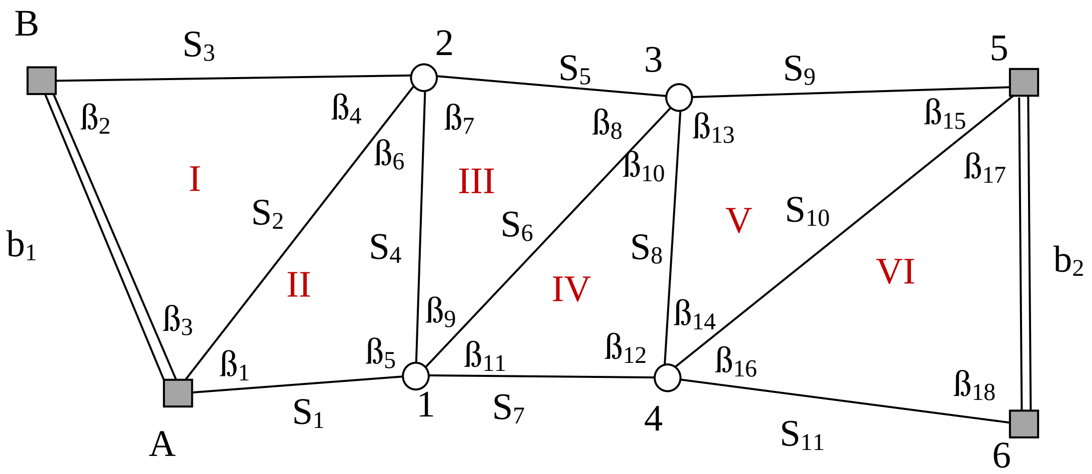

Рисунок 2.3 – Схема линейно-угловой сети

В таблице 2.2 представлены координаты исходных точек сети.

Таблица 2.2 – Идеальная сеть

Координаты исходных точек		
точка	X, м	Y, м
A	200,000	500,000
B	290,000	410,000
5	240,000	830,000
6	120,000	870,000

В таблице 2.3 – истинные и измеренные углы и расстояния.

Таблица 2.3 – Значения истинных и измеренных углов и расстояний

	Истинные			Измеренные			
	Горизонтальный угол		Расстояния, м		Горизонтальный угол		Расстояния, м
β_1	29°21′28″	S1	140,000	β_1	29°21′10″	S1	140,010
β_2	45°00′00″	S2	183,576	β_2	45°00′32″	S2	183,568
β_3	105°38′32″	S3	250,000	β_3	105°38′17″	S3	249,993
β_4	29°21′28″	S4	92,195	β_4	29°21′48″	S4	92,208
β_5	102°31′44″	S5	110,000	β_5	102°31′47″	S5	109,991
β_6	48°06′48″	S6	158,114	β_6	48°06′18″	S6	158,117
β_7	102°31′44″	S7	155,242	β_7	102°31′51″	S7	155,247
β_8	34°41′43″	S8	131,529	β_8	34°41′36″	S8	131,537
β_9	42°46′34″	S9	78,103	β_9	42°46′55″	S9	78,123
β_{10}	64°03′03″	S10	89,443	β_{10}	64°03′12″	S10	89,425
β_{11}	49°37′36″	S11	89,443	β_{11}	49°37′35″	S11	89,430
β_{12}	66°19′21″			β_{12}	66°19′16″		
β_{13}	41°26′54″			β_{13}	41°27′08″		
β_{14}	35°18′40″			β_{14}	35°18′18″		
β_{15}	103°14′26″			β_{15}	103°14′29″		
β_{16}	90°00′00″			β_{16}	90°00′11″		
β_{17}	45°00′00″			β_{17}	44°59′47″		
β_{18}	45°00′00″			β_{18}	45°00′12″		

Для того чтобы понять, с какой точностью необходимо измерять углы, при заданной ошибке расстояний, найдем оптимальное соотношение точностей линейных и угловых измерений для равностороннего треугольника. Предположим, что расстояния измерялись с ошибкой 10 мм, а сеть состоит из цепочки равносторонних треугольников, где Sср=150 м. Воспользуемся упрощенной формулой (2.13):

$$m_\beta = 1.73\rho''\frac{m_l}{l} = 1.73 \cdot 206265'' \cdot \frac{10\,мм}{150\,м} = 24''$$

Получаем, что при заданной ошибке измерения расстояния m_l=10 мм, углы в равностороннем треугольнике должны измеряться с точностью m_β=24". Примем, что все углы будут измеряться именно с такой точностью.

Далее рассмотрим, будет ли соблюдаться полученное соотношение линейных и угловых измерений (2.11) для заданной сети (рисунок 2.3).

Для этого, при неизменной абсолютной ошибке измерения расстояний (10 мм), определим необходимую точность измерения каждого угла в каждом из треугольников по формуле (2.12).

Результаты проверки представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Соотношение точностей линейных и угловых измерений

	Расстояние и противолежащий угол	m_l, мм	$m_ß$''	$m_{ßр/с}$''	Соблюдается да/нет
Треугольник I	S_2 и $ß_2$	10	11	24	нет
	S_3 и $ß_3$	10	29	24	нет
Треугольник II	S_1 и $ß_6$	10	16	24	нет
	S_4 и $ß_1$	10	12	24	нет
	S_2 и $ß_5$	10	50	24	нет
Треугольник III	S_4 и $ß_8$	10	15	24	нет
	S_5 и $ß_9$	10	17	24	нет
	S_6 и $ß_7$	10	58	24	нет
Треугольник IV	S_6 и $ß_{12}$	10	29	24	нет
	S_7 и $ß_{10}$	10	27	24	да
	S_8 и $ß_{11}$	10	18	24	нет
Треугольник V	S_8 и $ß_{15}$	10	66	24	нет
	S_9 и $ß_{14}$	10	19	24	нет
	S_{10} и $ß_{13}$	10	20	24	нет
Треугольник VI	S_{11} и $ß_{17}$	10	23	24	да (расхождение незначительно)
	S_{10} и $ß_{18}$	10	23	24	да (расхождение незначительно)

С помощью датчика случайных чисел в истинные значения введем ошибки измерений, не превышающие трех стандартов для каждого отдельного расстояния (σ=10 мм) и каждого направления (σ=17'', с учетом того, что ошибки измерения направления меньше в $\sqrt{2}$ раз ошибки измерения угла). Причем в некоторые направления, с углами, для которых не соблюдаются соотношения точностей линейных и угловых измерений, введем наибольшие ошибки, но не превышающие трех стандартов.

После чего было выполнено уравнивание сети:

1. По результатам линейных измерений (трилатерация).
2. По результатам угловых измерений (триангуляция).
3. Совместное, для всех линейных и угловых измерений (линейно-угловая сеть).
4. Без плохих измерений (без углов или расстояний, для которых не соблюдается условие эквивалентности по точности, в которые были введены наибольшие ошибки).

Координаты определяемых точек для сетей трилатерации и триангуляции представлены в таблице 2.5, для линейно угловой сети и сети без плохих измерений – в таблице 2.6.

Таблица 2.5 – Уравненные координаты определяемых точек (триангуляция и трилатерация)

	Идеальная сеть		По расстояниям		v		По углам		v	
№ т.	X, м	Y, м	X, м	Y, м	**X, м**	**Y, м**	X, м	Y, м	**X, м**	**Y, м**
1	200,000	640,000	199,978	640,008	**-22**	**-8**	200,004	640,003	**+4**	**+3**
2	290,000	660,000	289,994	659,994	**-6**	**-6**	290,007	660,003	**+7**	**+3**
3	290,000	770,000	290,014	769,986	**+14**	**-14**	290,003	769,994	**+3**	**+6**
4	160,000	790,000	160,011	790,021	**+11**	**+21**	160,004	769,995	**+4**	**+5**

Таблица 2.6 – Координаты определяемых точек по результатам совместного уравнивания линейно-угловых измерений

	Идеальная сеть		По расстояниям+углам		**v, м**		Без плохих измерений		**v, м**	
т.	X, м	Y, м	X, м	Y, м	**X,м**	**Y,м**	X, м	Y, м	**X,м**	**Y,м**
1	200,000	640,000	200,010	639,992	**+10**	**-8**	199,996	639,994	**-4**	**-6**
2	290,000	660,000	290,010	659,994	**+10**	**-6**	290,003	659,999	**+3**	**-1**
3	290,000	770,000	290,002	769,998	**+2**	**-2**	290,001	769,993	**+1**	**-7**
4	160,000	790,000	159,996	790,001	**-4**	**+1**	159,993	790,000	**-7**	**0**

Данные, представленные в таблице 2.5 вполне объяснимы. При уравнивании сети по результатам линейных измерений имеем только 3 избыточных, в то время как при уравнивании по результатам измерений углов их 10. Данные представленные в таблице 2.6 позволяют сделать вывод, что при совместном уравнивании точность определения координат точек действительно повышается, если исключить из процесса «плохие» (с точки зрения указанной выше эквивалентности) измерения. Отметим, что предложенный принцип оценки эквивалентности линейных и угловых измерений по точности целесообразно использовать ещё на этапе проектирования сети.

2.2 Решение геодезических задач с использованием относительных величин

Для реализации использования относительных величин в геодезических построениях возможна следующая последовательность действий:

1. Выполнение полевых измерений, при неизменных внешних условиях наблюдений.

2. Составление уравнений, в которых значения искомых величин выражаются через коэффициенты отношений, обеспечивая условие однозначности решения.

3. Решение системы уравнений на основании значений безразмерных величин и выполнение перехода к абсолютным (размерным) величинам.

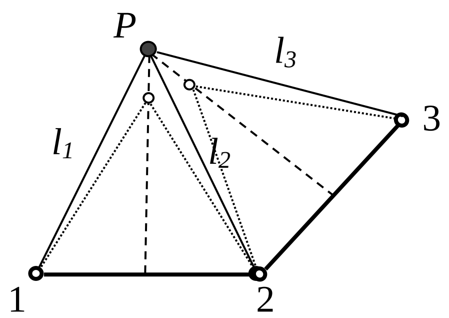

Рисунок 2.4 – Линейная засечка

Одним из ярких примеров использования относительных величин в геодезии является решение линейной засечки по трем исходным точкам (с контролем) [173, 174]. Традиционные подходы к решению данной задачи достаточно подробно рассмотрены в [45, 78, 79]. Существует графический вариант определения координат (нахождение точки пересечения трех окружностей). На практике же используются аналитические методы, которые подразумевают применение известных теорем геометрии, в частности теоремы косинусов, решение прямой и обратной геодезических задач и нахождение координат точки как среднее из решений двух треугольников [14]. Поскольку в схеме имеются избыточные измерения, то координаты можно получить и путём уравнивания. Однако, независимо от выбранного метода решения засечки, необходимо исключить систематические ошибки из измерений, в противном случае могут быть получены неверные координаты, а иногда решение может оказаться просто невозможным. Однако, ситуация кардинально меняется, если полагать, что расстояния измеряются не в абсолютных единицах, а в относительных (то есть результаты измерений – коэффициенты отношений).

Поясним сказанное на численном примере. Пусть в засечке, представленной на рисунке 2.4, измерения трёх сторон треугольников выполнены светодальномером, причём, дважды (в два цикла). В результаты измерений в первом цикле введены все положенные поправки за метеоусловия. Заметим, что они линейны относительно измеренных величин. В расстояния, измеренные во втором цикле, поправок не вводилось. В результате все длины отличаются от длин, полученных в первом цикле, в одно и то же число раз, например, 1.0008. Результаты представлены в таблице 2.8. Координаты исходных точек представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Исходные данные

№ т.	Координаты точек	
	X, м	Y, м
1	5,000	10,000
2	15,000	22,000
3	20,000	27,000

Таблица 2.8 – Результаты измерений

	Измеренные расстояния, м	
	I. Не содержат систематических ошибок	II. Содержат систематическую ошибку
l_1	25,961	25,982
l_2	15,811	15,824
l_3	14,142	14,153

Вычисления координат по традиционной технологии (и для первого цикла и для второго) выполнено по известным формулам в программе *MathCad*. Результаты представлены в таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Сравнение координат точки P из двух циклов измерений

	I		II	
№ треугольника	X_P, м	Y_P, м	X_P, м	Y_P, м
1	30,000	17,000	30,027	17,013
2	29,999	17,000	30,011	16,996
Среднее	30,000	17,000	30,019	17,004

Как и следовало ожидать, при вычислении координат по традиционной технологии координаты в циклах отличаются друг от друга. Уравнивание приводит к такому же результату.

Рассмотрим решение той же задачи с использованием относительных величин. Так как измеренные расстояния являются абсолютными одноименными величинами, они могут быть представлены в виде отношений, т.е. коэффициентов отношений. Для этого воспользуемся предложенным ранее алгоритмом. Найдем значения относительных величин, разделив, например, все измеренные расстояния на l_1. Тогда значения коэффициентов отношений найдем по формуле (2.14):

$$K_i = \frac{l_i}{l_1} \tag{2.14}$$

где $l_1 \ldots l_i$ – измеренные расстояния, $K_1=l_1/l_1=1$.

Заметим, что отношения K_i расстояний l_1, l_2, l_3 можно считать однородными величинами в рассмотренном геодезическом построении в том смысле, что умножение или деление их на одно и то же число не меняет координат искомой точки. Условие единственности решения обеспечивается тремя исходными точками, которые и обеспечивают постоянство масштаба. Кроме того, известно, что, зная координаты двух точек можно вычислить расстояние между ними по формуле (2.15):

$$l_1 = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2} \tag{2.15}$$

Тогда (2.16):

$$K_i = \frac{l_i}{l_1} = \frac{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2}}{\sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2}} \tag{2.16}$$

С учетом (2.15) и (2.16) координаты точки могут быть найдены путем совместного решения системы двух уравнений (2.17):

$$\begin{cases} K_2^2\left[\left(x_p - x_1\right)^2 + \left(y_p - y_1\right)^2\right] - \left(x_p - x_2\right)^2 - \left(y_p - y_2\right)^2 = 0 \\ K_3^2\left[\left(x_p - x_1\right)^2 + \left(y_p - y_1\right)^2\right] - \left(x_p - x_3\right)^2 - \left(y_p - y_3\right)^2 = 0 \end{cases}, \tag{2.17}$$

где K_2=l_2/l_1, K_3=l_3/l_1.

Данную систему уравнений достаточно сложно решить без использования программных продуктов, поэтому была написана программа, которая позволяет вычислить координаты точки P [127]. В алгоритме программы для решения данного уравнения реализован поисковый метод. Введем те же безошибочные значения измеренных расстояний (рисунок 2.5) и выполним расчет.

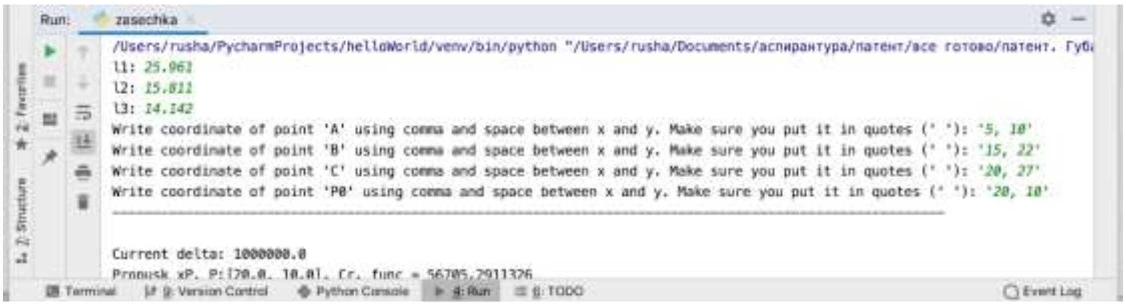

Рисунок 2.5 – Ввод координат исходных точек и измеренных расстояний (без ошибки)

Результат работы программы представлен на рисунке 2.6.

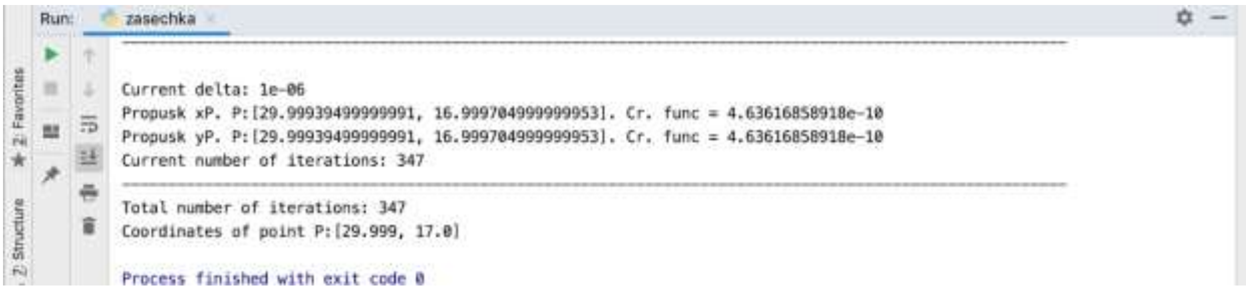

Рисунок 2.6 – Результат по истинным расстояниям (без систематической ошибки)

Как видим, координаты получены правильные, следовательно программа работает корректно.

Далее введем значения расстояний II (с систематической ошибкой) – рисунок 2.7.

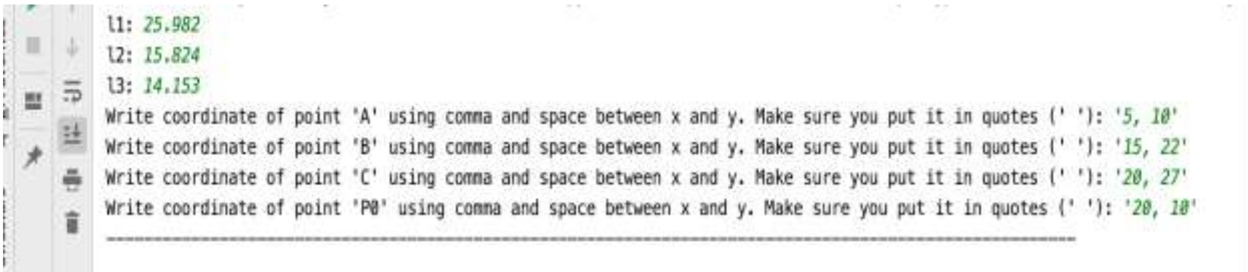

Рисунок 2.7 – Ввод координат исходных точек и измеренных расстояний (с ошибкой)

Результат работы программы показан на рисунке 2.8.

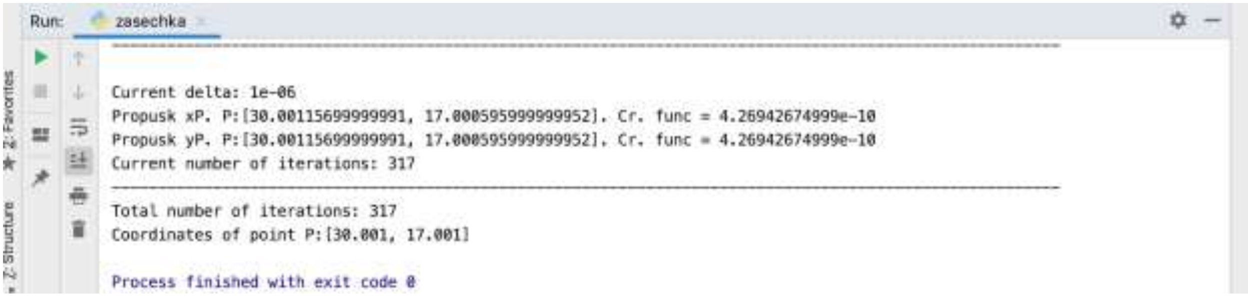

Рисунок 2.8 – Результат работы программы

Как видим, получены верные координаты точки. Значит влияние метеоусловий, а возможно и других факторов оказывается компенсированным. И есть все основания полагать, что при таком подходе компенсируются все систематические погрешности, которые линейны относительно измеряемой величины.

Приведем полученные результаты в таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Сравнение координат точки Р из двух методик

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="8">Координаты точек</td></tr>
<tr><td colspan="4">традиционная методика</td><td colspan="4">предлагаемая методика</td></tr>
<tr><td colspan="2">По расстояниям без ошибки</td><td colspan="2">По расстояниям с ошибкой</td><td colspan="2">По расстояниям без ошибки</td><td colspan="2">По расстояниям с ошибкой</td></tr>
<tr><td></td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td></tr>
<tr><td>Р1</td><td>30,000</td><td>17,000</td><td>30,027</td><td>17,013</td><td rowspan="3">29,999</td><td rowspan="3">17,000</td><td rowspan="3">30,001</td><td rowspan="3">17,001</td></tr>
<tr><td>Р2</td><td>29,999</td><td>17,000</td><td>30,011</td><td>16,996</td></tr>
<tr><td>Рср</td><td>30,000</td><td>17,000</td><td>30,019</td><td>17,004</td></tr>
</table>

Таким образом, решение системы уравнений (2.17) позволяет получить верные координаты точки P: 30,001, 17,001. Из этого можно сделать следующий вывод: традиционная методика определения координат точки способом линейной засечки не позволяет получить верные значения по результатам повторных измерений (если они отягощены систематическими ошибками), тогда как технология, подразумевающая переход к безразмерным величинам (коэффициентам отношений) компенсирует все систематические погрешности, которые линейны относительно измеряемой величины.

Возможен и другой вариант решения линейной засечки. Применяя указанный выше принцип, можно обойтись и одним треугольником (рисунок 2.9), при условии измерения, кроме сторон l_1 и l_2, исходной стороны AB с известной длиной l*. Это обеспечивает оценку соотношений всех сторон при постоянстве внешних условий измерений, а для вычисления искомых координат x, y точки P можно использовать систему уравнений (2.18):

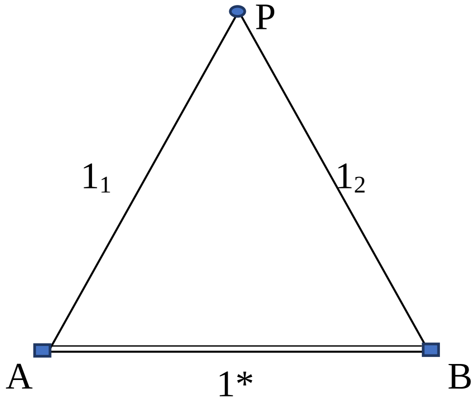

Рисунок 2.9 – Линейная засечка из одного треугольника

$$\begin{cases} K_0^2\left[\left(x_p - x_A\right)^2 + \left(y_p - y_A\right)^2\right] - K_1^2 \cdot l^{*2} = 0 \\ K_0^2\left[\left(x_p - x_B\right)^2 + \left(y_p - y_B\right)^2\right] - K_2^2 \cdot l^{*2} = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

где $K_0=l_0/l_0=1$, $K_1=l_1/l_0$, $K_2=l_2/l_0$, l_0 – результат измерения исходной стороны $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Приведём пример решения линейной засечки по предложенным выше формулам, полагая, что систематическая ошибка за влияние внешних условий измерений искажает расстояния в 1.0007 раз. Координаты исходных точек и результаты измерений представлены в таблицах 2.11 и 2.12.

Таблица 2.11 – Исходные данные

№ т.	Координаты точек	
	X, м	Y, м
A	5,000	10,000
B	15,000	22,000

Таблица 2.12 – Результаты измерений

	Измеренные расстояния	
	С исключением систематических ошибок, м	Без исключения систематических ошибок
l_1	25,961	25,979
l_2	15,811	15,822
l_0	15,620	15,631

Результат решения уравнения (2.18) представлен в таблице 2.13.

Таблица 2.13 – Результат решения однократной засечки

	Координаты искомой точки P	
	X, м	Y, м
P	30,000	17,000

Заметим, что при таком подходе в равностороннем треугольнике будут исключены систематические ошибки любой природы, а не только линейные относительно измеряемых отрезков.

Приведём другой пример – измерение расстояний мерной лентой в теодолитном ходе. Ясно, что такая технология уже потеряла свою актуальность, однако, данный пример наглядно показывает, что при предлагаемом подходе можно учесть систематические ошибки линейные, относительные измеряемого расстояния. Так, при использовании относительных величин нет необходимости знать, какая 20-метровая или 24-метровая землемерная лента (подчеркнём, некомпарированная) применялась при измерении длин сторон разомкнутого теодолитного хода, или в каких единицах проградуирована (метрах, футах и т.д.) [14]. Однородными величинами в этом случае будут коэффициенты K_i, полученные относительно одной из сторон хода, и вычисленные с надлежащим количеством значащих цифр. Технология обработки хода в этом случае немного изменится, и может быть представлена следующим образом. Сначала, как это и принято, вычисляют угловую невязку и, если она не превышает допустимого значения, то её распределяют введением поправок в измеренные значения углов. Затем вычисляют значения дирекционных углов. Далее все измеренные расстояния нормируют относительно, например, первой стороны D_1 (2.19):

$$K_i = \frac{D_i}{D_1} \qquad (2.19)$$

Таким образом, все измеренные расстояния представляют в виде относительных величин $K_1 \ldots K_n$. Далее вычисляют приращения по формуле (2.20):

$$\Delta K_{xi} = K_i \cdot cos\alpha_{i\text{и}}, \Delta K_{yi} = K_i \cdot sin\alpha_{i\text{и}} \qquad (2.20)$$

Приращения координат $\Delta x'_i$ $\Delta y'_i$, в линейной мере находятся из соотношений (2.21):

$$\Delta x'_i = \frac{(x_\text{к} - x_\text{н}) \cdot K_{xi}}{\sum_1^n \Delta K_{xn}}, \quad \Delta y'_i = \frac{(y_\text{к} - y_\text{н}) \cdot K_{yi}}{\sum_1^n \Delta K_{yn}} \qquad (2.21)$$

Они играют роль исправленных приращений. Далее последовательно вычисляются координаты искомых точек.

Контроль можно организовать по-разному. Например, относительная ошибка, вычисленная по разности исходных расстояний и расстояний, полученных по исправленным приращениям, не должна превышать допуска.

Приведём численный пример. Пусть был проложен теодолитный ход (рисунок 2.10), в котором были измерены все расстояния и горизонтальные углы.

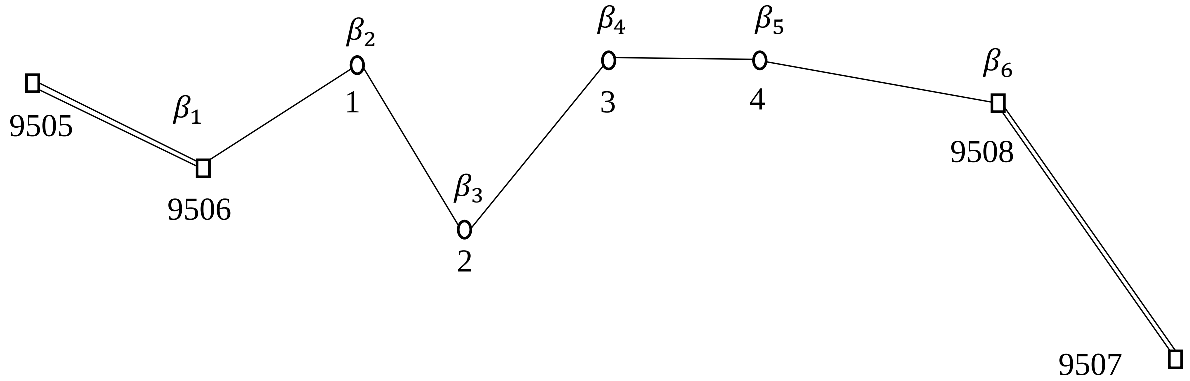

Рисунок 2.10 – Схема разомкнутого теодолитного хода

Координаты исходных точек представлены в таблице 2.14. В первом случае длины сторон хода измерены компарированной мерной лентой, во втором − тип ленты не известен, и она соответственно, не компарировалась. Из контекста, правда, нетрудно догадаться, что если первая из лент была 20 метровая, то вторая – 24 метровая с не нулевой, но неизвестной поправкой за компарирование.

Результаты измерений представлены в таблице 2.15. Значения горизонтальных углов представлено в таблице 2.16.

Таблица 2.14 – Координаты исходных точек

№ т.	X, м	Y, м
9505	38116,90	28097,85
9506	38479,02	28099,26
9508	39210,95	29222,25
9507	38118,51	29570,46

Таблица 2.15 – Измеренные расстояния

Измеренное расстояние	Компарированной лентой, м	Некомпарированной лентой
l_1	325,31	271,20
l_2	429,77	358,28
l_3	281,32	234,53
l_4	288,98	240,91
l_5	473,92	395,09

Таблица 2.16 – Измеренные углы

№ угла	измеренный угол, ° '
$ß_1$	257°50,7'
$ß_2$	186°44,4'
$ß_3$	85°47,9'
$ß_4$	180°01,8'
$ß_5$	82°20,7'
$ß_6$	162°18,3'

Результаты обработки по традиционной технологии (расстояния измерялись компарированной лентой) и по предлагаемой методике (расстояния получены некомпарированной лентой) представлены в таблице 2.17.

Таблица 2.17 – Координаты определяемых точек

№ т.	Традиционная технология		По коэффициентам отношений	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м
1	38546,27	28417,52	38546,25	28417,51
2	38585,13	28845,50	38585,09	28845,48
3	38862,68	28799,60	38862,65	28799,62
4	39147,82	29752,59	39147,81	29752,62

Анализируя полученные результаты, видим, что координаты практически равны. Максимальное расхождение – 4 см. Следовательно, предлагаемая методика позволяет получить верные координаты даже в том случае, если не были учтены систематические ошибки, линейные относительно измеряемых длин и не была известна истинная длина мерной ленты.

Конечно, есть и большие недостатки. Во-первых, такая технология вычисления координат точек теодолитного хода (полигонометрического хода) возможна только в случае, если обе разности координат начальной и конечной точек не равны нулю. Значит нельзя посчитать и замкнутый ход, если одну из сторон не измерить в абсолютных значениях с необходимой точностью.

Во-вторых, возникают особые требования к точности взаимного положения исходных пунктов, особенно когда они расположены близко друг к другу. Относительная ошибка расстояния между ними целиком ляжет на длины сторон хода. В-третьих, контролируется угловая невязка хода, а, значит, и качество исходных данных, но не контролируется его относительная невязка. Правда, возможна вполне корректная замена, заключающаяся в сравнении длин сторон, полученных после вычислений координат, с длинами, измеренными в поле. Потери значительны, но при такой технологии вычисления координат отпадает необходимость компарировать ленту (рулетку), учитывать влияние на результат температуры, натяжения. Главное, чтобы условия измерений были стабильны. А указанные выше ограничения можно учесть при проектировании сетей теодолитных (полигонометрических) ходов.

В принципе коэффициенты отношений можно использовать и при уравнивании углов, если измерен контрольный угол (рисунок 2.11).

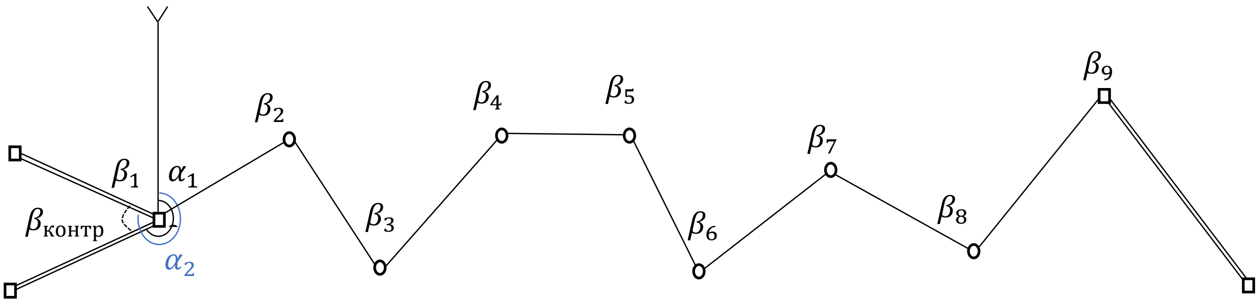

Рисунок 2.11 – Схема теодолитного хода (с контрольным углом)

Тогда исправленные углы $\beta_{iиспр}$ вычисляются по формуле (2.22):

$$\beta_{iисп} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{K_i}{K_k} \tag{2.22}$$

где выражение в скобке – разность дирекционных углов α_1 и α_2 исходных сторон контрольного угла (неравного нулю, и чем больше, тем лучше).

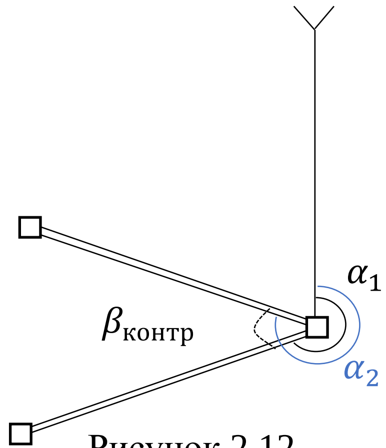

Рисунок 2.12 – Уравнивание контрольного угла

При расчете коэффициентов K_i целесообразнее все измеренные значения углов делить на $\beta_{контр.изм.}$ (рисунок 2.12). Тогда $K_i = \frac{\beta_{i\,изм}}{\beta_{контр.изм.}}$, $K_k = \frac{\beta_{контр.изм.}}{\beta_{контр.изм.}}$, тогда K_k=1. Но, честно говоря, не проглядывается выгода от применения такого подхода, так как неизвестны источники систематических ошибок, влияние которых линейно относительно измеренного угла.

Рассмотренная выше методика может быть полезна и при определении высот точек. Рассмотрим следующий пример. Пусть проложен разомкнутый нивелирный ход; h_i – измеренные превышения на станциях, причём все они по модулю больше нуля; ΔH – разность высот исходных точек, которая также не равна нулю и известна с точностью выше, чем обеспечивает методика нивелирования. Разделим все превышения, например, на первое h_1, то есть перейдём к относительным величинам по формуле (2.23):

$$K_i = \frac{h_i}{h_1} \tag{2.23}$$

Полученная совокупность коэффициентов вполне определённым образом характеризует взаимное расположение точек хода. Но заметим, что умножение или деление их на одно и то же число ситуацию не меняет. То есть существует бесчисленное множество систем точек, которые этой совокупности коэффициентов удовлетворяет (подобных систем). Единственность данной системы заключается в том, что $\Sigma\Delta K_i=\Delta H$ (то есть, разности высот исходных точек). Это и обеспечивает переход к абсолютным величинам, причём в любых единицах (метрах, футах и т.д). Тогда значения превышений между связующими точками будут вычисляться по формуле (2.24):

$$h_i = \frac{\Delta H \cdot K_i}{\sum K_i} \tag{2.24}$$

Выгода от такого подхода в том, что в отличие от превышений коэффициенты отношений измеренных величин свободны от систематических ошибок, линейных относительно измеряемых величин. При этом абсолютно неважно знать природу их возникновения и величину, важно лишь обеспечить стабильность условий измерений.

2.3 Уравнивание геодезических сетей

Используя относительные величины, можно определять координаты точек не только линейной засечки, но и точек сетей трилатерации [70]. Однако сеть в таком случае необходимо строить не в виде треугольников (в этом случае число неизвестных в системе квадратных уравнений будет всегда на одно больше числа уравнений), а в виде четырёхугольников (рисунок 2.13), с измерением всех сторон, в том числе и диагональных. Понятно, что в такую сеть вставляется только чётное число точек. При этом, если не измерять исходную сторону, то, по аналогии с предложенной методикой вычисления координат линейной засечки, можно составить уравнения вида (2.25):

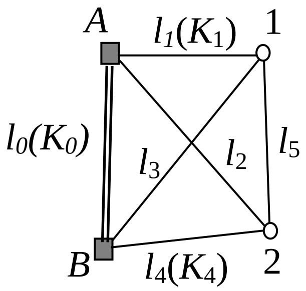

Рисунок 2.13 – Фрагмент сети трилатерации

$$K_3^2[(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2] - K_1^2[(x_B - x_1)^2 + (y_B - y_1)^2] = 0 \tag{2.25}$$

где $K_3=l_3/l_1$, $K_1=l_1/l_1=1$.

При этом для рассматриваемого фрагмента число уравнений будет равно числу неизвестных. Если, например, к стороне 1-2 присоединить ещё один четырёхугольник, то можно будет составить 9 уравнений, появляется одно избыточное. Каждый последующий четырёхугольник увеличивает число избыточных уравнений на единицу. Измерение исходной стороны, например *AB* (рисунок 2.13) также добавляет одно уравнение.

Следует заметить, что в процессе выполнения полевых работ важно следить за постоянством условий измерений и, если это невозможно (в силу, например

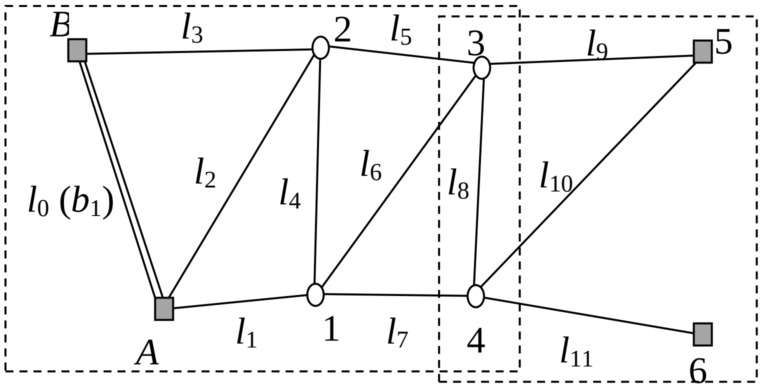

Рисунок 2.14 – Схема сети трилатерации

большого их объёма), сеть следует разделить на участки, (как показано на рисунке 2.14 пунктиром), в пределах которых обеспечивалось бы такое постоянство. И для сохранения подобия хотя бы одна сторона предыдущего участка должна быть измерена повторно, в условиях измерений последующего (сторона 3-4) [37].

Таким образом, в общем случае в сети трилатерации, имеются избыточные измерения, следовательно, можно выполнять процедуру уравнивания. Только вместо измеренных величин (расстояний) необходимо уравнивать коэффициенты их отношений, и процедуру уравнивания выполнять по обобщенному методу наименьших квадратов, так как сами по себе коэффициенты отношения K_n величины зависимые. Прежде чем выполнить уравнивание необходимо доказать, что, если случайные ошибки линейных измерений подчиняются нормальному закону распределения, то и отношения должны ему подчиняться.

