Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский горный университет»

На правах рукописи

Быкасов Дмитрий Александрович

Быкасов

МЕТОД ОБРАБОТКИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, доцент
Мустафин М.Г.

Санкт-Петербург – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Благодаря технологическим достижениям последних лет, в области приборостроения и компьютерных технологий, у современного геодезиста, появилась возможность использовать в ходе решения инженерных задач прогрессивные средства измерений такие как: лазерные сканеры, роботизированные тахеометры с функцией сканирования, фотограмметрические камеры, расположенные на беспилотных летательных аппаратах, позволяющие получать уже не точечные данные, а огромные массивы информации об объекте — облака точек. При этом множество избыточных измерений следует свести к единственному (надежному) решению, удовлетворяющему принятым критериям точности. В ряде случаев требуется проведение операций фильтрации, сшивки и уравнивания облаков точек в ограниченное время, например воздушная лазерно-сканирующая съемка, фотосъемка или съемка объектов в движении. Как показала практика, использование традиционных подходов не всегда эффективно. Таким образом, появление многоточечных измерений определяет необходимость решения задачи их обработки и уравнивания с обеспечением заданной точности, что требует проведения специальных исследований.

Развитие компьютерных технологий позволяет применять методы обработки измерений, которые ранее считались или сложными или избыточными. В случае геодезических многоточечных измерений целесообразно вместо классических методов уравнивания, например, параметрического способа, использовать методы нелинейного программирования с производными второго порядка, а также методы прямого поиска. Такой подход позволит повысить скорость решения за счет сокращения итерационных циклов, но связан с более сложной алгоритмизацией. Автоматизация обозначенного вычислительного процесса обеспечивает решение задачи и определяет актуальность диссертационной работы. Кроме того, в свете реализация курса на импортозамещение программных продуктов создание собственных программных модулей обработки многоточечных геодезических измерений представляется весьма важной научно-производственной работой.

Тема диссертации соответствует пунктам 4 и 11 паспорта специальности 25.00.32 «Геодезия».

Степень разработанности темы исследования

Совершенствованию методов и алгоритмов обработки геодезических данных, полученных в ходе измерений, посвящено много научных трудов таких известных геодезистов как: З. Адамчевский, В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев, М.Д. Герасименко, В.В. Голубев, В.А. Гордеев, Б.Н. Дьяков, Ч.Н. Желтко, И.Г. Журкин, В.И. Забнев, В.Г. Зданович, А.А. Изотов, Л.Н.

Келль, Н.Г. Келль, Ю.В. Кемниц, С.А. Коробков, В.А. Коугия, Ф.Н. Красовский, Г.П. Левчук, Н.Л. Макаренко, Ю.И. Маркузе, М.М. Машимов, М.С. Молоденский, А.И. Науменко, А.И. Прусаков, Н.А. Урмаев, А.В. Хлебников, А.С. Чеботарёв, З.М. Юршанский, Х.К. Ямбаев и другие.

Использование современных технологий в геодезии и обработки многоточечных измерений, с применением оптимизационных методов отражено в исследованиях: В.А. Валькова, А.В. Комиссарова, Е.М. Медведева, А.И. Науменко, В.А. Середовича и других.

Развитием теории оптимизации и исследованием работоспособности методов нелинейного программирования занимались ученые–математики: Д.И. Батищев, Дж.Б. Данциг, Р. Беллман, Л.В. Канторович, В.В. Лесин, И.Н. Лященко, Дж. Фон Нейман, Р.П. Федоренко, Дж Хедли, Д. Химмельблау, В.А. Ходоковский.

Применение методов нелинейного программирования в математической обработке геодезических измерений рассматривали многие геодезисты, в числе которых: З. Адамчевский, М.Я. Брынь, П.И. Дуда, Б.Н. Дьяков, Ч.Н. Желтко, А.В. Зубов, М.И. Коробочкин, В.А. Коугия, Б.Т. Мазуров, Г.В. Макаров, Ю.И. Маркузе, В.И. Мицкевич, А.И. Науменко, В.Г. Растригин, Д.И. Степанов, З.М. Юршанский.

Вместе с тем применению методов нелинейного программирования второго порядка при решении оптимизационных геодезических задач уделено недостаточно внимания. Настоящее исследование, в котором математическая обработка геодезических многоточечных измерений изучается на основе компьютерного моделирования, позволит решить поставленную задачу.

Цель работы: увеличение вариативности, избирательности и оперативности при выборе методов обработки геодезических многоточечных измерений за счёт их оптимизации с применением методов прямого поиска и производных второго порядка.

Идея работы: заключается в проведении численного моделирования способов обработки геодезических измерений ряда геодезических задач оптимизационными методами, моделирование их комбинаций и разработка метода, использующего поисковые алгоритмы и метод Ньютона второго порядка, позволяющего эффективно работать с многоточечными измерениями и уменьшить зависимость процесса решения от предварительных значений определяемых параметров.

Задачи исследований:

1. Проанализировать существующие методы обработки геодезических измерений и обосновать целесообразность применения методов оптимизации второго порядка.

2. Исследовать структуру алгоритма метода Ньютона второго порядка, сходимость метода для обоснования его применения при обработке многоточечных измерений.

3. Разработать программный алгоритм по обработке многоточечных геодезических измерений, включающий метод Ньютона второго порядка и методы прямого поиска.

4. Тестирование созданного алгоритма для решения нелинейных оптимизационных геодезических задач на практических примерах.

Объектом исследования - природные и техногенные объекты, их размеры, формы и результаты измерений.

Предмет исследования – методы математической обработки результатов геодезических многоточечных измерений, компьютерные технологии, автоматизирующие вычислительный процесс.

Научная новизна работы:

1. Доказана эффективность использования метода Ньютона второго порядка при обработке многоточечных геодезических измерений.

2. Создан программный алгоритм обработки многоточечных геодезических измерений, включающий оценку точности и уравнивание по методу Ньютона второго порядка, дополненный методом прямого поиска, что существенно расширяет область сходимости итерационного процесса и делает его менее зависимым от предварительных значений определяемых параметров по сравнению с методами первого порядка.

3. Получены зависимости сходимости метода и скорости процесса решения оптимизационной задачи от используемого метода и вида решаемой задачи.

Теоретическая и практическая значимость работы:

Теоретическая значимость работы состоит в научной обоснованности метода математической обработки геодезических многоточечных измерений, за счет использования вторых частных производных и методов прямого поиска в одном алгоритме, что позволяет повысить производительность вычислительного процесса и скорость решения задачи, по сравнению с методами нелинейного программирования первого порядка.

Практическая значимость работы заключается в разработке практических рекомендаций по применению метода Ньютона второго порядка при математической обработке многоточечный геодезических измерений, создана методика и программные модули, реализующие разработанный алгоритм.

Разработанный алгоритм внедрен в процесс математической обработки геодезических измерений производимых ООО «Научно-производственное предприятие «БЕНТА», что подтверждается актом внедрения от 21.02.2022. . Эффективность алгоритма проверена при решении прикладных задач, в частности для определения параметров перехода между прямоугольными системами координат в ходе выполнения сканирования объектов с нескольких точек стояния.

Методология и методы исследования

При выполнении исследований применялся системный подход, базирующийся на: анализе результатов ранее опубликованных исследованиях, построении расчетных схем и моделей для нахождения решения оптимизационных геодезических задач различными методами, сравнение полученных результатов, поиск и исследование в области оптимизации обработки многоточечных измерений, создания программных алгоритмов и их реализации посредствам написания специальных программных модулей на языке программирования Visual Basic for Application для автоматизации решения, апробация предложенных рекомендаций и их приложение при решении практически важных оптимизационных геодезических задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. Применение оптимизационного метода Ньютона второго порядка для обработки геодезических измерений повышает эффективность процесса решения задачи по фактору времени в 2-3 раза и по фактору числа итераций в 5-10 раз относительно методов первого порядка в зависимости от предварительных значений определяемых параметров и количества обрабатываемых точек.

2. Разработанный программный алгоритм, основанный на методе Ньютона второго порядка и использующий методы прямого поиска, существенно расширяет область сходимости итерационного процесса и делает его менее зависимым от предварительных значений определяемых параметров по сравнению с методами первого и второго порядка.

3. Разработанный программный алгоритм обработки многоточечных геодезических измерений применим при решении ряда практически важных инженерно-геодезических задач и обеспечивается контролем на основе традиционных геодезических принципов определения точности.

Степень достоверности результатов исследования подтверждается: использованием фундаментальных и известных в теории оптимизации методов обработки, равенством результатов поиска минимума целевых функции с использованием новых методов и решением данных задач в программном комплексе Mathcad 15 с помощью специальных встроенных функций; равенством параметров уравнения тренда, определенных методами нелинейного программирования второго порядка, с параметрами, полученными специальными функциями, встроенными в Microsoft Excel; а также обсуждением основных результатов исследования посредством научных конференций и опубликованных статей.

Апробация результатов

Основные положения и результаты работы докладывались и получили положительную оценку на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы инженерной геодезии» (г. Санкт-Петербург, 2019 г.).

2. III Всероссийская научная конференция «Современные образовательные технологии в подготовке специалистов для минерально-сырьевого комплекса» (г. Санкт-Петербург, 2020 г.).

3. XVIII Всероссийская конференция-конкурс студентов и аспирантов «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2020 г.).

4. XVI Международный форум-конкурс студентов и молодых учёных «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2020 г.).

5. XIX Всероссийская конференция-конкурс студентов и аспирантов «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2021 г.).

6. Научная конференция студентов и молодых ученых «Полезные ископаемые России и их освоение» (г. Санкт-Петербург, 2021 г.).

7. XVII Международный форум-конкурс студентов и молодых учёных «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2021 г.).