Проверка ряда случайных величин на нормальность

Для того чтобы убедиться в справедливости выше сказанного был выполнен следующий эксперимент. При помощи встроенного в программу MathCad датчика случайных чисел *rnorm* был задан массив *V* из 100 случайных чисел, которые подчиняются нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной 9.

V:= rnorm(100, 0, 9)

	0
0	-3.951
1	-6.115
2	-4.26
3	-8.563
4	-15.171
5	0.392
6	-1.086
7	5.008
8	19.726
9	7.279
10	8.866
11	7.76
12	8.24
13	6.057
14	-9.399
15	...

Далее были составлены отношения v_i согласно уравнению (2.26):

$$v_i = \frac{V_{i,1}}{v_{0,0}} \tag{2.26}$$

где $V_{i,1}$ – i-ый (i=1…..100) элемент вектора *V*. В программе MathCad нумерация начинается с 0. Таким образом, случайных чисел вида v_i будет 99.

Очевидно, что данная выборка будет иметь уже другие характеристики – дисперсию, стандарт и т.д. Дисперсия *D* уже для новой выборки вычислена по формуле (2.27):

$$D = \frac{[v_i^2]}{n} = \frac{507{,}25}{99} = 5{,}11 \tag{2.27}$$

где n=99 – количество чисел в выборке.

Тогда стандарт (среднеквадратической отклонение) случайной величины (2.28):

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{5{,}12} = 2{,}26 \tag{2.28}$$

Асимметрия кривой данного распределения определяется по формуле (2.29):

$$A = \frac{\alpha_3}{\sigma^3} = \frac{5,12}{2,26^3} = 0,44 \qquad (2.29)$$

где $\alpha_3 = \frac{[v_i^3]}{n}$ – начальный момент 3-го порядка.

По формуле (2.30) вычисляется допустимое значение асимметрии $A_{доп}$.:

$$A_{доп} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{99}} = 0,74 \qquad (2.30)$$

А эксцесс кривой данного распределения по формуле (2.31):

$$Э = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{97,95}{2,26^4} - 3 = 0,78 \qquad (2.31)$$

где $\alpha_4 = \frac{[v_i^4]}{n}$ – начальный момент 4-го порядка.

По формуле (2.32) определим допустимое значение эксцесса Эдоп.:

$$Э_{доп} = 3 \cdot \sqrt{\frac{24}{n}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{24}{99}} = 1,48 \qquad (2.32)$$

На рисунке 2.15 изображена гистограмма распределения данной выборки.

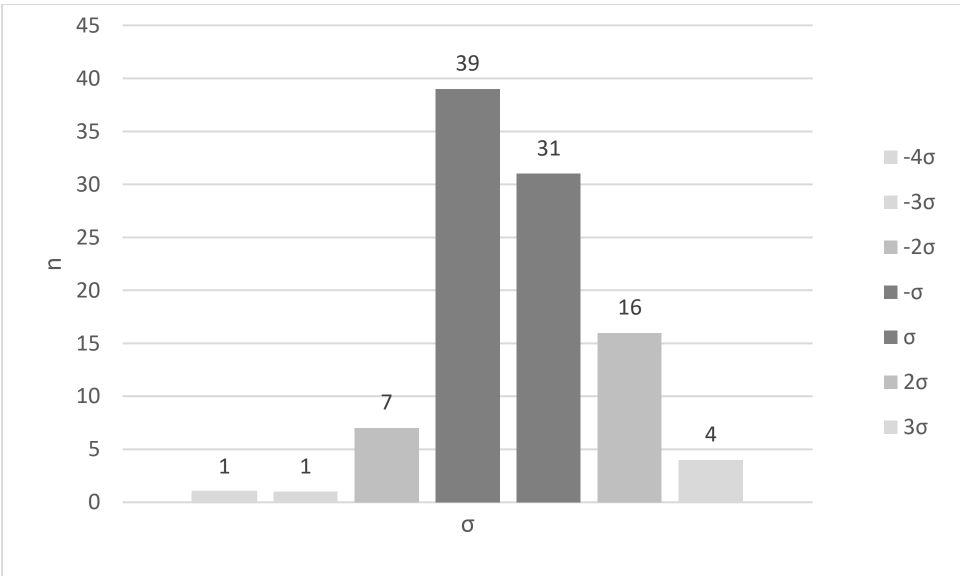

Рисунок 2.15 – Гистограмма распределения

На основании приведенных выше вычислений − значения асимметрии и эксцесса кривой, которые не превышают допустимых значений, и по виду гистограммы распределения можно говорить о том, что отношения случайных величин действительно починяются нормальному закону распределения.

Прежде чем переходить к вопросам уравнивания заметим, что после устранения грубых ошибок измерений результаты всё равно отягощены случайными и систематическими ошибками. Последние хотя и стараются исключить, но свести их к нулю практически невозможно. Поэтому приходится иметь дело с некоторыми суммарными значениями (миксированными). И здесь возможны следующие варианты:

1. Не исключённая часть систематических ошибок значительно меньше случайных и практически не влияет на закон распределения последних. Очевидно, что в этом случае нужно использовать стандартные процедуры уравнивания измеренных величин (для трилатерации – расстояний).

2. Случайные и систематические ошибки сопоставимы по величине. Но тогда систематические ошибки будут существенно влиять на закон распределения суммарной ошибки, и он будет отличаться от закона распределения случайных ошибок. В свою очередь и коэффициенты отношений будут искажены. Поэтому уравнивание измеренных величин (расстояний) и уравнивание коэффициентов отношений приведёт к разным результатам (координатам). В таком случае возникает вопрос, какой вариант ближе к истине.

3. В работе предлагается исключать систематические ошибки, путём использования коэффициентов отношений. В этом случае и предлагается уравнивать эти коэффициенты. При этом предполагается, что случайные ошибки измерений значительно меньше систематических, и получаемые коэффициенты отношений достаточно корректны. Именно такой вариант в дальнейшем и предполагается исследовать.

2.3.1 Уравнивание сети трилатерации

В силу того, что коэффициенты отношений подчиняются нормальному закону распределения, уравнивание можно выполнять по МНК. То есть, для определения искомых координат использовать хорошо известные стандартные процедуры: определение их приближённых значений, линеаризацию, составление нормальных уравнений и т.д. [40]. Заметим, что формулы для вычисления производных от функции K_3 формулы (2.25) довольно сложные. Но, если использовать измерение базисной стороны (типа l_0), как предлагалось при решении линейной засечки из одного треугольника, то формула (2.25) примет вид (2.33):

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}}{l_0} \qquad (2.33)$$

где l_0 – измеренное расстояние между исходными точками A и B, $K_0 = l_0/l_0 = 1$, $K_1 = l_1/l_0$.

Приближённые значения неизвестных, которые нужны для вычисления производных можно получить, например, путём решения линейных засечек.

Для того, чтобы показать целесообразность уравнивания с использованием коэффициентов отношений, рассмотрены два варианта решения задачи для сети, представленной на рисунке 2.16: традиционным параметрическим способом уравнивания по МНК; по обобщенному методу наименьших квадратов с использованием относительных величин. В сети, представленной на рисунке 2.16, четыре точки *A*, *B*, 5 и 6 – исходные. Измерены расстояния: l_0, l_1,..,l_{11}.

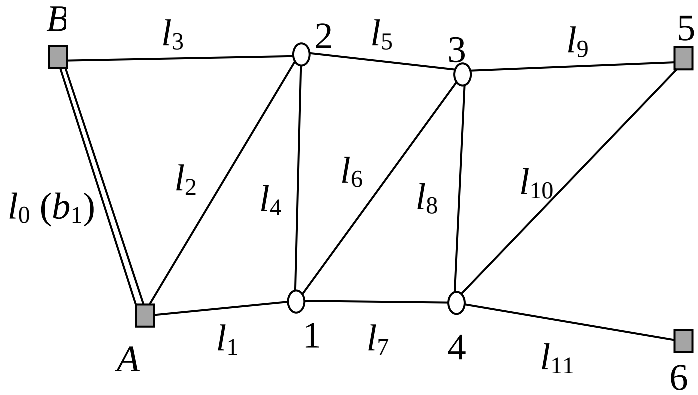

Рисунок 2.16 – Схема сети трилатерации

Необходимо определить координаты четырёх точек, то есть число неизвестных равно 8. Координаты исходных точек представлены в таблице 2.18.

Таблица 2.18 – Координаты исходных точек

точка	X, м	Y, м
A	250,000	400,000
B	350,000	330,000
5	350,000	690,000
6	230,000	740,000

Пусть расстояния измерялись по традиционной методике электронным тахеометром, ошибка линейных измерений которого $m_{li} = (5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i)$, мм (паспортное значение тахеометра). Примем, что постоянная тахеометра равна +50 мм и учтена. Однако, из-за влияния систематической ошибки, которая не была выявлена и учтена, все измеренные расстояния отличаются от истинных в 1,0003 раза. В таблице 2.19 представлены истинные значения расстояний и измеренные, которые отягощены влиянием, как неучтенной систематической ошибки, так и случайной.

Таблица 2.19 – Результаты измерений расстояний

	Измеренные расстояния, м		Истинные расстояния, м
$l_{1'}$	120,455	l_1	120,416
$l_{2'}$	102,979	l_2	102,956
$l_{3'}$	120,445	l_3	120,416
$l_{4'}$	122,104	l_4	122,066
$l_{5'}$	120,451	l_5	120,416
$l_{6'}$	120,870	l_6	120,830
$l_{7'}$	110,492	l_7	110,454
$l_{8'}$	116,658	l_8	116,619
$l_{9'}$	120,047	l_9	120,000
$l_{10'}$	116,646	l_{10}	116,619
$l_{11'}$	111,834	l_{11}	111,803

В качестве уравниваемых величин приняты координаты определяемых точек – X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; X_4, Y_4.

Уравнивание выполнялось в программе *MathCad*. Результаты уравнивания параметрическим способом по МНК представлены в таблице 2.20.

Таблица 2.20 – Результаты уравнивания традиционным методом

№ п/п	Уравненные координаты определяемых точек		№ п/п	Исправленные значения измеренных расстояний, м	№ п/п	Поправки в измеренные расстояния, м
	X, м	Y, м				
1	239,968	519,999	l_1	120,418	v_1	-0,037
2	340,017	449,997	l_2	102,970	v_2	-0,009
3	350,020	569,991	l_3	120,411	v_3	-0,034
4	249,981	629,999	l_4	122,107	v_4	+0,003
			l_5	120,411	v_5	-0,040

Продолжение таблицы 2.20

l_6	120,874	v_6	+0,004
l_7	110,455	v_7	-0,037
l_8	116,657	v_8	-0,001
l_9	120,009	v_9	-0,038
l_{10}	116,636	v_{10}	-0,010
l_{11}	111,801	v_{11}	-0,033

Была выполнена приближенная оценка точности результатов уравнивания. При этом апостериорная среднеквадратическая ошибка единицы веса вычислялась по формуле (2.34):

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}} = 47{,}1 \text{ мм} \tag{2.34}$$

Анализ качества выполненных измерений. СКО априорной ошибки единицы веса (2.35):

$$m' = \frac{\mu}{\sqrt{2\cdot(n-t)}} = \frac{47{,}124}{\sqrt{6}} = 19{,}2 \text{ мм} \tag{2.35}$$

Также было выполнено уравнивание с тем же распределением случайной ошибки, но с нулевой систематической. Результаты измеренных расстояний представлены в таблице 2.21.

Таблица 2.21 – Результаты измерений расстояний

	Измеренные расстояния, м		Истинные расстояния, м
l1'	120,419	l_1	120,416
l2'	103,948	l_2	102,956
l3'	120,409	l_3	120,416
l4'	122,068	l_4	122,066
l5'	120,415	l_5	120,416
l6'	120,833	l_6	120,830
l7'	110,459	l_7	110,454
l8'	116,623	l_8	116,619
l9'	120,011	l_9	120,000
l10'	116,611	l_{10}	116,619
l11'	111,800	l_{11}	111,803

Результаты уравнивания представлены в таблице 2.22.

Таблица 2.22 – Результаты уравнивания традиционным методом (с нулевой систематической)

№ т.	Уравненные координаты определяемых точек		№ п/п	Исправленные значения измеренных расстояний, м	№ п/п	Поправки в измеренные расстояния, м
	X, м	Y, м				
1	239,997	520,001	l_1	120,417	v_1	-0,002
2	339,994	449,993	l_2	102,948	v_2	0,000
3	350,004	569,990	l_3	120,409	v_3	0,000
4	250,007	630,004	l_4	122,068	v_4	0,000
			l_5	120,414	v_5	-0,001
			l_6	120,833	v_6	0,000
			l_7	110,458	v_7	-0,001
			l_8	116,624	v_8	+0,001
			l_9	120,010	v_9	-0,001
			l_{10}	116,610	v_{10}	-0,001
			l_{11}	111,800	v_{11}	0,000

Апостериорная ошибка единицы веса (2.36):

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}} = 1{,}38 \text{ мм} \tag{2.36}$$

Тогда как априорная ошибка была принята равной 5 мм.

Уравнивание сети по ОМНК

Рассмотрим теперь уравнивание той же сети по предлагаемой методике, основанной на алгоритме обобщенного метода наименьших квадратов. Заметим, что при этом уравнивать необходимо не измеренные расстояния, а коэффициенты отношений измеренных расстояний (относительные величины), которые определяются по формуле (2.37):

$$K'_i = l'_i / l'_0 \tag{2.37}$$

Тогда возможные уравнения, оценивая соотношения сторон через l_0 (хотя возможны и другие варианты) будут иметь вид (2.38):

$$K'^2_1 l'_0 - K'^2_0[(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2] = 0$$

$$K'^2_2 l'_0 - K'^2_0[(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2] = 0$$

$$K'^2_3 l'_0 - K'^2_0[(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2] = 0$$
$$K'^2_4 l'_0 - K'^2_0[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = 0 \qquad (2.38)$$
$$K'^2_5 l'_0 - K'^2_0[(x_3 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = 0$$
$$K'^2_6 l'_0 - K'^2_0[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] = 0$$

…..

и так далее. Где $K'_0=l_0/l_0=1$.

Таким образом, получено 11 независимых уравнений с 8 неизвестными, 3 уравнения являются избыточными.

В данной работе обобщенный метод наименьших квадратов при уравнивании используется не случайно. Из формул (2.37) видно, что все коэффициенты отношений (величины K'_n) зависимы от измеренного расстояния l'_0, а согласно правилам уравнивая по методу наименьших квадратов величины должны быть независимыми. Возможность уравнивания зависимых величин изучал профессор Г.В. Макаров. В своей работе [81] он рассматривал уравнивание зависимых величин обобщенным методом наименьших квадратов.

Рассмотрим отличия выбранного метода от традиционного параметрического метода уравнивания, основанного на МНК. Если в случае уравнивания по МНК находят поправки в измеренные величины ($V_{li}^T P_{li} V_{li}$), то в ОМНК вычисляют поправки в исправленные значения измеренных величин ($V_{lиi}^T P_{lиi} V_{lиi}$). Еще одно отличие обобщенного метода наименьших квадратов состоит в том, что он требует вычисления ковариационной матрицы исправленных значений параметров, которая характеризует степень зависимости измеренной величины от ошибки ее измерения и необходима для задания весов измеренных величин. Отсюда следует, что главное отличие обобщенного метода наименьших квадратов состоит в том, что он сводится к минимизации обобщенной суммы квадратов остатков регрессии $V_{lиi}^T P_{lиi} V_{lиi}$. В то время как метод наименьших квадратов является частным случаем ОМНК, где весовая матрица пропорциональная единичной.

Элементами ковариационной матрицы являются корреляционные моменты связи зависимых величин. Так, например, величина корреляционного момента связи величин x и y вычисляется по формуле (2.39):

$$K_{xy} = K_{yx} = r_{xy} \cdot m_x \cdot m_y = \frac{[v_x \cdot v_y]}{(n-1)} \tag{2.39}$$

где $r_{xy} = \frac{[v_x \cdot v_y]}{[v_x^2] \cdot [v_y^2]}$ – коэффициент корреляции, v_x и v_y – уклонения частных значений величин x_i и y_i, а m_x и m_y – средние квадратические ошибки отдельных измерений x и y.

Соотношение ковариационной матрицы и матрицы весов задается уравнением вида (2.40):

$$P = Q^{-1} = m_o^{-2} X_{и}{}^{-1} \tag{2.40}$$

где m_0- априорная СКО единицы веса, $Q=m_0Kxy$ - матрица весовых коэффициентов. Если измерялись расстояния, то исправленные их значения l_u, имеют соотношение (2.41):

$$l_{иi} = f_i\left(l_i, a_j \sigma_j\right), i = 1,..,n;\ j = 1,..,q \tag{2.41}$$

где σ_j – общие поправки для всех измеренных величин, l_i – результат измерений, a_j- постоянные коэффициенты.

Тогда ковариационная матрица исправленных значений измеренных величин может быть вычислена по формуле (2.42):

$$X_{и} = F \cdot X_{la\delta} \cdot F^T \tag{2.42}$$

где F – матрица преобразований, матрица частных производных функции l_{ui} по аргументам l_i и σ_j, X- ковариационная матрица измеренной величины l_i и общей для всех измерений погрешности определения систематической ошибки. В общем случае матрица F имеет вид (2.43):

$$F=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial l_n} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial l_n} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial l_1} & \frac{\partial f_n}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial l_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_q} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Остальные вычисления выполняются также, как и при традиционном уравнивании параметрическим способом МНК.

Рассмотрим уравнивание той же сети трилатерации, по расстояниям, содержащим систематическую ошибку (в результате влияния которой расстояния увеличились в 1,0003 раза) с использованием относительных величин по ОМНК. К измеренным расстояниям (таблица 2.23) добавим дополнительное измерение исходной стороны l_0.

Таблица 2.23 – Измеренные и истинные расстояния

	Измеренные расстояния, м		Истинные расстояния, м
l_1'	120,455	l_1	120,416
l_2'	102,979	l_2	102,956
l_3'	120,445	l_3	120,416
$l^{4}{}'$	122,104	l_4	122,066
l_5'	120,451	l_5	120,416
l_6'	120,870	l_6	120,830
l_7'	110,492	l_7	110,454
l_8'	116,658	l_8	116,619
l_9'	120,047	l_9	120,000
l_{10}'	116,646	l_{10}	116,619
l_{11}'	111,834	l_{11}	111,803
l_0'	122,104	b	122,066

Ошибка измерения стороны m_{l0}=5,611 мм, априорная ошибка единицы веса $m_0=2\cdot10^{-3}$.

После того как было выполнено нормирование измеренных расстояний относительно l_0, получены коэффициенты отношений из уравнения (2.37), были вычислены предварительные значения K_{ipr} по формуле (2.44):

$$K_{ipr} = \frac{l_{ipr}}{b_1} \qquad (2.44)$$

где l_{ipr} – расстояния, полученные по предварительным значениям координат, b_1 – расстояние, полученное при решении ОГЗ между исходными точками А и В.

Заметим, что при вычислении матрицы А (матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок) необходимо брать производные от уравнений вида (2.45), каждого K_i по каждому параметру (координатам определяемых точек).

$$K_{ij} = \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{l_0} \tag{2.45}$$

Так коэффициенты параметрических уравнений поправок (a_{ij}) вычисляются по формулам (2.46, 2.47):

$$a_{ij} = \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{b_1 \cdot \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} = \frac{\Delta x_{ij}}{b_1 \cdot l_{ij}} = \frac{cos\alpha_{ij}}{b_1} \tag{2.46}$$

$$a_{i+1,j} = \frac{\partial K_i}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{b_1 \cdot \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} = \frac{\Delta y_{ij}}{b_1 \cdot l_{ij}} = \frac{sin\alpha_{ij}}{b_1} \tag{2.47}$$

где $\alpha_{ij} = arctg(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i})$.

Вектор свободных членов параметрических уравнений поправок вычисляется как (2.48):

$$L = \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ \dots \\ k11pr - k11' \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Для того, чтобы вычислить весовую матрицу нужно выполнить следующие действия. Составить F-матрицу частных производных функции $K_{иi}$. При этом каждое K'_i зависит от l'_0.

Следовательно, функция $K_{иi}$ исправленных значений K'_i примет вид (2.49):

$$K_{иi} = f_i(K'_i, l'_0), i = 1, .., n; \tag{2.49}$$

Ковариационная матрица аргументов функции:

$$Xl\delta l0 := \begin{bmatrix} ml1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ml4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ml5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml6^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml7^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml9^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml11^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (ml0)^2 \end{bmatrix}$$

По формуле (2.49) вычислить ковариационную матрицу исправленных значений и по формуле (2.50) определить весовую матрица $P_и$ исправленных значений коэффициентов отношений:

$$P_и = Q_и^{-1} \tag{2.50}$$

где $Q_и = m_0{}^{-2} \cdot X_{Kи}$, $m_0=2\cdot10^{-3}$ – априорная ошибка единицы веса.

Далее необходимо выполнить уравнивание по описанной ранее традиционной технологии реализации метода наименьших квадратов. В приложении А представлена полная процедура уравнивая.

В результате были получены координаты искомых точек, которые представлены в таблице 2.24.

Таблица 2.24 – Координаты искомых точек (ОМНК)

№ т.	Уравненные координаты определяемых точек		№ п/п	Исправленные значения K_i	№ п/п	Поправки в коэффициенты	№ п/п	Исправленные значения измеренных расстояний, м
	X, м	Y, м						
1	239,997	520,001	K_1	0,986551	v_1	$+4{,}045\cdot10^{-6}$	l_1	120,462
2	339,993	449,993	K_2	0,843414	v_2	$+2{,}885\cdot10^{-6}$	l_2	102,984
3	350,004	569,990	K_3	0,986576	v_3	$+1{,}759\cdot10^{-5}$	l_3	120,465
4	250,008	630,005	K_4	0,999977	v_4	$+1{,}534\cdot10^{-5}$	l_4	122,101
			K_5	0,986402	v_5	$+1{,}158\cdot10^{-5}$	l_5	120,444
			K_6	0,989919	v_6	$+3{,}533\cdot10^{-6}$	l_6	120,873
			K_7	0,904777	v_7	$+9{,}164\cdot10^{-6}$	l_7	110,477
			K_8	0,955439	v_8	$+1{,}398\cdot10^{-5}$	l_8	116,663
			K_9	0,983126	v_9	$+6{,}534\cdot10^{-6}$	l_9	120,044
			K_{10}	0,955424	v_{10}	$+4{,}553\cdot10^{-6}$	l_{10}	116,661
			K_{11}	0,915989	v_{11}	$+1{,}417\cdot10^{-5}$	l_{11}	111,846

В целях контроля уравнивания вычисляют поправки по исходным уравнениям связи и сравнивают их с полученными (таблица 2.25), то есть (2.51):

$$K_{i(\text{уравненных})} - K_{i(\text{исходных})} = v_i \tag{2.51}$$

$$\sqrt{\frac{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}{b_1}} - K'_1 = v_i$$

Таблица 2.25 – Отклонение коэффициентов отношений

	K_i по результатам измерений	K_i по результатам уравненных координат	v_{Ki}*10^{-6}
1	0,986494	0,986498	+4
2	0,843372	0,843374	+2
3	0,986412	0,986430	+18
4	1,000000	1,000015	+15
5	0,986464	0,986473	+9
6	0,989890	0,989894	+4
7	0,904897	0,904907	+10
8	0,955397	0,955411	+14
9	0,983152	0,983159	+7
10	0,955299	0,955304	+5
11	0,915890	0,915904	+14

Уравнивание выполнено правильно, так как расхождения поправок Δv_i меньше 10% (таблица 2.26).

$$\Delta v_i = |v_{Ki} - v_{Kiизм}| \tag{2.52}$$

Таблица 2.26 – Отклонение коэффициентов отношений

$v_{Ki}\cdot 10^{-6}$	$v_{Kiизм}\cdot 10^{-6}$	Δv_i
+4	+4	0
+3	+3	0
+18	+18	0
+15	+15	0
+12	+12	0
+4	+4	0
+9	+9	0
+14	+14	0
+7	+7	0
+5	+5	0
+14	+14	0

Апостериорная ошибка веса оказалась равна $5 \cdot 10^{-4}$, что значительно меньше априорной.

Сравнение полученных результатов из двух методик представлено в таблице 2.27.

Таблица 2.27 – Сравнение истинных координат определяемых точек и координат, полученных по результатам уравнивания двумя способами

№ т.	Истинные координат определяемых точек		Уравненные координаты (традиционная методика)				Уравненные координаты (предлагаемая методика)	
			С систематической ошибкой		Нулевая систематическая ошибка			
	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м
1	240,000	520,000	239,968	519,999	239,997	520,001	239,997	520,001
2	340,000	450,000	340,017	449,997	339,994	449,993	339,993	449,993
3	350,000	570,000	350,020	569,991	350,004	569,990	350,004	569,990
4	250,000	630,000	249,981	629,999	250,007	630,004	250,008	630,005

Данные таблицы 2.27 показывают, что в результате уравнивания по ОМНК с использование относительных величин оказались полностью исключены систематические ошибки линейные, относительно определяемых расстояний.

Таким образом, сравнивая истинные координаты определяемых точек и полученные по результатам двух способов уравнивания можно сделать вывод, что уравнивание по традиционной технологии не позволяет получить достоверные результаты. В то время как расхождения между истинными и уравненными координаты по ОМНК достаточно малы (в пределах 2σ).

Также было выполнено уравнивание той же сети, однако, из-за влияние внешних условий наблюдений возникла систематическая ошибка, которая не была учтена (Приложение В). В результате все расстояния оказались больше на 40 мм. Истинные и измеренные расстояния представлены в таблице 2.28.

Таблица 2.28 – Результаты измерений расстояний

	Измеренные расстояния (с систематической), м	Измеренные расстояния (нулевая систематическая), м		Истинные расстояния, м
l1'	120,459	120,419	l_1	120,416
l2'	102,988	103,948	l_2	102,956
l3'	120,449	120,409	l_3	120,416
l4'	122,108	122,068	l_4	122,066
l5'	120,455	120,415	l_5	120,416
l6'	120,873	120,833	l_6	120,830
l7'	110,499	110,459	l_7	110,454
l8'	116,663	116,623	l_8	116,619
l9'	120,051	120,011	l_9	120,000
l10'	116,651	116,611	l_{10}	116,619
l11'	111,840	111,800	l_{11}	111,803
l0'	122,108	122,168	b1	122,066

Полученные координаты из двух методов обработки измерений представлены в таблице 2.29. Кроме того, была выполнена обработка измерений с нулевой систематической ошибкой по традиционной технологии параметрического уравнивая МНК.

Таблица 2.29 – Сравнение истинных координат определяемых точек и координат, полученных по результатам уравнивания двумя способами

№ т.	Истинные координат определяемых точек		Уравненные координаты (традиционная методика)				Уравненные координаты (предлагаемая методика)	
			С систематической ошибкой		Нулевая систематическая ошибка			
	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м
1	240,000	520,000	239,969	519,996	239,997	520,001	240,002	519,999
2	340,000	450,000	340,026	449,997	339,994	449,993	339,998	449,993
3	350,000	570,000	350,024	569,991	350,004	569,990	350,006	569,991
4	250,000	630,000	249,978	629,997	250,007	630,004	250,009	630,004

Исходя из полученных данных, представленных в таблице 2.29, можно сделать вывод, что в случае равенства расстояний, предлагаемая технология также позволяет исключить нелинейные систематические ошибки. Следовательно, сеть целесообразнее уравнивать по предлагаемой методике.

Таким образом, сравнивания полученные координаты точек 1,2,3 и 4 по результатам уравнивания двумя способами, можно сделать заключение о том, что при уравнивании коэффициентов отношений, автоматически исключаются систематические ошибки измерений любой природы линейные по отношению к измеряемым отрезкам, а при равенстве расстояний и не линейные. Но она имеет один недостаток – одно лишнее измерение в сравнении с традиционным вариантом. Зато также позволяет исключить и нелинейные систематические ошибки, если длины примерно равны. Однако, как правило, при построении сетей триангуляции и трилатерации, сети стремятся строить в виде цепочки равносторонних треугольников.

2.3.2 Уравнивание линейно-угловых сетей

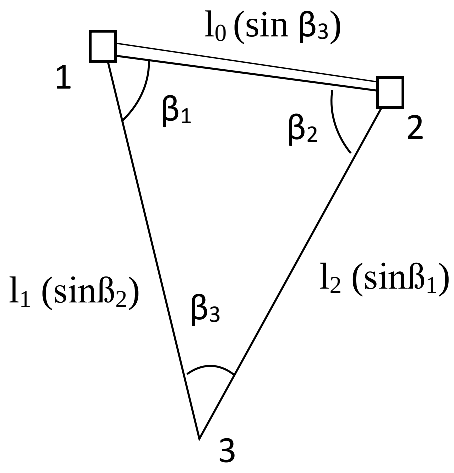

Рисунок 2.17 – Звено линейно-угловой сети

Интересно, что такой подход позволяет уравнивать не только линейные измерения, но и угловые, так как в систему (2.38) очень легко встраиваются уравнения, связанные с угловыми измерениями. Пусть, например, в треугольнике 123 линейной сети измерены и горизонтальные углы (рисунок 2.17). Используя теорему синусов, можно, например, записать (2.53):

$$K_1 = \frac{l_1}{l_0} = \frac{sin\beta_2}{sin\beta_3} \tag{2.53}$$

Откуда получаем уравнение (2.54):

$$(K_1 \cdot l_0)^2 - [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] = 0 \tag{2.54}$$

Такое уравнение можно сформировать для любой пары углов и расстояний в треугольниках и добавить в систему уравнений, составленных по результатам линейных измерений. Координаты точки в этом случае могут быть вычислены двумя путями: совместным уравниванием коэффициентов отношений, полученных по угловым и линейным измерениям, либо с использованием средних (при необходимости средневзвешенных) коэффициентов.

В первом случае задача решается параметрическим способом ОМНК, при этом производные необходимо находить по уравнениям вида (2.55):

$$K_1^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]=0$$

$$K_2^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]=0 \qquad (2.55)$$

$$K_3^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]=0$$

$$K_4^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]=0$$

где $K_1^2=\frac{l_1}{l_0}$, $K_2^2=\frac{l_2}{l_0}$, $K_3^2=\frac{sin\beta_2}{sin\beta_3}$, $K_4^2=\frac{sin\beta_1}{sin\beta_3}$.

После линеаризации, применительно к рассматриваемому треугольнику, в котором координаты точек 1 и 2 известны, получим 4 уравнения вида (2.56):

$$a_i\delta x_1+b_i\delta x_1+l_i=v_i \qquad (2.56)$$

где a_i, b_i – частные производные, $a_i=\frac{\delta K_i}{\delta x_1}$, $b_i=\frac{\delta K_i}{\delta b_1}$, $l_i=K_{пред}-K_{изм}$, $K_{пред}$- полученное по предварительным значениям координат, $K_{изм}$ – полученное по результатам измерений.

Во втором случае задача сводится к решению линейной засечки из одного треугольника, по выше рассмотренному алгоритму и коэффициентам, полученным как среднее из результатов линейных и угловых измерений. При этом нужно учитывать их эквивалентность по точности (по формуле 2.12).

Рассмотрим возможность применения второго способа на численном примере. Пусть в звене линейно-угловой сети были измерены горизонтальные углы ß$_1$, ß$_2$, ß$_3$ и расстояния l_1, l_2, l_0. Традиционная технология решения данной задачи не подразумевает измерение базиса, но как отмечалось выше, это лучше сделать, так как позволяет получить коэффициенты отношений линейных элементов (то есть выполнить масштабирование). Координаты исходных точек представлены в таблице 2.30. Результаты измерений всех расстояний отягощены влиянием систематической ошибки, поэтому они оказались больше в 1,0003 раза. Истинные и измеренные расстояния представлены в таблице 2.31. Среднеквадратические ошибки измерений приняты равными: $m_ß$=2'', m_l=2 мм.

Таблица 2.30 – Исходные данные

№ т.	Координаты точек	
	X, м	Y, м
1	100,000	200,000
2	90,000	290,000

Таблица 2.31 – Результаты измерений

	Истинные значения		Измеренные значения		Исправленные значения
$l_{1ист}$	98,489 м	l_1'	98,520 м		
$l_{2ист}$	94,340 м	l_2'	94,372 м		
b_1	90,554 м	l_0'	90,579 м		
$ß_{1ист}$	59°41'50"	$ß_1$	59°41'47"	$ß_{1исп}$	59°41'50"
$ß_{2ист}$	64°20'06"	$ß_2$	64°20'08"	$ß_{2исп}$	64°20'11"
$ß_{3ист}$	55°57'55"	$ß_3$	55°57'56"	$ß_{3исп}$	55°57'59"

Вычислим угловую невязку ω= -9'' в треугольнике и введем необходимые поправки в измеренные углы.

Тогда коэффициенты отношений:

$$K_1' = \frac{l_1{'}}{l_0{'}} = 1{,}08767,\ K_2' = \frac{l_2{'}}{l_0{'}} = 1{,}041876$$

$$K_3' = \frac{sin\beta_{2исп}}{sin\beta_{3исп}} = 1{,}087658, K_4' = \frac{sin\beta_{1исп}}{sin\beta_{3исп}} = 1{,}041826$$

Согласно формуле (2.12) линейные и угловые измерения не эквиваленты по точности. Следовательно, необходимо вычислять средневзвешенные значения для каждого коэффициента по формуле (2.57):

$$t'_i = \frac{[KP]}{[P]} \tag{2.57}$$

Вычислим ошибку определения коэффициентов отношений по формулам (2.58):

$$m_{k'_3} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_3 Cos^2\beta_2 + Sin^2\beta_2 Cos^2\beta_3}}{Sin^2\beta_3} m_\beta = 1 \cdot 10^{-5},\ \mathrm{m}_{K'_1} = \frac{\sqrt{l_0^2 + l_1^2}}{l_0^2} m_l = 3 \cdot 10^{-5};$$

$$m_{k'_4} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_3 Cos^2\beta_1 + Sin^2\beta_1 Cos^2\beta_3}}{Sin^2\beta_3} m_\beta = 1 \cdot 10^{-5} \qquad (2.58)$$

$$\mathrm{m}_{K'_2} = \frac{\sqrt{\mathrm{l}_0^2 + \mathrm{l}_2^2}}{\mathrm{l}_0^2} m_l = 3 \cdot 10^{-5}$$

На самом деле можно поступить проще и вычислять по формулам для равностороннего треугольника.

Примем $\mu_0 = 3 \cdot 10^{-5}$. Тогда, P_l=1, P_β=9 и по формуле (2.57) вычислим коэффициенты отношений по результатам линейных и угловых измерений:

$$t'_1 = \frac{1 \cdot K'_1 + 9 \cdot K'_3}{10} = 1{,}0876591, \quad t'_2 = \frac{9K'_4 + 1 \cdot K'_2}{10} = 1{,}0418311$$

Далее координаты точки могут быть вычислены из решения линейной засечки из одного треугольника. Для этого необходимо решить систему уравнений (2.59):

$$\begin{cases} [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] - t'^2_1 \cdot b_1^2 = 0 \\ [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] - t'^2_2 \cdot b_1^2 = 0 \end{cases} \qquad (2.59)$$

В результате было выполнено параметрическое уравнивание звена линейно-угловой сети с тем же распределением случайной ошибки для углов и расстояний, что и в первом случае, но с нулевой систематической. Истинные координаты определяемой точки и результаты, полученные посредством двух методик, представлены в таблице 2.32.

Таблица 2.32 – Координаты определяемой точки

	Истинные координаты определяемой точки		С систематической ошибкой с использованием предлагаемой технологии		Традиционное уравнивание по МНК (MN)			
					С систематической ошибкой		Без систематической ошибки	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м
3	10,000	240,000	9,997	240,001	9,991	240,000	9,997	240,001

Равенство координат, полученных по результатам уравнивания традиционным методом (с нулевой систематической ошибкой) и при уравнивании с использованием коэффициентов отношений линейных и угловых измерений подтверждают корректность предлагаемой технологии. То есть, оказались автоматически учтены систематические ошибки, линейные относительно измеренных расстояний.

Рассмотрим, как повлияет на результаты уравнивания постоянная (не зависящая от расстояния) систематическая ошибка. Пусть из-за влияния неучтенной систематической ошибки все расстояния уменьшились на 40 мм. Результаты измерений и истинные значения расстояний представлены в таблице 2.33.

Таблица 2.33 – Результаты измерений

	Истинные значения		Измеренные значения		Исправленные значения
$l_{1ист}$	98,489 м	l_1'	98,451 м		
$l_{2ист}$	94,340 м	l_2'	94,304 м		
b_1	90,554 м	l_0'	90,512 м		
$ß_{1ист}$	59°41'50"	$ß_1$	59°41'47"	$ß_{1исп}$	59°41'50"
$ß_{2ист}$	64°20'06"	$ß_2$	64°20'08"	$ß_{2исп}$	64°20'11"
$ß_{3ист}$	55°57'55"	$ß_3$	55°57'56"	$ß_{3исп}$	55°57'59"

Результаты уравнивания по двум методам представлены в таблице 2.34.

Таблица 2.34 – Координаты определяемой точки

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2">Истинные координаты определяемой точки</td><td colspan="2" rowspan="2">С систематической ошибкой с использованием предлагаемой технологии</td><td colspan="4">Традиционное уравнивание по МНК (MN)</td></tr>
<tr><td colspan="2">С систематической ошибкой</td><td colspan="2">Без систематической ошибки</td></tr>
<tr><td></td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td><td>X, м</td><td>Y, м</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10,000</td><td>240,000</td><td>9,996</td><td>240,001</td><td>10,006</td><td>240,002</td><td>9,997</td><td>240,001</td></tr>
</table>

Как видим, и в этом случае систематическая ошибка оказалась практически компенсированной. Это произошло потому, что длины сторон треугольника не сильно отличаются друг от друга.

Что касается уравнивания линейно-угловых сетей, состоящих из цепочки треугольников (рисунок 2.18), то возникает проблема, состоящая в том, что коэффициенты отношений сторон треугольников, полученные через синусы измеренных углов не связаны между собой. Они разномасштабны.

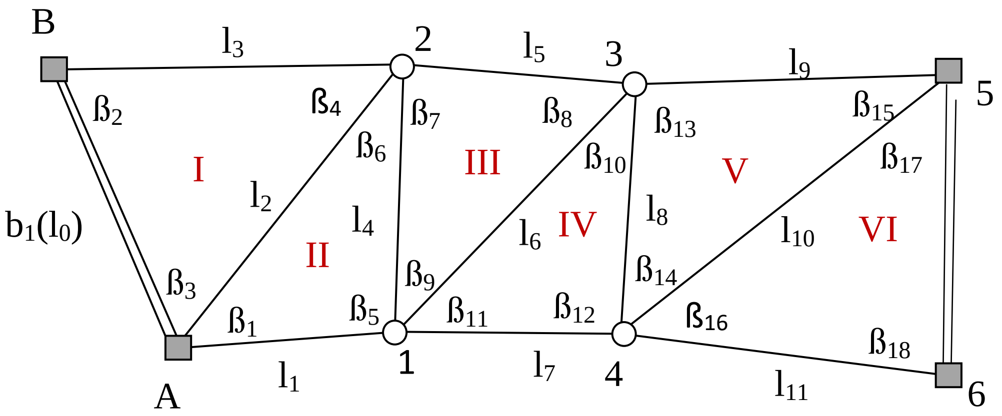

Рисунок 2.18 – Схема линейно-угловой сети

Например, коэффициенты отношений стороны *A*2 из треугольника *AB2* равен $\sin\beta_2$, а из треугольника *A12* – $\sin\beta_5$ (а углы в общем случае не равны друг другу) и т.д. Исправить ситуацию (то есть привести всё к одному масштабу) можно, если вспомнить, что коэффициенты отношений величины однородные. Тогда, чтобы их связать следует построить следующую цепочку соотношений:

$$t_1 = \frac{sin\beta_5}{sin\beta_2},\ t_2 = \frac{sin\beta_8}{K_{12}},\ t_3 = \frac{sin\beta_{12}}{K_{13}},\ t_4 = \frac{sin\beta_{15}}{K_{34}},\ t_5 = \frac{sin\beta_{18}}{K_{45}}$$

где $t_1,...,t_5$ – масштабные коэффициенты, $\beta_1,..,\beta_{18}$- исправленные значения углов (после устранения угловой невязки), $K_{A2} = sin\beta_2$, $K_{12} = \frac{sin\beta_1}{t_1}$, $K_{13} = \frac{sin\beta_7}{t_2}$, $K_{34} = \frac{sin\beta_{11}}{t_3}$, $K_{45} = \frac{sin\beta_{13}}{t_4}$.

Тогда остальные коэффициенты *K* сторон вычисляются по формулам:

$$K_{A1} = \frac{sin\beta_6}{t_1},\ K_{23} = \frac{sin\beta_9}{t_2},\ K_{14} = \frac{sin\beta_{10}}{t_3},\ K_{35} = \frac{sin\beta_{14}}{t_4},\ K_{46} = \frac{sin\beta_{17}}{t_5}.$$

После указанной операции все коэффициенты отношений, полученные через синусы углов, оказываются связанными между собой и представляют собой однородные величины. Они так же описывают сеть, как и коэффициенты, полученные из линейных элементов, но в другом масштабе.

Воспользуемся свойством однородных величин и разделим каждый коэффициент на sinß$_4$ – противолежащей исходной стороне, то есть:

$$d_1 = \frac{K_{A1}}{sin\beta_4}, d_2 = \frac{K_{A2}}{sin\beta_4}, d_3 = \frac{K_{B2}}{sin\beta_4} \text{ и т.д.}$$

Теперь это те же нормированные коэффициенты отношений (d_n), что и для линейных измерений (K_n). Теоретически, они должны быть равны между собой, но в общем случае будут немного отличаться, из-за влияния случайных и неучтенных систематических погрешностей измерений.

Дальше для определения координат точек сети можно использовать все те технологии, которые были описаны выше, однако, уравнений вида (2.55) стало в два раза больше, то есть 22:

$$K_1^2[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] - [(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2] = 0$$

$$d_1^2[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] - [(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2] = 0$$

$$K_2^2[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] - [(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2] = 0 \tag{2.60}$$

$$d_2^2[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] - [(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2] = 0$$

….

Возможность использования такого подхода докажем на примере уравнивания линейно-угловой сети (рисунок 2.18) и сравним с результатами обработки по традиционной технологии. Примем, что линейные и угловые измерения выполнялись с ошибкой $m_{li} = (5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i)$, мм, $m_ß$=17". По результатам измерений, все расстояния оказались больше в 1,0004 раза. Истинные и измеренные расстояния и углы представлены в таблице 2.35.

Таблица 2.35 – Результаты измерений и истинные значения расстояний и углов

	Измеренные расстояния, м		Истинные расстояния, м		Измеренный угол		Истинные значения угла
l1'	120,467	$l_{1ист}$	120,416	β_1'	65°42′45″	$\beta_{1ист}$	65°42′32″
l2'	102,989	$l_{2ист}$	102,956	β_2'	50°14′26″	$\beta_{2ист}$	50°14′40″
l3'	120,457	$l_{3ист}$	120,416	β_3'	64°02′32″	$\beta_{3ист}$	64°02′48″

Продолжение таблицы 2.35

l4'	122,116	$l_{4ист}$	122,066	β_4'	65°42′44″	$\beta_{4ист}$	65°42′32″
l5'	120,463	$l_{5ист}$	120,416	β_5'	50°15′15″	$\beta_{5ист}$	50°14′40″
l6'	120,882	$l_{6ист}$	120,830	β_6'	64°02′31″	$\beta_{6ист}$	64°02′48″
l7'	110,503	$l_{7ист}$	110,454	β_7'	59°46′34″	$\beta_{7ист}$	59°46′18″
l8'	116,670	$l_{8ист}$	116,619	β_8'	60°47′43″	$\beta_{8ист}$	60°47′33″
l9'	120,059	$l_{9ист}$	120,000	β_9'	59°25′57″	$\beta_{9ист}$	59°26′09″
l10'	116,658	$l_{10ист}$	116,619	β_{10}'	55°24′21″	$\beta_{10ист}$	55°24′28″
l11'	111,845	$l_{11ист}$	111,803	β_{11}'	60°21′28″	$\beta_{11ист}$	60°21′42″
l0'	122,116	b1	122,066	β_{12}'	64°14′00″	$\beta_{12ист}$	64°13′50″
				β_{13}'	59°01′52″	$\beta_{13ист}$	59°02′10″
				β_{14}'	61°55′47″	$\beta_{14ист}$	61°55′40″
				β_{15}'	59°01′39″	$\beta_{15ист}$	59°02′10″
				β_{16}'	69°20′35″	$\beta_{16ист}$	69°20′27″
				β_{17}'	53°34′49″	$\beta_{17ист}$	53°35′02″
				β_{18}'	57°04′50″	$\beta_{18ист}$	57°04′31″

Как видим, стороны и углы треугольников примерно равны, воспользуемся формулой (2.13) и проверим эквивалентность линейных и угловых измерений по точности:

$$m_\beta = 1{,}72 \cdot \frac{m_l \rho''}{l} = 1{,}72 \cdot \frac{5{,}6\text{ мм}\cdot 206265''}{116{,}6\text{ м}} \approx 17'',$$

где $l = \sum_1^n l_i = 116{,}6$ м, m_l=5,6 мм – ошибка измерения расстояния *l*.

Условие эквивалентности точностей соблюдается, значит, коэффициенты отношений, по результатам линейных и угловых измерений получены с эквивалентной точностью, следовательно, их можно уравнивать как равноточные величины. При этом ошибка определения коэффициента отношений вычисляется по формуле (2.3):

$$m_K = \frac{m_l}{l}\sqrt{2} = \frac{5{,}6\text{ мм}\cdot\sqrt{2}}{116{,}6\text{м}} = 7\cdot 10^{-5}$$

Примем априорную ошибку единицы веса $\mu_0 = m_K = 7\cdot 10^{-5}$.

Уравнивание было выполнено (приложение Д), при этом в каждом треугольнике синусы углов вычислялись по исправленным значениям измеренных углов (устранена угловая невязка). Далее согласно рассмотренной выше технологии были вычислены коэффициенты отношений по результатам линейных и угловых измерений (для всей сети).

Таблица 2.36 – Коэффициенты отношений, полученные по результатам линейных (1) и угловых (2) измерений

	1	$1_{норм}$	2	$2_{норм}$
l1'	120,467	0,986494	0,898939	0,986216
l2'	102,989	0,843372	0,768724	0,843359
l3'	120,457	0,986412	0,899151	0,986449
l4'	122,116	1,000000	0,911323	0,999802
l5'	120,463	0,986462	0,898951	0,986230
l6'	120,882	0,989890	0,902117	0,989703
l7'	110,503	0,904897	0,824612	0,904673
l8'	116,670	0,955397	0,870625	0,955154
l9'	120,059	0,983152	0,895963	0,982951
l10'	116,658	0,955299	0,870658	0,955190
l11'	111,845	0,915890	0,834616	0,915648

Уравненные значения координат точек представлены в таблице 2.36. Апостериорная ошибка единицы веса $\mu = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$, сравнивая ее с априорной, можно сделать вывод, что точность сети оказалась немного ниже, чем предполагалось.

Для того чтобы сравнить результаты уравнивания по предлагаемой технологии и с использованием традиционной методики было выполнено параметрическое уравнивание линейно-угловой сети по МНК (в MN). Истинные и уравненные координаты определяемых точек, полученные по результатам двух методик представлены в таблице 2.37.

Таблица 2.37 – Сравнение истинных координат определяемых точек и координат, полученных по результатам уравнивания двумя способами

№ т.	Истинные координат определяемых точек		Уравненные координаты (традиционная методика)				Уравненные координаты (предлагаемая методика)	
			С систематической ошибкой		Нулевая систематическая ошибка			
	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м
1	240,000	520,000	239,976	519,998	239,996	519,997	240,004	520,000
2	340,000	450,000	340,014	449,995	339,996	449,995	339,990	450,002
3	350,000	570,000	350,017	569,993	350,000	569,993	349,993	569,995
4	250,000	630,000	249,983	630,002	250,003	630,002	250,012	630,006

Анализируя данные, полученные при традиционном уравнивании по МНК с нулевой систематической ошибкой и по предлагаемой методике (с заданной систематической ошибкой и с тем же распределением ошибки случайной) приходим к выводу, что предлагаемая методика позволила исключить влияние систематической ошибки, линейной относительно измеряемых расстояний.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что уравнивание целесообразнее выполнять с использованием коэффициентов отношений, так как такой подход позволяет полностью устранить влияние систематических ошибок измеренных расстояний, если их влияние пропорционально этому расстоянию, а при равенстве длин линий в сети и нелинейные систематические ошибки. К тому же, при соблюдении эквивалентности точностей линейных и угловых измерений процедура уравнивания значительно упрощается, так как в таком случае коэффициенты можно уравнивать как равноточные величины. Но это лишь частный случай, если условие эквивалентности не соблюдается, то сеть необходимо уравнивать по обобщенному методу наименьших квадратов, с обязательным установлением весов для каждого коэффициента. Этот случай рассматривается в 4 экспериментальной главе.

Выводы к главе 2

1. Представление тригонометрических функций измеренных углов в качестве коэффициентов отношений позволяет оценить соотношение точностей линейных и угловых измерений, что может быть весьма полезно как при проектировании сетей, так и при совместной обработке линейных и угловых измерений.

2. Переход от абсолютных величин к относительным позволяет учитывать систематические ошибки, линейные относительно измеряемых величин, а в некоторых случаях и нелинейные.

3. Технология совместной обработки коэффициентов отношений по результатам линейных и угловых измерений позволяет получить верные координаты точек, даже в том случае, если линейные измерения отягощены влиянием систематической ошибки. В то время как традиционная технология уравнивания требует обязательного устранения этих ошибок.

4. Элементы геодезической сети, однозначно определяющие её форму, могут быть представлены в виде безразмерных (относительных величин) и это может быть положено в основу методики оценки деформаций зданий, сооружений и земной поверхности.

ГЛАВА 3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА

3.1 Применение элементов теории подобия для оценки стабильности деформационной сети

Как уже отмечалось, технология получения и обработки данных с использованием относительных величин может быть весьма эффективна, если речь идет о задачах определения деформаций объекта (сети). Связано это с тем, что измерения в этом случае выполняют циклами с определенным промежутком времени между ними, а величины деформаций определяют по результатам сравнения данных из различных циклов наблюдений, то есть при разных внешних условиях. И если при обработке измеренных величин оказались не компенсированы систематические ошибки измерений (а они от цикла к циклу могут меняться), то их влияние может повлиять на результаты анализа деформационного процесса.

Для того чтобы теоретически обосновать суть предлагаемой методики оценки стабильности деформационной сети, рассмотрим основы теории подобия, которая используется при моделировании процессов и явлений. Помимо того, что теория подобия позволяет выявить подобные явления (процессы) она также позволяет установить степень зависимости процесса или явления от какого-либо параметра и активно применяется во многих областях науки, таких, например, как электротехника, физика, геометрия и других [16], [51]. Как правило, теория подобия применяется при моделировании процесса, позволяет в последующем правильно поставить эксперимент [51] и исследовать множество подобных процессов. В геодезии теория подобия использовалась при определении коэффициента рефракции в тригонометрическом нивелировании [90].

В основу теории подобия положен принцип безразмерных величин, именно они позволяют оценить, подобны явления или нет. Как уже упоминалось ранее, размерные величины по сути своей получаются посредство масштабирования относительно некой эталонной величины (одинаковой для множества разнообразных явлений) и используются только для определения количественной характеристики какого-либо физического явления (процесса). В то время как безразмерные величины, позволяют задать «естественный» масштаб системы, органически связанный с рассматриваемым явлением.

Применимость теории подобия существенным образом зависит от возможности правильно (в аналитическом смысле) поставить задачу или, по крайней мере, составить систему основных уравнений, и на основании физических соображений, сформулировать условия единственности решения. В противном случае при недостатке существенных величин или их избытке возможно искажение анализа протекания процесса.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления, важно только соблюдать (обеспечить) неизменность параметров систем, в которых протекают явления, или же учитывать факторы, влияющие на изменение системы. Следует также учитывать, что величины, которые рассматриваются в подобных явлениях, должны быть однородными, иметь один и тот же физический смысл и одинаковую размерность. А сами явления – строгое математическое описание и рассматриваться в сходственных точках и в сходственные моменты времени, т.е. значению величины в одной системе должно, так или иначе, соответствовать значение в другой системе.

Первая теорема подобия гласит, что подобные явления, имеют одинаковые критерии подобия. Под критериями подобия при этом подразумевают безразмерные величины, которые представлены как комбинации параметров системы, наиболее существенных для данного явления. В общем случае первая теорема позволяет ответить на вопрос, какие параметры необходимо измерять. Что касается объектов, то в геодезии, величина их деформации определяется по разностям координат точек с ними связанными, полученных в разных циклах наблюдений, которые в свою очередь определяют посредством измерения углов, расстояний и превышений (в зависимости от способа наблюдений и вида деформаций). Следовательно, именно эти величины и играют роль критериев подобия. Кроме того, они должны быть представлены в безразмерном виде. Для этого можно воспользоваться описанным выше принципом перехода к безразмерным величинам и нормировать все одноименные величины относительно, одного из измерений. Так, например, в линейной засечке, рассмотренной в предыдущей главе, расстояния, представленные в виде безразмерных величин, играют роль критериев подобия.

Согласно второй теореме подобия, известной как π – теорема, любое уравнение физического процесса может быть представлено как функция, зависящая от критериев подобия. Такая зависимость называется критериальным уравнением.

Прежде чем перейти к третьей теореме раскроем такие понятия как определяющие критерии и определяемые. Критерии, которые входят в условия однозначности называются определяющими, а критерии, которые содержат зависимые переменные (в случае линейной засечки – расстояния, представленные в безразмерном виде) являются определяемыми. Итак, третья теорема содержит необходимые и достаточные условия существования подобных систем, то есть позволяет ответить на вопрос какие явления подобны исследованному. Так, системы считаются подобными, если их условия однозначности подобны и определяющие критерии равны.

Условия однозначности в данном случае необходимы, в противном случае получится целое множество систем. Так, например, геометрическое подобие двух треугольников подразумевает пропорциональность сходственных сторон и равенство соответствующих углов. Но таких треугольников может быть великое множество, а значит необходимо задать дополнительное условие (условие однозначности), которые бы позволило из многообразия подобных процессов (явлений) выделить конкретный процесс. В качестве такого условия в геодезии можно принять некоторый базис. Причем он может быть как элементом сети (или элементом объекта), так и находится за пределами объекта (сети).

Раскроем теперь саму методику оценки деформаций, основанную на применении элементов теории подобия. Подобно тому, как в теории подобия выявляют подобные процессы или явления, в геодезии можно судить о стабильности деформационной сети, исходя из соображений подобия элементов этой сети, полученных из различных циклов наблюдений. Так, на основании вышеизложенного, чтобы говорить о подобности формы и размеров объектов (сетей) нужно, чтобы выполнялись три условия:

1. Подобные процессы (явления) имеют один и тот же физический смысл, а дифференциальные уравнения подобных явлений − одинаковы.

2. Критерии подобия сходственных величин численно равны.

3. Подобные явления имеют одинаковые условия однозначности, за исключением их числовых значений размерных величин.

Однако, нельзя однозначно утверждать, что, если элементы деформационной сети, полученные из двух циклов наблюдений, сети оказались подобны, значит сеть стабильна. Возможно, имеет место быть равномерная деформация. Следовательно, необходимо чтобы условия однозначности были не только подобны, но и численно равны.

Таким образом, деформационная сеть стабильна, если:

1. Соблюдается первое условие подобия системы, то есть дифференциальные уравнения деформационного процесса одинаковы.

2. Коэффициенты подобия сходственных величин не только подобны, но и равны для всех элементов сети, то есть должно выполняться условие (3.1):

$$m_1 = \frac{K_1^I}{K_1^{II}} = idem, (\text{то есть } m_1 = \frac{K_1^I}{K_1^{II}} .. = m_n = \frac{K_n^I}{K_n^{II}}), \qquad (3.1)$$

где m – коэффициент подобия, одинаковый для всех одноименных элементов сети, K_1^I K_1^{II} − значения одноименной безразмерной величины в первом и втором циклах наблюдений (сходственные величины), idem – «соответственно одинаковые для всех рассматриваемых процессов».

3. Условия однозначности в рамках двух циклов наблюдений не только подобны, но и численно равны.

Использование элементов теории подобия для решения задач деформационного мониторинга отражено в работе [176]. Рассмотрим теперь также применение данной методики для оценки стабильности сети трилатерации.

3.1.1 Оценка стабильности сети трилатерации

Допустим, что рассмотренная выше сеть трилатерации наблюдалась дважды с некоторым промежутком времени между циклами. При этом использовались разные тахеометры, но равноточные, то есть систематическая ошибка измерений в двух циклах различна. Тогда, используя метод подобия, можно проанализировать, произошла деформация сети или нет. Согласно предлагаемой методике оценки стабильности сети необходимо все измеренные расстояния представить в виде относительных величин. Для этого воспользуемся формулой (2.14) и вычислим коэффициенты отношений измеренных расстояний. После чего выполним уравнивание по ОМНК и по формуле (3.1) вычислим коэффициенты подобия. При этом рассмотрим два случая: систематическая ошибка оказывала пропорциональное влияние на измерение длин сторон; в результате влияния систематической ошибки увеличивались все измеренные расстояния на одну и ту же величину.

Первый случай – все расстояния в первом цикле измерений из-за влияния систематической погрешности оказались в 1,0003 раза больше, чем их истинные значения. Во втором цикле использовался другой тахеометр (но с той же точностью) – все расстояния оказались в 1,0004 раза больше. Кроме того, СКО измерения расстояния $m_{li} = (5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i),$ мм. Случайные ошибки в двух циклах распределены по-разному. При этом в качестве предварительных координат определяемых точек во втором цикле использовались координаты, полученные по результатам уравнивания в первом цикле. Процедура уравнивания результатов измерений в первом и во втором циклах представлены в Приложении А и Приложении Б соответственно. Результаты измерений отражены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты измерений расстояний в двух циклах наблюдений (1 случай, систематическая ошибка *)

	Измеренные расстояния (1 цикл), м		Измеренные расстояния (2 цикл), м
l^{I}_{1}	120,455	l^{II}_{1}	120,425
l^{I}_{2}	102,979	l^{II}_{2}	102,997
l^{I}_{3}	120,445	l^{II}_{3}	120,439
l^{I}_{4}	122,104	l^{II}_{4}	122,088
l^{I}_{5}	120,451	l^{II}_{5}	120,501
l^{I}_{6}	120,870	l^{II}_{6}	120,881
l^{I}_{7}	110,492	l^{II}_{7}	110,496
l^{I}_{8}	116,658	l^{II}_{8}	116,662
l^{I}_{9}	120,047	l^{II}_{9}	120,033
l^{I}_{10}	116,646	l^{II}_{10}	116,690
l^{I}_{11}	111,834	l^{II}_{11}	111,878
l^{I}_{0}	122,104	l^{II}_{0}	122,111

Было выполнено уравнивание, по предложенной выше методике, основанной на обобщенном методе наименьших квадратов. Исправленные значения коэффициентов отношений измеренных расстояний представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Исправленные значения коэффициентов отношений измеренных величин

	Коэффициенты отношения (1 цикл)		Коэффициенты отношения (2 цикл)
K^{I}_{1}	0,986551	K^{II}_{1}	0,986474
K^{I}_{2}	0,843414	K^{II}_{2}	0,843357
K^{I}_{3}	0,986576	K^{II}_{3}	0,986418
K^{I}_{4}	0,999977	K^{II}_{4}	0,999997
K^{I}_{5}	0,986402	K^{II}_{5}	0,986451
K^{I}_{6}	0,989919	K^{II}_{6}	0,989879
K^{I}_{7}	0,904777	K^{II}_{7}	0,904894
K^{I}_{8}	0,955439	K^{II}_{8}	0,955402
K^{I}_{9}	0,983126	K^{II}_{9}	0,983141
K^{I}_{10}	0,955424	K^{II}_{10}	0,955285
K^{I}_{11}	0,915989	K^{II}_{11}	0,915884

Вычислим коэффициент подобия m.

Таблица 3.3 – Значения коэффициентов подобия

m_1	1,000078
m_2	1,000068
m_3	1,000160
m_4	0,999980
m_5	0,999950
m_6	1,000040
m_7	0,999871
m_8	1,000039
m_9	0,999985
m_{10}	1,000146
m_{11}	1,000115

Согласно данным таблицы 3.3 – условие стабильности сети не соблюдается. Для того чтобы вычислить величину смещений воспользуемся уравненными значения координат точек, представленными в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Уравненные координаты определяемых точек

Уравненные координаты (1 цикл)		Уравненные координаты (2 цикл)		Вычисленные смещения		Истинные смещения	
X, м	Y, м	X, м	Y, м	Δx, мм	Δy, мм	Δx, мм	Δy, мм
239,997	520,001	240,036	519,964	+39	-37	+26	-30
339,993	449,993	340,013	449,977	+20	-16	+7	-19
350,004	569,990	350,016	570,014	+12	+24	+10	+13
250,008	630,005	249,991	629,967	-17	-38	-3	-26

Как видим из результатов, представленных в таблице 3.4, различия в смещениях истинных и полученных по результатам вычислений находятся в пределах 3m. Здесь и далее истинные смещения были получены по результатам моделирования: определяемые точки во втором цикле смещали на заданную величину, вычисляли новые значения расстояний, далее им задавалась систематическая ошибка и при помощи датчика случайных числе – случайная ошибка.

Второй случай. В первом и втором циклах расстояния увеличились на 40 мм из-за влияния систематической погрешности, которая не была учтена. В таблице 3.5 представлены результаты измерений расстояний в двух циклах наблюдений. Во втором цикле систематическая ошибка оказалась равна +50 мм, в результате чего все расстояния увеличились. Причем при уравнивании во втором цикле в качестве предварительных координат точек использовались координаты, полученные из 1 цикла. Порядок и результаты обработки измерений, полученных из двух циклов наблюдений проиллюстрированы в Приложении В и Приложении Г.

Таблица 3.5 – Результаты измерений расстояний в двух циклах (2 случай, систематическая ошибка +)

	Измеренные расстояния (1 цикл), м		Измеренные расстояния (2 цикл), м
l^{I}_{1}	120,459	l^{II}_{1}	120,427
l^{I}_{2}	102,988	l^{II}_{2}	103,006
l^{I}_{3}	120,449	l^{II}_{3}	120,440
l^{I}_{4}	122,108	l^{II}_{4}	122,089
l^{I}_{5}	120,455	l^{II}_{5}	120,503
l^{I}_{6}	120,873	l^{II}_{6}	120,883
l^{I}_{7}	110,499	l^{II}_{7}	110,502
l^{I}_{8}	116,663	l^{II}_{8}	116,665
l^{I}_{9}	120,051	l^{II}_{9}	120,035
l^{I}_{10}	116,651	l^{II}_{10}	116,693
l^{I}_{11}	111,840	l^{II}_{11}	111,883
l^{I}_{0}	122,108	l^{II}_{0}	122,113

Исправленные коэффициенты отношений измеренных расстояний представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Исправленные коэффициенты отношений измеренных величин

	Коэффициенты отношения (1 цикл)		Коэффициенты отношения (2 цикл)
K^{I}_{1}	0,986524	K^{II}_{1}	0,986442
K^{I}_{2}	0,843401	K^{II}_{2}	0,843340
K^{I}_{3}	0,986572	K^{II}_{3}	0,986413
K^{I}_{4}	0,999968	K^{II}_{4}	0,999986
K^{I}_{5}	0,986394	K^{II}_{5}	0,986442
K^{I}_{6}	0,989905	K^{II}_{6}	0,989861
K^{I}_{7}	0,904754	K^{II}_{7}	0,904866
K^{I}_{8}	0,955428	K^{II}_{8}	0,955387
K^{I}_{9}	0,983117	K^{II}_{9}	0,983130
K^{I}_{10}	0,955408	K^{II}_{10}	0,955265
K^{I}_{11}	0,915969	K^{II}_{11}	0,915860

Коэффициенты m подобия, полученные по формуле (3.1) представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Значения коэффициентов подобия

m_1	1,000083
m_2	1,000072
m_3	1,000161
m_4	0,999982
m_5	0,999951
m_6	1,000044
m_7	0,999876
m_8	1,000043
m_9	0,999987
m_{10}	1,000150
m_{11}	1,000119

Согласно данным таблицы 3.7 – условие стабильности сети не соблюдается. Смещения, полученные по разностям координат точек, представлены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Уравненные координаты определяемых точек с использованием элементов теории подобия

Уравненные координаты (1 цикл)		Уравненные координаты (2 цикл)		Вычисленные смещения		Истинные смещения	
X, м	Y, м	X, м	Y, м	Δx, мм	Δy, мм	Δx, мм	Δy, мм
240,002	519,999	240,041	519,961	+39	-38	+26	-30
339,998	449,993	340,020	449,977	+22	-16	+7	-19
350,006	569,991	350,019	570,015	+13	+24	+10	+13
250,009	630,004	249,992	629,966	-17	-38	-3	-26

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что смещения различаются от истинных в пределах 3m. Следовательно, можно сделать вывод, что предлагаемая технология позволяет не только выявить деформацию сети, но и получить верные смещения в пределах точности измерений.

3.1.2 Определение деформаций по измерениям вдоль профильных линий

Рассмотрим возможности обработки измерений и выявления деформаций при измерениях вдоль профильных линий. В маркшейдерии очень часто при исследовании деформационных процессов земной поверхности (которая может происходить по разным причинам) используют профильные линии, вдоль которых выполняют как линейные измерения, так и нивелирование [118]. Конечно, для определения деформации борта карьера нужна целая система профильных линий, но в качестве

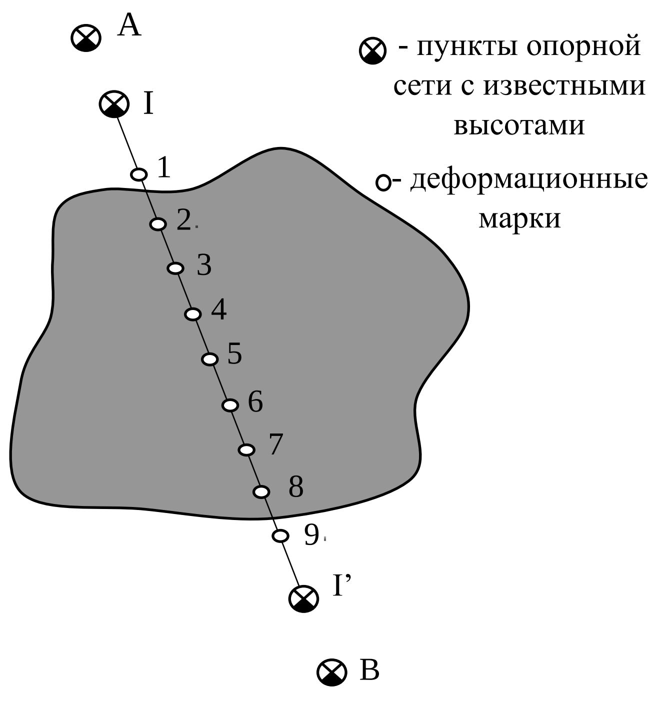

Рисунок 3.1 – Профильная линия

примера возьмем периодические измерения расстояний и превышений вдоль одной из них I-I' [118], длиной 400 м (рисунок 3.1).

В первых 5 столбцах таблицы 3.9, приведены результаты измерения расстояний между смежными деформационными марками вдоль профильной линии в двух циклах, без ошибок (столбцы 1 и 3). Вычислены расстояния каждой марки от опорной точки I (столбцы 2 и 4) и смещения относительно точки I (столбец 5). При этом использовалась традиционная технология производства работ [116, 117]. Во второй части таблицы приведены результаты измерений этих же отрезков электронным тахеометром (столбцы 6 и 9), причем в первом и втором циклах - разными, но равноточными [97].

Таблица 3.9 – Определение деформаций по профильным линиям

Точка №	*L*1,м	*l*1,м от точки I	*L*2, м	*l*2,м от точки I	Δ ,мм	*L*1', м	K	*l*1',м от точки I	*L*2',м	K'	*l*2',м от точки I	Δ, мм
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Исх.I		0		0	0			0			0	0
	40		40			39,9	1		39,95	1		
1		40		40	0			39,8			39,8	0
	40		40			39,9	1		39,95	1		
2		80		80	0			79,6			79,6	0
	40		40,02			39,9	1		39,97	1,0005		
3		120		120,02	+20			119,4			119,42	+20
	40		40,03			39,9	1		39,98	1,0008		
4		160		160,05	+50			159,2			159,25	+50
	40		40,05			39,9	1		40	1,0013		
5		200		200,1	+100			199			199,1	+100
	40		40,01			39,9	1		39,96	1,0003		
6		240		240,11	+110			238,8			238,91	+110
	40		39,99			39,9	1		39,94	0,9998		
7		280		280,1	+100			278,6			278,7	+100
	40		39,98			39,9	1		39,93	0,9995		
8		320		320,08	+80			318,4			318,48	+80
	40		39,95			39,9	1		39,9	0,9988		
9		360		360,03	+30			358,2			358,23	+30
	40		39,97			39,9	1		39,92	0,9993		
Исх. II		400		400	0			398			398	0
Δ(II-I)	400					∑K	10	398		10		

Постоянные тахеометров и состояние атмосферы не исследовались. Кроме того, координаты исходных точек I и II определены не по результатам высокоточных измерений, а по плану, поэтому расстояния между ними получены с ошибкой в 2 м (такое расхождение взято для наглядности). Предположим, что, неизвестные нам постоянные первого тахеометра равна +98 мм, второго +46 мм. Атмосферная поправка в первом случае равна +2 мм на 40 м, во втором +4 мм. То есть в процессе измерений полученные значения длин отрезков оказываются короче истинных (с ошибкой 100 мм на каждые 40 м в первом случае и на 50 мм – во втором), что и отражено в таблице 3.9 (столбцы 6 и 9).

Согласно традиционной обработке измерений, сначала учитывают влияние систематической погрешности, то есть постоянную тахеометра, далее вычисляют расстояния до деформационных точек по формуле (3.2):

$$l1_n = l1_i + l1_{i+1} \text{ и } l2_n = l_i + l_{i+1} \qquad (3.2)$$

Смещения определяют по формуле (3.3):

$$\Delta_n = l2_i - l1_i \qquad (3.3)$$

Для обработки результатов измерений согласно предлагаемой технологии, необходимо выразить измеренные расстояния в относительных величинах по формуле (3.4):

$$K_i = \frac{L1'_i}{L1'_1} \text{ и } K'_i = \frac{L2'_i}{L2'_1} \qquad (3.4)$$

Полученные величины коэффициентов отношений из двух циклов отражены в столбцах 7 и 10 таблицы 3.9.

Далее необходимо вычислить коэффициенты подобия по формуле (3.5):

$$m_i = \frac{K_i}{K'_i} \qquad (3.5)$$

Таблица 3.10 – Значения коэффициентов подобия

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1	1	0,9995	0,9992	0,9987	0,9997	1,0002	1,0005	1,0012	1,0007

Анализируя полученные значения коэффициентов подобия (таблица 3.10) можно сделать вывод, что деформации произошли, причем они не равномерные. Чтобы вычислить величины деформаций нужно решить уравнение вида (3.6):

$$l_i = \frac{\sum_1^i K_i}{\sum_1^n K_i} L_{I-II}, \qquad (3.6)$$

где n – число отрезков, LI-II – расстояние между опорными точками (в данном случае 398 м).

По формуле (3.7) рассчитать величину смещения:

$$\Delta_n = l2'_i - l1'_i \qquad (3.7)$$

Заметим, что при использовании предлагаемой технологии намеренно использовалось неверное расстояние между исходными точками, полученное по плану (то есть 398 м). Намеренно в том смысле, что к нему доверия больше, так как не известны поправки к расстояниям, измеренным тахеометрами, почему и не вводились. Из сравнения полученных результатов (столбцы 5 и 12) видно, что смещения во втором случае те же, что и в первом. Конечно, возможны и другие варианты оценки смещений марок, например, по расстояниям, измеренным от опорной точки (так проще), но суть дела от этого не меняется.

Таким образом, оказались компенсированы не только систематические ошибки, линейные относительно измеряемых величин. Но метод оказался устойчивым по отношению к ошибкам исходных данных и небольшим, но не линейным, систематическим ошибкам.

Заметим, что данная технология совершенно игнорирует качество позиционирования исходных точек, да и деформационных марок, например, в столбцах 8 и 11 они, очевидно ошибочные, более 1.5 м. Но смещения верны, а это главное при изучении деформационных процессов.

Кроме того, в процессе выполнения полевых работ важно следить за постоянством условий измерений и, если это невозможно (в силу, например большого их объёма), сеть следует разделить на участки, в пределах которых обеспечивалось бы такое постоянство. При этом, для сохранения подобия хотя бы одна сторона предыдущего участка должна быть измерена повторно, в условиях измерений последующего.

Известно, что профильные линии применяются и для определения деформаций, например, борта карьера по высоте [118]. Рассмотрим, как предлагаемая технология может использоваться при выполнении тригонометрического нивелирования вдоль профильных линий на карьере, и покажем ее преимущества в сравнении с традиционной методикой. Для обработки результатов измерений используем два способа – традиционный и с использованием относительных величин.

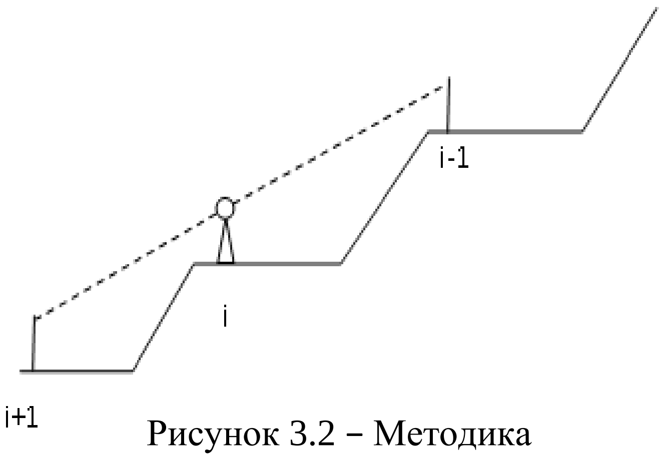

Рисунок 3.2 – Методика измерений на станции

Возможна разная схема нивелирования. Целесообразнее, конечно, установить прибор, например, на исходный репер I, и все измерения выполнять от него. Однако, в случае если это не представляется возможным, можно использовать другую технологию, при которой прибор устанавливается через точку, и измерения выполняются вперёд и назад (рисунок 3.2). Предположим, что в рассматриваемом примере, измерения выполнялись именно по такой технологии. При этом в первом и во втором циклах использовались разные тахеометры, но равноточные. Так, в первом цикле измерений использовался тахеометр с постоянной равной +98 мм и поправкой за атмосферу равной +2 мм на каждые 40 м расстояния. Место нуля вертикального круга – +30". Во втором цикле использовался другой тахеометр, с постоянной +46 мм и местом нуля вертикального круга – -30". Поправка за атмосферу равнялась +4 мм на 40 м. В каждом цикле наблюдений измерялись вертикальные углы ν_i и расстояния D_i между смежными точками на профиле, включая исходные. При этом высота ν-прибора устанавливалась равной высоте i- визирования.

При обработке результатов измерений традиционным способом, в каждом из циклов измерений в расстояния вводились поправки и учитывались места нулей вертикального круга [116].

Превышения h_i между точками находились из соотношения (3.8):

$$h_i = D_i \cdot \sin{(\nu_i)} \tag{3.8}$$

Высоты искомых точек H_i рассчитывались по формуле (3.9):

$$\mathrm{H_i} = \mathrm{H_{i\text{-}1}} + \mathrm{h_i} \tag{3.9}$$

Смещения по высоте Δh_i вычислялись из соотношения (3.10):

$$\Delta h_i = H'_i - H_i \tag{3.10}$$

где H_i – высота точки из 1 цикла измерений, H'_i – из второго.