Личный вклад автора состоит в участии формулирования и постановки цели и задач диссертационной работы, самостоятельной разработке метода обработки многоточечных геодезических измерений, создании программы на основе методов нелинейного программирования второго порядка с использованием языка программирования Visual Basic for Applications для автоматизации геодезических вычислений, выполнении вычислительных экспериментов для определения корректности работы применяемых методов, анализе зарубежной и отечественной научной литературы по теории оптимизации, анализ и обобщение полученных экспериментальных результатов, написание и оформление научных статей, апробация основных положений диссертационной работы на научных конференциях.

Публикации

Результаты диссертационного исследования в достаточной степени освещены в 8 печатных работах, в том числе в 1 статье – в издании из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в 4 статьях – в изданиях, входящих в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура работы

Диссертации состоит из оглавления, введения, четырех глав с выводами по каждой из них, заключения, списка литературы, включающего 194 наименования, и 27 приложений.

Диссертация изложена на 162 страницах машинописного текста, содержит 35 рисунков и 10 таблиц.

Благодарности

Автор диссертации выражает высокую благодарность преподавателям и сотрудникам кафедры инженерной геодезии Горного университета, а также лично научному руководителю д.т.н. Мустафину М.Г. за помощь на каждом этапе исследования. Автор диссертации выражает благодарность к.т.н. Зубову А.В. за идеи, советы и поддержку в ходе выполнения диссертационного исследования.

Автор диссертации выражает благодарность и признательность своей супруге – Быкасовой В.И., за всестороннюю поддержку, оказываемую в ходе написания работы.

ГЛАВА 1 РОЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СОВРЕМЕННОЙ ГЕОДЕЗИИ

1.1 История развития теории оптимизации

Термин оптимизация легче будет понять, если обратится к истории. Сам процесс оптимизации был нужен и необходим, когда появились первые цивилизации, которые нуждались остро в технологическом развитии. Организация торговых маршрутов, планирование сельскохозяйственных работ, распределение природных и человеческих ресурсов, а также многие другие задачи остаются и на сегодняшний день актуальными для комфортного существования человечества. Однако, изначально данные задачи решались интуитивно иногда, основываясь на прошлом опыте. Это было вызвано тем, что не было разработано должного математического аппарата, не были сформулированы строгие математические модели, которые позволяли бы упросить и ускорить процесс решения.

Теория оптимизации получила вектор развития, только в XVII веке, именно тогда великий английский ученый Исаак Ньютон начал разрабатывать основы прикладной математики, что и повлекло за собой развитие методов оптимизации. Исаак Ньютон занимался разработкой теории по поиску оптимальных решений различных прикладных задач, им были сформулированы основы оптимизационных методов (вариационное исчисление, численные методы и др.) [41,137]. Сам же термин «оптимизация» ввел впервые уже в XVIII веке Г.В. Лейбниц [40,71]. Работу в данном направлении продолжили другие видные ученые-математики своего времени: П. Ферма вывел закономерность, которая описывала, что при нахождении рядом с точками экстремума скорость изменения функции резко падает до нуля, это заложило основы для многих нелинейных методов оптимизации [16, 137]. Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж.Л. Лагранж внесли весомый вклад, разработав основы вариационного исчисления [16]. Одним из первых сформулировал основную проблему линейной оптимизации Ж. Фурье в 1820 г., а затем разработал последовательный алгоритм ее решения – направленный перебор смежных вершин [7]. Основная идея метода заключалась в направленном переборе смежных вершин фигуры, этот метод в геодезии известен как симплекс метод [10]. В геодезии методы линейной оптимизации нашли свое применение при уравнивании высотных ходов, особенно по методу наименьших модулей [121], П. Лаплас указывал на возможность использования метода наименьших модулей [24]. В дальнейшем симплекс методы развивалась благодаря работам таких математиков, как Л.В. Канторович [42] и Дж.Б. Данциг [50, 67, 151].

К XIX веку благодаря работе ученых-математиков сложилось четкое понимание, что под оптимизацией, в широком смысле, необходимо понимать деятельность, направленную на получение наилучшего результата при определенных ограничивающих условиях, а с точки зрения математического анализа, оптимизация — последовательность операций, выполнение которых способствует получению уточненного решения. Благодаря математическому аппарату и разработанным алгоритмам, с XIX века термин «оптимизация» стал стремительно проникать во многие сферы человеческой жизни и стремительно их менять [9, 13, 41, 43, 47, 90, 93].

XX век во многих сферах деятельности человека стал прорывным, что послужило стремительным импульсом к дальнейшему развитию теории оптимизации. В начале XX века многие ученые использующие методы оптимизации в прикладных целях столкнулись с весомой проблемой. С развитием человечества, происходило развитие и технологией, из-за этого усложнялись оптимизационные задачи, которые необходимо было решать. В связи с этим, вновь разрабатываемые алгоритмы было достаточно сложно реализовывать на практике, а увеличение количества обрабатываемой информации делало применение методов оптимизации на практике практически невозможным без увеличения трудозатрат на вычислительный процесс. Это было вызвано тем, что многие разработанные методы решения оптимизационных задач требовали применение производных различных порядков, что в свою очередь усложняло вычислительно-итерационный процесс. Надежда на решение этой проблемы появилась в середине XX века, это было связано с созданием первых ЭВМ. Однозначно проблему автоматизации вычислительного процесса тогда решить не удалось, так как первые ЭВМ были достаточно слабыми с точки зрения производительности. Однако, появление первых ЭВМ дало новый виток развитию теории оптимизации, был разработан, стараниями многих математиков, новый раздел в прикладной математике, который имеет название «математическое программирование». Однако термин «математическое программирование» не означает, что будут разрабатываться методы, которые можно использовать только с помощью ЭВМ путем написания программного кода. В английском языке слово «programming» переводится как планирование, составление планов или же программ. Поэтому термин «математическое программирование» можно раскрыть, как область математики, которая позволяет разработать алгоритмы и методы для нахождения минимума или максимума функции при выполнении некоторого количества оптимально оправданных действий. После создания и внедрения в человеческую жизнь первых разработанных ЭВМ были решены в первую очередь ряд военных задач, в том числе автоматизация сбора данных для принятия решения. По прошествии некоторого времени, первые ЭВМ были применены для решения множества прикладных математических и инженерных задач, которые были сформулированы задолго до этого, но не могли быть решены из-за низкой производительности вычислительного процесса (человек не мог считать так быстро, как это делали даже первые ЭВМ).

С точки зрения математического анализа, смысл решения оптимизационной задачи, заключается в вычислении значений параметров $x \ldots x_n$ целевой функции $f(X)$, подставив которые в целевую функцию можно вычислить ее максимальное или минимальное значение. Под целевой функцией следует понимать функцию, в математической форме выражающую поставленную цель с точки зрения выбранного критерия оптимальности. В зависимости от того, накладываются ли ограничения на определяемые параметры $x \ldots x_n$ целевой функции $f(X)$, оптимизационные задачи исторически разделяется на два типа:

1) безусловные задачи, то есть ограничения на определяемые параметры не накладываются, то есть итерационной процесс строится на всей области определения целевой функции;

2) условные задачи, в ходе итерационного процесса накладываются ограничения линейные или нелинейные в виде неравенств или уравнений на определяемые параметры [84,157].

1.2 Классификация методов оптимизации

Как было сказано выше, с середины XX века благодаря изобретению ЭВМ, активно развивается математическое программирование, применение теории данного раздела высшей математики позволяет решать оптимизационные задачи в различных областях деятельности человека. На сегодняшний день, можно разделить все методы из теории оптимизации на определенные группы: линейное программирование (нашло малое применение в геодезии), нелинейное (или выпуклое) программирование (методы данной группы имеют колоссальный потенциал применения в геодезии), методы дискретного программирования, динамическое программирование и стохастические методы [41]. Перечисленные методы, занимаются поиском оптимальных решений для сформулированных математических моделей. Выбор метода, которым будет решаться задача, зависит от способа задания и математического вида целевой функции, а также критериев, ограничивающих эту функцию или определяемые параметры.

В линейном программировании целевая функция имеет линейный вид, ограничения (если они имеются), которые вводятся для определяемых параметров, задаются чаще всего линейными уравнениями или если необходимо задать область значений, то неравенствами. В XX веке методы линейного программирования применялись в геодезии достаточно редко, возможно их применить при уравнивании нивелирных ходов или при планировании геодезических полевых работ [79,121].

Методы нелинейного программирования следует использовать, когда необходимо производить оптимизацию нелинейной функции и определять параметры целевой функции с линейными и (или) нелинейными ограничениями. В человеческой деятельности достаточно много задач, где используются нелинейные связи между параметрами, поэтому методы данной группы наиболее часто применяются человеком [8, 13, 20, 47, 67, 90, 93, 156]. Большой класс геодезических задач связан с обработкой и получением искомых параметров, путем решения нелинейных уравнений: определение параметров ориентирования системы для перерасчета координат точек из местной системы координат в глобальную систему координат, проектирование и уравнивание геодезических сетей, построение цифровых моделей местности. Все выше перечисленные задачи, связаны с решением нелинейных уравнений, а также с обработкой огромного количества данных. Такой спектр задач можно решить, применяя методы нелинейного программирования. Если рассматривать классический способ параметрического уравнивания (частный случай нелинейного программирования), применяемый в геодезии, то оптимизация выполняется с ограничительным условием метода наименьших квадратов[123]. При решении нелинейных оптимизационных задач в геодезии, методы нелинейного программирования нашли широкое применение в уравнивании различного рода и вида геодезических построений [123, 150]. В.И. Мицкевич в своих работах [113,116] приводит информацию о том, что Н. А. Тараничев одним из первых говорил, о возможности применения для геодезического вычислительного процесса метода Ньютона, который позволяет минимизировать целевую функцию без составления нормальных уравнений [148]. Однако в то время, это было сложно реализовать, так как требовалось выполнить большой объем вычислений, что считалось не рациональным.