В таблице 3.11 представлены результаты измерений расстояний и углов наклона и их обработки в двух циклах наблюдений. Высоты исходных точек: начальной $\mathrm{H_I}$=100.000 м, конечной - $\mathrm{H_{I'}}$=79.008 м. Вычисленные значения превышений представлены в графе 4 и 7.

Таблица 3.11 − Традиционная технология обработки результатов измерений

№ точки	Первый цикл				Второй цикл			Δh,мм
	Di, м	ν, ° ′ ″	h, м	H, м	ν, ° ′ ″	h, м	H’, м	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Исх.I				100,000			100,000	0
	40,000	-2 00 27	-1,401		-2 00 59	-1,407		
1				98,599			98,593	-6
	40,000	-2 17 25	-1,598		-2 18 57	-1,616		
2				97,001			96,977	-24
	40,000	-1 50 30	-1,286		-1 51 33	-1,298		
3				95,715			95,679	-36
	40,000	-1 59 10	-1,386		-2 00 07	-1,397		
4				94,329			94,282	-47
	40,000	-2 10 43	-1,521		-2 09 00	-1,501		
5				92,808			92,781	-27
	40,000	-1 50 54	-1,290		-1 49 00	-1,268		
6				91,518			91,513	-5
	40,000	-2 10 29	-1,518		-2 11 05	-1,525		
7				90,000			89,988	-12
	40,000	-2 15 34	-1,577		-2 14 25	-1,564		
8				88,423			88,424	+1
	40,000	-2 01 15	-1,411		-2 02 02	-1,420		
9				87,012			87,004	-8
	40,000	-1 41 33	-1,181		-1 40 50	-1,173		
Исх.I’				85,831			85,831	0
ΔИсх.				-14,169				

В таблице 3.13 смещения вычислялись с использования отношений между превышениями, без введения в результаты измерений поправок в длины (постоянных тахеометров и за атмосферные условия). Места нулей вертикального круга учитывались.

При вычислении превышений в таблице 3.13 использованы соотношения (3.11):

$$\mathrm{K_i} = \frac{\mathrm{h_i}}{\mathrm{h_1}} \qquad K_i^{II} = \frac{h'_i}{h'_1} \tag{3.11}$$

Значения коэффициентов подобия в таблице 3.12 вычислялись по формуле (3.12):

$$m_i = \frac{K_i^I}{K_i^{II}} \tag{3.12}$$

Таблица 3.12 – Значения коэффициентов подобия

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1,0000	0,9933	0,9948	0,9964	1,0178	1,0224	0,9998	1,0129	0,9979	1,0108

Как видим, в данном случае снова произошли неравномерные смещения. Вычислим высоты точек в каждом цикле наблюдений по формуле (3.13) и смещения по формуле (3.10).

$$H_i = H_{i-1} + (H_{I'} - H_I) \cdot \frac{K_i}{\sum K_n}, \tag{3.13}$$

где K_i - коэффициент отношения измеренных величин, $\sum K_n$ - сумма коэффициентов от 1 до n.

Результаты представлены в таблице 3.13 столбцы 7, 12 и 13 соответственно.

Таблица 3.13 – Определение смещений с использованием относительных величин

№	Первый цикл					Второй цикл					Δh, мм
	D,м	ν, ° ' "	h, м	K^I	H, м	D',м	ν, ° ' "	h', м	K^{II}	H, м	
1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13
I					100					100	0
	39,90	-2 00 27	-1,398	1,0000		39,95	-2 00 59	-1,406	1,0000		
1					98,598					98,592	-6
	39,90	-2 17 25	-1,594	1,1402		39,95	-2 18 57	-1,614	1,1479		
2					97,000					96,976	-24
	39,90	-1 50 30	-1,282	0,9170		39,95	-1 51 33	-1,296	0,9218		
3					95,715					95,678	-37
	39,90	-1 59 10	-1,383	0,9893		39,95	-2 00 07	-1,396	0,9929		
4					94,328					94,280	-48
	39,90	-2 10 43	-1,517	1,0851		39,95	-2 09 00	-1,499	1,0661		
5					92,807					92,779	-28
	39,90	-1 50 54	-1,287	0,9206		39,95	-1 49 00	-1,266	0,9004		
6					91,517					91,512	-5

Продолжение таблицы 3.13

	39,90	-2 10 29	-1,514	1,0830		39,95	-2 11 05	-1,523	1,0832		
7					89,999					89,987	-12
	39,90	-2 15 34	-1,573	1,1252		39,95	-2 14 25	-1,562	1,1109		
8					88,422					88,423	+1
	39,90	-2 01 15	-1,407	1,0064		39,95	-2 02 02	-1,418	1,0085		
9					87,012					87,003	-9
	39,90	-1 41 33	-1,178	0,8426		39,95	-1 40 50	-1,172	0,8336		
Г'			$\sum Ki$	10,1094	85,831			$\sum Ki$	10,0653	85,831	0
			$H_Г–H_I$	-14,169				$H_Г–H_I$	-14,169		

Сравнивая полученные результаты (столбцы 9 и 13 таблиц 3.11 и 3.13 соответственно) можно сделать вывод, что смещения, полученные по результатам вычислений из двух способов, практически равны (максимальное расхождение – 1 мм).

Выводы к главе 3

1. Параметры геодезической сети, однозначно определяющие её форму и размер, можно назвать однородными, если их умножение и деление на одно и то же число не изменяет координат узловых точек. Это свойство и положено в основу оценки стабильности деформационной сети с использованием элементов теории подобия.

2. Элементы теории подобия позволяют оценить стабильности сети и выявить равномерные и неравномерные деформации.

3. Предложенная технология оценки стабильности деформационной сети позволила получить верные смещения даже в том случае, когда координаты исходных точек получены с некоторой ошибкой, а систематические ошибки линейных измерений не учитывались.

4. Данная технология позволяет определять смещения приборами с разной систематической ошибкой, но равными по точности.

Таким образом, третье защищаемое положение доказано. Применение элементов теории подобия для решения задач деформационного мониторинга в самом деле позволяет измерения выполнять различными приборами от цикла к циклу, благодаря эффективному устранению систематических погрешностей линейных измерений. Главное, чтобы они были равными по точности.

ГЛАВА 4 УРАВНИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ СЕТИ

4.1 Описание эксперимента

Оценка возможности использования предложенной технологии выполнена путём проведения натурных измерений на территории (представлена на рисунке 4.1.) пос. Кузьмолово, Всеволожского района Ленинградской области.

Рисунок 4.1 − Территория работ (пос. Кузьмолово)

Для этого, на участке проведения работ построена геодезическая сеть, состоящая из 6 треугольников различной конфигурации. Схема сети представлена на рисунке 4.2. Длина наименьшей стороны около – 77 м, наибольшей – 134 м. Минимальный угол в треугольнике − 31°, максимальный − 117°. Точки сети закреплены на местности колышками, в центре которых – гвоздь (диаметром около 2 мм). Координаты трех точек этой сети 1, 2, 7 определены по результатам спутниковых наблюдений, в дальнейшем они использовались как исходные.

Координаты остальных точек определялись по результатам линейно-угловых измерений.

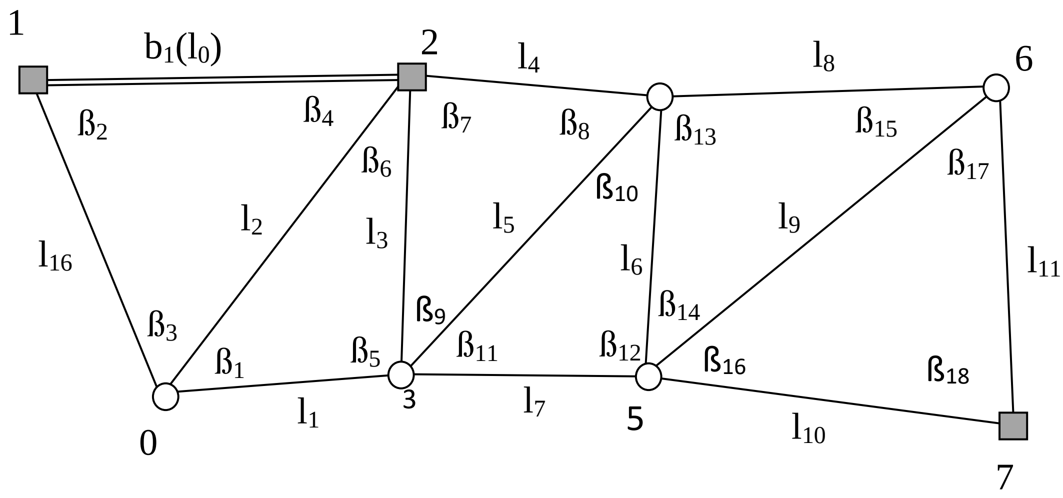

Рисунок 4.2 – Схема экспериментальной линейно-угловой сети

Спутниковые наблюдения (для определения координат исходных точек) выполнялись с использованием комплекта спутникового оборудования Leica Viva, в который входят два приемника Leica GS14 и контроллер Leica CS10 (таблица 4.1). Наблюдения выполнялись в режиме статика.

Таблица 4.1 – Технические характеристики ГНСС приемников [124]

Число каналов	120 каналов
Макс. число одновременно отслеживаемых спутников	До 60 спутников по двум частотам
Спутниковые сигналы	GPS: LI, L2, L2C GLONASS: L1, L2 Galileo Compass SBAS: WAAS, EGNOS, GAGAN, MSAS, QZSS
Время повторного захвата спутников	<1 сек
Погрешность (СКО) измерений с постобработкой данных	
Длительные наблюдения статика (фазовые измерения)	В плане: 3 мм + 0.1 ppm По высоте: 3.5 мм + 0.4 ppm
Статика и быстрая статика (фазовые измерения)	В плане: 5 мм + 0.5 ppm По высоте: 10 мм + 0.5 ppm
Кинематика (фазовые измерения)	В плане: 10 мм + 1 ppm По высоте: 20 мм + 1 ppm

Комплект оборудования для линейно-угловых измерений

Линейные и угловые измерения выполнялись тахеометром Sokkia SET 1130R3 (рисунок 4.3). Его технические характеристики представлены в таблице 4.2.

Рисунок 4.3 – Тахеометр Sokkia SET 1130R3

Таблица 4.2 – Технические характеристики тахеометра Sokkia SET 1130R3 [159]

Точность измерения углов, "	1
Зрительная труба: - Увеличение - Минимальное расстояние фокусирования, м - Минимальное измеряемое расстояние, м	30х 1,3 0,3
Компенсатор / диапазон работы компенсатора	двухосевой, ± 3
Дальность измерения расстояний на одну призму, м	до 5 000

Продолжение таблицы 4.2

Дальность измерения расстояний на три призмы, м	до 6 000
Дальность измерения расстояний без отражателя, м	350
Точность измерения расстояний на призму, мм	± (2 + 2 x 10 - 6xD)
Точность измерения расстояний без отражателя, мм	до 200 м ±(3 + 2x10-6xD) / 200-350 м ± (5 + 10x10-6xD)

При наблюдениях электронным тахеометром использовалась трехштативная система, над каждой точкой выполнялось тщательное центрирование и горизонтирование. Угловые измерения в сети выполнялись способом круговых приемов наведением на призму. Каждый угол измерялся двумя приемами. Отметим, что в процессе измерений соблюдалось постоянство условий наблюдений. Средняя квадратическая ошибка измерения угла, вычисленная по невязке в треугольниках, оказалась равна 3''.

Постоянная тахеометра исследовалась по технологии, рассмотренной в статье [104] и оказалась равна «- 2 мм». Постоянная призмы равна «-30 мм», ее величина вводилась в память прибора и учитывалась автоматически. Постоянная атмосферы вычислялась по формуле (4.1), а результирующее расстояние с учетом поправки определялось по формуле (4.2):

$$ppm = (282{,}59 - \frac{0{,}2942 \cdot P}{1 + 0{,}003661 \cdot t}) \tag{4.1}$$

где P − атмосферное давление в гПа, t − температура воздуха в °С.

$$D = D_0 \cdot (1 + ppm \cdot 10^{-6}) \tag{4.2}$$

где D − результирующее расстояние, D_0 – измеренное расстояние.

Заметим, что при температуре +23°С и атмосферном давлении 757,79 мм рт.ст. для D_0=150.000 м результирующее расстояние окажется равным 150.001, а при D_0=80.000 м получим D=80.001 м. Следовательно, в измеренные расстояния необходимо вводить поправку +1 мм. С учетом постоянной тахеометра (-2 мм), имеем результирующую поправку – «-1 мм».

Рассмотрим далее процедуру уравнивания звена линейно-угловой сети.

4.2 Обработка отдельного звена линейно-угловой сети

Схема звена линейно-угловой сети представлена на рисунке 4.4.

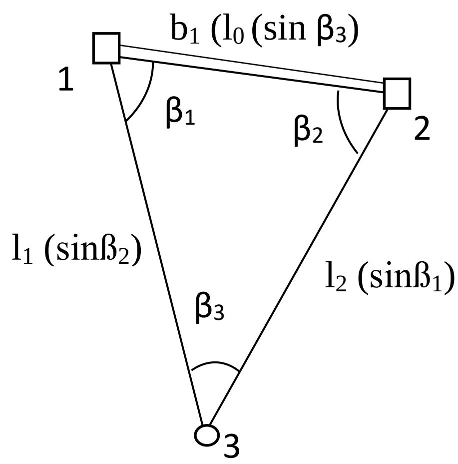

Рисунок 4.4 – Схема звена линейно-угловой сети

Заметим, что в отличие от схемы, изображенной на рисунке 4.2, для определения координат точки 3 из треугольника 123 потребовалось выполнение дополнительных измерений – стороны 1-3, направлений, образующих углы $ß_1$ и $ß_3$. Координаты исходных точек в системе координат WGS-84/UTM 35N представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Координаты исходных точек

№ точки	X, м	Y, м
1	670573,086	692512,011
2	670613,320	692594,558

В таблице 4.4 представлены результаты измеренных расстояний и углов (после выполнения всех необходимых процедур – отбраковки плохих измерений, вычисления приведенных направлений и т.д.) и их исправленные значения.

Таблица 4.4 – Результаты измерений и исправленные значения

	Измеренные величины		Исправленные значения
l_1'	127,696 м	$l_{1исп}$	127,695 м
l_2'	77,048 м	$l_{2исп}$	77,047 м
l_0'	91,831 м	$l_{0исп}$	91,830 м
$ß_1$	36°42'14,4"	$ß_{1исп}$	36°42'16,1"
$ß_2$	97°52'09,4"	$ß_{2исп}$	97°52'11,2"
$ß_3$	45°25'31,0"	$ß_{3исп}$	45°25'32,7"

Из решения ОГЗ b1=91.830 м.

Далее вычислены коэффициенты отношений измеренных расстояний и углов.

$$K_1' = \frac{l_1'}{l_0'} = 1{,}390554 \quad K_2' = \frac{l_2'}{l_0'} = 0{,}839020$$

$$K_3' = \frac{sin\beta_{2исп}}{sin\beta_{3исп}} = 1{,}390600, \quad K_4' = \frac{sin\beta_{1исп}}{sin\beta_{3исп}} = 0{,}839047$$

Проверены условие эквивалентности измерений по формуле 2.12. Величина m_l=2 мм (паспортное значение) для всех измеренных расстояний принята одинаковой.

$$m_{\beta 1} = \rho'' \frac{m_l}{l_2} tg\beta_1 = 206265 \frac{2\,мм}{77048\,мм} * tg(36°42'16{,}1'') = 4''$$

$$m_{\beta 2} = \rho'' \frac{m_l}{l_1} tg\beta_2 = 206265 \frac{2\,мм}{127696\,мм} * tg(97°52'11{,}2'') = 23''$$

$$m_{\beta 3} = \rho'' \frac{m_l}{l_0} tg\beta_3 = 206265 \frac{2\,мм}{91831\,мм} * tg(45°25'32{,}7'') = 5''$$

Для того, чтобы угловые и линейные измерения были эквивалентны по точности необходимо чтобы угол β_1 измерялся с ошибкой в 4", а углы β_1 и β_3 с ошибкой в 23" и 2" соответственно. Отсюда следует, что угловые и линейные измерения не эквиваленты по точности, причем первые точнее задают значения коэффициентам отношений сторон треугольника, значит необходимо вычислять их средневзвешенные значения. Для этого вычислены ошибки определения каждого коэффициента для каждой стороны и противолежащего ей угла (при условии m_β=3", m_l=2 мм):

$$m_{k'_3} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_3 Cos^2\beta_2 + Sin^2\beta_2 Cos^2\beta_3}}{\rho''\cdot Sin^2\beta_3} m_\beta = 2\cdot 10^{-5}, \mathrm{m}_{K'_1} = \frac{\sqrt{l_0^2 + l_1^2}}{l_0^2} m_l = 3\cdot 10^{-5};$$

$$m_{k'_4} = \frac{\sqrt{Sin^2\beta_3 Cos^2\beta_1 + Sin^2\beta_1 Cos^2\beta_3}}{\rho''\cdot Sin^2\beta_3} m_\beta = 2\cdot 10^{-5}$$

$$\mathrm{m}_{K'_2} = \frac{\sqrt{\mathrm{l}_0^2 + \mathrm{l}_2^2}}{\mathrm{l}_0^2} m_l = 3\cdot 10^{-5}$$

В результате средневзвешенное значение для каждого коэффициента:

$$\mu_0 = 3 \cdot 10^{-5}, P_{k'_1} = 1, P_{k'_3} = 2.2, P_{k'_2} = 1, P_{k'_4} = 2.2$$

Вычислим средневзвешенное значение для каждого коэффициента:

$$m'_1 = \frac{1 * K'_1 + 2 * K'_3}{3} = 1{,}390584 \ , \quad m'_2 = \frac{1 * K'_4 + 2 * K'_2}{3} = 0{,}839029$$

Теперь задача сводится к решению линейной засечки из одного треугольника. Для того, чтобы определить координаты точки необходимо решить систему уравнения вида (4.3):

$$\begin{cases} [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] - m'^2_1 \cdot b_1^2 = 0 \\ [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] - m'^2_2 \cdot b_1^2 = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Результаты уравнивания того же звена линейно-угловой сети по традиционной технологии (но с учетом поправки) представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Координаты определяемой точки

№ т.	Предлагаемая технология уравнивания по средневзвешенным коэффициентам отношений		Традиционное уравнивание в *Credo*	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м
3	670549,335	692637,480	670549,334	692637,481

Из результатов, представленных в таблице 4.5, можно заключить, что уравнивание по предлагаемой технологии возможно, кроме того, оно позволяет получить практически те же результаты, что и при уравнивании по традиционной технологии.

4.3 Уравнивание линейно-угловой сети

Рассмотрим теперь процедуру уравнивания всей линейно-угловой сети, схема которой представлена на рисунке 4.2. В таблице 4.6 представлены координаты исходных точек, полученные по результатам спутниковых измерений.

Таблица 4.6 – Координаты исходных точек

№ точки	X, м	Y, м
1	670573,086	692512,011
2	670613,320	692594,558
6	670720,939	692729,154

В таблице 4.7 – измеренные расстояния, в таблице 4.8 представлены измеренные и исправленные значения углов (с учетом угловой невязки).

Таблица 4.7 – Измеренные расстояния

	Измеренные расстояния, м	Измеренные расстояния с учетом поправок, м
$l_{1'}$	86,820	86,819
$l_{2'}$	129,225	129,224
$l_{3'}$	77,049	77,048
$l_{4'}$	79,673	79,672
$l_{5'}$	133,658	133,657
$l_{6'}$	76,549	76,548
$l_{7'}$	107,140	107,139
$l_{8'}$	84,127	84,126
$l_{9'}$	128,818	128,817
$l_{10'}$	88,328	88,327
$l_{11'}$	80,816	80,815
$l_{16'}$	110,751	110,750
$l_{0'}$	91,830	91,829

Таблица 4.8 – Измеренные и исправленные углы

№ Треуг.	Невязка	Поправка	Углы		
			Измеренные		Исправленные
1	-2.0"	+0.7"	57°10′20,3″	β_4	57°10′21,0″
		+0.7"	78°39′31,5″	β_2	78°39′32,2″
		+0.6"	44°10′06,2″	β_3	44°10′06,8″
2	+4.6"	-1.5"	35°21′15,6″	β_1	35°21′14,1″
		-1.6"	103°57′01,5″	β_5	103°56′59,9″
		-1.5"	40°41′47,5″	β_6	40°41′46,0″
3	-9.4"	+3.2"	117°02′10,5″	β_7	117°02′13,7″
		+3.1"	30°53′35,7″	β_8	30°53′38,8″
		+3.1"	32°04′04,4″	β_9	32°04′07,5″
4	-8.9"	+3.0"	53°14′30,1″	β_{10}	53°14′33,1″
		+2.9"	34°55′17,4″	β_{11}	34°55′20,3″
		+3.0"	91°50′03,6″	β_{12}	91°50′06,6″
5	+1.9"	-0.7"	106°29′48,4″	β_{13}	106°29′47,7″
		-0.6"	38°46′05,9″	β_{14}	38°46′05,3″
		-0.6"	34°44′07,6″	β_{15}	34°44′07,0″

Продолжение таблицы 4.8

6	+4.3"	-1.4"	38°16′33,0″	β16	38°16′31,6″
		-1.4"	42°36′36,2″	β17	42°36′34,8″
		-1.5"	99°06′55,1″	β18	99°06′53,6″

Как уже сказано выше, СКП измерения угла ($m_ß$), полученная по невязкам в треугольниках (формула Ферреро), оказалась равна 3".

Согласно технологии уравнивания по коэффициентам отношений измеренных длин линий и отношений синусов углов для данной сети можно составить 24 уравнения вида (4.4):

$$K_1^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2]=0$$

$$K_2^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2]=0$$

$$\ldots \tag{4.4}$$

$$d_1^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2]=0$$

$$d_2^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]-[(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2]=0$$

$$\ldots$$

где $K_1=\frac{l_1}{l_0}$, $K_2=\frac{l_2}{l_0}$ – коэффициенты отношений измеренных расстояний; $b_1=\frac{K_{03}}{sin\beta_3}$, $b_2=\frac{K_{02}}{sin\beta_3}$ – коэффициенты отношений синусов измеренных углов $K_{03}=\frac{sin\beta_6}{t_1}$, $K_{02}=\frac{sin\beta_5}{t_1}$, $t_1=\frac{sin\beta_5}{sin\beta_2}$ - масштабный коэффициент, который позволяет связать синусы углов в треугольниках.

Нормированные значения коэффициентов отношений, полученные по результатам угловых измерений представлены в таблице 4.9.

Таблица 4.9 – Коэффициенты отношений, полученные по результатам линейных (1) и угловых (2) измерений

	1	$1_{норм}$ (k_n)	2 (K_n)	$2_{норм}$ (d_n)
$l_{1'}$	86,820	0,945443	0,658744	0,945423
$l_{2'}$	129,225	1,407220	0,980474	1,407167
$l_{3'}$	77,049	0,839040	0,584568	0,838967
$l_{4'}$	79,673	0,867614	0,604473	0,867534
$l_{5'}$	133,658	1,455494	1,014079	1,455396
$l_{6'}$	76,549	0,833595	0,580823	0,833591
$l_{7'}$	107,140	1,166721	0,812872	1,166627
$l_{8'}$	84,127	0,916117	0,638299	0,916081
$l_{9'}$	128,818	1,402788	0,977410	1,402769
$l_{10'}$	88,328	0,961864	0,670169	0,961820
$l_{11'}$	80,816	0,880061	0,613192	0,880048
$l_{16'}$	110,751	1,206044	0,840307	1,206000

Результаты проверки эквивалентности линейных и угловых измерений по формуле (2.12) представлены в таблице 4.10.

Таблица 4.10 – Соотношение точностей линейных и угловых измерений

	Расстояние и противолежащий угол	m_l, мм	$m_{ßрасч}''$	$m_ß''$	Соблюдается да/нет
Треугольник I	l_2 и $ß_2$	2	18	3	нет
	l_{16} и $ß_4$	2	6	3	нет
	b_1 и $ß_3$	2	6	3	нет
Треугольник II	l_2 и $ß_5$	2	14	3	нет
	l_1 и $ß_6$	2	4	3	нет
	l_3 и $ß_1$	2	4	3	нет

Продолжение таблицы 4.10

Треугольник III	l_3 и $ß_8$	2	3	3	да
	l_5 и $ß_7$	2	11	3	нет
	l_4 и $ß_9$	2	2	3	нет
Треугольник IV	l_5 и $ß_{12}$	2	11	3	нет
	l_6 и $ß_{11}$	2	4	3	нет
	l_7 и $ß_{10}$	2	6	3	нет
Треугольник V	l_6 и $ß_{15}$	2	6	3	нет
	l_8 и $ß_{14}$	2	2	3	нет
	l_9 и $ß_{13}$	2	3	3	да
Треугольник VI	l_9 и $ß_{18}$	2	4	3	нет
	l_{10} и $ß_{17}$	2	6	3	нет
	l_{11} и $ß_{16}$	2	4	3	нет

Как видно, условие эквивалентности точностей линейных и угловых измерений соблюдается не везде. Следовательно, уравнивание необходимо выполнять с определением весов. Согласно технологии уравнивания по коэффициентам отношений, рассмотренной во второй главе, для вычислений следует использовать обобщенный метод наименьших квадратов, так как все коэффициенты отношений, полученные по результатам измерения расстояний будут зависеть от одной и той же величины l_0', а коэффициенты отношений синусов измеренных углов от sin$ß_3$.

Весовые коэффициенты необходимо определять с использованием ковариационной матрицы исправленных значений измеренных величин ($X_и = F \cdot X_{la\delta} \cdot F^T$). Причем матрица F будет иметь вид:

$$F=\begin{bmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial l_1} & \frac{\partial K_1}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial K_1}{\partial sinß_i} & \dots & \frac{\partial K_1}{\partial l_0} & \frac{\partial K_1}{\partial sin\beta_3} \\ \frac{\partial K_2}{\partial l_1} & \frac{\partial K_2}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial K_2}{\partial sinß_i} & \dots & \frac{\partial K_2}{\partial l_0} & \frac{\partial K_2}{\partial sin\beta_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_1}{\partial l_1} & \frac{\partial b_1}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial sinß_i} & \dots & \frac{\partial K_1}{\partial l_0} & \frac{\partial b_1}{\partial sin\beta_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_n}{\partial l_1} & \frac{\partial b_n}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial sinß_i} & \dots & \frac{\partial K_n}{\partial l_0} & \frac{\partial b_n}{\partial sin\beta_3} \end{bmatrix}$$

А ковариационная матрица примет вид:

$$X_{la\delta} = \begin{bmatrix} ml1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & ml2^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml3^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & ml0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & {m_{sin\beta_3}}^2 \end{bmatrix}$$

Ошибка определения синуса угла $ß_3$ вычисляется по формуле (4.5):

$$m_{Sin\beta} = m_{\beta} Cos\beta \tag{4.5}$$

где $m_ß$=3'' – ошибка определения угла.

Уравнивание выполнено дважды – по предлагаемой технологии, рассмотренной с использованием коэффициентов отношений (поправки в результаты линейных измерений не вводились) (Приложение Е) и по традиционной технологии параметрического уравнивания в программе Credo (при этом учитывались поправки в измеренные расстояния). Результаты уравнивания представлены в таблице 4.11. Апостериорная ошибка единицы веса при уравнивании по ОМНК оказалась равной 0.5, тогда как априорная была принята равной 2.

Таблица 4.11 – Сравнение полученных координат определяемых точек при уравнивании линейно-угловой сети предложенным способом и традиционным

№ т.	Уравнивание относительных величин		Традиционная технология уравнивания *Credo*	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м
0	670485,017	692579,164	670485,018	692579,164
3	670549,335	692637,480	670549,337	692637,478
4	670682,928	692633,317	670682,929	692633,315
5	670639,053	692696,043	670639,052	692696,044
6	670762,718	692659,976	670762,720	692659,975

Из анализа данных, представленных в таблице 4.11, следует, что предложенная технология уравнивания по ОМНК позволяет получить практически те же координаты определяемых точек, что и традиционная методика. Расхождения полученных координат точек не превышают 2σ. Следовательно, корректность использования предложенной технологии уравнивания линейно-угловой сети можно считать доказанной.

Выводы к главе 4

1. В результате выполнения натурных наблюдений и их обработки линейно-угловой сети, была доказана принципиальная возможность представления результатов линейных и угловых измерений в виде коэффициентов отношений.

2. Благодаря применению технологии оценки соотношений точностей линейных и угловых измерений, удалось правильно организовать процедуру уравнивания. Было установлено, что сеть необходимо уравнивать с установлением весов.

3. Проиллюстрирована технология обработки звена линейно-угловой сети в виде треугольника, которая может служить основой для дальнейших рассуждений об уравнивании различных вариантов засечек, в том числе комбинированных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой предлагается новое решение актуальной научной задачи – повышения эффективность проведения работ по определению координат точек геодезических сетей и дальнейшего их анализа.

Основные итоги выполненных исследований:

1. На основании многочисленных примеров, приведенных в данной работе, доказана эффективность применения принципа моделирования по отношению к геодезической сети, при котором её элементы определяются не самими измеренными величинами, а их отношениями, что в свою очередь, является основой для разработки новых подходов решения множества геодезических задач.

2. Разработана методика, позволяющая учитывать и исключать систематические ошибки измерений, основанная на применении относительных величин. Основное их преимущество состоит в том, что такой подход позволяет привести все измерения, выполненные в одной системе (т.е. при одних и тех же условиях наблюдений) к единому «внутреннему» масштабу, органически связанному с рассматриваемым явлением. При этом совершенно неважно знать саму величину этой ошибки, важно лишь обеспечить стабильности внешних условий в момент проведения измерений и при, необходимости делить сеть на участки, в пределах которых эта стабильности обеспечивается. Это дает большую мобильность и позволяет использовать широкий спектр приборов равной точности.

3. Предложена технология оценки эквивалентности точностей линейных и угловых измерений, основанная на применении отношений тригонометрических функций измеренных углов и сторон треугольника, которая может применяться при проектировании линейно-угловых сетей и их дальнейшей обработке. На основании этого разработан алгоритм совместного уравнивания относительных величин, полученных по результатам линейных и угловых измерений. Доказана его применимость на основании обработки натурных наблюдений.

4. Предложена принципиально новая методика оценки деформированного состояния при повторных измерениях, в которой расширен арсенал современных достижений за счет использования элементов теории подобия и рассматриваются не сами измерения, а их отношения.

5. Перспективы настоящих исследований состоят в их углублении и распространении применительно к задачам промышленной геодезии для выверки оборудования и механизмов, а также для геодинамического и деформационного мониторингов.

Сформулированные и доказанные в работе положения представляют принципиально новый подход к измерениям, в связи с чем, возможное развитие исследования заключается в использовании относительных величин не только при решении широкого диапазона геодезических задач, но и применении их в любой измерительной практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авакян, В.В. Прикладная геодезия. Технология инженерно-геодезических работ / В.В. Авакян. − 3-е изд. − М.: Инфра-Инженерия, 2019. − С. 41-43.

2. Аврунев, Е.И. Анализ стабильности исходных пунктов на основании спутниковых определений в геодезической сети сгущения / Е.И. Аврунев // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2010. – Т.3. − №2. − С. 127-132.

3. Азаров, Б.Ф. Решение задач по теории ошибок геодезических измерений: Методические указания / Б.Ф. Азаров, И.В. Карелина – Барнаул: Алтайский государственный технический университет, 2013. – С. 6-7.

4. Азаров, Б.Ф. Современные методы геодезических наблюдений за деформациями инженерных сооружений / Б.Ф. Азаров // Ползуновский вестник. – 2011. - №1. − С.19-29.

5. Аникст, Д.А. Высокоточные угловые измерения / Д.А. Аникст, К.М. Константинович, И.В. Меськин и др. / Под ред. Ю.Г. Якушенкова. - М.: Машиностроение, 1987. − 480 с.

6. Афонин, Д.А. Контроль стабильности пунктов плановой геодезической сети при геодезическом контроле деформаций инженерных сооружений / Д.А. Афонин // Геодезия и картография. – 2013. − № 5. − С. 6-11.

7. Афонин, Д.А. Проектирование геометрических параметров наземного лазерного сканирования при контроле деформаций зданий и сооружений в условиях плотной застройки / Д.А. Афонин, М.Я. Брынь, Е.Г. Толстов // Геодезия и картография. − 2013. – № 2. – С. 2-7.

8. Баранов, Ю.Б. Мониторинг смещений земной поверхности на разрабатываемых месторождениях углеводородов с помощью комплекса космических и геодезических методов / Ю.Б. Баранов, Ю.И. Кантемиров, Е.В. Киселевский, М.А. Болсуновский // Геоматика (Geomatics). Использование данных ДЗЗ. – 2018. − №1. − С. 51-55.

9. Бахарев, Е.С. Измерительный комплекс для аттестации угловых и линейных измерительных систем УЛК-М / Е.С. Бахарев, Н.Х. Голыгин, С.В. Травкин, О.Б. Хиноева, Х.К. Ямбаев // Приборы. − 2006. − № 5. − С. 50-54.

10. Большаков, В.Д. Справочник геодезиста: Книга 1 / В.Д. Большаков, Г.П. Левчук, Г.В. Багратуни. − М.: Недра, 1975. – 547 с.

11. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.

12. Большанин, Б.И. Об ошибках центрирования при наблюдении коротких направлений / Б.И. Большанин // Известия ТПУ. – 1963. – Том 118. – С. 113-118.

13. Боровой, В.А. Использование автоколлимационного метода при исследованиях геодезических приборов / В.А. Боровой // Инженерная геодезия (Киев). − 1989. − № 32. − С. 18-21.

14. Борщ-Компониец, В.И. Геодезия. Маркшейдерское дело / В.И. Борщ-Компониец. – М.: Недра, 1989. − 511 с.

15. Вальков, В.А. Геодезический мониторинг высотных сооружений с применением технологии наземного лазерного сканирования / В.А. Вальков, А.А. Яковлев // Естественные и технические науки. – 2015. – №2. – С. 58-61.

16. Веников, В.А. Теория подобия и моделирования: Учеб. пособие для вузов. − 2-е изд., доп. и перераб. − М.: Высшая школа, 1976. − 479 с.

17. Виноградов, А.В. Поверка дециметровых интервалов штрих-кодовой шкалы нивелирных реек фирмы Trimble / А.В. Виноградов, А.В. Войтенко, С.Н. Петров // Геодезия и картография. − 2018. - №8. С. 2-11.

18. Виноградов, А.В. Поверка оптического центрира подставки адаптера для GNSS-антенн / А.В. Виноградов, А.В. Войтенко, П.С. Осипов, А.А. Федоровский // Геодезия и картография. − 2018 − №2. − С.10-16.

19. Войнаровский, А.Е. Калибровка наземного лазерного сканера по сканам испытательного полигона с применением степенных полиномов / А.Е. Войнаровский, С.Г. Тихонов // Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры.

От идеи до внедрения – ГеоКа: сборник материалов II международной научно-практической конференции. – 2017. − С. 118-120.

20. Вольдек, А.И. Электрические машины. Учебник для технических учебных заведений – 3-е издание, переработанное / А.И. Вольдек. – Ленинград: Энергия, 1978. – 832 с.

21. Ворошилов, А.П. Определение постоянной поправки дальномера электронного тахеометра / А.П. Ворошилов // Геопрофи. − 2005. − № 4. − С. 46-47.

22. Вшивкова, О.В. Апробация алгоритма реализации комбинированного способа учёта влияния рефракции на результаты тригонометрического нивелирования / О.В. Вшивкова, Ю.И. Маркузе, Ю.М. Нейман, С.Ю. Решетило, Х.К. Ямбаев // Естественные и технические науки. – 2018. – № 12. – С. 227–232.

23. Вшивкова, О.В. Комбинированный способ учета влияния вертикальной рефракции в электронной тахеометрии / О.В. Вшивкова, С.Ю. Решетило // Геодезия и картография. – 2019. – №5. – С.15-21.

24. Гаррис, М. Системы относительных единиц в теории электрических машин. Пер. с англ. / М. Гаррис, П. Лауренсон, Дж. Стефенсон. − М.: Энергия, 1975. − 120 с.

25. Герасименко, М.Д. Уравнивание повторных геодезических измерений при наличии систематических ошибок / М.Д. Герасименко, В.М. Каморный // Геодезия и картография. – 2014. - № 9. – С.6-8.

26. ГКИНП 03-010-03. Инструкция по нивелированию I,II,III и IV классов. – М.: ЦНИИИГАиК, 2004. – 231 с.

27. Голыгин, Н.Х. Возможности повышения точности геодезических измерений на основе искусственных нейросетей / Н.Х. Голыгин, О.Б. Хиноева, Х.К. Ямбаев // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 2005 − №5. – С. 17−27.

28. Голыгин, Н.Х. О повышении точности угловых измерений в геодезии / Н.Х. Голыгин, В.А. Шилин // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 2006. − № 3. − С. 94- 97.

29. Голыгин, Н.Х. Поверка и калибровка лазерных трекеров и наземных сканеров на универсальном комплексе эталонов сложных координатных измерений УМК-М МИИГАиК / Н.Х. Голыгин, Д.Д. Комаров, В.Г. Лысенко, В.Б. Непоклонов // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 2014. − № 1. – С. 22-27.

30. Голыгин, Н.Х. Принципы метрологического обеспечения координатных оптико-электронных средств измерений / Н.Х. Голыгин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 2015. − № 5. − С. 107-110.

31. Горяинов, И.В. Экспериментальные исследования применения обратной линейно-угловой засечки для оценки стабильности пунктов плановой деформационной геодезической сети / И.В. Горяинов // Вестник СГУГиТ. – 2018. – №1. – С. 28-39.

32. ГОСТ 24846-2012. Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений. − М.: Стандартинформ, 2019. − 29 с.

33. ГОСТ Р 8.792-2012. Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Системы измерительные "Цифровой нивелир - кодовая рейка". Методика поверки. − М.: Стандартинформ, 2019. − 23 с.

34. ГОСТ Р ИСО 17123-5-2011. Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Оптика и оптические приборы. Методики полевых испытаний геодезических и топографических приборов. Часть 5. Электронные тахеометры. – М.: Стандартинформ, 2011. − 14 с.