Стоит отметить, что методы нелинейного программирования имеют разветвлённую структуру, и область их практической реализации не ограничивается только уравниванием геодезических сетей. Существуют методы минимизации целевой функции, основанные на использовании только производных первого порядка в итерационном процессе. Например, М.В. Красикова [89], В.А. Коугия [84-86], Л. Грюндич [177] применяли методы нелинейного программирования первого порядка (в частности градиентные методы), для решения сложных систем нелинейных уравнений, содержащих большое число определяемых параметров.

Положительным моментом использования методов нелинейного программирования в геодезическом вычислительном процессе, является возможность автоматизации процесса решения задачи, так как алгоритмы данной группы методов наиболее эффективно реализуются с помощью написания программных модулей на различных языках программирования [89, 178]. Внедрение методов нелинейного программирования в вычислительный процесс, дает возможность решать системы нелинейных уравнений без учета исходных линеаризованных параметрических уравнений. Поэтому, в большинстве случаем присутствует возможность, получать предварительные значения параметров без использования дополнительных сведений о геодезической сети. Однако важно отметить, что нужно дополнительно изучать область сходимости применяемых методов. Корректность выбора начального (предварительного) значения искомого параметра при решении геодезических оптимизационных задач по методу Ньютона изучалось М.В. Красиковой [36]. Анализ научной литературы показал, что необходимо достаточно внимательно вычислять предварительные значения определяемых параметров, чтобы они находились в области сходимости применяемого метода, иначе это приводит к расхождению вычислительного процесса и метод при данных значениях перестает работать. Вычислению предварительных значений искомых параметров при решения нелинейных уравнений посвящены работы Н.А. Тараничева [148], М.В. Красиковой [36] , Г.М. Гринберга [48], В.И. Мицкевич [113, 115, 116].

Использование методов нелинейного программирования позволяет сократить объем выполняемых работ для подготовки исходных данных к решению задачи. Немаловажным достоинством методов данной группы, является возможность уравнивать геодезические сети не только с использованием ограничения по методу наименьших квадратов для целевой функции. Однако стоит учитывать, что в группе данных методов пока не существует одного глобального метода, который подходил бы для решения всех нелинейных оптимизационных задач [90, 156]. На сегодняшний день разработано большое количество методов данной группы, которые хорошо изучены в высшей математике [8, 14, 40, 41, 43, 46, 73, 90, 94, 109, 151, 156], однако применительно к геодезическому вычислительному процессу, некоторые методы изучены достаточно плохо. Все методы нелинейного программирования, можно разделить на три основные группы [156]:

- методы прямого поиска;
- методы первого порядка;
- методы второго порядка.

При использовании **методов прямого поиска** определение минимума или максимума функции происходит на основе анализа информации только о самой функции, без учета производных. Используя методы прямого поиска, при решении некоторых задач, можно получить результаты лучше (по фактору времени), чем при использовании методов первого порядка. В работе Д. Химмельблау [156] отмечено, что методы прямого поиска чрезвычайно эффективны на заключительном этапе определения минимального или максимального значения целевой функции. Связано это с тем, что методы первого порядка, требуют повышенную точность вычисления производных на заключительном этапе поиска точки экстремума, поэтому сходятся они гораздо медленнее, нежели методы прямого поиска. Основными достоинствами данных методов являются:

- необходимо знать только значение оптимизируемой функции;
- целевая функция может быть задана аналитически либо в табличном виде и может являться не дифференцируемой.

В последнее время многие геодезисты склоняются к использованию данных методов на производстве [64-66, 161, 162]. В работах Н.Н. Елисеевой и Г.Г. Шевченко ярко представлены и доказаны основные достоинства группы данных методов при использовании их в геодезических вычислениях для решения производственных задач.

К группе **методов первого порядка** относятся методы, использующие для поиска минимума (максимума) целевой функции информацию о значение функции и о значении первой производной данной функции. К данной группе относятся различного рода градиентные методы и их модификации. Методы просты в реализации, их использование дает возможность достичь, при благоприятных условиях, высокой точности полученных результатов, за относительно малый промежуток времени. Однако, на сходимость данных методов сильно влияет предварительное значение определяемых параметров, если значение находится достаточно далеко от точки минимума (максимума), то алгоритм приводит к зацикливанию и методы расходятся. Проблеме выбора предварительного значения определяемых параметров посвящены труды [36, 139].

Методы второго порядка используют для поиска точки экстремума целевой функции информацию о самой целевой функции и о производных первого и второго порядка. Самым известным методом данной группы является метод Ньютона второго порядка. Основным плюсом методов второго порядка по сравнению с методами первого порядка и методов прямого поиска, является высокая скорость сходимости. Основным недостатком методов использующих в итерационном процессе производные, по сравнению с методами прямого поиска, является сложный вычислительный процесс и необходимость предварительной подготовки задачи к решению (вычисление матриц производных).

При выборе конкретного метода из группы методов нелинейного программирования, чтобы получить верный результат при минимальных трудозатратах, желательно учитывать следующие параметры:
- число определяемых параметров (это влияет на время необходимое для решения задачи);
- выпуклость целевой функции (влияет на скорость сходимости метода и на нахождение глобального или локального решения);
- дифференцируемость целевой функции (существуют задачи, где невозможно вычислить вторые производные целевой функции);
- учитывать область сходимости выбранного метода (в первую очередь влияет на правильность вычислительного процесса по данному методу).

Необходимо учитывать, что использование методов нелинейного программирования для решения конкретных прикладных оптимизационных задач, которые ранее не решались, является достаточно трудоемким и сложным процессом по сравнению с другими методами математического программирования. Анализ специальной научной литературы и научных статей показал, что на сегодняшний день имеется достаточно много различных методов нелинейного программирования, алгоритмы которых достаточно хорошо изучены в высшей математике и информатике. Однако прикладное значение данных методов и их модификаций для геодезического производства изучено не достаточно глубоко, поэтому требуется исследование работы различных алгоритмов при различных начальных условиях, чтобы понять какие методы и самое главное в решении каких геодезических задач следует использовать. Следует учитывать, что применение методов нелинейного программирования, дает возможность разрабатывать абсолютно новые методы для решения сложной нетривиальной производственной задачи, либо объединять алгоритмы различных методов для устранения недостатков работы одного из них.

Методы нелинейного программирования (особенно методы первого порядка) нашлось достаточно широкое применение в решении различных геодезических задач, в частности при уравнивании различного рода геодезических построений [1, 11, 23, 62, 84, 85, 89, 99, 118, 122-124].

Стохастическое программирование позволяет учитывать в своих алгоритмах неопределенность, которая может быть в оптимизационных моделях [160]. Зачастую реальные прикладные задачи содержат некоторые неизвестные параметры, то есть нельзя знать заранее в каких пределах могут быть определены неизвестные параметры модели. В таких задачах, методы стохастического программирования используют информация о распределение вероятностей для данных параметров. Основным инструментом для создания алгоритмов методов данной группы выступают теория вероятности и математическая статистика. Главной целью данных методов является найти решение, которое является допустимым для всех (или почти всех) возможных значений определяемых параметров.

Методы стохастического программирования имеют относительно небольшую область применения в геодезии, однако их использование позволяет повысить качество решения специальных задач. Данные методы возможно применять при анализе точности измерений физических величин, которые изменяются с течением времени, а также в определение точности построения цифровых моделей местности и объектов, при выборе способов создания фотограмметрических сетей и т.д. [32, 33,97]. Методы данной группы нашли свое применение и при создании или исправления систем автоматизированного проектирования, а также решения ряда прикладных задач в области космической геодезии [37, 38, 91].

Методы динамического программирования разрабатывались с середины XX века. Американский математик Р. Беллман разработал теорию и рекомендации, которые являются основой использования методов данной группы. Методы динамического программирования нужно применять, в ситуациях, когда определяемые параметры быстротечно изменяются со временем [17,18, 87]. Динамическое программирование, следует применять при поиске экстремума критериальной функции, если происходят сложные, зависимые друг от друга процессы, которые зависят от времени их протекания. Желательно использовать методы динамического программирования для решения оптимизационных задач, которые разделены на этапы с течением времени [159]. Основной идей применения методов данной группы является поэтапная оптимизация (разбиение сложной оптимизационной задачи на части, которые имеют связи между собой). Происходит оптимизация каждого этапа (это сделать легче, чем решать сложную задачу сразу)

В геодезии достаточно много задач, которые можно решать с использованием методов динамического программирования: сканирование быстродвижущихся объектов, бросковые испытания, уточнение орбиты ИСЗ [25, 26], уточнения геопотенциала Земли [108], уравнивание геодезический сетей, особенно если требуется учитывать их сложную структуру [39].

Краткое описание методов математического программирование вместе с анализом научной литературы показало, что методов решения оптимизационных задач имеется достаточно большое количество. Иногда пользователю необходимо решить сложную задачу – какой именно метод или же совокупность методов ему необходимо выбрать для решения конкретной производственной задачи. Благодаря появлению ЭВМ, происходит непрекращающиеся эволюционное развитие методов оптимизации или же отдельных алгоритмов, а также постоянное внедрение их при решении практических задач в различные сферы человеческой жизни. С развитием технологий, усложняются и оптимизационные задачи и методы их решения, поэтому всегда будет актуальная тема исследования применения данных методов для решения прикладных задач, на основе анализа их работы. Особенно необходимо выделить среди разделов математического программирования, методы нелинейного программирования. Большинство сложных прикладных задач в геодезии можно решить, применяя только их или же вместе с другими методами. Это связано с достаточно гибкими алгоритмами, которые возможно менять и дорабатывать самому пользователю для решения конкретных задач. Методы нелинейного программирования имеют широкий потенциал развития и возможности применения в геодезии из-за их эффективности и производительности их алгоритмов, что находит подтверждение в работах [94, 156].

1.3 Применение методов нелинейного программирования в решении оптимизационных геодезических задач

Внедрение персональных ЭВМ в геодезическое производство, сделало возможным более широкое применение методов математического программирования для обработки геодезических измерений[1, 51, 54, 55, 57, 66, 77, 78, 82, 84, 118,176].

Часто оптимизация может быть необходима: при сгущении геодезических сетей, когда по той или иной причине нет возможности определить непосредственно координаты пункта. Тогда осуществляется привязка к отдаленным пунктам с помощью геодезических засечек [127]. При наличии избыточных измерений необходимо производить процедуру уравнивания, одним из классических способом в геодезии является строгое параметрическое уравнивание [155]. Кроме строгого уравнивания существует приближенные методы уравнивания. Могут также быть использованы поисковые методы, которые позволяет найти координаты определяемых пунктов на основе перебора значений параметров путем добавления различных приращений на каждой итерации, пока не будет выполнено условие остановки поискового процесса. Любая засечка не имеет универсального решения, так как множество факторов влияют на исходные данные, что в свою очередь искажает результат и приводит исполнителя к оптимизации процесса решения задачи. Поэтому главная задача использования методов оптимизации максимально приблизиться к истинному значению с учетом влияния ошибок, как измерений, так и ошибок исходных пунктов [69].

Внедрение в инженерную и космическую геодезию и последующие развитие глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) дало огромный скачок в росте количества оптимизационных задач в геодезии. Обилие избыточных данных и наличие многовариантности решения задач данного класса, все это предопределило использование для их решения методы нелинейного программирования[44]. Примером такого рода задач является: вычисление орбит космических спутников [3, 52, 149], корректировка траекторий полета космических аппаратов [110, 153, 154] и многие другие задачи высшей геодезии [35, 111, 132].

Методы оптимизации также могут быть применены при определении параметров перехода между различными системами координат. Особенно это актуально для фотограмметрии, где необходимо определять элементы ориентирования снимков [129,168, 186, 192], создавать цифровые модели местности (ЦММ) [32, 33, 92, 80, 152]. Обилие систем координат, активно используемых при проведении геодезических изысканий, предполагает развитие методов автоматизации вычисления параметров перехода между ними. Сама задача определения параметров перехода между системами координат не нова, ее решение является «рутинным» для современного геодезиста. Однако и сами параметры перехода (иногда в геодезической литературе можно встретить «ключи» перехода) являются весьма полезными при решении других прикладных задач. В качестве примера может служить задача по выполнению оценки стабильности деформационных и опорных геодезических сетей, где для ее решения используются значения параметров перехода между системами координат [61].

В промышленной геодезии с годами усложняются решаемые геодезистами задачи, это связно с развитием, как геодезического оборудования, так и с развитием современной промышленности. Поэтому в промышленной геодезии также можно выделить большое количество оптимизационных задач различной сложности: выверка различных конструкций [2], установка в проектное положение и контроль различных промышленных объектов [57], обработка результатов лазерного сканирования [34, 143, 179,180, 189].

Следует отметить, что для решения большинства оптимизационных геодезических задач необходимо создавать нелинейные целевые функции. Именно этим можно объяснить, что методы нелинейного программирования более широко распространены в геодезии по сравнению с другими методами математического программирования.

Использование методов нелинейного программирования делает очень удобным процесс создания отдельных программ для автоматизации вычислительного процесса. С одной стороны вычислительный процесс, с применением методов нелинейного программирования достаточно трудоемкий, но использование компьютеров позволяет упростить и автоматизировать этот процесс, так как алгоритмы данных методов легко реализовать на практике с применением различных языков программирования. Этот факт говорит еще об одном плюсе в использование методов нелинейного программирования для геодезии. Например, для вычисления параметров перехода между системами координат можно написать программный модуль используя один из известных языков программирования и можно анализировать работу данного алгоритма. Не смотря на значительное количество уже созданных программ, позволяющих решить данную задачу (вычислить параметра перехода), однако данные программы, как правило, затрачивают больше ресурсов компьютера, так как представляют собой полноценные программные комплексы, разработанные для решения большого множества геодезических задач. Имеет смысл создание «легкой», т.е. менее требовательной к характеристикам компьютера программы, которую можно будет успешно использовать даже на крайне слабых ноутбуках без подключения к сети электропитания.

Изучение применения методов нелинейного программирования в геодезических вычислениях рассматривалось и исследовалось многими учеными-геодезистами, в их числе: В.И. Мицкевич [113-119], В.А. Коугия [84-86], А.В. Зубов [61-66], Г.В. Макаров [100, 101] , Ю.И. Маркузе [103-105], М.Я. Брынь[21, 22], М.И. Коробочника [83], Ч.Н. Желтко [58, 59], З.М. Юршанский [131].

Автор диссертации считает, что внедрение методов нелинейного программирования в вычислительный процесс, повышает эффективность решения оптимизационных геодезических задач. Поэтому следует изучать и анализировать их работу, для повышения производительности геодезического вычислительного процесса. На сегодняшний день, многие геодезические задачи были решены с использованием методов нелинейного программирования:

1) уравнивание различного рода геодезических построений на плоскости и в пространстве [22, 31, 118, 119, 120, 122, 123, 163, 166, 169, 174, 175, 182, 185, 193];

2) построение цифровых моделей различных объектов, по данным лазерного сканирования [82, 81];

3) построение прогнозных моделей для решения прикладных задач по геодезическим данным в различных областях жизнедеятельности человека [83, 184, 170];

4) определение параметров связи между плоскими и пространственными системами координат [85, 86, 61, 191,187];

5) аппроксимация результатов обмеров различных геометрических объектов [63-65].

Вопросы оценки точности искомых параметров с использованием методов математического программирования рассмотрены в трудах Г.В. Макарова [100], В. И. Мицкевича [118], Г.Г. Шевченко [161-164]. На рисунке 1 представлена схема методов нелинейного программирования которые могут быть или уже применялись в геодезии.

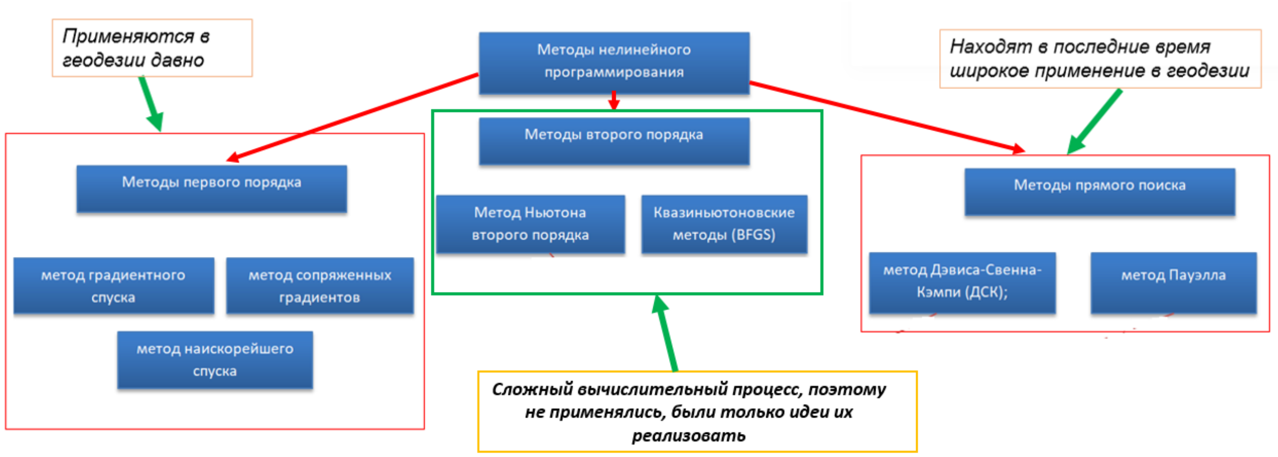


Рисунок 1 – Схема методов нелинейного программирования

Особенно актуально применять методы оптимизации при обработке данных лазерно-сканирующей съемки. Результатом данной съемки является огромный массив точек лазерных отражений, по которым можно построить цифровую модель объекта или местности. Основной задачей математической обработки полученных данных, является определение параметров внешнего ориентирования сканов с каждой точки стояния для создания модели объекта в единой системе координат.

На сегодняшний день выделяют три основных метода по ориентированию сканов:
- прямое определение параметров ориентирования скана, благодаря конструктивным особенностям сканера;
- аналитический способ, основой которого является набор опорных точек, координаты которых известны в местной и глобальной системе координат;
- взаимное ориентирование сканов, благодаря геометрии формы перекрывающихся участков.

В качестве задачи оптимизации, интерес вызывают два последних способа определения параметров внешнего ориентирования скана, так как в этом случае возникает избыточность решений и большое количество факторов влияющих на скорость решения задачи и качество получаемых параметров. Стоит отметить, что внешнее ориентирование сканов, реализуемое с помощью использования опорных точек, имеет ряд недостатков:
- затрата времени, на установку и снятия марок для закрепления опорных точек на местности;
-определение координат марок в глобальной системе координат, что ведет к снижению производительности труда.