35. Государственный реестр средств измерений, регистрационный № 27149-04 «Установки автоколлимационные для поверки нивелиров и теодолитов АУПНТ».

36. Гриненко, С.В. Абсолютные и относительные величины в статистике. Практикум по статистике / С.В. Гриненко, Т.В. Седова // Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. − 2012. [Электронный ресурс]. − Режим доступа: http://www.aup.ru/books/m1519/0.htm (дата обращения: 23.03.2020).

37. **Губайдуллина, Р.А.** Использование элементов теории подобия в геодезии **/ Р.А. Губайдуллина**, Ю.Н. Корнилов // Современные проблемы инженерной геодезии. Труды Международной научно-практической конференции. – 2019. – С. 23-27.

38. **Губайдуллина, Р.А.** О соотношении точностей линейных и угловых измерений в линейно-угловых сетях / **Р.А. Губайдуллина,** Ю.Н. Корнилов // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2020. – Т. 64. – № 2. – С. 145-149. DOI: 10.30533/0536-101X-2020-64-2-145-149.

39. **Губайдуллина, Р.А.** Особенности использования метода аэрофототопографической съемки при деформационном мониторинге / **Р.А. Губайдуллина** // Тенденции развития науки и образования. – НИЦ «Л-Журнал». – 2018. – №45. – С. 41-44.

40. Гудков, В.М. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений / В.М. Гудков, А.В. Хлебников – М.: Недра, 1990. – 335 с.

41. Гура, Д.А. Разработка методов исследования электронных тахеометров в условиях производства для оценки и повышения точности: дис. … кан. техн. наук: 25.00.32 / Дмитрий Андреевич Гура. – Краснодар, 2016. – 181 с.

42. Девис, Р.Е. Геодезия. Теория и практика. Выпуск 1. / Р.Е. Девис, Ф.С. Фут, В.Г. Рейнер. – М.: «Книга по Требованию», 1935. – 560 с.

43. Дементьев, В. Е. Современная геодезическая техника и ее применение: Учеб. пособие для вузов / В.Е. Дементьев. – М.: Академический Проект, 2008. – 591 с.

44. Дрок, М.К. Исследование точности определения превышений в ходах геодезического нивелирования на короткие расстояния в равнинной местности / М.К. Дрок // Научные записки ЛПИ. – 1961. – №6. – С.183–199.

45. Дьяков, Б.Н. Геодезия: Учебник – 2-е изд. – Спб.: Издательство «Лань», 2019. – С. 79-82.

46. Дьяков, Б.Н. Сравнительный анализ способов Костехеля и Марчака / Б.Н. Дьяков // Маркшейдерский вестник. – 2009 – №6. – С. 43-46.

47. Ермаков, В.А. Усовершенствование методики мониторинга пространственных деформаций стержневых конструкций сооружений с помощью лазерного сканирования / В.А. Ермаков // Вестник МГСУ. – 2011. – № 8. – С. 206-211.

48. Желтко, Ч.Н. Исследования влияния внецентренности алидады электронных тахеометров / Ч.Н. Желтко, Д.А. Гура, М.А. Пастухов, Г.Г. Шевченко // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 6. – С. 18-23.

49. Зубов, А.В. Особенности точных линейно-угловых измерений электронными тахеометрами / А.В. Зубов, Т.В. Зубова // Геопрофи. – 2005. – № 4. – С. 50-51.

50. Зубов, А.В. Оценка стабильности опорных и деформационных маркшейдерско-геодезических сетей / А.В. Зубов, Н.С. Павлов // Маркшейдерский вестник. – 2013. – № 2. – С. 21-23.

51. Зуев, К.И. Основы теории подобия: конспект лекций / Владим. гос. университет; сост. К. И. Зуев. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 51 с.

52. Зюзин, А.С. Боковая рефракция при измерении углов на пунктах городской полигонометрии / А.С. Зюзин // Геодезия и картография. – 1956. − № 6. – С. 18–26.

53. Игнатенко, А. Однородные координаты. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kustarnik.com/files/909_A._Ignatenko._Odnorodnye_koordinaty.pdf (дата обращения 12.12.2019).

54. Информационный сайт компании «Ракурс» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.racurs.ru/?page=227. Что такое РСА? (дата обращения 12.05.2017).

55. Информационный сайт компании Навгеоком [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.navgeocom.ru/solutions/monitoring-deformatsiy/ (дата обращения 17.08.2018).

56. Калинченко, И.С. Анализ устойчивости реперов, используемых для наблюдений за деформациями зданий и сооружений в южной зоне

распространения многолетнемерзлых грунтов / И.С. Калинченко // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2013. – №3. – С. 155-159.

57. Карев, А.П. К вопросу оценки точности положения геодезических пунктов, определяемых линейно-угловыми засечками / А.П. Карев, А.И. Павлова // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2008. – №1. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/k-voprosu-otsenki-tochnosti-polozheniya-geodezicheskih-punktov-opredelyaemyh-lineyno-uglovymi-zasechkami (дата обращения: 24.12.2019)

58. Карев, П.А. К вопросу о точности элементов линейной и линейно-угловой триангуляции / П.А. Карев // Научные труды НИГАиК. – Новосибирск: НИГАиК. – 1966. – Том XIX. – С. 51-65.

59. Карев, П.А. О соотношении точностей угловых и линейных измерений в линейно-угловых построениях / П.А. Карев // Научные труды НИГАиК. – Новосибирск: НИГАиК. – 1967. – Том XIX. – С. 165-171.

60. Карев, П.А. О точности элементов приведения и центрирования в линейно-угловых геодезических построениях / П.А. Карев, В.А. Калюжин, А.И. Павлова // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2010. – № 1. – С. 91-96.

61. Карсунская, М.М. Анализ влияния инструментальных ошибок в накопительных растровых датчиках направлений с использованием компьютерной модели датчика / М.М. Карсунская, Х.К. Ямбаев // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2000. – № 4. – С. 115-129.

62. Карсунская, М.М. Возможные пути уменьшения влияния инструментальных ошибок электронных геодезических приборов на точность угловых измерений / М.М. Карсунская, Х.К. Ямбаев // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2000. – № 4. – С. 100-115.

63. Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн, перевод Брушлинского. – М: Объединение научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936. – 352 с.

64. Клепко, В.Л. Системы координат в геодезии. Научная монография / В.Л. Клепко, А.В. Александров. – Екатеринбург: Издательство УГГУ, 2011. – 116 с.

65. Коли, Н. Мониторинг в реальном времени устойчивости бортов конечных границ карьера с помощью усовершенствованной радиолокационной технологии / Н. Коли, У. Райх // Прогрессивные технологии. – 2016. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mwork.su/progressivnye-tekhnologii/880-monitoring-v-real-nom-vremeni-ustojchivosti-bortov-konechnyh-granic-kar-era-s-pomoshchyu-usovershenstvovannoj-radiolokacionnoj-tehnologii (дата обращения 25.05.2017).

66. Комиссаров, А.В. Методика исследования дальномерного блока наземного лазерного сканера / А. В Комиссаров // ГЕО-Сибирь-2007: сб. материалов III Междунар. науч. конгр., 25–27 апр. 2007г., Новосибирск. – Новосибирск: СГГА. – 2007. – Т.1, ч. 2.– С. 74–78.

67. Комиссаров, А.В. Экспериментальные исследования точности измерения углов наземными лазерными сканерами Riegl LMS-Z360 и LMS-Z420i / А. В Комиссаров // ГЕО-Сибирь-2007: сб. материалов науч. конгр., 25–29 апр. 2007 г., Новосибирск. – Новосибирск: СГГА. - 2007. – Т.1.– С. 78–83.

68. Комиссаров, А.В. Исследование стабильности работы блока лазерного дальномера сканера Riegl LMS Z-360 / А.В. Комиссаров // Сб. науч. тр. аспирантов и молодых ученых Сиб. гос. геодез. акад. Вып. 2 / Под общ. ред. Т.А. Широковой; СГГА. – Новосибирск. – 2005. – С. 62–66.

69. Комиссаров, А.В. Теория и технология лазерного сканирования для пространственного моделирования территорий: дис. … доктора техн. наук: 25.00.34 / Александр Владимирович Комиссаров. – Новосибирск, 2015. – 278 с.

70. Корнилов, Ю.Н. Использование относительных величин для исключения систематических погрешностей геодезических измерений / Ю.Н. Корнилов, **Р.А. Губайдуллина** // Маркшейдерский вестник. – 2020. – № 3. – С. 17-24.

71. Корнилов, Ю.Н. Мониторинг деформаций карьерных откосов аэрофотосъемочной аппаратурой с беспилотных летательных комплексов / Ю.Н. Корнилов, **Р.А. Губайдуллина** // Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов в области геодезического и навигационного обеспечения. Материалы

II Всероссийской научно-практической конференции. Под общей редакцией д.т.н., профессора В.Ф. Алексеева. – 2018. – С. 386-391.

72. Корнилов, Ю.Н. Принцип отношений (подобия) при измерении и определении координат точек / Ю.Н. Корнилов, **Р.А. Губайдуллина** // Маркшейдерский вестник. – 2019. – № 1. – С. 34-38.

73. Косников, Ю.Н. Геометрические преобразования в компьютерной графике: Конспект лекций / Ю.Н. Косников. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2011. – 50 с.

74. Кошелев, А.В. Об аттестации светодальномеров, электронных тахеометров и GPS-приемников на эталонных линейных базисах / А.В. Кошелев, Г.А. Уставич, В.А. Кошелев, С.С. Титов, Ю.В. Скипа, А.А. Дубинина, Н.В. Заржецкая // Геодезия и картография. – 2011. – № 6. – С. 18-21.

75. Кошелев, А.В. Об аттестации современных светодальномеров на эталонных линейных базисах / А.В. Кошелев, А.П. Карпик, Г.А. Уставич, А.К. Синякин, В.А. Кошелев, С.С. Титов, Ю.В. Скипа, А.А. Дубинина, Н.В. Заржецкая // Интерэкспо Гео-Сибирь. - 2011. – №2. – С. 108-112.

76. Кошелев, А.В. Учет корректного показателя преломления атмосферы в результатах измерений современными дальномерами и электронными тахеометрами / А.В. Кошелев, А.П. Карпик, С.С. Овчинников, А.А. Дубинина // Вестник СГУГиТ. – 2012. – №1. – С. 67-71.

77. Кузьмин, Ю.О. Современная геодинамика: от движений земной коры до мониторинга ответственных объектов / Ю.О. Кузьмин // Физика Земли. – 2019. – №1. – С. 78-103.

78. Линейная геодезическая засечка [Электронный ресурс]. - Режим доступа:https://m.studref.com/551821/geografiya/primer_lineynaya_geodezicheskaya_zasechka (дата обращения 17.11.2019).

79. Линейная засечка [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://geodesy-bases.ru/opredelenie-pryamougolnyx-koordinat-tochek/opredelenie-koordinat-odnoj-tochki/linejnaya-zasechka (дата обращения 17.11.2019).

80. Лобанова, Ю.В. Анализ влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования при коротких расстояниях / Ю.В. Лобанова // Бюллетень результатов научных исследований. – 2018. – №2. – С. 77 –84.

81. Макаров, Г.В. Обработка зависимых величин обобщенным методом наименьших квадратов: Учеб. пособие / Г.В. Макаров. – М.: В/О «Мортехинформреклама», 1990. – 72 с.

82. Маркович, К.И. Исследование особенностей визирования и измерений линий с использованием геодезических отражателей / К.И. Маркович, А.В. Валюшин // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2015. – №16. – С.181-185.

83. МДС 11-20.2009. Методика высокоточной бесконтактной исполнительной съемки навесных фасадных систем с воздушными зазорами при возведении высотных зданий. М.: Тектоплан, 2010. – С. 8.

84. Менухов, И.И. О точности измерения зенитных расстояний зимой / И.И. Менухов // Геодезия и картография. – 1980. – № 2. – С. 32–33.

85. Менухов, И.И. Из опыта тригонометрического нивелирования зимой / И.И. Менухов // Геодезия и картография. – 1974. – № 9. – С. 20–21.

86. Мерзенин, А.В. Симметричная модель ослабления влияния боковой рефракции при азимутальных измерениях / А.В. Мерзенин // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1981. – № 4. – С. 25–29.

87. Михелев, Д.Ш. Координатный метод разбивочных работ в строительстве / Д.Ш. Михелев, В.А. Шлепы, Ю.Д. Михелев // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2000. – №1. – С. 17-21.

88. Мозжухин, О.А. Метод учета вертикальной рефракции с использованием метеопараметров атмосферы / О.А. Мозжухин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1981. – № 5. – С. 56–63.

89. Мозжухин, О.А. Определение поправок за влияние рефракции в тригонометрическое нивелирование / О.А. Мозжухин // Геодезия и картография. – 1994. − № 6. – С. 16–17.

90. Мозжухин, О.А. Рефракция в двустороннем тригонометрическом нивелировании. Определение поправок / О.А. Мозжухин // Геодезия и картография. – 2018. – Т.79. – № 4. – С. 8-13.

91. Мурзайкин, И. Я. Контроль стабильности планово-высотной опорной сети / И. Я. Мурзайкин // Геодезия и картография. – №9. – 2009. – С. 15-18.

92. Мурзайкин, И.Я. Метод контроля стабильности опорных пунктов и прилегающих к ним территорий / И.Я. Мурзайкин, В.И. Мурзайкин // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. – 2009. – №2 (9). – С. 67-70.

93. Нгуен Хыу, В. Анализ и пути развития методов оценки устойчивости опорных реперов при наблюдениях за оседаниями земной поверхности / Вьет Нгуен Хыу, М.Г. Мустафин // Естественные и технические науки. – 2017. – №5. – С. 89-96.

94. Нгуен Хыу, В. Разработка методики оценки вертикальных смещений оснований зданий и сооружений на основе анализа элементов модели деформационной сети: дис. … канд. техн. наук: 25.00.32 / Нгуен Хыу Вьет. – Спб., 2018. – 171 с.

95. Неволин, А.Г. Влияние ошибок исходных данных на точность определения геометрических параметров крупногабаритного технологического оборудования / А.Г. Неволин, Т.М. Медведская // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2016. – №1. – С. 13-19.

96. Несмашный, Е.А. Обзор технологий и технических средств для геомеханического мониторинга состояния бортов карьеров и отвалов / Е.А. Несмашный, Г.И. Ткаченко, А.В. Болотников //Разработка рудных месторождения. – 2010. - вып. 93. – С.1-5.

97. Нефедова, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений: Учеб. пособие / Г.А. Нефедова, В.А. Ащеулов. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 140 с.

98. Никифоров, Б.И. Обработка зависимых величин классическим методом наименьших квадратов: Учеб. пособие / Б.И. Никифоров, Г.В. Макаров. – М.: В/О «Мортехинформреклама», 1989. – 56 с.

99. Никонов, А.В. Исследование влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами способом из середины / А.В. Никифоров // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. - 2014. - № 1. – С. 28-34.

100. Никонов, А.В. Исследование точности тригонометрического нивелирования способом из середины при визировании над разными подстилающими поверхностями / А.В. Никифоров // Вестник СГГА. – 2013. – Вып. 3 (23). – С. 28–33.

101. Никонов, А.В. К вопросу о влиянии вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами/ А.В. Никонов // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 1 (25). – С. 12–26.

102. Никонов, А.В. Исследование влияния стабильности положения исходной геодезической основы на точность обратной линейно-угловой засечки / А.В. Никонов, И.Н. Чешева, Г.В. Лифашина// Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2014. – №1. – С.63-70.

103. Никонов, А.В. Исследование точности измерения расстояний электронными тахеометрами в безотражательном режиме / А.В. Никонов // Вестник СГУГиТ. – 2015. – №1. – С. 43-53.

104. Никонов, А.В. К вопросу об определении постоянной поправки дальномера электронного тахеометра / А.В. Никонов, И.Н, Чешева, Г.В. Лифашина, // Вестник СГУГиТ. – 2015. – №1. – С. 54-61.

105. Никонов, А.В. Особенности применения современных геодезических приборов при наблюдении за осадками и деформациями зданий и сооружений объектов энергетики / А.В. Никонов // Вестник СГУГиТ. – 2013. – № 4(24). – С. 12 – 18.

106. Новаковский, Б.А. Цифровая наземная стереосъемка возможности и перспективы / Б.А. Новаковский, Р.В. Пермяков // Геодезия и картография. – 2014. – №10. – С. 37-40.

107. Островский, А.Л. Теория и практика флуктуационного метода определения вертикальной рефракции / А.Л. Островский, А.И. Мороз // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2000. – № 3. – С. 11–29.

108. Относительные и абсолютные величины [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.grandars.ru/student/statistika/absolyutnye-i-otnositelnye-velichiny.html (дата обращения 02.03.2020).

109. Пандул, И.С. Геодезические работы при изысканиях и строительстве гидротехнических сооружений: учеб. пособие/ И.С. Пандул. – СПб: Политехника, 2012. – 156 с.

110. Пандул, И.С. О причинах возникновения электрооптической рефракции / И.С. Пандул // Геодезия и картография. – 1998. – №9. – С. 15-18.

111. Патент № 2362978 Российская Федерация, МПК G01C 25/00 (2006.01) Универсальный метрологический геодезический стенд: патент на изобретение: №2006129026/28; заявл. 10.08.2006; опубл. 27.07.2009, Бюл. №21 / Ямбаев Х.К., Голыгин Н.Х., Бахарев Е.С., Травкин С.В., Хиноева О.Б. // заявитель Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК). – 7 с.

112. Патент № 2497076 Российская Федерация, МПК G01C (2006/01)/ Способ определения астрономического азимута и широты по неизвестным звездам: №2012123031/28; заявл. 04.06.2012; опубл. 27.10.2013, Бюл. №30 / Пандул, И.С. // заявитель Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – 12 с.

113. Патент №2349877 Российская Федерация, МПК G01C 25/00 (2006.01) Устройство для поверки и калибровки вертикальных угловых измерительных систем геодезических приборов: № 2006129025/28; заявл. 10.08.2006; опубл. 20.03.2009, Бюл. №8 / Ямбаев Х.К., Голыгин Н.Х., Травкин С.В. // заявитель Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК). – 4 с.

114. Перегудов, А.А. Разработка стенда и методика определения основных метрологических параметров оптических и цифровых нивелиров /А.А. Перегудов, С.В. Староверов, Х.К Ямбаев // Сборник статей по итогам научно-технических конференций. Приложение к журналу Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 6. Вып. 5 – С. 110-113.

115. Поклад, Г.Г. Инженерная геодезия: Учеб. пособие для вузов / Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев, Б.А. Попов. – М.: Директ-Медиа, 2020. – 498 с.

116. Попов, В.Н. Геодезия / В.Н. Попов, С.И. Чекалин. – М.: Горная книга, 2007. – С. 333-335.

117. Попов, В.Н. Управление устойчивостью карьерных откосов: Учебник для вузов / В.Н. Попов, П.С. Шпаков, Ю.Л. Юнаков. – М.: Горная книга, 2008. – 684 с.

118. РД 07-603-03. Инструкция по производству маркшейдерских работ. – М.: Федеральное государственное унитарное предприятие «Научно-технический центр по безопасности в промышленности Госгортехнадзора России», 2004. – 116 с.

119. РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://docs.cntd.ru/document/1200115154 (дата обращения 27.02.2020).

120. Розенблат, Ф. Принципы нейродинамики / Ф. Розенблат. – М.: Мир, 1992. – 240 с.

121. Руководство по эксплуатации Topcon. Электронный тахеометр GTS-750 И GPT-7500. Topcon Corporation: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.geosite.ru/images/all/images/GPT-7500.pdf (дата обращения 15.05.2020).

122. Руководство по эксплуатации. Нивелир с компенсатором серии GAL: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://3450303.ru/files/instructions/Condtrol/GAL24-32.pdf (дата обращения 18.06.2019).

123. Руководство по эксплуатации. Электронный тахеометр Sokkia SET 530 RK-3. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.sk-ndt.ru/files/manual_sokkia_set_530.pdf (дата обращения 20.05.2020).

124. Руководство пользователя. Leica GS14 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.gt-spb.ru/upload/iblock/e1e/798189_Leica_Viva_GS14_UM_v2-1-0_ru.pdf (дата обращения 10.05.2019).

125. Русяева, Е.В. Теория математической обработки геодезических измерений: Учеб. пособие Часть I. Теория ошибок измерений / Е.В. Русяева. − М.: МИИГАиК, 2016. − 56 с.

126. Саюнов, А.С. Выявление и учет боковой рефракции при угловых измерениях в условиях центральной Азии / А.С. Саюнов // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 1995 − №4. – С. 32−41.

127. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020611726 Российская Федерация. Программа для определения координат точки из линейной засечки с учетом систематических погрешностей измеряемых величин: №2020610158; заявл. 10.01.20; опубл. 06.02.2020, Бюл. № 2 / Корнилов Ю.Н., **Губайдуллина Р.А.** // заявитель Санкт-Петербургский горный университет. – 1 с.

128. Сердюков, В.М. Фотограмметрия в промышленном и гражданском строительстве / В.М. Сердюков. – М.: Недра, 1977. – С.97-102.

129. Середович, В.А. Исследования точности измерений, выполненных наземным лазерным сканеров / В.А. Середович, А.В. Иванов // Интерэкспо Гео-Сибирь. − 2013. − №3. – С.134-144.

130. Середович, В.А. Наземное лазерное сканирование: монография / В.А. Середович, А.В. Комиссаров, Д.В. Комиссаров, Т.А. Широкова. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 261 с.

131. Середович, В.А. Опыт измерения длины базиса инварными проволоками и электронным тахеометром / В.А. Середович, И.О. Сучков // Геодезия и картография. − 2010. − № 1. − С. 16-19.

132. Симонян, В. Изучение оползневых процессов геодезическими методами / В. Симонян. – М.: МГСУ, 2015. – 2-е изд. – 172 с.

133. Система относительных единиц в электромеханике [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.electromechanics.ru/direct-current/239-system-of-relative-units.html (дата обращения 20.02.2020).

134. Скрипников, В.А. К вопросу проектирования схем планового обоснования для определения горизонтальных смещений гидротехнических сооружений / В.А. Скрипников, М.А. Скрипникова // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2010. – Т.1. – №1. – С. 60-62.

135. Соловьев, С.В. Разработка методов повышения надежности измерений при геодезическом обеспечении строительных работ: дис. … канд. техн. наук : 25.00.32 / Сергей Валентинович Соловьев. – Москва, 2011. – 170 с.

136. Соломатин, В.А. Фазовые оптико-электронные преобразователи / В.А. Соломатин, В. А. Шилин. – М.: Машиностроение, 1986.- 144 с.

137. Спиридонов, Ю.В. Ошибки визирования при наблюдениях на призменные отражатели [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docplayer.ru/49221171-Oshibki-vizirovaniya-pri-nablyudeniyah-na-prizmennye-otrazhateli.html (дата обращения 10.05.2019).

138. Староверов, С.В. Разработка компактных средств геодезической метрологии для оперативной поверки и исследований нивелиров и тахеометров: дис. … канд. техн. наук: 25.00.32 / Староверов Сергей Вячеславович. – Москва, 2018. – 108 с.

139. Стороженко, А.Ф. Геодезические методы измерений вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов /А.Ф. Стороженко, В.Н. Ганьшин, Н.А. Буденков. – М.: Недра, 1981. – 189 с.

140. Судаков, С.Г. Основные геодезические сети / С.Г. Судаков. – М.: Недра, 1975. – 368 с.

141. Сучков, И.О. Базис пространственный эталонный им. О. П. Сучкова / И.О. Сучков // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2009. – №1. – С. 237-241.

142. Терешин, А.А. Мониторинг деформаций здания геодезическими методами при реконструкции его фундамента / А.А. Терешин, Д.Л. Негурица, Г.В. Алексеев // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. – 2016. – №4. – С. 84-90.

143. Тетерин, Г.Н. Теория развития и метасистемное понимание геодезии: монография / Г.Н. Тетерин. – Новосибирск: СГГА, 2006. – 162 с.

144. Травкин, С.В. Разработка методов и средств поверки и калибровки геодезических приборов для измерения превышений: дис. … канд. техн. наук: 25.00.32 / Сергей Владимирович Травкин. – Москва, 2007. – 144 с.

145. Третьяк, Л.Н. Обработка результатов наблюдений: Учеб. пособие / Л.Н. Третьяк. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 171 с.

146. Трофимов, М.Т. О соотношении точности измерений в угловых и линейных сетях / М.Т. Трофимов // Геодезия и картография. − 1967. − № 6. − С. 165-171.

147. Уставич, Г.А. Методика проведения внеочередной поверки системы «цифровой нивелир+штрих-кодовая рейка» / Г.А. Уставич, Х.К. Ямбаев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 3. – С. 8–13.

148. Уставич, Г.А. Совершенствование локальной поверочной схемы для поверки нивелиров и тахеометров / Г.А. Уставич, А.В. Никонов // Интерэкспо Гео-Сибирь. - 2015. - Т. 1. – № 1. - С. 85-93

149. Фиалковский, А.Л. Создание современных комбинированных сетей для оценки деформационной опасности городских агломераций и промышленных площадок / А.Л, Фиалковский // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2013. – №6. – С. 16-19.

150. Хиноева, О.Б. Разработка и применение нейросетевых алгоритмов учета погрешностей эталонных средств при калибровке угломерных геодезических приборов: дис. … канд. техн. каук: 25.00.32 / Ольга Борисовна Хиноева. – Москва, 2007. – 136 с.

151. Хиноева, О.Б. Новые возможности повышения точности аттестации геодезических приборов / О.Б. Хиноева // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. − 2005 − №5. – С. 136−142.

152. Хргиан, А.Х. К вопросу о теории боковой рефракции / А.Х. Хргиан // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1961. – № 3. – С. 17–22.

153. Чан Хань. Анализ стабильности пунктов опорной сети при наблюдении за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений во Вьетнаме / Чан Хань, Нгуен Вьет Ха // Известия высших учебных заведений. Раздел Геодезия и аэрофотосъемка. − 2008. − №5. − С. 33-38.

154. Чеботарев, А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей / А.С. Чеботарев. – М.: Издательство геодезической литературы, 1958. – 606 с.

155. Шароглазова, Г.А. Высшая геодезия: Основные геодезические работы: Учебно-методический комплекс / Г.А. Шароглазова. – Новополоцк: ПГУ, 2010. – 2-е изд. – 148с.

156. Широкова, Т.А. Разработка конструктивной схемы тест-объектов и методики для исследования точности наземных лазерных сканеров / Т.А. Широкова, Д.В. Комиссаров, А.В. Комиссаров // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2005. − №1. − С. 197-201.

157. Шишкин, С.Б. Систематическая погрешность угло-измерительного оборудования / С.Б. Шишкин, Б.В. Шишкин // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. − 2013. − Т.1. − № 1 (13). − С. 60-63.

158. Шульц, Р.В. Инженерные изыскания и обследование зданий. Специальное строительство / Р.В. Шульц, А.А. Анненков, Н.В. Куличенко // Вестник МГСУ. – 2016. − №1. − С. 80-93.

159. Электронный тахеометр Sokkia SET 1130R3. [Электронный ресурс] − Режим доступа: http://www.ndtural.ru/razdel.html?ir=4439&gc=4&ci=156 (дата обращения 1.06.2020).

160. Юношев, Л.С. Боковая рефракция света при измерениях углов / Л. С. Юношев. – М.: Недра, 1969. – 96 с.

161. Яковлев, Н.В. Высшая геодезия / Н.В. Яковлев. – М.: «Недра», 1989. – 437 с.

162. Яковлев, Н.В. К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях в геодезических сетях / Н.В. Яковлев // Геодезия и картография. – 1969. − № 8. – С. 8–17.

163. Яковлев, Н.В. Условия, при которых боковая рефракция оптического луча стремится к минимуму / Н В. Яковлев // Извести высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1969. – № 5. – С. 8–19.

164. Ямбаев, Х.К. Инженерно-геодезические инструменты и системы / Х.К. Ямбаев. – М.: МИИГАиК, 2012. – 450 с.

165. Яндров, И.А. Исследование и разработка координатного метода разбивочных работ в строительстве: дис. … канд. техн. наук: 25.00.32 / Яндров Игорь Алексеевич. – М., 2009. – 122 с.

166. Bagdziunaite, R. Horizontaliojo necentriskumo itaka atliekant geodezinius matavimus statybose / R. Bagdziunaite // Geod. Ir kartogr. (Lietuva). – 2002. – № 4. – Pp. 145-160.

167. Bazarnik, M. Slope stability monitoring in open pit mines using 3D terrestrial laser scanning / M. Bazarnik // AG 2018. 4th International Conference on Applied Geophysics. – E3S Web of Conferences. – 2018. – Vol. 66. Pp. 1-10. https://doi.org/10.1051/e3sconf/20186601020.

168. Braun, J. Suppression of systematic errors of electronic distance meters for measurement of short distances / J. Braun, M. Striner, R. Urban, F. Dvoracek // Optical sensors for chemical, biological and industrial applications. – 2015. – Pp. 19264-19301.

169. Costachel, A. Einigeneue Aspectebei Präzisionsnivellements zur Bestimmung der Senkung von Bauten / A. Costachel // Vermessungstechnik. – 1967. – Pp. 250-257.

170. De Wulf, A. Procedure for Analyzing Geometrical Characteristics of an EDM Calibration Bench / A. De Wulf, D. Constales, J. Meskens, T. Nuttens, C. Stal //

Proceedings of the FIG Working Week 2011 Bridging the Gap between Cultures. – Marrakech, Morocco. – 2011. – Pp. 1–9.

171. Farina, P. IBIS-M, an Innovative Radar for Monitoring Slopes in Open-Pit Mines / P. Farina, L. Leoni // International Symposium on Rock Slope Stability in Open Pit Mining and Civil. – Vancouver, Canada. – 2011. – Pp. 18-21.

172. **Gubaydullina, R.** Deformation monitoring of open pit mine slopes using an unmanned aerial vehicle (UAV) system / **R. Gubaydullina,** M. Mustafin // Proceeding of the 2018 European Rock Mechanics Symposium – EUROCK 2018: Geomechanics and Geodynamics of Rock Masses. – CRC Press. – 2018. – Vol. 2. – Pp. 1639 – 1644.

173. **Gubaydullina, R.** The application of similarity theory elements in geodesy **/ R. Gubaydullina**, Yu. N. Kornilov // Topical Issues of Rational Use of Natural Resources. – CRC Press. – 2019. – Vol. 1. – Pp. 183-188. DOI: 10.1201/978100301457723.

174. **Gubaydullina, R.** The application of similarity theory elements in geodesy / **R. Gubaydullina,** Yu. N. Kornilov // Scientific conference abstracts. Topical Issues of Rational Use of Natural Resources. – 2019. – P. 84.

175. **Gubaydullina, R.** The use of unmanned aerial vehicles for deformation monitoring of quarry slopes / **R. Gubaydullina** // Scientific Reports on Resource Issues 2018. – Medienzentrum der TU Bergakademie Freiberg. – 2018. – Pp. 58-63.

176. **Gubaydullina, R.A.** The principle of homogeneous elements for solving deformation monitoring problem / **R.A. Gubaydullina**, Yu. N. Kornilov // Abstract book. XII Russian-German Raw Materials Forum: Youth Day. – 2019. – Pp. 57-59.

177. Holst, C. Dealing with systematic laser scanner errors due to misalignment at area-based deformation analyses / C. Holst, T. Medic, H. Kuhlmann // Journal of Applied Geodesy. – 2018. – Vol.12. – Issue 2. – Pp. 169-185.

178. Hyo Seon, P. Application of GPS to monitoring of wind-induced responses of high-rise buildings / Hyo Seon Park, Hong Gyoo Sohn, Ill Soo Kim, Jae Hwan Park // The Structural Design of Tall and Special Buildings. – 2008. – No. 17. – Pp. 117—132.

179. Iavaronea, A. Calibration verification facilities for long range laser scanners. / A. Iavaronea, E. Martina // Procs. 6th Conference on Optical 3-D Measurement Techniques. – Zurich, Switzerland. – 2003. – Pp. 268-278.

180. Ingensand, H. Performances and experiences in terrestrial laser scanning / H. Ingensand, A. Ryf, T. Schulz // Procs. 6th Conference on Optical 3-D Measurement Techniques. – Zurich, Switzerland. – 2003. – Pp.236-243.

181. Ishel, A. Systematic error correction of a 3D laser scanning measurement device / A. Ishel, J.-P. Gonnet, D. Joannic, J.F. Fontaine // Optics and Lasers in Engineering. – 2011. – Pp. 16-24.

182. Khalil, R. New Compact Method for Laboratory Testing EDM Instruments / R. Khalil // Proceedings of the FIG Working Week 2005 and GSDI-8. – Cairo, Egypt. – 2005. – Pp. 1–8.

183. Mihalcea, V. EDM calibration – instrument constants and errors / V. Mihalcea, D. Onose // RevCAD. – 2014. – №16. – Pp. 198-203.

184. Ogaja, C. Advances in structural monitoring with global positioning system technology / C. Ogaja, X. Li, C. Rizos // Journal of Applied Geodesy. – 2008. – Vol. 1. – Issue 3. – Pp. 171—179.

185. Peterman, V. Landslide activity monitoring with the help of UAV / V. Peterman // International Conference on UAV in Geomatics. – Toronto, Canada. – 2015. – Pp. 215-218.

186. Rietdorf, A. A concept for the calibration of terrestrial laser scanners / A. Rietdorf, F. Gielsdorf, L. Gruending // INGEO 2004 and Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying. – Bratislava, Slovakia. – 2004. – 11 p.

187. Se Woon, C. Evaluation of stiffness changes in a high-rise building by measurements of lateral displacements using gps technology / C. Se Woon, Ill Soo Kim, Jae Hwan Park, Yousok Kim, Hong Gyoo Sohn, Hyo Seon Park // Sensors. – 2013. – Issue 13 (11). – Pp. 15489—15503.

188. Zamechikova, M. Testing of terrestrial laser systems / M. Zamechikova, A. Kopacik // INGEO 2004 and Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying. – Bratislava, Slovakia. – 2004. – 9 p.

189. Zhang, G. Deformation monitor based on 3D laser scanner/ G. Zhang // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. – Beijing. – Vol. XXXVII. – Part B4. – 2008. – Pp. 1549-1551.