В связи с этим, в конце прошлого века был разработан итеративный алгоритм ближайшей точки (ICP- алгоритм). Данный алгоритм имеет множество модификаций на сегодняшний день и имеет практическую реализацию во многих программных продуктах (Autodesk Recap PRO). Отличительной особенностью данного алгоритма, от метода ориентирования по маркам, закрепленным на местности, является то, что в качестве опорных точек выступают непосредственно точки трансформируемых сканов, которые выбираются по различным критериям. Данный алгоритм является итерационным, то есть поиск решения происходит до тех пор, пока не будет найдено решение удовлетворяющие критерию остановки поискового процесса. На время решения задачи и на качество построенной модели по сканам влияет количество ближайших точек и точность их определения.

1.4 Влияние компьютерных технологий на процесс внедрения оптимизационных методов в геодезическом производстве

В наши дни геодезист зачастую не обходится без использования современных приборов при выполнение работы. Развитие электроники, в первую очередь различного рода лазерных сканирующих систем и колоссальный прогресс в создание компьютерных средств моделирования и визуализации с середины XX века, позволило разработать принципиально новые приборы и технологии. Стоит отметить, что современные геодезические приборы представляют собой электронные системы с возможностью применения спутниковых технологий. Это позволяет одновременно производить измерения и фиксацию результатов в цифровой форме непосредственно в ходе полевых работ, что значительно повышает производительность труда и сокращает время выполнения работ [6, 131, 146, 147]. Повсеместное использование компьютерных технологий для обработки геодезических данных, упрощает процесс выполнения геодезических работ за счет повышения качества вычислительного процесса, путем автоматизации.

Персональные компьютеры вошли в человеческую жизнь в начале 70-х годов XX века. Многие из них (Macintosh, Commondore, Atari) [70] обладали весьма небольшим объемом оперативной памяти и невысоким быстродействием, что вызывало трудности в решение сложных геодезических задач. Сложно было представить, чтобы использовать данные компьютеры для проведения вычислительных экспериментов, чтобы обосновать внедрение новых методов обработки геодезических измерений.

Стоит отметить, что разработка программ для автоматизации простых вычислений была возможна и тогда, однако в то время еще многие языки программирования были разработаны специально для программистов. Поэтому разработка вычислительной автоматизированной программы требовала от геодезиста недюжинных знаний и навыков в программировании. Ограниченность системных ресурсов делала практически невозможным создание действительно универсальной программы, которая решала бы множество геодезических задач, и интерфейс которой был бы понятен любому пользователю. Зачастую взаимодействие с первыми написанными программами вызывало немало трудностей, поскольку внести изменения в настройки программы было возможно только через модификацию исходного текста кода программы, так как объемная программа просто не помещалась в оперативной памяти компьютера. Как было сказано выше, даже если программа была написана и работала, то из-за слабых мощностей компьютеров, задачи могли решаться сутками [4] и о применение сложного вычислительного метода (например, метода Ньютона второго порядка, который требовал расчета матрицы Гессе) не могло быть и речи. Ведь затраты по написанию программы и времени решения на компьютере не соответствовали получаемому результату.

Однако за последние несколько десятилетий ситуация начала кардинально меняться. Современные компьютеры гораздо мощнее, своих аналогов из прошлого. Увеличение мощности дало возможность более обширно применять компьютерные технологии в геодезическом производстве [88, 144, 145, 183, 190]. Развитие компьютерных технологий позволило создавать мощные программные комплексы такие как: CREDO-DAT [133], SpatialAnalyzer [188], AutoCAD [134], MapInfo [136] и др. Автор диссертации также применял компьютерные технологии в автоматизации геодезических вычислении и создании специальных программ [28, 30, 190].

Анализ научной литературы позволил понять, что в современной геодезии большое количество оптимизационных задач. Благодаря современным сканирующим системам, роботизированным тахеометрам геодезист за короткий промежуток времени способен получить огромный массив данных об объекте без прямого контакта с объектом [179]. С применением классических методов уравнивания (параметрический и коррелатный способ) появилась возможность использования иных, новых методов обработки геодезических измерений, в частности использовать методы нелинейного программирования.

Не стоит думать, что высокая производительность современных компьютеров обеспечивает быстрое решение всех геодезических задач. Для оптимизации решения сложных задач, содержащих большой объем исходной информации целесообразно экспериментировать и применять новые вычислительные алгоритмы вместе с мощными компьютерами. Вместе с тем современному геодезисту полезно знать некоторые азы программирования. Ведь иногда возникают задачи, которые особенно сложно реализовать в готовых программно-математических комплексах. В качестве примера можно привести задачу по созданию матрица размерностью 30×30, в программной среде Mathcad [181], которую многие инженеры, в частности геодезисты, могут часто использовать. При попытке создания такой матрицы в данной программной среде появляется системное оповещение, представленное на рисунке 2.

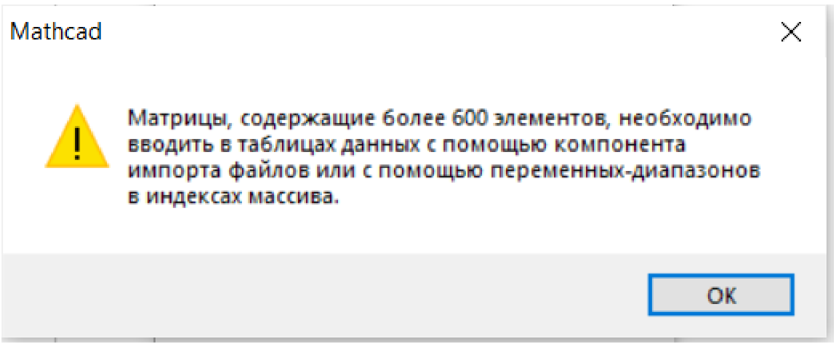


Рисунок 2 – Системное сообщение среды Mathcad 15

Это является дополнительной сложностью в решение задачи и если сделать то, что предлагается, то это повлечет нагрузку на операционную систему и саму среду вычислений, увеличит время решения задачи.

В среде Mathcad 15 целевая функция не может иметь более **пятидесяти определяемых параметров**, если пользователю необходимо определить большее количество параметров, то необходимо создавать специальные процедуры на основе массивов, что влечет за собой необходимость иметь представление о базовых знаниях в области программирования.

Поэтому является логичным, производить эксперименты по внедрению новых методов и анализу их работы совместно с реализаций данных алгоритмов на любом удобном языке программирования, по средству написания специальных программных модулей. В последнее время отмечена важность использования различных языков программирования для автоматизации процесса обработки геодезических измерений, для того чтобы решить ту или иную оптимизационную задачу. Такие видные ученые-геодезисты как Б.Н. Дьяков, В.И. Мицкевич, В.А. Коугия, А.В. Зубов создавали свои собственные программные продукты для решения геодезических задач. В своих работах Н.Н. Елисеева и Г.Г. Шевченко производили анализ работы методов прямого поиска с помощью их реализации по средствам создания специальных программ в программной среде Visual Basic for Applications.

Автор считает важным отметить, что цифровизация геодезических методов и приборов прочно осела в современной геодезии, необходимо учитывать, что развитие современной геодезии в большей степени связано с развитием компьютерных технологий, в частности с развитием разрабатываемого компьютерного обеспечения.

В декабре 2016 г. Президент России поручил разработать и утвердить программу «Цифровая экономика», в которой речь идет о мерах, позволяющих создать в первую очередь технические и правовые условия для создания и дальнейшего развития цифровой экономики в стране [158]. Стоит отметить, что приоритетными направлениями в данной программе являются энергетика, образования, транспортная система и наука. Основа любой цифровой экономики — цифровые данные, поэтому важнейшим аспектом для ее стабильного развития становится наличие соответствующих методов, средств и систем сбора и цифровых данных. Современная геодезия обладает следующими областями знаний как: высокоточная инклинометрия, наземное и воздушное лазерное сканирование, ГНСС-технологии координатного позиционирования, автоматизированные системы мониторинга различных процессов, а также BIM технологии, которые могут выступать источниками знаний для цифровой экономики. Автор диссертации в [179] отражает необходимость создания отечественных роботизированных систем для сканирования объектов горной промышленности и последующей автоматизации при обработки полученных измерений.

Стоит также отметить, что на сегодняшний день в нашей стране принят вектор на стратегию импортозамещения (государственным корпорациям необходимо использовать для своих нужд только отечественное программное обеспечение [68]). Как мы можем видеть, на фоне событий начала 2022 года является весьма актуально и оправдано. Компания Autodesk приостановила продажу новых лицензий для российского сегмента. Возможно, в ближайшее время, возникновение такой ситуации, когда геодезическим фирмам придется пользоваться отечественным программным обеспечением для решения производственных задач именно поэтому необходимо разрабатывать или совершенствовать уже существующие математические алгоритмы, которые будут лежать в основе вновь создаваемых программ для решения оптимизационных геодезических задач.

Методы нелинейного программирования (в частности хотелось бы отметить методы второго порядка), на сегодняшний момент, могут быть применимы на практике в геодезии благодаря современным «мощным» компьютерам и алгоритмам, которые можно автоматизировать благодаря различным языкам программирования.

1.5 Выводы по Главе 1

Исходя из анализа научной литературы и статей видных ученых-геодезистов следует, что теория оптимизации находит применение во многих областях геодезии. Большое практическое применение оптимизационные методы находят в современной геодезии, когда речь идет об обработке большого массива информации для получения быстрого и верного решения.

Развитие современных геодезических приборов, поставило решение многих геодезических задач на новый технологический уровень, в частности позволило получать за короткий промежуток времени большой массив данных, которые необходимо обрабатывать. Наличие большого количества исходных данных предоставляет возможность вычислять искомые параметры многократно, что повышает надежность получаемых параметров. Из большого количества решений, геодезисту необходимо выбрать «оптимально» верное решение.

Особую роль, на сегодняшний день, в геодезии играет скорость получения определяемых параметров, а также автоматизация вычислений. Все это, ведет к усложнению вычислительного процесса, поэтому является вполне логичным тот факт, что современная геодезия достаточно тесно и прочно переплетена с компьютерными технологиями и разрабатываемым новым программным обеспечением. С внедрением новых методов обработки геодезических измерений, параллельно необходимо разрабатывать программные модули автоматизации вычислений, которые позволяют ускорить процесс вычисления и сделать его удобным для пользователя.

Для решения оптимизационных геодезических задач логичным является использование методов нелинейного программирования. Потому что методы данной группы достаточно разнообразны и имеют разветвленную структуру, что дает геодезисту возможность экспериментировать и выбирать наиболее подходящий метод для решения конкретно производственной задачи, а также оставляет возможность совершенствовать выбранный метод, если такая необходимость появится.

Из представленной информации видно, что нельзя выбрать один метод, который позволял бы решить все без исключения оптимизационные геодезические задачи. На сегодняшний день, наметилась тенденция перехода к прямым (поисковым) методам для решения геодезических задач. В своих работах Н.Н. Елисеева, Г.Г. Шевченко, доказывают, что современные компьютеры позволяют выполнять большой объем вычислений за короткий промежуток времени, что дает возможность отказываться от вычисления производных различного порядка для нахождения определяемых параметров. Однако автор диссертации не согласен с данной позицией, так как отказ от вычисления производных ведет к повышению трудозатрат и времени для определения искомых параметров, особенно если речь идет о многоточечных измерениях содержащих большой массив данных. С другой стороны, стоит учитывать, что пока существует малое количество проверенных и отработанных поисковых методов адаптированных для решения конкретно геодезических задач.

Анализ зарубежной и отечественной литературы показал, что сформировалось направление по применению методов прямого поиска, так как они позволяют упростить вычислительные процесс и отказаться от производных, однако автор диссертации имеет полярное мнение и считает необходимым изучить в полной мере применение метода Ньютона второго порядка в геодезии и добиться уменьшения его недостатков, которые были отмечены учеными-геодезистами ранее. Так как анализ отечественной научный литературы показал, что Н. А. Тараничев еще в XX веке предлагал использовать метод Ньютона в геодезических вычислениях. Однако малая производительность вычислительной технике позволили в малой степени изучить возможность применения метода Ньютона в геодезии. Следует отметить, что использование новых методов обработки геодезических измерений весьма актуальная тема такие геодезисты как М.В. Красикова, Л. Грюндич, В.А. Коугия применяли градиентные методы в решении прикладных геодезических задач. В.И. Мицкевич в большом количестве своих работ указывал на необходимость использования методов нелинейного программирования в геодезическом вычислительном процессе. В.И. Мицкевич указывал на недостатки метода Ньютона, в частности создание матрицы вторых производных и малой областью сходимостью метода по сравнению с методами первого порядка и методами прямого поиска.

Целью работы является повышение эффективности применения метода Ньютона второго порядка и увеличения скорости процесса решения геодезических задач за счет использования методов прямого поиска в алгоритме метода Ньютона.

ГЛАВА 2 МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

2.1 Формулирование задачи оптимизации при использовании методов нелинейного программирования

Методы решения нелинейных уравнений можно разделить на: прямые и приближенные (итерационные). Прямые методы позволяют представить решение в виде некоторой конечной формулы, на практике данная группа методов редко применима [58]. Решить нелинейные уравнения удается только с применением универсальных итерационных методов.

Используя данные методы необходимо задать предварительное значение определяемых параметров. После этого с помощью итерационной формулы конкретного метода производится первый цикл вычислений, в результате получают новое приближение значений определяемых параметров. Итерации выполняются до получения решения заданной точностью.

Процесс решения нелинейных оптимизационных задач с использованием итерационных методов можно разделить на два этапа:

1) определение области решения и нахождения предварительных значений, определяемых параметров (может быть выполнено графически или аналитически);

2) выполняется операция уточнения корня – итерационный вычислительный процесс [58].

Для анализа решения любой оптимизационной задачи необходимо построить математическую модель исследуемого объекта (создать целевую функцию), после этого на основе модели произвести вычислительный эксперимент. Создание модели, дает возможность с помощью вычислительного (компьютерного) эксперимента исследовать свойства объекта в любых ситуациях. Основу идеального вычислительного эксперимента можно представить следующим образом: математическая модель – алгоритм решения – компьютерная программа для реализации алгоритма. Стоит отметить, что последний пункт не является обязательным, однако он упрощает решение оптимизационной задачи. Для грамотного решения оптимизационной задачи необходимо сначала правильно ее сформулировать, для этого необходимо ответить на следующие вопросы:

- какую задачу необходимо решить пользователю;
- что необходимо получить пользователю в результате решения задачи;
- какие возможности и ресурсы есть у пользователя для решения задачи.

Адаптируя данные вопросы к геодезии, можно получить следующие вопросы:

- с каким видом измерений пользователь имеет дело, какая целевая функция;
- какие параметры необходимо вычислить;

- какой математический аппарат можно использовать для обработки измерений.

Основываясь на всем выше сказанном, можно вывести правило для успешного решения любой оптимизационной задачи: создать на основе модели целевую функцию, выбрать определяемые параметры, выбрать метод оптимизация основываясь на ограничениях по определяемым параметрам или целевой функции.

Методы оптимизации занимаются определением оптимально верных, с точки зрения предъявляемых ограничений к параметрам, значений аргументов целевой функции. Именно вид целевой функции определяет методы, которые стоит применять для поиска оптимального решения (под оптимальным решением понимается, те значения определяемых параметров, которые удовлетворяют необходимой точности и критерию остановки итерационного процесса, а также позволяют определить минимум целевой функции). Для грамотного формирования целевой функции $f(x)$ необходимо понимать, какой смысл вкладывается в это понятие.

Целевая функция – это глобальная зависимость между определяемыми параметрами и измеренными величинами, по которой находятся оптимальные значения определяемых параметров для достижения минимума (максимума) функции. Целевая функция задается как в скалярном, так и в вектором виде. Математически задачу оптимизации можно представить в виде (1):

$$f(x) \to \min(\max), \tag{1}$$

где $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ – определяемые параметры. Причем $x_n \in D$, где D – область допустимых значений параметров, а n – количество определяемых параметров. Как правило, область допустимых значений задается пользователем, основываясь на характере решаемой задачи [5].

Автор в диссертации рассматривает два способа (приведены ниже) формирования целевой функции для решения поставленных задач, однако существуют и иные способы задания целевой функции [49, 156].

1. Целевая функция, содержащая множество параметров одной размерности (2):

$$F = f(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – определяемые параметры, представленные в одной размерности. Данная функция является наиболее распространённой в экономике и менеджменте, однако ее также можно применять и в геодезии (в сетях трилатерации или триангуляции).

2. Целевая функция связывающая все искомые параметры, разной размерности (3):

$$F = f(z_1, z_2, \ldots z_n), \tag{3}$$

где $z_1, z_2, \dots z_n$ – определяемые параметры, представленные в разной размерности (измеряемые в разных единицах измерения). Это самая удобная форма задания целевой функции, так как дает пользователю применять ее для всех определяемых параметров сразу.

Примером использования целевой функции (2) служит решения оптимизационной задачи по вычислению плановых координат пунктов сети трилатерации. Для вычисления координат пунктов можно составить целевую функцию (4):

$$f(x_1, y_1, \dots x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot (S_i^{И} - S_i^{В})^2, \tag{4}$$

где $x_1, y_1, \dots x_n, y_n$ – плановые координаты определяемых пунктов; n – количество определяемых пунктов; i – порядковый номер измеренной стороны в сети; k – количество измеренных сторон в сети; p_i – вес измеренной стороны; $S_i^{И}$ – измеренная длина стороны в сети; $S_i^{В}$ – вычисленная по координатам длина стороны в сети.

Как можно видеть, функция (4) содержит только линейные определяемые параметры – это координаты пунктов, выраженные в метрах.

Примером использования целевой функции (3) служит решения оптимизационной задачи по вычислению параметров перехода между плоскими системами координат. Для вычисления параметров перехода можно составить целевую функцию (5):

$$f(X_0, Y_0, \alpha, t) = \sum_{i=1}^{n} (X_n^{Г} - (X_0 + t \cdot (X_n^{М} \cdot \cos\alpha \cdot - Y_n^{М} \cdot \sin\alpha)))^2 \cdot p_n +$$

$$+ (Y_n^{Г} - (Y_0 + t \cdot (X_n^{М} \cdot \sin\alpha \cdot + Y_n^{М} \cdot \cos\alpha)))^2 \cdot p_n, \tag{5}$$

где $X_n^{Г}, Y_n^{Г}$ — координаты точек в глобальной системе координат; $X_n^{М}, Y_n^{М}$ — координаты точек в местной системе координат; n — количество опорных точек (координаты данных точек известны в двух системах координат, по ним происходит вычисление параметров перехода); X_0, Y_0 — линейные параметры перехода, координаты начала местной системы координат относительно глобальной системы координат; α — угловой параметр перехода, угол поворота местной системы координат относительно глобальной системы координат; t — масштабирующий множитель; p_n — вес соответствующего пункта.

Целевая функция (5) содержит как угловые определяемые величины, так и линейные. Данные параметры будут по разному вносить «вклад» в изменение значения целевой функции на каждой итерации. С другой стороны, разноразмерность определяемых параметров следует учитывать и при внесении изменений (поправок) в значения определяемых параметров на каждой итерации. Можно сделать вывод, что от вида целевой функции зависит эффективность и правильность решения оптимизационной задачи.