.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнивание по ОМНК в программе Mathcad (1 цикл*)

Координаты исходных точек

$xa := 250.000$ м $ya := 400.000$ м $x5 := 350.000$ м $y5 := 690.000$ м

$xb := 350.000$ м $yb := 330.000$ м $x6 := 230.000$ м $y6 := 740.000$ м

Истинные координаты определяемых точек

$x1 := 240.000$ м $y1 := 520.000$ м $x2 := 340.000$ м $y2 := 450.000$ м

$x3 := 350.000$ м $y3 := 570.000$ м $x4 := 250.000$ м $y4 := 630.000$ м

$l1ист := \sqrt{(x1-xa)^2+(y1-ya)^2} = 120.416$ м

$l2ист := \sqrt{(x2-xa)^2+(y2-ya)^2} = 102.956$ м

$l3ист := \sqrt{(x2-xb)^2+(y2-yb)^2} = 120.416$ м

$l4ист := \sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2} = 122.066$ м

$l5ист := \sqrt{(x3-x2)^2+(y3-y2)^2} = 120.416$ м

$l6ист := \sqrt{(x3-x1)^2+(y3-y1)^2} = 120.83$ м

$l7ист := \sqrt{(x4-x1)^2+(y4-y1)^2} = 110.454$ м

$l8ист := \sqrt{(x3-x4)^2+(y3-y4)^2} = 116.619$ м

$l9ист := \sqrt{(x5-x3)^2+(y5-y3)^2} = 120$ м

$l10ист := \sqrt{(x5-x4)^2+(y5-y4)^2} = 116.619$ м

$l11ист := \sqrt{(x6-x4)^2+(y6-y4)^2} = 111.803$ м

$b1 := \sqrt{(xa-xb)^2+(ya-yb)^2} = 122.066$ м

Измеренные расстояния

$l1' := (l1ист)\cdot 1.0003 + 0.003 = 120.455$ м

$l2' := (l2ист)\cdot 1.0003 - 0.008 = 102.979$ м

$l3' := (l3ист)\cdot 1.0003 - 0.007 = 120.445$ м

$l4' := (l4ист)\cdot 1.0003 + 0.002 = 122.104$ м

$l5' := (l5ист)\cdot 1.0003 - 0.001 = 120.451$ м

$l6' := (l6ист)\cdot 1.0003 + 0.003 = 120.87$ м

$l7' := (l7ист)\cdot 1.0003 + 0.005 = 110.492$ м

$l8' := (l8ист)\cdot 1.0003 + 0.004 = 116.658$ м

$l9' := (l9ист)\cdot 1.0003 + 0.011 = 120.047$ м

$l10' := (l10ист)\cdot 1.0003 - 0.008 = 116.646$ м

$l11' := (l11ист)\cdot 1.0003 - 0.003 = 111.834$ м

$l0' := (b1)\cdot 1.0003 + 0.002 = 122.104$ м

Ошибки измерения расстояний

$ml1' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l1'\cdot 1000 = 5.602$ мм

$ml2' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l2'\cdot 1000 = 5.515$ мм

$ml3' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l3'\cdot 1000 = 5.602$ мм

$ml4' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l4'\cdot 1000 = 5.611$ мм

$ml5' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l5'\cdot 1000 = 5.602$ мм

$ml6' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l6'\cdot 1000 = 5.604$ мм

$ml7' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l7'\cdot 1000 = 5.552$ мм

$ml8' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l8'\cdot 1000 = 5.583$ мм

$ml9' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l9'\cdot 1000 = 5.6$ мм

$ml10' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l10'\cdot 1000 = 5.583$ мм

$ml11' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l11'\cdot 1000 = 5.559$ мм

$ml0' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l0'\cdot 1000 = 5.611$ мм

Нормирование измеренных расстояний относительно l0`

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.986494$ $k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.98989$ $k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.91589$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 0.843372$ $k7' := \frac{l7'}{l0'} = 0.904897$ $k0' := \frac{l0'}{l0'}$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.986412$ $k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.955397$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 1$ $k9' := \frac{l9'}{l0'} = 0.983152$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 0.986462$ $k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.955299$

Предварительные значения координат искомых точек

$x1pr := 239.995$ м $y1pr := 520.007$ м $x3pr := 350.005$ м $y3pr := 569.995$ м

$x2pr := 339.990$ м $y2pr := 450.008$ м $x4pr := 249.998$ м $y4pr := 629.994$ м

$$l1pr := \sqrt{(x1pr - xa)^2 + (y1pr - ya)^2} = 120.423 \text{ м}$$

$$l2pr := \sqrt{(x2pr - xa)^2 + (y2pr - ya)^2} = 102.951 \text{ м}$$

$$l3pr := \sqrt{(x2pr - xb)^2 + (y2pr - yb)^2} = 120.425 \text{ м}$$

$$l4pr := \sqrt{(x2pr - x1pr)^2 + (y2pr - y1pr)^2} = 122.061 \text{ м}$$

$$l5pr := \sqrt{(x3pr - x2pr)^2 + (y3pr - y2pr)^2} = 120.404 \text{ м}$$

$$l6pr := \sqrt{(x1pr - x3pr)^2 + (y1pr - y3pr)^2} = 120.835 \text{ м}$$

$$l7pr := \sqrt{(x4pr - x1pr)^2 + (y4pr - y1pr)^2} = 110.441 \text{ м}$$

$$l8pr := \sqrt{(x3pr - x4pr)^2 + (y3pr - y4pr)^2} = 116.625 \text{ м}$$

$$l9pr := \sqrt{(x5 - x3pr)^2 + (y5 - y3pr)^2} = 120.005 \text{ м}$$

$$l10pr := \sqrt{(x5 - x4pr)^2 + (y5 - y4pr)^2} = 116.624 \text{ м}$$

$$l11pr := \sqrt{(x6 - x4pr)^2 + (y6 - y4pr)^2} = 111.809 \text{ м}$$

$$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.986546 \qquad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.989916 \qquad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.915975$$

$$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 0.843411 \qquad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 0.904767$$

$$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.986558 \qquad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.955425$$

$$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 0.999962 \qquad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 0.983119$$

$$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 0.98639 \qquad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.95542$$

Дирекционные углы

$$\alpha a1 := \operatorname{atan}\left(\frac{y1pr - ya}{x1pr - xa}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b1 := \alpha a1 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.766$$

$$\alpha a2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - ya}{x2pr - xa}\right) = 0.507 \qquad a'a2 := \alpha a2 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.061$$

$$\alpha b2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - yb}{x2pr - xb}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b2 := \alpha b2 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.768$$

$$\alpha 12 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - y1pr}{x2pr - x1pr}\right) + 2\pi = 5.672 \qquad a'12 := \alpha 12 \cdot \frac{180}{\pi} = 325.007$$

$$\alpha 23 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y2pr}{x3pr - x2pr}\right) = 1.488 \qquad a'23 := \alpha 23 \cdot \frac{180}{\pi} = 85.229$$

$$\alpha 13 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y1pr}{x3pr - x1pr}\right) = 0.427 \qquad a'13 := \alpha 13 \cdot \frac{180}{\pi} = 24.437$$

$$\alpha 14 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y1pr}{x4pr - x1pr}\right) = 1.48 \qquad a'14 := \alpha 14 \cdot \frac{180}{\pi} = 84.803$$

$$\alpha 43 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y4pr}{x3pr - x4pr}\right) + 2\pi = 5.743 \qquad a'43 := \alpha 43 \cdot \frac{180}{\pi} = 329.038$$

$$\alpha 35 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y3pr}{x5 - x3pr}\right) + \pi = 1.571 \qquad a'35 := \alpha 35 \cdot \frac{180}{\pi} = 90.002$$

$$\alpha 45 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y4pr}{x5 - x4pr}\right) = 0.54 \qquad a'45 := \alpha 45 \cdot \frac{180}{\pi} = 30.966$$

$$\alpha 46 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6 - y4pr}{x6 - x4pr}\right) + \pi = 1.751 \qquad a'46 := \alpha 46 \cdot \frac{180}{\pi} = 100.303$$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поправок

$$a11 := \frac{\cos(\alpha a1)}{b1} \qquad a12 := \frac{\sin(\alpha a1)}{b1}$$

$$a23 := \frac{\cos(\alpha a2)}{b1} \qquad a24 := \frac{\sin(\alpha a2)}{b1}$$

$$a33 := \frac{\cos(\alpha b2)}{b1} \qquad a34 := \frac{\sin(\alpha b2)}{b1}$$

$$a41 := \frac{-\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a42 := \frac{-\sin(\alpha 12)}{b1} \qquad a43 := \frac{\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a44 := \frac{\sin(\alpha 12)}{b1}$$

$$a53 := \frac{-\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a54 := \frac{-\sin(\alpha 23)}{b1} \qquad a55 := \frac{\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a56 := \frac{\sin(\alpha 23)}{b1}$$

$$a61 := \frac{-\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a62 := \frac{-\sin(\alpha 13)}{b1} \qquad a65 := \frac{\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a66 := \frac{\sin(\alpha 13)}{b1}$$

$$a71 := \frac{-\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a72 := \frac{-\sin(\alpha 14)}{b1} \qquad a77 := \frac{\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a78 := \frac{\sin(\alpha 14)}{b1}$$

$$a85 := \frac{\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a86 := \frac{\sin(\alpha 43)}{b1} \qquad a87 := \frac{-\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a88 := \frac{-\sin(\alpha 43)}{b1}$$

$$a95 := \frac{-\cos(\alpha 35)}{b1} \qquad a96 := \frac{-\sin(\alpha 35)}{b1}$$

$$a107 := \frac{-\cos(\alpha 45)}{b1} \qquad a108 := \frac{-\sin(\alpha 45)}{b1} = -4.215 \times 10^{-3}$$

$$a117 := \frac{-\cos(\alpha 46)}{b1} \qquad a118 := \frac{-\sin(\alpha 46)}{b1}$$

$$
\underset{\sim\sim}{A} := \begin{pmatrix}
a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\
a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\
a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118
\end{pmatrix} =
$$

	0	1	2	3	4
0	$-6.806\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0	0	0
1	0	0	$7.161\cdot10^{-3}$	$3.979\cdot10^{-3}$	0
2	0	0	$-6.81\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0
3	$-6.711\cdot10^{-3}$	$4.698\cdot10^{-3}$	$6.711\cdot10^{-3}$	$-4.698\cdot10^{-3}$	0
4	0	0	$-6.814\cdot10^{-4}$	$-8.164\cdot10^{-3}$	$6.814\cdot10^{-4}$
5	$-7.458\cdot10^{-3}$	$-3.389\cdot10^{-3}$	0	0	$7.458\cdot10^{-3}$
6	$-7.42\cdot10^{-4}$	$-8.159\cdot10^{-3}$	0	0	0
7	0	0	0	0	$7.025\cdot10^{-3}$
8	0	0	0	0	$3.413\cdot10^{-7}$
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	...

$$
\underset{\sim\sim}{L} := \begin{pmatrix}
k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11'
\end{pmatrix} =
$$

	0
0	$5.214\cdot10^{-5}$
1	$3.955\cdot10^{-5}$
2	$1.456\cdot10^{-4}$
3	$-3.825\cdot10^{-5}$
4	$-7.157\cdot10^{-5}$
5	$2.555\cdot10^{-5}$
6	$-1.3\cdot10^{-4}$
7	$2.785\cdot10^{-5}$
8	$-3.302\cdot10^{-5}$
9	$1.205\cdot10^{-4}$
10	$8.5\cdot10^{-5}$

$$
\underset{\sim\sim}{F} := \begin{bmatrix}
\frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11'}{(10')^2} \\
0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12'}{(10')^2} \\
0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-13'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-14'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-15'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-16'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & \frac{-18'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & \frac{-19'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & \frac{-110'}{(10')^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & \frac{-111'}{(10')^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
X1610 := \begin{bmatrix}
m11'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m12'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m13'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m14'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m15'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m16'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m17'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m18'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m19'^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m110'^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m111'^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (m10')^2
\end{bmatrix}
$$

$$Xku := F \cdot X1610 \cdot F^T =$$

	0	1	2	3	4
0	$4.16\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$2.055\cdot10^{-3}$
1	$1.757\cdot10^{-3}$	$3.542\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$1.781\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$
2	$2.054\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$4.159\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$
3	$2.083\cdot10^{-3}$	$1.781\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$4.223\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$
4	$2.055\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$4.16\cdot10^{-3}$
5	$2.062\cdot10^{-3}$	$1.763\cdot10^{-3}$	$2.062\cdot10^{-3}$	$2.09\cdot10^{-3}$	$2.062\cdot10^{-3}$
6	$1.885\cdot10^{-3}$	$1.611\cdot10^{-3}$	$1.885\cdot10^{-3}$	$1.91\cdot10^{-3}$	$1.885\cdot10^{-3}$
7	$1.99\cdot10^{-3}$	$1.701\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$	$2.017\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$
8	$2.048\cdot10^{-3}$	$1.751\cdot10^{-3}$	$2.048\cdot10^{-3}$	$2.076\cdot10^{-3}$	$2.048\cdot10^{-3}$
9	$1.99\cdot10^{-3}$	$1.701\cdot10^{-3}$	$1.989\cdot10^{-3}$	$2.017\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$
10	$1.908\cdot10^{-3}$	$1.631\cdot10^{-3}$	$1.907\cdot10^{-3}$	$1.934\cdot10^{-3}$	...

$$m0 := 2\cdot10^{-3}$$

$$Q := m0^{-2}\cdot Xku =$$

	0	1	2	3	4	5
0	$1.04\cdot10^{3}$	439.136	513.616	520.691	513.641	515.427
1	439.136	885.406	439.099	445.148	439.121	440.647
2	513.616	439.099	$1.04\cdot10^{3}$	520.648	513.599	515.384
3	520.691	445.148	520.648	$1.056\cdot10^{3}$	520.674	522.483
4	513.641	439.121	513.599	520.674	$1.04\cdot10^{3}$	515.41
5	515.427	440.647	515.384	522.483	515.41	$1.044\cdot10^{3}$
6	471.172	402.813	471.133	477.622	471.156	472.794
7	497.467	425.293	497.425	504.277	497.45	499.179
8	511.918	437.648	511.876	518.927	511.901	513.681
9	497.416	425.249	497.374	504.225	497.399	499.128
10	476.895	407.706	476.856	483.424	476.879	...

$P := Q^{-1} =$

	0	1	2	3	4
0	$1.734\cdot10^{-3}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$
1	$-1.467\cdot10^{-4}$	$1.831\cdot10^{-3}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$-1.483\cdot10^{-4}$	$-1.467\cdot10^{-4}$
2	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$1.734\cdot10^{-3}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$
3	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.483\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$1.725\cdot10^{-3}$	$-1.681\cdot10^{-4}$
4	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$1.734\cdot10^{-3}$
5	$-1.668\cdot10^{-4}$	$-1.471\cdot10^{-4}$	$-1.668\cdot10^{-4}$	$-1.686\cdot10^{-4}$	$-1.668\cdot10^{-4}$
6	$-1.553\cdot10^{-4}$	$-1.37\cdot10^{-4}$	$-1.553\cdot10^{-4}$	$-1.57\cdot10^{-4}$	$-1.553\cdot10^{-4}$
7	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.431\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.639\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$
8	$-1.659\cdot10^{-4}$	$-1.464\cdot10^{-4}$	$-1.659\cdot10^{-4}$	$-1.677\cdot10^{-4}$	$-1.659\cdot10^{-4}$
9	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.431\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.639\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$
10	$-1.568\cdot10^{-4}$	$-1.384\cdot10^{-4}$	$-1.568\cdot10^{-4}$	$-1.585\cdot10^{-4}$	...

$W := A^T \cdot P \cdot L$

$N := A^T P \cdot A$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$$T := -N^{-1} \cdot W = \begin{pmatrix} 2.231\times10^{-3} \\ -5.705\times10^{-3} \\ 3.434\times10^{-3} \\ -0.015 \\ -1.12\times10^{-3} \\ -4.829\times10^{-3} \\ 0.01 \\ 0.011 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x1pr + T_{0,0} \\ y1pr + T_{1,0} \\ x2pr + T_{2,0} \\ y2pr + T_{3,0} \\ x3pr + T_{4,0} \\ y3pr + T_{5,0} \\ x4pr + T_{6,0} \\ y4pr + T_{7,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 239.997 \\ 520.001 \\ 339.993 \\ 449.993 \\ 350.004 \\ 569.99 \\ 250.008 \\ 630.005 \end{pmatrix} \quad м)$$

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

$V := A \cdot T + L =$

	0
0	$4.045\cdot10^{-6}$
1	$2.885\cdot10^{-6}$
2	$1.759\cdot10^{-5}$
3	$1.534\cdot10^{-5}$
4	$1.158\cdot10^{-5}$
5	$3.533\cdot10^{-6}$
6	$9.164\cdot10^{-6}$
7	$1.398\cdot10^{-5}$
8	$6.534\cdot10^{-6}$
9	$4.553\cdot10^{-6}$
10	$1.417\cdot10^{-5}$

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9865505
1	0.843414
2	0.9865756
3	0.9999771
4	0.9864015
5	0.9899191
6	0.9047766
7	0.9554393
8	0.9831258
9	0.9554243
10	0.9159887

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Уравнивание по ОМНК в программе Mathcad (2 цикл*)

Координаты исходных точек

$xa := 250.000$ м $ya := 400.000$ м $x5 := 350.000$ м $y5 := 690.000$ м

$xb := 350.000$ м $yb := 330.000$ м $x6 := 230.000$ м $y6 := 740.000$ м

Истинные координаты определяемых точек (2 цикл наблюдений)

$x1 := 240 + 0.026 = 240.026$ м $y1 := 520 - 0.030 = 519.97$ м $x2 := 340 + 0.007 = 340.007$ м $y2 := 450 - 0.019 = 449.981$ м

$x3 := 350 + 0.010 = 350.01$ м $y3 := 570 + 0.013 = 570.013$ м $x4 := 250 - 0.003 = 249.997$ м $y4 := 630 - 0.026 = 629.974$ м

$l1ист := \sqrt{(x1 - xa)^2 + (y1 - ya)^2} = 120.384$ м

$l2ист := \sqrt{(x2 - xa)^2 + (y2 - ya)^2} = 102.953$ м

$l3ист := \sqrt{(x2 - xb)^2 + (y2 - yb)^2} = 120.396$ м

$l4ист := \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = 122.044$ м

$l5ист := \sqrt{(x3 - x2)^2 + (y3 - y2)^2} = 120.448$ м

$l6ист := \sqrt{(x3 - x1)^2 + (y3 - y1)^2} = 120.834$ м

$l7ист := \sqrt{(x4 - x1)^2 + (y4 - y1)^2} = 110.455$ м

$l8ист := \sqrt{(x3 - x4)^2 + (y3 - y4)^2} = 116.61$ м

$l9ист := \sqrt{(x5 - x3)^2 + (y5 - y3)^2} = 119.987$ м

$l10ист := \sqrt{(x5 - x4)^2 + (y5 - y4)^2} = 116.635$ м

$l11ист := \sqrt{(x6 - x4)^2 + (y6 - y4)^2} = 111.828$ м

$b1 := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2} = 122.066$ м

Измеренные расстояния

$l1' := (l1ист)\cdot 1.0004 - 0.007 = 120.425$ м

$l2' := (l2ист)\cdot 1.0004 + 0.003 = 102.997$ м

$l3' := (l3ист)\cdot 1.0004 - 0.006 = 120.439$ м

$l4' := (l4ист)\cdot 1.0004 - 0.005 = 122.088$ м

$l5' := (l5ист)\cdot 1.0004 + 0.005 = 120.501$ м

$l6' := (l6ист)\cdot 1.0004 - 0.001 = 120.881$ м

$l7' := (l7ист)\cdot 1.0004 - 0.003 = 110.496$ м

$l8' := (l8ист)\cdot 1.0004 + 0.005 = 116.662$ м

$l9' := (l9ист)\cdot 1.0004 - 0.002 = 120.033$ м

$l10' := (l10ист)\cdot 1.0004 + 0.008 = 116.69$ м

$l11' := (l11ист)\cdot 1.0004 + 0.005 = 111.878$ м

$l0' := (b1)\cdot 1.0004 - 0.003 = 122.111$ м

$ml1' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l1'\cdot 1000 = 5.60$ мм

$ml2' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l2'\cdot 1000 = 5.51$ мм

$ml3' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l3'\cdot 1000 = 5.60$ мм

$ml4' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l4'\cdot 1000 = 5.61$ мм

$ml5' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l5'\cdot 1000 = 5.60$ мм

$ml6' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l6'\cdot 1000 = 5.60$ мм

$ml7' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l7'\cdot 1000 = 5.552$ мм

$ml8' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l8'\cdot 1000 = 5.583$ мм

$ml9' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l9'\cdot 1000 = 5.6$ мм

$ml10' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l10'\cdot 1000 = 5.58$ мм

$ml11' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l11'\cdot 1000 = 5.5$ мм

$ml0' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l0'\cdot 1000 = 5.61$ мм

Нормирование измеренных расстояний относительно l0'

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.98619$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 0.843471$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.986301$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 1$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 0.986814$

$k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.989924$

$k7' := \frac{l7'}{l0'} = 0.90488$

$k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.955372$

$k9' := \frac{l9'}{l0'} = 0.98298$

$k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.9556$

$k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.916198$

$k0' := \frac{l0'}{l0'}$

Предварительные значения координат искомых точек

$x1pr := 239.997$ м $y1pr := 520.001$ м $x3pr := 350.004$ м $y3pr := 569.990$ м

$x2pr := 339.993$ м $y2pr := 449.993$ м $x4pr := 250.008$ м $y4pr := 630.005$ м

$$l1pr := \sqrt{(x1pr - xa)^2 + (y1pr - ya)^2} = 120.417 \ \text{м}$$

$$l2pr := \sqrt{(x2pr - xa)^2 + (y2pr - ya)^2} = 102.947 \ \text{м}$$

$$l3pr := \sqrt{(x2pr - xb)^2 + (y2pr - yb)^2} = 120.41 \ \text{м}$$

$$l4pr := \sqrt{(x2pr - x1pr)^2 + (y2pr - y1pr)^2} = 122.067 \ \text{м}$$

$$l5pr := \sqrt{(x3pr - x2pr)^2 + (y3pr - y2pr)^2} = 120.414 \ \text{м}$$

$$l6pr := \sqrt{(x1pr - x3pr)^2 + (y1pr - y3pr)^2} = 120.832 \ \text{м}$$

$$l7pr := \sqrt{(x4pr - x1pr)^2 + (y4pr - y1pr)^2} = 110.459 \ \text{м}$$

$$l8pr := \sqrt{(x3pr - x4pr)^2 + (y3pr - y4pr)^2} = 116.623 \ \text{м}$$

$$l9pr := \sqrt{(x5 - x3pr)^2 + (y5 - y3pr)^2} = 120.01 \ \text{м}$$

$$l10pr := \sqrt{(x5 - x4pr)^2 + (y5 - y4pr)^2} = 116.61 \ \text{м}$$

$$l11pr := \sqrt{(x6 - x4pr)^2 + (y6 - y4pr)^2} = 111.8 \ \text{м}$$

$$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.986496 \qquad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.989897 \qquad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.915901$$

$$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 0.843373 \qquad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 0.904912$$

$$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.986433 \qquad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.955416$$

$$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 1.000011 \qquad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 0.98316$$

$$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 0.986469 \qquad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.955303$$

Дирекционные углы

$$\alpha a1 := \operatorname{atan}\left(\frac{y1pr - ya}{x1pr - xa}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b1 := \alpha a1 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.765$$

$$\alpha a2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - ya}{x2pr - xa}\right) = 0.507 \qquad a'a2 := \alpha a2 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.053$$

$$\alpha b2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - yb}{x2pr - xb}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b2 := \alpha b2 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.767$$

$$\alpha 12 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - y1pr}{x2pr - x1pr}\right) + 2\pi = 5.672 \qquad a'12 := \alpha 12 \cdot \frac{180}{\pi} = 325.004$$

$$\alpha 23 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y2pr}{x3pr - x2pr}\right) = 1.488 \qquad a'23 := \alpha 23 \cdot \frac{180}{\pi} = 85.231$$

$$\alpha 13 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y1pr}{x3pr - x1pr}\right) = 0.427 \qquad a'13 := \alpha 13 \cdot \frac{180}{\pi} = 24.438$$

$$\alpha 14 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y1pr}{x4pr - x1pr}\right) = 1.48 \qquad a'14 := \alpha 14 \cdot \frac{180}{\pi} = 84.8$$

$$\alpha 43 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y4pr}{x3pr - x4pr}\right) + 2\pi = 5.743 \qquad a'43 := \alpha 43 \cdot \frac{180}{\pi} = 329.029$$

$$\alpha 35 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y3pr}{x5 - x3pr}\right) + \pi = 1.571 \qquad a'35 := \alpha 35 \cdot \frac{180}{\pi} = 90.002$$

$$\alpha 45 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y4pr}{x5 - x4pr}\right) = 0.54 \qquad a'45 := \alpha 45 \cdot \frac{180}{\pi} = 30.964$$

$$\alpha 46 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6 - y4pr}{x6 - x4pr}\right) + \pi = 1.751 \qquad a'46 := \alpha 46 \cdot \frac{180}{\pi} = 100.309$$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поправок

$$a11 := \frac{\cos(\alpha a1)}{b1} \qquad a12 := \frac{\sin(\alpha a1)}{b1}$$

$$a23 := \frac{\cos(\alpha a2)}{b1} \qquad a24 := \frac{\sin(\alpha a2)}{b1}$$

$$a33 := \frac{\cos(\alpha b2)}{b1} \qquad a34 := \frac{\sin(\alpha b2)}{b1}$$

$$a41 := \frac{-\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a42 := \frac{-\sin(\alpha 12)}{b1} \qquad a43 := \frac{\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a44 := \frac{\sin(\alpha 12)}{b1}$$

$$a53 := \frac{-\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a54 := \frac{-\sin(\alpha 23)}{b1} \qquad a55 := \frac{\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a56 := \frac{\sin(\alpha 23)}{b1}$$

$$a61 := \frac{-\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a62 := \frac{-\sin(\alpha 13)}{b1} \qquad a65 := \frac{\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a66 := \frac{\sin(\alpha 13)}{b1}$$

$$a71 := \frac{-\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a72 := \frac{-\sin(\alpha 14)}{b1} \qquad a77 := \frac{\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a78 := \frac{\sin(\alpha 14)}{b1}$$

$$a85 := \frac{\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a86 := \frac{\sin(\alpha 43)}{b1} \qquad a87 := \frac{-\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a88 := \frac{-\sin(\alpha 43)}{b1}$$

$$a95 := \frac{-\cos(\alpha 35)}{b1} \qquad a96 := \frac{-\sin(\alpha 35)}{b1}$$

$$a107 := \frac{-\cos(\alpha 45)}{b1} \qquad a108 := \frac{-\sin(\alpha 45)}{b1}$$

$$a117 := \frac{-\cos(\alpha 46)}{b1} \qquad a118 := \frac{-\sin(\alpha 46)}{b1}$$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\ a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\ a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118 \end{pmatrix} =$$

	0	1	2	3	4
0	$-6.805\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0	0	0
1	0	0	$7.161\cdot10^{-3}$	$3.978\cdot10^{-3}$	0
2	0	0	$-6.808\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0
3	$-6.711\cdot10^{-3}$	$4.698\cdot10^{-3}$	$6.711\cdot10^{-3}$	$-4.698\cdot10^{-3}$	0
4	0	0	$-6.811\cdot10^{-4}$	$-8.164\cdot10^{-3}$	$6.811\cdot10^{-4}$
5	$-7.458\cdot10^{-3}$	$-3.389\cdot10^{-3}$	0	0	$7.458\cdot10^{-3}$
6	$-7.425\cdot10^{-4}$	$-8.159\cdot10^{-3}$	0	0	0
7	0	0	0	0	$7.024\cdot10^{-3}$
8	0	0	0	0	$2.731\cdot10^{-7}$
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	...

$$L := \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11' \end{pmatrix} =$$

	0
0	$3.059\cdot10^{-4}$
1	$-9.782\cdot10^{-5}$
2	$1.324\cdot10^{-4}$
3	$2.063\cdot10^{-4}$
4	$-3.455\cdot10^{-4}$
5	$-2.772\cdot10^{-5}$
6	$3.198\cdot10^{-5}$
7	$4.372\cdot10^{-5}$
8	$1.806\cdot10^{-4}$
9	$-2.969\cdot10^{-4}$
10	$-2.972\cdot10^{-4}$

$$F := \begin{bmatrix} \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l1'}{(l0')^2} \\ 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l2'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l3'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l4'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l5'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l6'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l7'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & \frac{-l8'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & \frac{-l9'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & \frac{-l10'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & \frac{-l11'}{(l0')^2} \end{bmatrix}$$

$$Xl610 := \begin{bmatrix} ml1'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml2'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml3'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ml4'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ml5'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml6'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml7'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml8'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml9'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml10'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml11'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (ml0')^2 \end{bmatrix}$$

$Xku := F \cdot Xl610 \cdot F^T =$

	0	1	2	3	4
0	$4.158\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$2.053\cdot10^{-3}$	$2.081\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$
1	$1.756\cdot10^{-3}$	$3.542\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$1.78\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$
2	$2.053\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$4.158\cdot10^{-3}$	$2.082\cdot10^{-3}$	$2.055\cdot10^{-3}$
3	$2.081\cdot10^{-3}$	$1.78\cdot10^{-3}$	$2.082\cdot10^{-3}$	$4.221\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$
4	$2.054\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$	$2.055\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$4.161\cdot10^{-3}$
5	$2.061\cdot10^{-3}$	$1.763\cdot10^{-3}$	$2.061\cdot10^{-3}$	$2.089\cdot10^{-3}$	$2.062\cdot10^{-3}$
6	$1.884\cdot10^{-3}$	$1.611\cdot10^{-3}$	$1.884\cdot10^{-3}$	$1.91\cdot10^{-3}$	$1.885\cdot10^{-3}$
7	$1.989\cdot10^{-3}$	$1.701\cdot10^{-3}$	$1.989\cdot10^{-3}$	$2.016\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$
8	$2.046\cdot10^{-3}$	$1.75\cdot10^{-3}$	$2.047\cdot10^{-3}$	$2.075\cdot10^{-3}$	$2.048\cdot10^{-3}$
9	$1.989\cdot10^{-3}$	$1.702\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$	$2.017\cdot10^{-3}$	$1.991\cdot10^{-3}$
10	$1.907\cdot10^{-3}$	$1.631\cdot10^{-3}$	$1.908\cdot10^{-3}$	$1.934\cdot10^{-3}$	...

$m0 := 5$

$Q := m0^{-2} \cdot Xku =$

	0	1	2	3	4
0	$1.663\cdot10^{-4}$	$7.024\cdot10^{-5}$	$8.214\cdot10^{-5}$	$8.326\cdot10^{-5}$	$8.218\cdot10^{-5}$
1	$7.024\cdot10^{-5}$	$1.417\cdot10^{-4}$	$7.025\cdot10^{-5}$	$7.121\cdot10^{-5}$	$7.029\cdot10^{-5}$
2	$8.214\cdot10^{-5}$	$7.025\cdot10^{-5}$	$1.663\cdot10^{-4}$	$8.327\cdot10^{-5}$	$8.219\cdot10^{-5}$
3	$8.326\cdot10^{-5}$	$7.121\cdot10^{-5}$	$8.327\cdot10^{-5}$	$1.688\cdot10^{-4}$	$8.331\cdot10^{-5}$
4	$8.218\cdot10^{-5}$	$7.029\cdot10^{-5}$	$8.219\cdot10^{-5}$	$8.331\cdot10^{-5}$	$1.664\cdot10^{-4}$
5	$8.244\cdot10^{-5}$	$7.051\cdot10^{-5}$	$8.245\cdot10^{-5}$	$8.358\cdot10^{-5}$	$8.249\cdot10^{-5}$
6	$7.535\cdot10^{-5}$	$6.445\cdot10^{-5}$	$7.536\cdot10^{-5}$	$7.64\cdot10^{-5}$	$7.54\cdot10^{-5}$
7	$7.956\cdot10^{-5}$	$6.805\cdot10^{-5}$	$7.957\cdot10^{-5}$	$8.066\cdot10^{-5}$	$7.961\cdot10^{-5}$
8	$8.186\cdot10^{-5}$	$7.001\cdot10^{-5}$	$8.187\cdot10^{-5}$	$8.299\cdot10^{-5}$	$8.191\cdot10^{-5}$
9	$7.958\cdot10^{-5}$	$6.806\cdot10^{-5}$	$7.959\cdot10^{-5}$	$8.068\cdot10^{-5}$	$7.963\cdot10^{-5}$
10	$7.63\cdot10^{-5}$	$6.526\cdot10^{-5}$	$7.631\cdot10^{-5}$	$7.735\cdot10^{-5}$	...

$P := Q^{-1} =$

	0	1	2	3	4
0	$1.084\cdot10^{4}$	-917.086	$-1.039\cdot10^{3}$	$-1.05\cdot10^{3}$	$-1.04\cdot10^{3}$
1	-917.086	$1.145\cdot10^{4}$	-917.167	-926.993	-917.541
2	$-1.039\cdot10^{3}$	-917.167	$1.084\cdot10^{4}$	$-1.05\cdot10^{3}$	$-1.04\cdot10^{3}$
3	$-1.05\cdot10^{3}$	-926.993	$-1.05\cdot10^{3}$	$1.078\cdot10^{4}$	$-1.051\cdot10^{3}$
4	$-1.04\cdot10^{3}$	-917.541	$-1.04\cdot10^{3}$	$-1.051\cdot10^{3}$	$1.084\cdot10^{4}$
5	$-1.042\cdot10^{3}$	-919.809	$-1.042\cdot10^{3}$	$-1.054\cdot10^{3}$	$-1.043\cdot10^{3}$
6	-970.612	-856.588	-970.698	-981.098	-971.094
7	$-1.013\cdot10^{3}$	-894.425	$-1.014\cdot10^{3}$	$-1.024\cdot10^{3}$	$-1.014\cdot10^{3}$
8	$-1.037\cdot10^{3}$	-914.74	$-1.037\cdot10^{3}$	$-1.048\cdot10^{3}$	$-1.037\cdot10^{3}$
9	$-1.014\cdot10^{3}$	-894.594	$-1.014\cdot10^{3}$	$-1.025\cdot10^{3}$	$-1.014\cdot10^{3}$
10	-980.311	-865.147	-980.397	-990.901	...

$W := A^{T}\cdot P\cdot L$

$N := A^{T}\cdot P\cdot A$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$$T := -N^{-1}\cdot W = \begin{pmatrix} 0.039 \\ -0.037 \\ 0.02 \\ -0.016 \\ 0.012 \\ 0.024 \\ -0.017 \\ -0.038 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x1pr + T_{0,0} \\ y1pr + T_{1,0} \\ x2pr + T_{2,0} \\ y2pr + T_{3,0} \\ x3pr + T_{4,0} \\ y3pr + T_{5,0} \\ x4pr + T_{6,0} \\ y4pr + T_{7,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240.036 \\ 519.964 \\ 340.013 \\ 449.977 \\ 350.016 \\ 570.014 \\ 249.991 \\ 629.967 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

$V := A\cdot T + L =$

	0
0	$-2.173\cdot10^{-5}$
1	$-1.626\cdot10^{-5}$
2	$-1.511\cdot10^{-5}$
3	$-1.35\cdot10^{-5}$
4	$-1.798\cdot10^{-5}$
5	$-1.765\cdot10^{-5}$
6	$-1.813\cdot10^{-5}$
7	$-1.365\cdot10^{-5}$
8	$-1.952\cdot10^{-5}$
9	$-1.8\cdot10^{-5}$
10	$-1.611\cdot10^{-5}$

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9864743
1	0.8433566
2	0.9864184
3	0.9999972
4	0.9864509
5	0.989879
6	0.9048939
7	0.9554019
8	0.9831407
9	0.9552851
10	0.9158844

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Уравнивание по ОМНК в программе Mathcad (1 цикл)

Координаты исходных точек

$xa := 250.000$ м $\quad ya := 400.000$ м $\quad x5 := 350.00$ м $\quad y5 := 690.000$ м

$xb := 350.000$ м $\quad yb := 330.000$ м $\quad x6 := 230.00$ м $\quad y6 := 740.000$ м

Истинные координаты определяемых точек

$x1 := 240.000$ м $\quad y1 := 520.000$ м $\quad x2 := 340.00$ м $\quad y2 := 450.000$ м

$x3 := 350.000$ м $\quad y3 := 570.000$ м $\quad x4 := 250.00$ м $\quad y4 := 630.000$ м

$$l1ист := \sqrt{(x1-xa)^2+(y1-ya)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l2ист := \sqrt{(x2-xa)^2+(y2-ya)^2} = 102.956 \text{ м}$$

$$l3ист := \sqrt{(x2-xb)^2+(y2-yb)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l4ист := \sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2} = 122.066 \text{ м}$$

$$l5ист := \sqrt{(x3-x2)^2+(y3-y2)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l6ист := \sqrt{(x3-x1)^2+(y3-y1)^2} = 120.83 \text{ м}$$

$$l7ист := \sqrt{(x4-x1)^2+(y4-y1)^2} = 110.454 \text{ м}$$

$$l8ист := \sqrt{(x3-x4)^2+(y3-y4)^2} = 116.619 \text{ м}$$

$$l9ист := \sqrt{(x5-x3)^2+(y5-y3)^2} = 120 \text{ м}$$

$$l10ист := \sqrt{(x5-x4)^2+(y5-y4)^2} = 116.61! \text{ м}$$

$$l11ист := \sqrt{(x6-x4)^2+(y6-y4)^2} = 111.803 \text{ м}$$

$$b1 := \sqrt{(xa-xb)^2+(ya-yb)^2} = 122.066 \text{ м}$$

Измеренные расстояния

$l1' := (l1ист) + 0.04 + 0.003 = 120.459$ м $\quad l6' := (l6ист) + 0.04 + 0.003 = 120.873$ м $\quad l11' := (l11ист) + 0.04 - 0.003 = 111.84$ м

$l2' := (l2ист) + 0.040 - 0.008 = 102.988$ м $\quad l7' := l7ист + 0.04 + 0.005 = 110.499$ м $\quad l0' := (b1) + 0.04 + 0.002 = 122.108$ м

$l3' := l3ист + 0.04 - 0.007 = 120.449$ м $\quad l8' := l8ист + 0.04 + 0.004 = 116.663$ м

$l4' := l4ист + 0.04 + 0.002 = 122.108$ м $\quad l9' := l9ист + 0.04 + 0.011 = 120.051$ м

$l5' := (l5ист) + 0.04 - 0.001 = 120.455$ м $\quad l10' := (l10ист) + 0.04 - 0.008 = 116.651$ м

Ошибки измерения расстояний

$ml1' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l1'\cdot1000 = 5.602$ мм $\quad ml7' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l7'\cdot1000 = 5.552$ мм

$ml2' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l2'\cdot1000 = 5.515$ мм $\quad ml8' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l8'\cdot1000 = 5.583$ мм

$ml3' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l3'\cdot1000 = 5.602$ мм $\quad ml9' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l9'\cdot1000 = 5.6$ мм

$ml4' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l4'\cdot1000 = 5.611$ мм $\quad ml10' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l10'\cdot1000 = 5.58$ мм

$ml5' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l5'\cdot1000 = 5.602$ мм $\quad ml11' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l11'\cdot1000 = 5.559$ мм

$ml6' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l6'\cdot1000 = 5.604$ мм $\quad ml0' := 5 + 5\cdot10^{-6}\cdot l0'\cdot1000 = 5.61$ мм

Нормирование измеренных расстояний относительно l0'

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.986499$ $\quad k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.989893$ $\quad k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.915917$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 0.843423$ $\quad k7' := \frac{l7'}{l0'} = 0.904929$ $\quad k0' := \frac{l0'}{l0'}$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.986417$ $\quad k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.955412$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 1$ $\quad k9' := \frac{l9'}{l0'} = 0.983158$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 0.986466$ $\quad k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.955314$

Предварительные значения координат искомых точек

$x1pr := 239.995$ м $\quad y1pr := 520.007$ м $\quad x3pr := 350.005$ м $\quad y3pr := 569.995$ м

$x2pr := 339.990$ м $\quad y2pr := 450.008$ м $\quad x4pr := 249.998$ м $\quad y4pr := 629.994$ м

$$l1pr := \sqrt{(x1pr - xa)^2 + (y1pr - ya)^2} = 120.423 \text{ м}$$

$$l2pr := \sqrt{(x2pr - xa)^2 + (y2pr - ya)^2} = 102.951 \text{ м}$$

$$l3pr := \sqrt{(x2pr - xb)^2 + (y2pr - yb)^2} = 120.425 \text{ м}$$

$$l4pr := \sqrt{(x2pr - x1pr)^2 + (y2pr - y1pr)^2} = 122.061 \text{ м}$$

$$l5pr := \sqrt{(x3pr - x2pr)^2 + (y3pr - y2pr)^2} = 120.404 \text{ м}$$

$$l6pr := \sqrt{(x1pr - x3pr)^2 + (y1pr - y3pr)^2} = 120.835 \text{ м}$$

$$l7pr := \sqrt{(x4pr - x1pr)^2 + (y4pr - y1pr)^2} = 110.441 \text{ м}$$

$$l8pr := \sqrt{(x3pr - x4pr)^2 + (y3pr - y4pr)^2} = 116.625 \text{ м}$$

$$l9pr := \sqrt{(x5 - x3pr)^2 + (y5 - y3pr)^2} = 120.005 \text{ м}$$

$$l10pr := \sqrt{(x5 - x4pr)^2 + (y5 - y4pr)^2} = 116.624 \text{ м}$$

$$l11pr := \sqrt{(x6 - x4pr)^2 + (y6 - y4pr)^2} = 111.809 \text{ м}$$

$$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.986546 \qquad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.989916 \qquad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.915975$$

$$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 0.843411 \qquad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 0.904767$$

$$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.986558 \qquad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.955425$$

$$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 0.999962 \qquad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 0.983119$$

$$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 0.98639 \qquad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.95542$$

Дирекционные углы

$$\alpha a1 := \operatorname{atan}\left(\frac{y1pr - ya}{x1pr - xa}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b1 := \alpha a1 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.766$$

$$\alpha a2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - ya}{x2pr - xa}\right) = 0.507 \qquad a'a2 := \alpha a2 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.061$$

$$\alpha b2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - yb}{x2pr - xb}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b2 := \alpha b2 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.768$$

$$\alpha 12 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - y1pr}{x2pr - x1pr}\right) + 2\pi = 5.672 \qquad a'12 := \alpha 12 \cdot \frac{180}{\pi} = 325.007$$

$$\alpha 23 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y2pr}{x3pr - x2pr}\right) = 1.488 \qquad a'23 := \alpha 23 \cdot \frac{180}{\pi} = 85.229$$

$$\alpha 13 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y1pr}{x3pr - x1pr}\right) = 0.427 \qquad a'13 := \alpha 13 \cdot \frac{180}{\pi} = 24.437$$

$$\alpha 14 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y1pr}{x4pr - x1pr}\right) = 1.48 \qquad a'14 := \alpha 14 \cdot \frac{180}{\pi} = 84.803$$

$$\alpha 43 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y4pr}{x3pr - x4pr}\right) + 2\pi = 5.743 \qquad a'43 := \alpha 43 \cdot \frac{180}{\pi} = 329.038$$

$$\alpha 35 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y3pr}{x5 - x3pr}\right) + \pi = 1.571 \qquad a'35 := \alpha 35 \cdot \frac{180}{\pi} = 90.002$$

$$\alpha 45 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y4pr}{x5 - x4pr}\right) = 0.54 \qquad a'45 := \alpha 45 \cdot \frac{180}{\pi} = 30.966$$

$$\alpha 46 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6 - y4pr}{x6 - x4pr}\right) + \pi = 1.751 \qquad a'46 := \alpha 46 \cdot \frac{180}{\pi} = 100.303$$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поправок

$$a11 := \frac{\cos(\alpha a1)}{b1} \qquad a12 := \frac{\sin(\alpha a1)}{b1}$$

$$a23 := \frac{\cos(\alpha a2)}{b1} \qquad a24 := \frac{\sin(\alpha a2)}{b1}$$

$$a33 := \frac{\cos(\alpha b2)}{b1} \qquad a34 := \frac{\sin(\alpha b2)}{b1}$$

$$a41 := \frac{-\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a42 := \frac{-\sin(\alpha 12)}{b1} \qquad a43 := \frac{\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a44 := \frac{\sin(\alpha 12)}{b1}$$

$$a53 := \frac{-\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a54 := \frac{-\sin(\alpha 23)}{b1} \qquad a55 := \frac{\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a56 := \frac{\sin(\alpha 23)}{b1}$$

$$a61 := \frac{-\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a62 := \frac{-\sin(\alpha 13)}{b1} \qquad a65 := \frac{\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a66 := \frac{\sin(\alpha 13)}{b1}$$

$$a71 := \frac{-\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a72 := \frac{-\sin(\alpha 14)}{b1} \qquad a77 := \frac{\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a78 := \frac{\sin(\alpha 14)}{b1}$$

$$a85 := \frac{\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a86 := \frac{\sin(\alpha 43)}{b1} \qquad a87 := \frac{-\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a88 := \frac{-\sin(\alpha 43)}{b1}$$

$$a95 := \frac{-\cos(\alpha 35)}{b1} \qquad a96 := \frac{-\sin(\alpha 35)}{b1}$$

$$a107 := \frac{-\cos(\alpha 45)}{b1} \qquad a108 := \frac{-\sin(\alpha 45)}{b1} = -4.215 \times 10^{-3}$$

$$a117 := \frac{-\cos(\alpha 46)}{b1} \qquad a118 := \frac{-\sin(\alpha 46)}{b1}$$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\ a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\ a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118 \end{pmatrix} =$$

	0	1	2	3	4
0	$-6.806\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0	0	0
1	0	0	$7.161\cdot10^{-3}$	$3.979\cdot10^{-3}$	0
2	0	0	$-6.81\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0
3	$-6.711\cdot10^{-3}$	$4.698\cdot10^{-3}$	$6.711\cdot10^{-3}$	$-4.698\cdot10^{-3}$	0
4	0	0	$-6.814\cdot10^{-4}$	$-8.164\cdot10^{-3}$	$6.814\cdot10^{-4}$
5	$-7.458\cdot10^{-3}$	$-3.389\cdot10^{-3}$	0	0	$7.458\cdot10^{-3}$
6	$-7.42\cdot10^{-4}$	$-8.159\cdot10^{-3}$	0	0	0
7	0	0	0	0	$7.025\cdot10^{-3}$
8	0	0	0	0	$3.413\cdot10^{-7}$
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	...

$$L := \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11' \end{pmatrix} =$$

	0
0	$4.771\cdot10^{-5}$
1	$-1.173\cdot10^{-5}$
2	$1.412\cdot10^{-4}$
3	$-3.825\cdot10^{-5}$
4	$-7.6\cdot10^{-5}$
5	$2.224\cdot10^{-5}$
6	$-1.611\cdot10^{-4}$
7	$1.323\cdot10^{-5}$
8	$-3.856\cdot10^{-5}$
9	$1.059\cdot10^{-4}$
10	$5.746\cdot10^{-5}$

$$F := \begin{bmatrix} \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l1'}{(l0')^2} \\ 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l2'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l3'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l4'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l5'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l6'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l7'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & 0 & \frac{-l8'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & 0 & \frac{-l9'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & 0 & \frac{-l10'}{(l0')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l0'} & \frac{-l11'}{(l0')^2} \end{bmatrix}$$

$$Xl610 := \begin{bmatrix} ml1'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml2'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml3'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ml4'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ml5'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml6'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml7'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml8'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml9'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml10'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ml11'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (ml0')^2 \end{bmatrix}$$

$$Xku := F \cdot Xl610 \cdot F^T =$$

	0	1	2	3	4
0	$4.16\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$
1	$1.757\cdot10^{-3}$	$3.542\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$1.781\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$
2	$2.054\cdot10^{-3}$	$1.756\cdot10^{-3}$	$4.159\cdot10^{-3}$	$2.082\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$
3	$2.083\cdot10^{-3}$	$1.781\cdot10^{-3}$	$2.082\cdot10^{-3}$	$4.222\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$
4	$2.054\cdot10^{-3}$	$1.757\cdot10^{-3}$	$2.054\cdot10^{-3}$	$2.083\cdot10^{-3}$	$4.159\cdot10^{-3}$
5	$2.062\cdot10^{-3}$	$1.763\cdot10^{-3}$	$2.061\cdot10^{-3}$	$2.09\cdot10^{-3}$	$2.062\cdot10^{-3}$
6	$1.885\cdot10^{-3}$	$1.611\cdot10^{-3}$	$1.885\cdot10^{-3}$	$1.91\cdot10^{-3}$	$1.885\cdot10^{-3}$
7	$1.99\cdot10^{-3}$	$1.701\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$	$2.017\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$
8	$2.048\cdot10^{-3}$	$1.751\cdot10^{-3}$	$2.047\cdot10^{-3}$	$2.076\cdot10^{-3}$	$2.048\cdot10^{-3}$
9	$1.99\cdot10^{-3}$	$1.701\cdot10^{-3}$	$1.989\cdot10^{-3}$	$2.017\cdot10^{-3}$	$1.99\cdot10^{-3}$
10	$1.908\cdot10^{-3}$	$1.631\cdot10^{-3}$	$1.907\cdot10^{-3}$	$1.934\cdot10^{-3}$	...

$$m0 := 2\cdot10^{-3}$$

$$Q := m0^{-2}\cdot Xku =$$

	0	1	2	3	4	5
0	$1.04\cdot10^{3}$	439.143	513.595	520.667	513.621	515.405
1	439.143	885.413	439.106	445.153	439.128	440.654
2	513.595	439.106	$1.04\cdot10^{3}$	520.624	513.578	515.362
3	520.667	445.153	520.624	$1.056\cdot10^{3}$	520.65	522.459
4	513.621	439.128	513.578	520.65	$1.04\cdot10^{3}$	515.388
5	515.405	440.654	515.362	522.459	515.388	$1.044\cdot10^{3}$
6	471.167	402.832	471.128	477.615	471.151	472.788
7	497.452	425.305	497.411	504.26	497.435	499.164
8	511.898	437.656	511.856	518.904	511.881	513.66
9	497.401	425.261	497.36	504.208	497.384	499.112
10	476.888	407.723	476.849	483.415	476.872	...

$P := Q^{-1} =$

	0	1	2	3	4
0	$1.734\cdot10^{-3}$	$-1.468\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$
1	$-1.468\cdot10^{-4}$	$1.831\cdot10^{-3}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$-1.483\cdot10^{-4}$	$-1.468\cdot10^{-4}$
2	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.467\cdot10^{-4}$	$1.734\cdot10^{-3}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$
3	$-1.681\cdot10^{-4}$	$-1.483\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$1.725\cdot10^{-3}$	$-1.681\cdot10^{-4}$
4	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.468\cdot10^{-4}$	$-1.663\cdot10^{-4}$	$-1.681\cdot10^{-4}$	$1.734\cdot10^{-3}$
5	$-1.668\cdot10^{-4}$	$-1.472\cdot10^{-4}$	$-1.668\cdot10^{-4}$	$-1.686\cdot10^{-4}$	$-1.668\cdot10^{-4}$
6	$-1.553\cdot10^{-4}$	$-1.37\cdot10^{-4}$	$-1.553\cdot10^{-4}$	$-1.57\cdot10^{-4}$	$-1.553\cdot10^{-4}$
7	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.431\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.639\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$
8	$-1.659\cdot10^{-4}$	$-1.464\cdot10^{-4}$	$-1.659\cdot10^{-4}$	$-1.677\cdot10^{-4}$	$-1.659\cdot10^{-4}$
9	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.431\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$	$-1.639\cdot10^{-4}$	$-1.622\cdot10^{-4}$
10	$-1.568\cdot10^{-4}$	$-1.384\cdot10^{-4}$	$-1.568\cdot10^{-4}$	$-1.585\cdot10^{-4}$	...

$W := A^{T}\cdot P\cdot L$

$N := A^{T}\cdot P\cdot A$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$$T := -N^{-1}\cdot W = \begin{pmatrix} 6.726\times10^{-3} \\ -7.981\times10^{-3} \\ 8.477\times10^{-3} \\ -0.015 \\ 7.031\times10^{-4} \\ -4.472\times10^{-3} \\ 0.011 \\ 9.82\times10^{-3} \end{pmatrix} \quad (м)$$

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x1pr + T_{0,0} \\ y1pr + T_{1,0} \\ x2pr + T_{2,0} \\ y2pr + T_{3,0} \\ x3pr + T_{4,0} \\ y3pr + T_{5,0} \\ x4pr + T_{6,0} \\ y4pr + T_{7,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240.002 \\ 519.999 \\ 339.998 \\ 449.993 \\ 350.006 \\ 569.991 \\ 250.009 \\ 630.004 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

$V := A\cdot T + L =$

	0
0	$-2.202\cdot10^{-5}$
1	$-1.045\cdot10^{-5}$
2	$1.35\cdot10^{-5}$
3	$6.151\cdot10^{-6}$
4	$4.096\cdot10^{-6}$
5	$-1.079\cdot10^{-5}$
6	$-1.285\cdot10^{-5}$
7	$2.296\cdot10^{-6}$
8	$-1.925\cdot10^{-6}$
9	$-1.161\cdot10^{-5}$
10	$-5.813\cdot10^{-6}$

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9865244
1	0.8434007
2	0.9865715
3	0.9999679
4	0.986394
5	0.9899048
6	0.9047545
7	0.9554276
8	0.9831173
9	0.9554081
10	0.9159687

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Уравнивание по ОМНК в программе Mathcad (2 цикл)

Координаты исходных точек

$xa := 250.000$ м $ya := 400.000$ м $x5 := 350.000$ м $y5 := 690.000$ м

$xb := 350.000$ м $yb := 330.000$ м $x6 := 230.000$ м $y6 := 740.000$ м

Истинные координаты определяемых точек (2 цикл наблюдений)

$x1 := 240 + 0.026 = 240.026$ м $y1 := 520 - 0.030 = 519.97$ м $x2 := 340 + 0.007 = 340.007$ м $y2 := 450 - 0.019 = 449.981$ м

$x3 := 350 + 0.010 = 350.01$ м $y3 := 570 + 0.013 = 570.013$ м $x4 := 250 - 0.003 = 249.997$ м $y4 := 630 - 0.026 = 629.974$ м

$l1ист := \sqrt{(x1 - xa)^2 + (y1 - ya)^2} = 120.384$ м $l6ист := \sqrt{(x3 - x1)^2 + (y3 - y1)^2} = 120.834$ м $l11ист := \sqrt{(x6 - x4)^2 + (y6 - y4)^2} = 111.828$ м

$l2ист := \sqrt{(x2 - xa)^2 + (y2 - ya)^2} = 102.953$ м $l7ист := \sqrt{(x4 - x1)^2 + (y4 - y1)^2} = 110.455$ м $b1 := \sqrt{(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2} = 122.066$ м

$l3ист := \sqrt{(x2 - xb)^2 + (y2 - yb)^2} = 120.396$ м $l8ист := \sqrt{(x3 - x4)^2 + (y3 - y4)^2} = 116.61$ м

$l4ист := \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = 122.044$ м $l9ист := \sqrt{(x5 - x3)^2 + (y5 - y3)^2} = 119.987$ м

$l5ист := \sqrt{(x3 - x2)^2 + (y3 - y2)^2} = 120.448$ м $l10ист := \sqrt{(x5 - x4)^2 + (y5 - y4)^2} = 116.635$ м

Измеренные расстояния

$l1' := (l1ист) + 0.05 - 0.007 = 120.427$ м $l6' := l6ист + 0.05 - 0.001 = 120.883$ м $l11' := (l11ист) + 0.05 + 0.005 = 111.88$ м

$l2' := l2ист + 0.05 + 0.003 = 103.006$ м $l7' := (l7ист) + 0.05 - 0.003 = 110.502$ м $l0' := (b1) + 0.05 - 0.003 = 122.11$ м

$l3' := l3ист + 0.05 - 0.006 = 120.44$ м $l8' := (l8ист) + 0.05 + 0.005 = 116.665$ м

$l4' := (l4ист) + 0.05 - 0.005 = 122.089$ м $l9' := (l9ист) + 0.05 - 0.002 = 120.035$ м

$l5' := l5ист + 0.05 + 0.005 = 120.503$ м $l10' := (l10ист) + 0.05 + 0.008 = 116.6$ м

$ml1' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l1' \cdot 1000 = 5.60$ мм $ml7' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l7' \cdot 1000 = 5.553$ мм

$ml2' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l2' \cdot 1000 = 5.51$ мм $ml8' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l8' \cdot 1000 = 5.583$ мм

$ml3' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l3' \cdot 1000 = 5.60$ мм $ml9' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l9' \cdot 1000 = 5.6$ мм

$ml4' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l4' \cdot 1000 = 5.61$ мм $ml10' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l10' \cdot 1000 = 5.58$ мм

$ml5' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l5' \cdot 1000 = 5.60$ мм $ml11' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l11' \cdot 1000 = 5.5$ мм

$ml6' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l6' \cdot 1000 = 5.60$ мм $ml0' := 5 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot l0' \cdot 1000 = 5.61$ мм

Нормирование измеренных расстояний относительно l0'

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.986196$ $k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.989928$ $k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.916232$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 0.843535$ $k7' := \frac{l7'}{l0'} = 0.904919$ $k0' := \frac{l0'}{l0'}$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.986307$ $k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.95539$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 1$ $k9' := \frac{l9'}{l0'} = 0.982987$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 0.98682$ $k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.955618$

Предварительные значения координат искомых точек

$x1pr := 239.997$ м $y1pr := 520.001$ м $x3pr := 350.004$ м $y3pr := 569.990$ м

$x2pr := 339.993$ м $y2pr := 449.993$ м $x4pr := 250.008$ м $y4pr := 630.005$ м

$$l1pr := \sqrt{(x1pr - xa)^2 + (y1pr - ya)^2} = 120.417 \text{ м}$$
$$l2pr := \sqrt{(x2pr - xa)^2 + (y2pr - ya)^2} = 102.947 \text{ м}$$
$$l3pr := \sqrt{(x2pr - xb)^2 + (y2pr - yb)^2} = 120.41 \text{ м}$$
$$l4pr := \sqrt{(x2pr - x1pr)^2 + (y2pr - y1pr)^2} = 122.067 \text{ м}$$
$$l5pr := \sqrt{(x3pr - x2pr)^2 + (y3pr - y2pr)^2} = 120.414 \text{ м}$$
$$l6pr := \sqrt{(x1pr - x3pr)^2 + (y1pr - y3pr)^2} = 120.832 \text{ м}$$
$$l7pr := \sqrt{(x4pr - x1pr)^2 + (y4pr - y1pr)^2} = 110.459 \text{ м}$$
$$l8pr := \sqrt{(x3pr - x4pr)^2 + (y3pr - y4pr)^2} = 116.623 \text{ м}$$
$$l9pr := \sqrt{(x5 - x3pr)^2 + (y5 - y3pr)^2} = 120.01 \text{ м}$$
$$l10pr := \sqrt{(x5 - x4pr)^2 + (y5 - y4pr)^2} = 116.61 \text{ м}$$
$$l11pr := \sqrt{(x6 - x4pr)^2 + (y6 - y4pr)^2} = 111.8 \text{ м}$$

$$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.986496 \quad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.989897 \quad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.915901$$
$$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 0.843373 \quad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 0.904912$$
$$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.986433 \quad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.955416$$
$$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 1.000011 \quad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 0.98316$$
$$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 0.986469 \quad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.955303$$

Дирекционные углы

$$\alpha a1 := \operatorname{atan}\left(\frac{y1pr - ya}{x1pr - xa}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b1 := \alpha a1 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.765$$
$$\alpha a2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - ya}{x2pr - xa}\right) = 0.507 \qquad a'a2 := \alpha a2 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.053$$
$$\alpha b2 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - yb}{x2pr - xb}\right) + \pi = 1.654 \qquad a'b2 := \alpha b2 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.767$$
$$\alpha 12 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2pr - y1pr}{x2pr - x1pr}\right) + 2\pi = 5.672 \qquad a'12 := \alpha 12 \cdot \frac{180}{\pi} = 325.004$$
$$\alpha 23 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y2pr}{x3pr - x2pr}\right) = 1.488 \qquad a'23 := \alpha 23 \cdot \frac{180}{\pi} = 85.231$$
$$\alpha 13 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y1pr}{x3pr - x1pr}\right) = 0.427 \qquad a'13 := \alpha 13 \cdot \frac{180}{\pi} = 24.438$$
$$\alpha 14 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y1pr}{x4pr - x1pr}\right) = 1.48 \qquad a'14 := \alpha 14 \cdot \frac{180}{\pi} = 84.8$$
$$\alpha 43 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y4pr}{x3pr - x4pr}\right) + 2\pi = 5.743 \qquad a'43 := \alpha 43 \cdot \frac{180}{\pi} = 329.029$$
$$\alpha 35 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y3pr}{x5 - x3pr}\right) + \pi = 1.571 \qquad a'35 := \alpha 35 \cdot \frac{180}{\pi} = 90.002$$
$$\alpha 45 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5 - y4pr}{x5 - x4pr}\right) = 0.54 \qquad a'45 := \alpha 45 \cdot \frac{180}{\pi} = 30.964$$
$$\alpha 46 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6 - y4pr}{x6 - x4pr}\right) + \pi = 1.751 \qquad a'46 := \alpha 46 \cdot \frac{180}{\pi} = 100.309$$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поповок

$$a11 := \frac{\cos(\alpha a1)}{b1} \qquad a12 := \frac{\sin(\alpha a1)}{b1}$$
$$a23 := \frac{\cos(\alpha a2)}{b1} \qquad a24 := \frac{\sin(\alpha a2)}{b1}$$
$$a33 := \frac{\cos(\alpha b2)}{b1} \qquad a34 := \frac{\sin(\alpha b2)}{b1}$$
$$a41 := \frac{-\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a42 := \frac{-\sin(\alpha 12)}{b1} \qquad a43 := \frac{\cos(\alpha 12)}{b1} \qquad a44 := \frac{\sin(\alpha 12)}{b1}$$
$$a53 := \frac{-\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a54 := \frac{-\sin(\alpha 23)}{b1} \qquad a55 := \frac{\cos(\alpha 23)}{b1} \qquad a56 := \frac{\sin(\alpha 23)}{b1}$$
$$a61 := \frac{-\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a62 := \frac{-\sin(\alpha 13)}{b1} \qquad a65 := \frac{\cos(\alpha 13)}{b1} \qquad a66 := \frac{\sin(\alpha 13)}{b1}$$
$$a71 := \frac{-\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a72 := \frac{-\sin(\alpha 14)}{b1} \qquad a77 := \frac{\cos(\alpha 14)}{b1} \qquad a78 := \frac{\sin(\alpha 14)}{b1}$$
$$a85 := \frac{\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a86 := \frac{\sin(\alpha 43)}{b1} \qquad a87 := \frac{-\cos(\alpha 43)}{b1} \qquad a88 := \frac{-\sin(\alpha 43)}{b1}$$
$$a95 := \frac{-\cos(\alpha 35)}{b1} \qquad a96 := \frac{-\sin(\alpha 35)}{b1}$$
$$a107 := \frac{-\cos(\alpha 45)}{b1} \qquad a108 := \frac{-\sin(\alpha 45)}{b1} = -4.215 \times 10^{-3}$$
$$a117 := \frac{-\cos(\alpha 46)}{b1} \qquad a118 := \frac{-\sin(\alpha 46)}{b1}$$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\ a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\ a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118 \end{pmatrix} =$$

	0	1	2	3	4
0	$-6.805\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0	0	0
1	0	0	$7.161\cdot10^{-3}$	$3.978\cdot10^{-3}$	0
2	0	0	$-6.808\cdot10^{-4}$	$8.164\cdot10^{-3}$	0
3	$-6.711\cdot10^{-3}$	$4.698\cdot10^{-3}$	$6.711\cdot10^{-3}$	$-4.698\cdot10^{-3}$	0
4	0	0	$-6.811\cdot10^{-4}$	$-8.164\cdot10^{-3}$	$6.811\cdot10^{-4}$
5	$-7.458\cdot10^{-3}$	$-3.389\cdot10^{-3}$	0	0	$7.458\cdot10^{-3}$
6	$-7.425\cdot10^{-4}$	$-8.159\cdot10^{-3}$	0	0	0
7	0	0	0	0	$7.024\cdot10^{-3}$
8	0	0	0	0	$2.731\cdot10^{-7}$
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	...

$$L := \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11' \end{pmatrix} =$$

	0
0	$3.003\cdot10^{-4}$
1	$-1.619\cdot10^{-4}$
2	$1.268\cdot10^{-4}$
3	$2.062\cdot10^{-4}$
4	$-3.509\cdot10^{-4}$
5	$-3.185\cdot10^{-5}$
6	$-6.97\cdot10^{-6}$
7	$2.542\cdot10^{-5}$
8	$1.737\cdot10^{-4}$
9	$-3.152\cdot10^{-4}$
10	$-3.315\cdot10^{-4}$

$$F := \begin{bmatrix} \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11'}{(10')^2} \\ 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-13'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-14'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-15'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-16'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-17'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & 0 & \frac{-18'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & 0 & \frac{-19'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & 0 & \frac{-110'}{(10')^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10'} & \frac{-111'}{(10')^2} \end{bmatrix}$$

$$Xl610 := \begin{bmatrix} m11'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m12'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m13'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m14'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m15'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m16'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m17'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m18'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m19'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m110'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m111'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (m10')^2 \end{bmatrix}$$

$m0 := 5$

$$Q := m0^{-2} \cdot Xku =$$

	0	1	2	3	4
0	$1.663\cdot10^{-4}$	$7.025\cdot10^{-5}$	$8.213\cdot10^{-5}$	$8.326\cdot10^{-5}$	$8.218\cdot10^{-5}$
1	$7.025\cdot10^{-5}$	$1.417\cdot10^{-4}$	$7.025\cdot10^{-5}$	$7.121\cdot10^{-5}$	$7.029\cdot10^{-5}$
2	$8.213\cdot10^{-5}$	$7.025\cdot10^{-5}$	$1.663\cdot10^{-4}$	$8.327\cdot10^{-5}$	$8.219\cdot10^{-5}$
3	$8.326\cdot10^{-5}$	$7.121\cdot10^{-5}$	$8.327\cdot10^{-5}$	$1.688\cdot10^{-4}$	$8.331\cdot10^{-5}$
4	$8.218\cdot10^{-5}$	$7.029\cdot10^{-5}$	$8.219\cdot10^{-5}$	$8.331\cdot10^{-5}$	$1.664\cdot10^{-4}$
5	$8.244\cdot10^{-5}$	$7.051\cdot10^{-5}$	$8.245\cdot10^{-5}$	$8.357\cdot10^{-5}$	$8.249\cdot10^{-5}$
6	$7.536\cdot10^{-5}$	$6.446\cdot10^{-5}$	$7.537\cdot10^{-5}$	$7.64\cdot10^{-5}$	$7.54\cdot10^{-5}$
7	$7.956\cdot10^{-5}$	$6.805\cdot10^{-5}$	$7.957\cdot10^{-5}$	$8.066\cdot10^{-5}$	$7.961\cdot10^{-5}$
8	$8.186\cdot10^{-5}$	$7.002\cdot10^{-5}$	$8.187\cdot10^{-5}$	$8.299\cdot10^{-5}$	$8.191\cdot10^{-5}$
9	$7.958\cdot10^{-5}$	$6.807\cdot10^{-5}$	$7.959\cdot10^{-5}$	$8.068\cdot10^{-5}$	$7.963\cdot10^{-5}$
10	$7.63\cdot10^{-5}$	$6.526\cdot10^{-5}$	$7.631\cdot10^{-5}$	$7.735\cdot10^{-5}$	...

$P := Q^{-1} =$

	0	1	2	3	4
0	$1.084\cdot10^4$	-917.135	$-1.039\cdot10^3$	$-1.05\cdot10^3$	$-1.04\cdot10^3$
1	-917.135	$1.145\cdot10^4$	-917.216	-927.038	-917.59
2	$-1.039\cdot10^3$	-917.216	$1.084\cdot10^4$	$-1.05\cdot10^3$	$-1.04\cdot10^3$
3	$-1.05\cdot10^3$	-927.038	$-1.05\cdot10^3$	$1.078\cdot10^4$	$-1.051\cdot10^3$
4	$-1.04\cdot10^3$	-917.59	$-1.04\cdot10^3$	$-1.051\cdot10^3$	$1.084\cdot10^4$
5	$-1.042\cdot10^3$	-919.857	$-1.042\cdot10^3$	$-1.053\cdot10^3$	$-1.043\cdot10^3$
6	-970.638	-856.659	-970.723	-981.119	-971.12
7	$-1.013\cdot10^3$	-894.483	$-1.014\cdot10^3$	$-1.024\cdot10^3$	$-1.014\cdot10^3$
8	$-1.037\cdot10^3$	-914.79	$-1.037\cdot10^3$	$-1.048\cdot10^3$	$-1.037\cdot10^3$
9	$-1.014\cdot10^3$	-894.652	$-1.014\cdot10^3$	$-1.025\cdot10^3$	$-1.014\cdot10^3$
10	-980.332	-865.215	-980.418	-990.918	...

$W := A^T \cdot P \cdot L$

$N := A^T \cdot P \cdot A$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$$T := -N^{-1} \cdot W = \begin{pmatrix} 0.044 \\ -0.04 \\ 0.027 \\ -0.016 \\ 0.015 \\ 0.025 \\ -0.016 \\ -0.039 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x1pr + T_{0,0} \\ y1pr + T_{1,0} \\ x2pr + T_{2,0} \\ y2pr + T_{3,0} \\ x3pr + T_{4,0} \\ y3pr + T_{5,0} \\ x4pr + T_{6,0} \\ y4pr + T_{7,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240.041 \\ 519.961 \\ 340.02 \\ 449.977 \\ 350.019 \\ 570.015 \\ 249.992 \\ 629.966 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

$V := A \cdot T + L =$

	0
0	$-5.431\cdot10^{-5}$
1	$-3.293\cdot10^{-5}$
2	$-2.022\cdot10^{-5}$
3	$-2.498\cdot10^{-5}$
4	$-2.734\cdot10^{-5}$
5	$-3.556\cdot10^{-5}$
6	$-4.564\cdot10^{-5}$
7	$-2.826\cdot10^{-5}$
8	$-3.009\cdot10^{-5}$
9	$-3.821\cdot10^{-5}$
10	$-4.109\cdot10^{-5}$

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9864418
1	0.84334
2	0.9864133
3	0.9999858
4	0.9864415
5	0.9898611
6	0.9048664
7	0.9553873
8	0.9831301
9	0.9552649
10	0.9158595

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Уравнивание линейно-угловой сети в программе Mathcad

Координаты исходных точек

$xa := 250.000$ м $\quad ya := 400.000$ м $\quad x5 := 350.00$ м $\quad y5 := 690.000$ м

$xb := 350.000$ м $\quad yb := 330.000$ м $\quad x6 := 230.00$ м $\quad y6 := 740.000$ м

Истинные координаты определяемых точек

$x1 := 240.000$ м $\quad y1 := 520.000$ м $\quad x2 := 340.00$ м $\quad y2 := 450.000$ м

$x3 := 350.000$ м $\quad y3 := 570.000$ м $\quad x4 := 250.00$ м $\quad y4 := 630.000$ м

$$l1\text{ист} := \sqrt{(x1-xa)^2+(y1-ya)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l2\text{ист} := \sqrt{(x2-xa)^2+(y2-ya)^2} = 102.956 \text{ м}$$

$$l3\text{ист} := \sqrt{(x2-xb)^2+(y2-yb)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l4\text{ист} := \sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2} = 122.066 \text{ м}$$

$$l5\text{ист} := \sqrt{(x3-x2)^2+(y3-y2)^2} = 120.416 \text{ м}$$

$$l6\text{ист} := \sqrt{(x3-x1)^2+(y3-y1)^2} = 120.83 \text{ м}$$

$$l7\text{ист} := \sqrt{(x4-x1)^2+(y4-y1)^2} = 110.454 \text{ м}$$

$$l8\text{ист} := \sqrt{(x3-x4)^2+(y3-y4)^2} = 116.619 \text{ м}$$

$$l9\text{ист} := \sqrt{(x5-x3)^2+(y5-y3)^2} = 120 \text{ м}$$

$$l10\text{ист} := \sqrt{(x5-x4)^2+(y5-y4)^2} = 116.619 \text{ м}$$

$$l11\text{ист} := \sqrt{(x6-x4)^2+(y6-y4)^2} = 111.803 \text{ м}$$

$$b1 := \sqrt{(xa-xb)^2+(ya-yb)^2} = 122.066 \text{ м}$$

Измеренные расстояния

$$l1' := (l1\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.003 = 120.467 \text{ м}$$

$$l2' := (l2\text{ист})\cdot 1.0004 - 0.008 = 102.989 \text{ м}$$

$$l3' := (l3\text{ист})\cdot 1.0004 - 0.007 = 120.457 \text{ м}$$

$$l4' := (l4\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.002 = 122.116 \text{ м}$$

$$l5' := (l5\text{ист})\cdot 1.0004 - 0.001 = 120.463 \text{ м}$$

$$l6' := (l6\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.003 = 120.882 \text{ м}$$

$$l7' := (l7\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.005 = 110.503 \text{ м}$$

$$l8' := (l8\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.004 = 116.67 \text{ м}$$

$$l9' := (l9\text{ист})\cdot 1.0004 + 0.011 = 120.059 \text{ м}$$

$$l10' := (l10\text{ист})\cdot 1.0004 - 0.008 = 116.658 \text{ м}$$

$$l11' := (l11\text{ист})\cdot 1.0004 - 0.003 = 111.845 \text{ м}$$

$$l0' := (b1)\cdot 1.0004 + 0.002 = 122.116 \text{ м}$$

Ошибки измерения расстояний

$$ml1' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l1'\cdot 1000 = 5.602 \text{ мм}$$

$$ml2' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l2'\cdot 1000 = 5.515 \text{ мм}$$

$$ml3' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l3'\cdot 1000 = 5.602 \text{ мм}$$

$$ml4' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l4'\cdot 1000 = 5.611 \text{ мм}$$

$$ml5' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l5'\cdot 1000 = 5.602 \text{ мм}$$

$$ml6' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l6'\cdot 1000 = 5.604 \text{ мм}$$

$$ml7' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l7'\cdot 1000 = 5.553 \text{ мм}$$

$$ml8' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l8'\cdot 1000 = 5.583 \text{ мм}$$

$$ml9' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l9'\cdot 1000 = 5.6 \text{ мм}$$

$$ml10' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l10'\cdot 1000 = 5.583 \text{ мм}$$

$$ml11' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l11'\cdot 1000 = 5.559 \text{ мм}$$

$$ml0' := 5 + 5\cdot 10^{-6}\cdot l0'\cdot 1000 = 5.611 \text{ мм}$$

Измеренные углы

$$\beta 1' := 65 + \frac{42}{60} + \frac{32+17}{3600}$$

$$\beta 2' := 50 + \frac{14}{60} + \frac{40-24}{3600}$$

$$\beta 3' := 64 + \frac{02}{60} + \frac{48-6}{3600}$$

$$\beta 4' := 65 + \frac{42}{60} + \frac{32+12}{3600}$$

$$\beta 5' := 50 + \frac{14}{60} + \frac{40+35}{3600}$$

$$\beta 6' := 64 + \frac{02}{60} + \frac{48-17}{3600}$$

$$\beta 7' := 59 + \frac{46}{60} + \frac{18+16}{3600}$$

$$\beta 8' := 60 + \frac{47}{60} + \frac{33+10}{3600}$$

$$\beta 9' := 59 + \frac{26}{60} + \frac{09-12}{3600}$$

$$\beta 10' := 55 + \frac{24}{60} + \frac{28-7}{3600}$$

$$\beta 11' := 60 + \frac{21}{60} + \frac{42-14}{3600}$$

$$\beta 12' := 64 + \frac{13}{60} + \frac{50+10}{3600}$$

$$\beta 13' := 59 + \frac{02}{60} + \frac{10-18}{3600}$$

$$\beta 14' := 61 + \frac{55}{60} + \frac{40+7}{3600}$$

$$\beta 15' := 59 + \frac{02}{60} + \frac{10-31}{3600}$$

$$\beta 16' := 69 + \frac{20}{60} + \frac{27+8}{3600}$$

$$\beta 17' := 53 + \frac{35}{60} + \frac{02-13}{3600}$$

$$\beta 18' := 57 + \frac{04}{60} + \frac{31+19}{3600}$$

исправленные (с учетом поправок)

$$\beta1 := \left(65 + \frac{42}{60} + \frac{32+17-12}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta7 := \left(59 + \frac{46}{60} + \frac{18+16-5}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta13 := \left(59 + \frac{02}{60} + \frac{10-18+14}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\beta2 := \left(50 + \frac{14}{60} + \frac{40-24+6}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta8 := \left(60 + \frac{47}{60} + \frac{33+10-5}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta14 := \left(61 + \frac{55}{60} + \frac{40+7+14}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\beta3 := \left(64 + \frac{02}{60} + \frac{48-6+6}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta9 := \left(59 + \frac{26}{60} + \frac{09-12-4}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta15 := \left(59 + \frac{02}{60} + \frac{10-31+14}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\beta4 := \left(65 + \frac{42}{60} + \frac{32+12+6}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta10 := \left(55 + \frac{24}{60} + \frac{28-7+4}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta16 := \left(69 + \frac{20}{60} + \frac{27+8-5}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\beta5 := \left(50 + \frac{14}{60} + \frac{40+35-11}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta11 := \left(60 + \frac{21}{60} + \frac{42-14+4}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta17 := \left(53 + \frac{35}{60} + \frac{02-13-5}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\beta6 := \left(64 + \frac{02}{60} + \frac{48-17-11}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta12 := \left(64 + \frac{13}{60} + \frac{50+10+3}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180} \qquad \beta18 := \left(57 + \frac{04}{60} + \frac{31+19-4}{3600}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$t1 := \frac{\sin(\beta5)}{\sin(\beta2)} = 1.000169$ $\quad K4 := \frac{\sin(\beta1)}{t1} = 0.911323$ $\quad t2 := \frac{\sin(\beta8)}{K4} = 0.957806$ $\quad K5 := \frac{\sin(\beta9)}{t2} = 0.898951$

$K0 := \sin(\beta4) = 0.911503$ $\quad t3 := \frac{\sin(\beta12)}{K6} = 0.998294$ $\quad K6 := \frac{\sin(\beta7)}{t2} = 0.902117$

$K2 := \sin(\beta2) = 0.768724$

$K3 := \sin(\beta3) = 0.899151$ $\quad K7 := \frac{\sin(\beta10)}{t3} = 0.824612$ $\quad K8 := \frac{\sin(\beta11)}{t3} = 0.870625$

$K1 := \frac{\sin(\beta6)}{t1} = 0.898939$ $\quad t4 := \frac{\sin(\beta15)}{K8} = 0.984866$ $\quad K10 := \frac{\sin(\beta13)}{t4} = 0.870658$

$K9 := \frac{\sin(\beta14)}{t4} = 0.895963$ $\quad t5 := \frac{\sin(\beta18)}{K10} = 0.964127$

$K11 := \frac{\sin(\beta17)}{t5} = 0.834616$

Нормированные значения коэффициентов отношений, полученных по угловым измерениям

$d1 := \frac{K1}{K0} = 0.986216$ $\quad d7 := \frac{K7}{K0} = 0.904673$

$d2 := \frac{K2}{K0} = 0.843359$ $\quad d8 := \frac{K8}{K0} = 0.955154$

$d3 := \frac{K3}{K0} = 0.986449$ $\quad d9 := \frac{K9}{K0} = 0.982951$

$d4 := \frac{K4}{K0} = 0.999802$ $\quad d10 := \frac{K10}{K0} = 0.95519$

$d5 := \frac{K5}{K0} = 0.98623$ $\quad d11 := \frac{K11}{K0} = 0.915648$

$d6 := \frac{K6}{K0} = 0.989703$

Нормирование измеренных расстояний относительно l0'