В геодезии термин «целевая функция» не сильно распространен, однако это не говорит о том, что в вычислениях не присутствует сама целевая функция. Наиболее распространенным методом, по которому происходит уравнивание геодезических измерений, является метод наименьших квадратов (МНК) [21, 96, 142,]. Математически метод наименьших квадратов можно представить в виде (6):

$$F = \sum_{i=1}^{n} V_i^2, \tag{6}$$

где V_i^2 — поправка в измерения; i — количество измерений.

Наряду с методом наименьших квадратов в геодезии находит применение и метод наименьших модулей [117], основная формула которого имеет вид (7):

$$F = \sum_{i=1}^{n} |V|, \tag{7}$$

Однако нужно учитывать, что целесообразно применять МНК, когда погрешности измерений подчиняются нормальному закону распределения (распределению Гаусса). Основными плюсами МНК объясняющими, почему этот метод нашел широкое распространение в геодезии, являются [95, 98, 130]:

- простой вычислительный аппарат, по сравнению с методами второго порядка;
- целевая функция данного метода квадратичная, что позволяет быстро найти глобальный минимум.

Если же погрешности измерений подчиняются закону двухстороннего распределения Лапласа, то является целесообразным применять метод наименьших модулей (МНМ).

Стоит отметить, что при выборе метода оптимизации необходимо учитывать ряд факторов: сходимость метода, скорость сходимости метода, устойчивость сходимости метода к предварительным значениям определяемых параметров, правильность алгоритма, сложность вычислительного аппарата.

Для раскрытия понятий «сходимость метода», необходимо понимать, что когда выполняется решение оптимизационной нелинейной задачи, необходимо найти минимум нелинейной функции, часто для этого необходимо исходную целевую функцию разложить в ряд, для аппроксимации. После этого необходимо вычислить производные различного порядка. Поэтому точность многих методов нелинейного программирования зависит от того, насколько хорошо аппроксимирована целевая функция.

Под математическим действием аппроксимация стоит понимать процесс замены исходной достаточно «сложной» и «громоздкой» математической модели, на модель более «простую», но схожую по своим основным свойствам к изначальной модели. Данный процесс позволяет упростить процесс решения нелинейных оптимизационных задач.

Именно поэтому, в нелинейной оптимизации, часто применяют локальные аппроксимации, полученные в ходе разложения в ряды посредством использования производных целевой функции различного порядка. Данная операция относится к такому разделу высшей математики как теория приближения функций. Близость полученных значений определяемых параметров к истинному значению и характеризует сходимость метода (точность вычислений). Стоит отметить, что не всегда один и тот же метод является сходящимся для решения всех задач.

После того, как установлено, что выбранный метод является сходящимся, то пользователя начинает интересовать, какой скоростью решения обладает метод для конкретной задачи. Скорость решения метода зависит в первую очередь от числа итераций ξ, которые необходимо произвести для нахождения решения. Как правило, чем больше ξ, тем больше вычислительных мощностей компьютера нужно затратить для нахождения решения. Поэтому, если на каждой итерации функция медленно стремится к минимуму, то для достижения нужной точности может потребоваться затратить больше вычислительной работы, следовательно, и больше времени займет решение задачи. В математике известны случаи, когда метод для решения оптимизационной задачи является сходящимся, однако для нахождения решения необходимо потратить колоссальное количество оперативной памяти компьютера и времени, это является одной из причин создания суперкомпьютеров.

В зависимости от такого как быстро решается оптимизационная задача, выделяются следующие скорости сходимости метода:

1) **сублинейная скорость**: является достаточно невысокой, так как для достижения к точки экстремума на одну цифру, требуется реализовать такое число приближений, которое сопоставимо с общим числом итераций во всех предыдущих вычислений (данной скоростью обладают некоторые методы прямого поиска и иногда методы первого порядка);

2) **линейная скорость**: является достаточно высокой скоростью решения, так как приближение к истинному значению на один знак требует практически постоянного количества итераций (такой скоростью обладают методы первого порядка);

3) **квадратичная скорость**: чрезвычайно высокая скорость сходимости, так как **каждая итерация** удваивает число цифр в значении определяемого параметра для достижения истинного значения (такой скоростью зачастую обладают методы второго порядка).

Под устойчивостью метода к предварительным значениям определяемых параметров, понимается ситуация, когда малая ошибка задания начальных данных, приводит к малому изменению времени и точности решения задачи. В свою очередь это ведет к тому что, метод с более высокой устойчивостью менее чувствителен к ошибкам в предварительных значениях определяемых параметров. Следует отметить, что методы второго порядка являются более устойчивыми по сравнению с методами первого порядка.

Под сложностью вычислительного аппарата стоит понимать, насколько неудобно и долго необходимо подготавливать пользователю задачу к решению. В частности прямые методы, иногда решают простые оптимизационные задачи быстрее по сравнению с методами первого и второго порядка, за счет отказа от вычисления производных в итерационном процессе. В данной ситуации отказ от производных упрощает вычислительный аппарат пользователю. Однако иногда, пользователь сталкивается со сложностью выбора шага итерации, на что тратит дополнительное время.

В методах нелинейного программирования одним из основных терминов выступает понятие «итерационный процесс» Под итерационным процессом следует понимать последовательное уточнение решения поставленной задачи «шаг за шагом».

Для решения оптимизационной задачи методами первого или второго порядка необходимо:

1) сформировать целевую функцию;

2) задать предварительные значения определяемых параметров;

3) выбрать метод оптимизации;

4) сформировать матрицы производных различного порядка;

5) выбрать шаг итерации, если это необходимо;

6) задать критерий остановки итерационного процесса.

Приведен общий алгоритм, который может видоизменяться в зависимости от выбранного метода.

Как было сказано выше, в специальной математической литературе [41, 71, 137], выделяют следующую классификацию методов нелинейного программирования (автор диссертации придерживается в работе именно ее):

1) методы прямого поиска;

2) методы первого порядка;

3) методы второго порядка.

2.2 Алгоритмы оптимизации методов нелинейного программирования первого и второго порядка

В математической литературе достаточно подробно описаны многие методы нелинейного программирования, особенно первого и второго порядка. Однако, их описание достаточно подробно с точки зрения высшей математики, геодезисту иногда излишня такая подробность. Следует отметить, что методы нелинейного программирования во многом имеют универсальные алгоритмы решения. Поэтому потребность в новых методах для решения вновь возникающих производственных задач, в конкретных технических областях реализуется на основе комбинации уже существующих методов, для устранения недостатка одного из методов.

Чтобы быть уверенным в правильности полученного алгоритма необходимо выполнить ряд вычислительных экспериментов и проанализировать полученные результаты. Усовершенствование уже существующих алгоритмов становится возможным благодаря симбиозу достижений техники и математики, так как зачастую усовершенствование алгоритма требуется для сокращения времени поиска решения. В свою очередь, применительно к геодезии, время поиска растет, за счет увеличения количества обрабатываемой информации (количества измерений или числа определяемых параметров).

В данном разделе диссертации сжато приведена основная информация об наиболее распространённых и эффективных методах нелинейного программирования использующих производные в итерационном процессе и приведены условия, когда их следует применять.

2.2.1 Градиентные методы

Градиентные методы для поиска точки экстремума используют информацию о значении функции и о значении первой производной исходной целевой функции $f(x)$. Методы данной группы универсальны и хорошо адаптируются к работе с современными вычислительными системами, в большинстве случаев их применение весьма эффективно при решении оптимизационных задач. Существует достаточно большое количество модификаций методов использующих в итерационном процессе производные первого порядка, основными отличиями методов друг от друга являются: значение шага итерации, продолжительность поиска вдоль найденного направления, критерий остановки итерационного процесса.

В XVII веке Пьер Ферма разработал критерий, которые позволял решать первые задачи оптимизации, а именно, если $x^{\otimes}$ – точка минимума функции $f(x^{\otimes})$, то выполняется условие (8):

$$f'(x^{\otimes}) = 0, \tag{8}$$

где $f'(x^{\otimes})$ – производная первого порядка по функции $f(x^{\otimes})$.

Критерий (8) основан на линейной аппроксимации функции, которая получается при разложении исходной нелинейной функции $f(x)$ в ряд Тейлора (9):

$$f(x) \approx f(x^{\otimes}) + f'(x^{\otimes}) \cdot (x - x^{\otimes}), \tag{9}$$

где x – приближенное значение определяемого параметра.

Можно увидеть, что в (9) при аппроксимации учитывается только первое приближение (производная целевой функции первого порядка). Чем ближе x к $x^{\otimes}$, тем точнее это разложение.

После математических преобразований была получена основная формула для всех градиентных методов (10):

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot \nabla f_k, \tag{10}$$

где x_{k+1} – вектор-столбец определяемых параметров в $k+1$ приближении; x_k – вектор-столбец определяемых параметров в k приближении; λ_k – шаг итерации k приближении; ∇f_k – градиент целевой функции.

Градиент ∇f_k определяет направление скорейшего увеличения целевой функции $f(x)$, как представлено на рисунке 3.

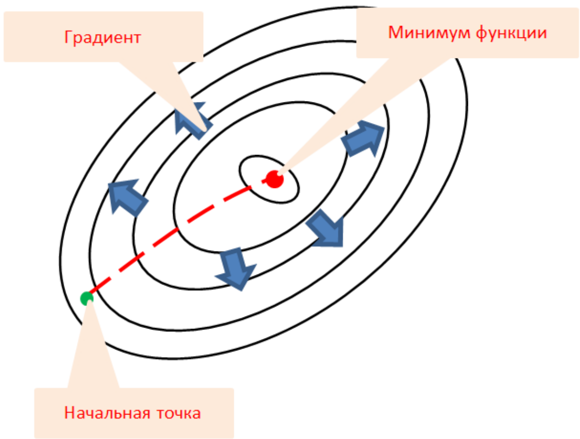


Рисунок 3 – Направление поиска

Меняя направление на антиградиент, можно получить направление скорейшего уменьшения функции, именно поэтому в формуле (10) перед шагом итерации λ_k стоит знак минус. Используя градиентный метод, можно найти ближайший к исходной точке x_k локальный экстремум. Если выполняется оптимизация выпуклой функции, то локальный экстремум является и глобальным. Из-за простоты алгоритма и возможности реализации градиентный метод нашел широкое применение в геодезических оптимизационных задачах [62, 84,85].