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.986494$ $\quad k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.98989$ $\quad k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.91589$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 0.843372$ $\quad k7' := \frac{l7'}{l0'} = 0.904897$ $\quad k0' := \frac{l0'}{l0'}$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.986412$ $\quad k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.955397$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 1$ $\quad k9' := \frac{l9'}{l0'} = 0.983152$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 0.986462$ $\quad k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.955299$

Предварительные значения координат искомых точек

$x1pr := 239.995$ $\quad y1pr := 520.007$ $\quad x3pr := 350.005$ $\quad y3pr := 569.995$

$x2pr := 339.990$ $\quad y2pr := 450.008$ $\quad x4pr := 249.998$ $\quad y4pr := 629.994$

$$l1pr := \sqrt{(x1pr - xa)^2 + (y1pr - ya)^2} = 120.423$$

$$l2pr := \sqrt{(x2pr - xa)^2 + (y2pr - ya)^2} = 102.951$$

$$l3pr := \sqrt{(x2pr - xb)^2 + (y2pr - yb)^2} = 120.425$$

$$l4pr := \sqrt{(x2pr - x1pr)^2 + (y2pr - y1pr)^2} = 122.061$$

$$l5pr := \sqrt{(x3pr - x2pr)^2 + (y3pr - y2pr)^2} = 120.404$$

$$l6pr := \sqrt{(x1pr - x3pr)^2 + (y1pr - y3pr)^2} = 120.835$$

$$l7pr := \sqrt{(x4pr - x1pr)^2 + (y4pr - y1pr)^2} = 110.441$$

$$l8pr := \sqrt{(x3pr - x4pr)^2 + (y3pr - y4pr)^2} = 116.625$$

$$l9pr := \sqrt{(x5 - x3pr)^2 + (y5 - y3pr)^2} = 120.005$$

$$l10pr := \sqrt{(x5 - x4pr)^2 + (y5 - y4pr)^2} = 116.624$$

$$l11pr := \sqrt{(x6 - x4pr)^2 + (y6 - y4pr)^2} = 111.809$$

$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.986546$ $\quad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.989916$ $\quad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.915975$

$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 0.843411$ $\quad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 0.904767$

$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.986558$ $\quad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.955425$

$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 0.999962$ $\quad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 0.983119$

$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 0.98639$ $\quad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.95542$

$\alpha a1 := atan\left(\frac{y1pr - ya}{x1pr - xa}\right) + \pi = 1.654$ $\quad a'b1 := \alpha a1 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.766$

$\alpha a2 := atan\left(\frac{y2pr - ya}{x2pr - xa}\right) = 0.507$ $\quad a'a2 := \alpha a2 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.061$

$\alpha b2 := atan\left(\frac{y2pr - yb}{x2pr - xb}\right) + \pi = 1.654$ $\quad a'b2 := \alpha b2 \cdot \frac{180}{\pi} = 94.768$

$\alpha 12 := atan\left(\frac{y2pr - y1pr}{x2pr - x1pr}\right) + 2\pi = 5.672$ $\quad a'12 := \alpha 12 \cdot \frac{180}{\pi} = 325.007$

$\alpha 23 := atan\left(\frac{y3pr - y2pr}{x3pr - x2pr}\right) = 1.488$ $\quad a'23 := \alpha 23 \cdot \frac{180}{\pi} = 85.229$

$\alpha 13 := atan\left(\frac{y3pr - y1pr}{x3pr - x1pr}\right) = 0.427$ $\quad a'13 := \alpha 13 \cdot \frac{180}{\pi} = 24.437$

$\alpha 14 := atan\left(\frac{y4pr - y1pr}{x4pr - x1pr}\right) = 1.48$ $\quad a'14 := \alpha 14 \cdot \frac{180}{\pi} = 84.803$

$\alpha 43 := atan\left(\frac{y3pr - y4pr}{x3pr - x4pr}\right) + 2\pi = 5.743$ $\quad a'43 := \alpha 43 \cdot \frac{180}{\pi} = 329.038$

$\alpha 35 := atan\left(\frac{y5 - y3pr}{x5 - x3pr}\right) + \pi = 1.571$ $\quad a'35 := \alpha 35 \cdot \frac{180}{\pi} = 90.002$

$\alpha 45 := atan\left(\frac{y5 - y4pr}{x5 - x4pr}\right) = 0.54$ $\quad a'45 := \alpha 45 \cdot \frac{180}{\pi} = 30.966$

$\alpha 46 := atan\left(\frac{y6 - y4pr}{x6 - x4pr}\right) + \pi = 1.751$ $\quad a'46 := \alpha 46 \cdot \frac{180}{\pi} = 100.303$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поправок

$a11 := \frac{\cos(\alpha a1)}{b1}$ $\quad a12 := \frac{\sin(\alpha a1)}{b1}$

$a23 := \frac{\cos(\alpha a2)}{b1}$ $\quad a24 := \frac{\sin(\alpha a2)}{b1}$

$a33 := \frac{\cos(\alpha b2)}{b1}$ $\quad a34 := \frac{\sin(\alpha b2)}{b1}$

$a41 := \frac{-\cos(\alpha 12)}{b1}$ $\quad a42 := \frac{-\sin(\alpha 12)}{b1}$ $\quad a43 := \frac{\cos(\alpha 12)}{b1}$ $\quad a44 := \frac{\sin(\alpha 12)}{b1}$

$a53 := \frac{-\cos(\alpha 23)}{b1}$ $\quad a54 := \frac{-\sin(\alpha 23)}{b1}$ $\quad a55 := \frac{\cos(\alpha 23)}{b1}$ $\quad a56 := \frac{\sin(\alpha 23)}{b1}$

$a61 := \frac{-\cos(\alpha 13)}{b1}$ $\quad a62 := \frac{-\sin(\alpha 13)}{b1}$ $\quad a65 := \frac{\cos(\alpha 13)}{b1}$ $\quad a66 := \frac{\sin(\alpha 13)}{b1}$

$a71 := \frac{-\cos(\alpha 14)}{b1}$ $\quad a72 := \frac{-\sin(\alpha 14)}{b1}$ $\quad a77 := \frac{\cos(\alpha 14)}{b1}$ $\quad a78 := \frac{\sin(\alpha 14)}{b1}$

$a85 := \frac{\cos(\alpha 43)}{b1}$ $\quad a86 := \frac{\sin(\alpha 43)}{b1}$ $\quad a87 := \frac{-\cos(\alpha 43)}{b1}$ $\quad a88 := \frac{-\sin(\alpha 43)}{b1}$

$a95 := \frac{-\cos(\alpha 35)}{b1}$ $\quad a96 := \frac{-\sin(\alpha 35)}{b1}$

$a107 := \frac{-\cos(\alpha 45)}{b1}$ $\quad a108 := \frac{-\sin(\alpha 45)}{b1} = -4.215 \times 10^{-3}$

$a117 := \frac{-\cos(\alpha 46)}{b1}$ $\quad a118 := \frac{-\sin(\alpha 46)}{b1}$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\ a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\ a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118 \\ a11 & a12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a23 & a24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 \\ a61 & a62 & 0 & 0 & a65 & a66 & 0 & 0 \\ a71 & a72 & 0 & 0 & 0 & 0 & a77 & a78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & a87 & a88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a95 & a96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a117 & a118 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11' \\ k1pr - d1 \\ k2pr - d2 \\ k3pr - d3 \\ k4pr - d4 \\ k5pr - d5 \\ k6pr - d6 \\ k7pr - d7 \\ k8pr - d8 \\ k9pr - d9 \\ k10pr - d10 \\ k11pr - d11 \end{pmatrix} =$$

	0
0	$5.214\cdot10^{-5}$
1	$3.955\cdot10^{-5}$
2	$1.456\cdot10^{-4}$
3	$-3.825\cdot10^{-5}$
4	$-7.157\cdot10^{-5}$
5	$2.555\cdot10^{-5}$
6	$-1.3\cdot10^{-4}$
7	$2.785\cdot10^{-5}$
8	$-3.302\cdot10^{-5}$
9	$1.205\cdot10^{-4}$
10	$8.5\cdot10^{-5}$
11	$3.301\cdot10^{-4}$
12	$5.238\cdot10^{-5}$
13	$1.095\cdot10^{-4}$
14	$1.595\cdot10^{-4}$
15	...

F :=

C:\User...\матрица.ru.mb=17.xls

F =

	0	1	2	3	4
0	$8.19\cdot10^{-3}$	0	0	0	0
1	0	$8.19\cdot10^{-3}$	0	0	0
2	0	0	$8.19\cdot10^{-3}$	0	0
3	0	0	0	$8.19\cdot10^{-3}$	0
4	0	0	0	0	$8.19\cdot10^{-3}$
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

$$p := (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

$$P := \mathrm{diag}\left(p^T\right)$$

$$W := A^T \cdot P \cdot L$$

$$N := A^T \cdot P \cdot A$$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$$T := -N^{-1} \cdot W = \begin{pmatrix} 9.364 \times 10^{-3} \\ -6.715 \times 10^{-3} \\ -1.283 \times 10^{-4} \\ -6.472 \times 10^{-3} \\ -0.012 \\ -2.58 \times 10^{-4} \\ 0.014 \\ 0.012 \end{pmatrix} \quad (м)$$

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

V := A·T + L =

	0
0	$-9.058\cdot10^{-6}$
1	$1.288\cdot10^{-5}$
2	$9.286\cdot10^{-5}$
3	$-1.031\cdot10^{-4}$
4	$-2.924\cdot10^{-5}$
5	$-1.153\cdot10^{-4}$
6	$2.426\cdot10^{-5}$
7	$-1.073\cdot10^{-4}$
8	$-3.091\cdot10^{-5}$
9	$-2.741\cdot10^{-5}$
10	$1.067\cdot10^{-5}$
11	$2.689\cdot10^{-4}$
12	$2.57\cdot10^{-5}$
13	$5.671\cdot10^{-5}$
14	$9.47\cdot10^{-5}$
15	...

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x1pr + T_{0,0} \\ y1pr + T_{1,0} \\ x2pr + T_{2,0} \\ y2pr + T_{3,0} \\ x3pr + T_{4,0} \\ y3pr + T_{5,0} \\ x4pr + T_{6,0} \\ y4pr + T_{7,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240.004 \\ 520 \\ 339.99 \\ 450.002 \\ 349.993 \\ 569.995 \\ 250.012 \\ 630.006 \end{pmatrix} \ (\text{м})$$

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \\ k1pr + V_{11,0} \\ k2pr + V_{12,0} \\ k3pr + V_{13,0} \\ k4pr + V_{14,0} \\ k5pr + V_{15,0} \\ k6pr + V_{16,0} \\ k7pr + V_{17,0} \\ k8pr + V_{18,0} \\ k9pr + V_{19,0} \\ k10pr + V_{20,0} \\ k11pr + V_{21,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9865374
1	0.843424
2	0.9866508
3	0.9998586
4	0.9863607
5	0.9898003
6	0.9047917
7	0.955318
8	0.9830884
9	0.9553923
10	0.9159852
11	0.9868154
12	0.8434368
13	0.9866147
14	1.0000564
15	...

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Уравнивание экспериментальной линейно-угловой сети по ОМНК в программе Mathcad

Координаты исходных точек

$x1 := 670573.086$ м $y1 := 692512.011$ м

$x2 := 670613.320$ м $y2 := 692594.558$ м

$x7 := 670720.939$ м $y7 := 692729.154$ м

Измеренные расстояния

$l1' := 86.820$ м $l6' := 76.549$ м $l11' := 80.816$ м

$l2' := 129.225$ м $l7' := 107.140$ м $l16' := 110.751$ м

$l3' := 77.049$ м $l8' := 84.127$ м $l0' := 91.830$ м

$l4' := 79.673$ м $l9' := 128.818$ м $b1 := \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = 91.83$ м

$l5' := 133.658$ м $l10' := 88.328$ м

Ошибка измерения расстояния

$ml1' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l1' \cdot 1000 = 2.174$ мм $ml7' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l7' \cdot 1000 = 2.214$ мм $ml16' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l16' \cdot 1000 = 2.222$ мм

$ml2' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l2' \cdot 1000 = 2.258$ мм $ml8' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l8' \cdot 1000 = 2.168$ мм

$ml3' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l3' \cdot 1000 = 2.154$ мм $ml9' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l9' \cdot 1000 = 2.258$ мм

$ml4' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l4' \cdot 1000 = 2.159$ мм $ml10' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l10' \cdot 1000 = 2.177$ мм

$ml5' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l5' \cdot 1000 = 2.267$ мм $ml11' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l11' \cdot 1000 = 2.162$ мм

$ml6' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l6' \cdot 1000 = 2.153$ мм $ml0' := 2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot l0' \cdot 1000 = 2.184$ мм

Измеренные значения углов

$\beta1' := \left(35 + \frac{21}{60} + \frac{15.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta7' := \left(117 + \frac{02}{60} + \frac{10.5}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta13' := \left(106 + \frac{29}{60} + \frac{48.4}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta2' := \left(78 + \frac{39}{60} + \frac{31.5}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta8' := \left(30 + \frac{53}{60} + \frac{35.7}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta14' := \left(38 + \frac{46}{60} + \frac{05.9}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta3' := \left(44 + \frac{10}{60} + \frac{06.2}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta9' := \left(32 + \frac{04}{60} + \frac{04.4}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta15' := \left(34 + \frac{44}{60} + \frac{07.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta4' := \left(57 + \frac{10}{60} + \frac{20.3}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta10' := \left(53 + \frac{14}{60} + \frac{30.1}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta16' := \left(38 + \frac{16}{60} + \frac{33}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta5' := \left(103 + \frac{57}{60} + \frac{01.5}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta11' := \left(34 + \frac{55}{60} + \frac{17.4}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta17' := \left(42 + \frac{36}{60} + \frac{36.2}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta6' := \left(40 + \frac{41}{60} + \frac{47.5}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta12' := \left(91 + \frac{50}{60} + \frac{03.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta18' := \left(99 + \frac{06}{60} + \frac{55.1}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

исправленные значения углов (с учетом поправок)

$\beta1 := \left(35 + \frac{21}{60} + \frac{14.1}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta7 := \left(117 + \frac{02}{60} + \frac{13.7}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta13 := \left(106 + \frac{29}{60} + \frac{47.7}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta2 := \left(78 + \frac{39}{60} + \frac{32.2}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta8 := \left(30 + \frac{53}{60} + \frac{38.8}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta14 := \left(38 + \frac{46}{60} + \frac{05.3}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta3 := \left(44 + \frac{10}{60} + \frac{06.8}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta9 := \left(32 + \frac{04}{60} + \frac{07.5}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta15 := \left(34 + \frac{44}{60} + \frac{07.0}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta4 := \left(57 + \frac{10}{60} + \frac{21.0}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta10 := \left(53 + \frac{14}{60} + \frac{33.1}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta16 := \left(38 + \frac{16}{60} + \frac{31.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta5 := \left(103 + \frac{56}{60} + \frac{59.9}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta11 := \left(34 + \frac{55}{60} + \frac{20.3}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta17 := \left(42 + \frac{36}{60} + \frac{34.8}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

$\beta6 := \left(40 + \frac{41}{60} + \frac{46.0}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta12 := \left(91 + \frac{50}{60} + \frac{06.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$ $\beta18 := \left(99 + \frac{06}{60} + \frac{53.6}{3600}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$

Вычисление масштабных коэффициентов для синусов измеренных углов

$t1 := \frac{\sin(\beta 5)}{\sin(\beta 2)} = 0.989834$ $K3 := \frac{\sin(\beta 1)}{t1} = 0.584568$ $t2 := \frac{\sin(\beta 8)}{K3} = 0.878346$ $K5 := \frac{\sin(\beta 7)}{t2} = 1.014079$

$K16 := \sin(\beta 4) = 0.840307$ $K4 := \frac{\sin(\beta 9)}{t2} = 0.604473$ $t3 := \frac{\sin(\beta 12)}{K5} = 0.985611$ $K6 := \frac{\sin(\beta 11)}{t3} = 0.580823$

$K2 := \sin(\beta 2) = 0.980474$

$K7 := \frac{\sin(\beta 10)}{t3} = 0.812872$ $t4 := \frac{\sin(\beta 15)}{K6} = 0.981$ $K9 := \frac{\sin(\beta 13)}{t4} = 0.97741$

$K0 := \sin(\beta 3) = 0.696772$

$K8 := \frac{\sin(\beta 14)}{t4} = 0.638299$ $t5 := \frac{\sin(\beta 18)}{K9} = 1.010193$

$K1 := \frac{\sin(\beta 6)}{t1} = 0.658744$

$K10 := \frac{\sin(\beta 17)}{t5} = 0.670169$

$K11 := \frac{\sin(\beta 16)}{t5} = 0.613192$

Коэффициенты отношений по углам

$d1 := \frac{K1}{K0} = 0.945423$ $d7 := \frac{K7}{K0} = 1.166627$

$d2 := \frac{K2}{K0} = 1.407167$ $d8 := \frac{K8}{K0} = 0.916081$

$d3 := \frac{K3}{K0} = 0.838967$ $d9 := \frac{K9}{K0} = 1.402769$

$d4 := \frac{K4}{K0} = 0.867534$ $d10 := \frac{K10}{K0} = 0.96182$

$d5 := \frac{K5}{K0} = 1.455396$ $d11 := \frac{K11}{K0} = 0.880048$

$d6 := \frac{K6}{K0} = 0.833591$ $d16 := \frac{K16}{K0} = 1.206$

Коэффициенты отношений по расстояниям

$k1' := \frac{l1'}{l0'} = 0.945443$ $k7' := \frac{l7'}{l0'} = 1.166721$

$k2' := \frac{l2'}{l0'} = 1.40722$ $k8' := \frac{l8'}{l0'} = 0.916117$

$k3' := \frac{l3'}{l0'} = 0.83904$ $k9' := \frac{l9'}{l0'} = 1.402788$

$k4' := \frac{l4'}{l0'} = 0.867614$ $k10' := \frac{l10'}{l0'} = 0.961864$

$k5' := \frac{l5'}{l0'} = 1.455494$ $k11' := \frac{l11'}{l0'} = 0.880061$

$k6' := \frac{l6'}{l0'} = 0.833595$ $k16' := \frac{l16'}{l0'} = 1.206044$

Предварительные значения координат искомых точек

$x3pr := 670549.330$ м	$y3pr := 692637.470$ м	$x5pr := 670639.040$ м	$y5pr := 692696.040$ м
$x4pr := 670682.920$ м	$y4pr := 692633.310$ м	$x6pr := 670762.710$ м	$y6pr := 692659.970$ м
$x0pr := 670485.010$ м	$y0pr := 692579.160$ м		

$l1pr := \sqrt{(x3pr - x0pr)^2 + (y3pr - y0pr)^2} = 86.817$ м

$l2pr := \sqrt{(x2 - x0pr)^2 + (y2 - y0pr)^2} = 129.231$ м

$l3pr := \sqrt{(x3pr - x2)^2 + (y3pr - y2)^2} = 77.046$ м

$l4pr := \sqrt{(x4pr - x2)^2 + (y4pr - y2)^2} = 79.661$ м

$l5pr := \sqrt{(x4pr - x3pr)^2 + (y4pr - y3pr)^2} = 133.655$ м

$l6pr := \sqrt{(x5pr - x4pr)^2 + (y5pr - y4pr)^2} = 76.554$ м

$l7pr := \sqrt{(x5pr - x3pr)^2 + (y5pr - y3pr)^2} = 107.137$ м

$l8pr := \sqrt{(x6pr - x4pr)^2 + (y6pr - y4pr)^2} = 84.126$ м

$l9pr := \sqrt{(x6pr - x5pr)^2 + (y6pr - y5pr)^2} = 128.823$ м

$l10pr := \sqrt{(x7 - x5pr)^2 + (y7 - y5pr)^2} = 88.34$ м

$l11pr := \sqrt{(x7 - x6pr)^2 + (y7 - y6pr)^2} = 80.816$ м

$l16pr := \sqrt{(x0pr - x1)^2 + (y0pr - y1)^2} = 110.754$ м

$$k1pr := \frac{l1pr}{b1} = 0.945404 \qquad k6pr := \frac{l6pr}{b1} = 0.833647 \qquad k11pr := \frac{l11pr}{b1} = 0.88006$$

$$k2pr := \frac{l2pr}{b1} = 1.407278 \qquad k7pr := \frac{l7pr}{b1} = 1.166686 \qquad k16pr := \frac{l16pr}{b1} = 1.20607$$

$$k3pr := \frac{l3pr}{b1} = 0.83901 \qquad k8pr := \frac{l8pr}{b1} = 0.916105$$

$$k4pr := \frac{l4pr}{b1} = 0.867482 \qquad k9pr := \frac{l9pr}{b1} = 1.402837$$

$$k5pr := \frac{l5pr}{b1} = 1.455456 \qquad k10pr := \frac{l10pr}{b1} = 0.961995$$

Дирекционные углы

$$\alpha03 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y0pr}{x3pr - x0pr}\right) = 0.736 \qquad a'03 := \alpha03 \cdot \frac{180}{\pi} = 42.194$$

$$\alpha02 := \operatorname{atan}\left(\frac{y2 - y0pr}{x2 - x0pr}\right) = 0.119 \qquad a'02 := \alpha02 \cdot \frac{180}{\pi} = 6.843$$

$$\alpha23 := \operatorname{atan}\left(\frac{y3pr - y2}{x3pr - x2}\right) + \pi = 2.551 \qquad a'23 := \alpha23 \cdot \frac{180}{\pi} = 146.154$$

$$\alpha24 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y2}{x4pr - x2}\right) = 0.508 \qquad a'24 := \alpha24 \cdot \frac{180}{\pi} = 29.108$$

$$\alpha34 := \operatorname{atan}\left(\frac{y4pr - y3pr}{x4pr - x3pr}\right) + 2\pi = 6.252 \qquad a'34 := \alpha34 \cdot \frac{180}{\pi} = 358.216$$

$$\alpha45 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5pr - y4pr}{x5pr - x4pr}\right) + \pi = 2.181 \qquad a'45 := \alpha45 \cdot \frac{180}{\pi} = 124.973$$

$$\alpha35 := \operatorname{atan}\left(\frac{y5pr - y3pr}{x5pr - x3pr}\right) = 0.578 \qquad a'35 := \alpha35 \cdot \frac{180}{\pi} = 33.14$$

$$\alpha46 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6pr - y4pr}{x6pr - x4pr}\right) = 0.322 \qquad a'46 := \alpha46 \cdot \frac{180}{\pi} = 18.476$$

$$\alpha56 := \operatorname{atan}\left(\frac{y6pr - y5pr}{x6pr - x5pr}\right) + 2\pi = 5.999 \qquad a'56 := \alpha56 \cdot \frac{180}{\pi} = 343.74$$

$$\alpha57 := \operatorname{atan}\left(\frac{y7 - y5pr}{x7 - x5pr}\right) = 0.384 \qquad a'57 := \alpha57 \cdot \frac{180}{\pi} = 22.015$$

$$\alpha67 := \operatorname{atan}\left(\frac{y7 - y6pr}{x7 - x6pr}\right) + \pi = 2.114 \qquad a'67 := \alpha67 \cdot \frac{180}{\pi} = 121.122$$

$$\alpha10 := \operatorname{atan}\left(\frac{y0pr - y1}{x0pr - x1}\right) + \pi = 2.49 \qquad a'10 := \alpha10 \cdot \frac{180}{\pi} = 142.678$$

Элементы матрицы А параметрических уравнений поправок

$$a11 := \frac{-\cos(\alpha03)}{b1} \qquad a12 := \frac{-\sin(\alpha03)}{b1} \qquad a13 := \frac{\cos(\alpha03)}{b1} \qquad a14 := \frac{\sin(\alpha03)}{b1}$$

$$a21 := \frac{-\cos(\alpha02)}{b1} \qquad a22 := \frac{-\sin(\alpha02)}{b1}$$

$$a33 := \frac{\cos(\alpha23)}{b1} \qquad a34 := \frac{\sin(\alpha23)}{b1}$$

$$a45 := \frac{\cos(\alpha24)}{b1} \qquad a46 := \frac{\sin(\alpha24)}{b1}$$

$$a53 := \frac{-\cos(\alpha34)}{b1} \qquad a54 := \frac{-\sin(\alpha34)}{b1} \qquad a55 := \frac{\cos(\alpha34)}{b1} \qquad a56 := \frac{\sin(\alpha34)}{b1}$$

$$a65 := \frac{-\cos(\alpha45)}{b1} \qquad a66 := \frac{-\sin(\alpha45)}{b1} \qquad a67 := \frac{\cos(\alpha45)}{b1} \qquad a68 := \frac{\sin(\alpha45)}{b1}$$

$$a73 := \frac{-\cos(\alpha35)}{b1} \qquad a74 := \frac{-\sin(\alpha35)}{b1} \qquad a77 := \frac{\cos(\alpha35)}{b1} \qquad a78 := \frac{\sin(\alpha35)}{b1}$$

$$a85 := \frac{-\cos(\alpha46)}{b1} \qquad a86 := \frac{-\sin(\alpha46)}{b1} \qquad a89 := \frac{\cos(\alpha46)}{b1} \qquad a810 := \frac{\sin(\alpha46)}{b1}$$

$$a97 := \frac{-\cos(\alpha56)}{b1} \qquad a98 := \frac{-\sin(\alpha56)}{b1} \qquad a99 := \frac{\cos(\alpha56)}{b1} \qquad a910 := \frac{\sin(\alpha56)}{b1}$$

$$a107 := \frac{-\cos(\alpha57)}{b1} \qquad a108 := \frac{-\sin(\alpha57)}{b1}$$

$$a119 := \frac{-\cos(\alpha67)}{b1} \qquad a1110 := \frac{-\sin(\alpha67)}{b1}$$

$$a161 := \frac{\cos(\alpha10)}{b1} \qquad a162 := \frac{\sin(\alpha10)}{b1}$$

$$A := \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a45 & a46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a65 & a66 & a67 & a68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a73 & a74 & 0 & 0 & a77 & a78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & 0 & 0 & a89 & a810 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a97 & a98 & a99 & a910 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a119 & a1110 \\ a161 & a162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a11 & a12 & a13 & a14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a45 & a46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a53 & a54 & a55 & a56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a65 & a66 & a67 & a68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a73 & a74 & 0 & 0 & a77 & a78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a85 & a86 & 0 & 0 & a89 & a810 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a97 & a98 & a99 & a910 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a107 & a108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a119 & a1110 \\ a161 & a162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

	0	1	2	3	4
0	$-8.068\cdot10^{-3}$	$-7.314\cdot10^{-3}$	$8.068\cdot10^{-3}$	$7.314\cdot10^{-3}$	0
1	-0.011	$-1.298\cdot10^{-3}$	0	0	0
2	0	0	$-9.044\cdot10^{-3}$	$6.065\cdot10^{-3}$	0
3	0	0	0	0	$9.514\cdot10^{-3}$
4	0	0	-0.011	$3.389\cdot10^{-4}$	0.011
5	0	0	0	0	$6.242\cdot10^{-3}$
6	0	0	$-9.118\cdot10^{-3}$	$-5.953\cdot10^{-3}$	0
7	0	0	0	0	-0.01
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	$-8.66\cdot10^{-3}$	$6.602\cdot10^{-3}$	0	0	0
12	$-8.068\cdot10^{-3}$	$-7.314\cdot10^{-3}$	$8.068\cdot10^{-3}$	$7.314\cdot10^{-3}$	0
13	-0.011	$-1.298\cdot10^{-3}$	0	0	0
14	0	0	$-9.044\cdot10^{-3}$	$6.065\cdot10^{-3}$	0
15	0	0	0	0	...

$$L := \begin{pmatrix} k1pr - k1' \\ k2pr - k2' \\ k3pr - k3' \\ k4pr - k4' \\ k5pr - k5' \\ k6pr - k6' \\ k7pr - k7' \\ k8pr - k8' \\ k9pr - k9' \\ k10pr - k10' \\ k11pr - k11' \\ k16pr - k16' \\ k1pr - d1 \\ k2pr - d2 \\ k3pr - d3 \\ k4pr - d4 \\ k5pr - d5 \\ k6pr - d6 \\ k7pr - d7 \\ k8pr - d8 \\ k9pr - d9 \\ k10pr - d10 \\ k11pr - d11 \\ k16pr - d16 \end{pmatrix} =$$

	0
0	$-3.91\cdot10^{-5}$
1	$5.85\cdot10^{-5}$
2	$-2.91\cdot10^{-5}$
3	$-1.322\cdot10^{-4}$
4	$-3.818\cdot10^{-5}$
5	$5.227\cdot10^{-5}$
6	$-3.535\cdot10^{-5}$
7	$-1.166\cdot10^{-5}$
8	$4.952\cdot10^{-5}$
9	$1.305\cdot10^{-4}$
10	$-6.177\cdot10^{-7}$
11	$2.644\cdot10^{-5}$
12	$-1.918\cdot10^{-5}$
13	$1.113\cdot10^{-4}$
14	$4.385\cdot10^{-5}$
15	...

F :=

F =

	0	1	2	3	4
0	0.011	0	0	0	0
1	0	0.011	0	0	0
2	0	0	0.011	0	0
3	0	0	0	0.011	0
4	0	0	0	0	0.011
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

XI80 :=

XI80 =

	0	1	2	3	4
0	4.726	0	0	0	0
1	0	5.099	0	0	0
2	0	0	4.64	0	0
3	0	0	0	4.661	0
4	0	0	0	0	5.139
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

$Xku := F \cdot XI80 \cdot F^T =$

	0	1	2	3	4
0	$1.084\cdot10^{-3}$	$7.79\cdot10^{-4}$	$4.644\cdot10^{-4}$	$4.803\cdot10^{-4}$	$8.057\cdot10^{-4}$
1	$7.79\cdot10^{-4}$	$1.764\cdot10^{-3}$	$6.913\cdot10^{-4}$	$7.148\cdot10^{-4}$	$1.199\cdot10^{-3}$
2	$4.644\cdot10^{-4}$	$6.913\cdot10^{-4}$	$9.624\cdot10^{-4}$	$4.262\cdot10^{-4}$	$7.15\cdot10^{-4}$
3	$4.803\cdot10^{-4}$	$7.148\cdot10^{-4}$	$4.262\cdot10^{-4}$	$9.935\cdot10^{-4}$	$7.394\cdot10^{-4}$
4	$8.057\cdot10^{-4}$	$1.199\cdot10^{-3}$	$7.15\cdot10^{-4}$	$7.394\cdot10^{-4}$	$1.85\cdot10^{-3}$
5	$4.614\cdot10^{-4}$	$6.868\cdot10^{-4}$	$4.095\cdot10^{-4}$	$4.234\cdot10^{-4}$	$7.104\cdot10^{-4}$
6	$6.458\cdot10^{-4}$	$9.613\cdot10^{-4}$	$5.732\cdot10^{-4}$	$5.927\cdot10^{-4}$	$9.943\cdot10^{-4}$
7	$5.071\cdot10^{-4}$	$7.548\cdot10^{-4}$	$4.5\cdot10^{-4}$	$4.654\cdot10^{-4}$	$7.807\cdot10^{-4}$
8	$7.765\cdot10^{-4}$	$1.156\cdot10^{-3}$	$6.891\cdot10^{-4}$	$7.126\cdot10^{-4}$	$1.195\cdot10^{-3}$
9	$5.324\cdot10^{-4}$	$7.925\cdot10^{-4}$	$4.725\cdot10^{-4}$	$4.886\cdot10^{-4}$	$8.197\cdot10^{-4}$
10	$4.872\cdot10^{-4}$	$7.251\cdot10^{-4}$	$4.323\cdot10^{-4}$	$4.471\cdot10^{-4}$	$7.5\cdot10^{-4}$
11	$6.676\cdot10^{-4}$	$9.937\cdot10^{-4}$	$5.925\cdot10^{-4}$	$6.126\cdot10^{-4}$	$1.028\cdot10^{-3}$
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

$Q := m0^{-2} \cdot Xku =$

	0	1	2	3	4
0	$2.71\cdot10^{-4}$	$1.947\cdot10^{-4}$	$1.161\cdot10^{-4}$	$1.201\cdot10^{-4}$	$2.014\cdot10^{-4}$
1	$1.947\cdot10^{-4}$	$4.41\cdot10^{-4}$	$1.728\cdot10^{-4}$	$1.787\cdot10^{-4}$	$2.998\cdot10^{-4}$
2	$1.161\cdot10^{-4}$	$1.728\cdot10^{-4}$	$2.406\cdot10^{-4}$	$1.066\cdot10^{-4}$	$1.788\cdot10^{-4}$
3	$1.201\cdot10^{-4}$	$1.787\cdot10^{-4}$	$1.066\cdot10^{-4}$	$2.484\cdot10^{-4}$	$1.848\cdot10^{-4}$
4	$2.014\cdot10^{-4}$	$2.998\cdot10^{-4}$	$1.788\cdot10^{-4}$	$1.848\cdot10^{-4}$	$4.624\cdot10^{-4}$
5	$1.154\cdot10^{-4}$	$1.717\cdot10^{-4}$	$1.024\cdot10^{-4}$	$1.059\cdot10^{-4}$	$1.776\cdot10^{-4}$
6	$1.615\cdot10^{-4}$	$2.403\cdot10^{-4}$	$1.433\cdot10^{-4}$	$1.482\cdot10^{-4}$	$2.486\cdot10^{-4}$
7	$1.268\cdot10^{-4}$	$1.887\cdot10^{-4}$	$1.125\cdot10^{-4}$	$1.163\cdot10^{-4}$	$1.952\cdot10^{-4}$
8	$1.941\cdot10^{-4}$	$2.889\cdot10^{-4}$	$1.723\cdot10^{-4}$	$1.781\cdot10^{-4}$	$2.989\cdot10^{-4}$
9	$1.331\cdot10^{-4}$	$1.981\cdot10^{-4}$	$1.181\cdot10^{-4}$	$1.222\cdot10^{-4}$	$2.049\cdot10^{-4}$
10	$1.218\cdot10^{-4}$	$1.813\cdot10^{-4}$	$1.081\cdot10^{-4}$	$1.118\cdot10^{-4}$	$1.875\cdot10^{-4}$
11	$1.669\cdot10^{-4}$	$2.484\cdot10^{-4}$	$1.481\cdot10^{-4}$	$1.532\cdot10^{-4}$	$2.569\cdot10^{-4}$
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

$m0 := 2$

$P := Q^{-1}$

$P =$

	0	1	2	3	4
0	$6.71\cdot10^{3}$	-588.702	-385.72	-397.011	-604.072
1	-588.702	$5.804\cdot10^{3}$	-532.194	-547.773	-833.463
2	-385.72	-532.194	$6.921\cdot10^{3}$	-358.903	-546.089
3	-397.011	-547.773	-358.903	$6.867\cdot10^{3}$	-562.074
4	-604.072	-833.463	-546.089	-562.074	$5.708\cdot10^{3}$
5	-383.573	-529.232	-346.755	-356.906	-543.049
6	-507.683	-700.472	-458.953	-472.387	-718.761
7	-415.732	-573.603	-375.827	-386.829	-588.579
8	-586.848	-809.698	-530.518	-546.048	-830.838
9	-432.891	-597.277	-391.339	-402.794	-612.871
10	-401.59	-554.09	-363.043	-373.67	-568.557
11	-539.311	-744.11	-487.544	-501.816	-763.537
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	...

$W := A^{T}\cdot P\cdot L$

$N := A^{T}\cdot P\cdot A$

Поправки в предварительные значения координат точек 1,2,3,4

$T := -N^{-1}\cdot W =$ (м)

	0
0	$6.592\cdot10^{-3}$
1	$3.802\cdot10^{-3}$
2	$5.079\cdot10^{-3}$
3	0.01
4	$8.058\cdot10^{-3}$
5	$7.283\cdot10^{-3}$
6	0.013
7	$3.402\cdot10^{-3}$
8	$8.403\cdot10^{-3}$
9	$6.174\cdot10^{-3}$

Значения координат искомых точек

$$D := \begin{pmatrix} x0pr + T_{0,0} \\ y0pr + T_{1,0} \\ x3pr + T_{2,0} \\ y3pr + T_{3,0} \\ x4pr + T_{4,0} \\ y4pr + T_{5,0} \\ x5pr + T_{6,0} \\ y5pr + T_{7,0} \\ x6pr + T_{8,0} \\ y6pr + T_{9,0} \end{pmatrix} =$$ (м)

	0
0	670485.017
1	692579.164
2	670549.335
3	692637.48
4	670682.928
5	692633.317
6	670639.053
7	692696.043
8	670762.718
9	692659.976

Поправки в значения коэффициентов отношений Ki

$V := A\cdot T + L =$

	0
0	$-2.737\cdot10^{-6}$
1	$-1.771\cdot10^{-5}$
2	$-1.171\cdot10^{-5}$
3	$-1.695\cdot10^{-5}$
4	$-4.69\cdot10^{-6}$
5	$-1.1\cdot10^{-5}$
6	$-8.269\cdot10^{-6}$
7	$-1.193\cdot10^{-5}$
8	$-3.293\cdot10^{-6}$
9	$-1.107\cdot10^{-5}$
10	$-1.088\cdot10^{-5}$
11	$-5.54\cdot10^{-6}$
12	$1.718\cdot10^{-5}$
13	$3.506\cdot10^{-5}$
14	$6.125\cdot10^{-5}$
15	...

Уравненные значения коэффициентов отношений

$$M := \begin{pmatrix} k1pr + V_{0,0} \\ k2pr + V_{1,0} \\ k3pr + V_{2,0} \\ k4pr + V_{3,0} \\ k5pr + V_{4,0} \\ k6pr + V_{5,0} \\ k7pr + V_{6,0} \\ k8pr + V_{7,0} \\ k9pr + V_{8,0} \\ k10pr + V_{9,0} \\ k11pr + V_{10,0} \end{pmatrix} =$$

	0
0	0.9454008
1	1.4072607
2	0.8389987
3	0.8674649
4	1.455451
5	0.833636
6	1.1666775
7	0.9160931
8	1.402834
9	0.9619837
10	0.8800495