Формула (10) записана для многомерного случая, то есть когда аргументов целевой функции (определяемых параметров) больше одного. Сформировать вектор-столбец градиента можно по формуле (11):

$$\nabla f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\dfrac{\partial f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n}$ – частная производная целевой функции по определяемому параметру x^n.

Широкое разнообразие градиентных методов вызвано выбором шага итерации λ_k, от значения которого зависит объем вычислений на каждой итерации, а следовательно и скорость решения задачи. Требования к выбору шага итерации сформулированы на основе вычислительных экспериментов и подкреплены теорией оптимизации, однако данные требования обладают некоторыми противоречиями [41, 156]:

1) размер шага λ_k (в машинном обучении – скорость обучения) должен быть достаточно малым, иначе линейное приближение (9) становится грубым и точность вычислений снижается, а также присутствует возможность «не найти» минимум;

2) если размер шага λ_k выбрать достаточно малым, то происходит резкое возрастание объема вычислений на каждой итерации, что вызывает снижение эффективности применяемого метода.

Основываясь на анализе опыта использования градиентных методов в геодезии [1, 61, 84, 85, 113, 115, 118], а также специальной литературе по оптимизационным методам [41, 43, 90], можно выделить основные модификации градиентных методов, которые будут применяться в работе для сравнения с методом Ньютона второго порядка:

1) метод градиентного спуска;

2) метод наискорейшего спуска;

3) метод сопряженных градиентов.

Стоит учитывать, что главной задачей алгоритма градиентных методов любой модификации, является спуск всё «ниже и ниже», но алгоритм может «зациклиться» достигнув локального минимума, так и не попав в глобальный минимум (рисунок 4). Это является основным недостатком данных методов. Этот факт необходимо учитывать при выборе предварительного значения искомого параметра [156].

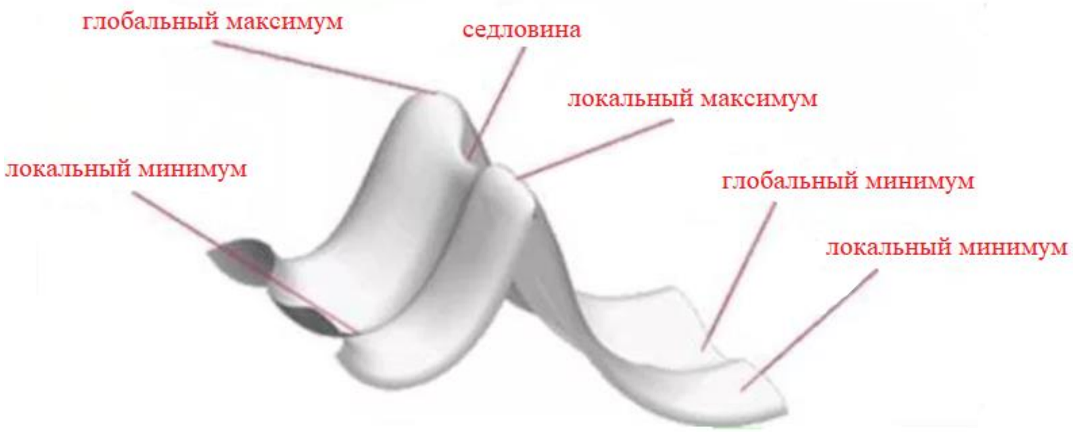


Рисунок 4 – Локальность функции

Метод градиентного спуска, алгоритм данного метода дает возможность пользователю вычислить наименьшее значение целевой функции в направлении наиболее быстрого убывания (направление антиградиента). В многомерном случае оптимизационной задачи частные производные характеризуют изменение функции по каждому определяемому параметру. Основная итерационная формула метода градиентного спуска имеет вид (12):

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot \frac{\nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k}{\left|\nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k\right|}, \tag{12}$$

где $\left|\nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k\right|$ – модуль градиента целевой функции [156].

Модуль градиента целевой функции вычисляют по формуле (13):

$$\left|\nabla f(x_1, \ldots, x_n)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^n}\right)^2}. \tag{13}$$

Антиградиент определяет только геометрию направления спуска, но не само значение шага итерации λ_k. В общем случае одно приближение не позволяет определить точку экстремума, поэтому вычисления повторяются, пока не будет выполняться критерий остановки. В данном методе величина шага λ_k очень сильно влияет на эффективность его работы. Шаг можно задать двумя способами:

1. **Шаг λ_k будет постоянен.** Пользователь сам выбирает величину шага исходя из условия, что длина шага из текущей точки в новую точку должна быть не более желаемой точности (например, стремясь к точности 0,001 м, надо принять длину шага не более 0,0005 м).

Данный метод рекомендуется применять, когда функция аналитически задана в простой форме, малое количество определяемых параметров и у пользователя нет жестких требований к скорости решения. Однако стоит учитывать, что данный метод требует большое количество итераций и очень чувствителен к действиям пользователя, так как только он может влиять на величину шага λ_k.

2. **Шаг итерации** λ_k **задается формулой**, то есть меняется в процессе выполнения итерационного процесса. Согласно [15] выражение $\frac{\nabla f(x_1,\ldots,x_n)_k}{\left|\nabla f(x_1,\ldots,x_n)_k\right|}$ в формуле (12) является единичным вектором направления S_k, которое определяется по формуле (14):

$$S_k = \cos(\alpha_k) = \frac{\nabla f(x_1,\ldots,x_n)_k}{\left|\nabla f(x_1,\ldots,x_n)_k\right|}, \tag{14}$$

где α_k – угол наклона градиента.

В данном способе величина шага λ_k определяется следующим образом:

- если угол наклона градиента α_k меньше 30°, то шаг удваивается $\lambda_{k+1} = 2 \cdot \lambda_k$;

- если угол наклона $30^\circ \le \alpha_k \le 60^\circ$, то шаг остается неизменным $\lambda_{k+1} = \lambda_k$;

- если угол наклона градиента α_k больше 60°, то шаг делится пополам $\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k}{2}$.

Метод градиентного спуска имеет следующий алгоритм для реализации в программной среде:

1. Задается минимизируемая целевая функция, пользователь вводит предварительные значения определяемых параметров $x_1,\ldots,x_n$.

2. Вычисляется градиент целевой функции по формуле (11).

3. Вычисляется единичный вектор направления S_k по формуле (14).

4. Определяется шаг итерации λ_k: постоянный или дробный.

5. Вычисление новых значений определяемых параметров по формуле (12), проверка критерия остановки.

Метод наискорейшего спуска является логическим продолжением метода градиентного спуска. Основная формула метода определяется выражением (12). Отличием этого метода от метода градиентного спуска является формат выбора шага λ_k. Шаг итерации выбирается из условия минимизации целевой функции, то есть решается задача одномерной оптимизации относительно параметра λ_k, данное условие можно записать в виде (15):

$$\lambda_k \to f(x_k - \lambda \cdot P_k) \to \min. \tag{15}$$

Получается, что шаг итерации λ_k следует задавать такого значения, чтобы итерационный процесс сводился к уменьшению целевой функции на каждом приближении, именно таким образом можно достичь минимального значения функции. Данный процесс выполняется до некоторой точки, чаше всего пока происходит уменьшение функции, как только уменьшение функции замедляется, то в этой точке снова происходит определение шага λ_k и так далее пока не будет выполнен критерий остановки итерационного процесса. Стоит отметить, что плюсом данного метода, является уменьшение вычислительных операций, так как не на каждой итерации определяется шаг λ_k, то есть поиск происходит более «крупными» приращениями и требуется меньшее число вычисления градиента целевой функции

В работах [15, 126] высказано обоснованное и подкрепленное практическими примерами мнение, что у метода наискорейшего спуска резко уменьшается скорость поиска решения, как только значения определяемых величин оказываются в «овраге» (области, из которой не найти решения задачи, так как она приводит к зацикливанию алгоритма и бесконечному росту число итераций). Данная ситуация сильно усугубляется при росте количества определяемых параметров. В высшей математике область «оврага» представляет собой локальный минимум функции, при его наличии траектория поиска будет иметь ломанную (зигзагообразную) линию, движение по которой происходит с достаточно малым приращениям шага итерации, что в свою очередь может весомо увеличить скорость решения задачи и в дальнейшем приведет к дополнительной вычислительной задержке по времени.

Метод наискорейшего спуска имеет следующий алгоритм для реализации в программной среде:

1. Задается минимизируемая целевая функция, пользователь вводит предварительные значения определяемых параметров $x_1, \ldots, x_n$.

2. Вычисляется градиент целевой функции по формуле (11).

3. Вычисляется единичный вектор направления S_k по формуле (14).

4. Определяется шаг итерации λ_k из условия (15).

5. Вычисление новых значений определяемых параметров по формуле (12), проверка критерия остановки. Вычислительный процесс будет остановлен при условии выполнения критерия остановки, в противном случае алгоритм выполняется вновь.

Данный метод является наиболее вычислительно затратным, однако не требует отслеживания пользователем шага итерации и его изменения «вручную». Его целесообразно применять для нахождения минимума сложных целевых функций с большим количеством оптимизируемых параметров. Метод был применен В. И. Мицкевичем в работе [118].

Метод сопряженных градиентов выступает своеобразным продолжением разработок в области методов первого порядка, что позволило достичь субквадратичной скорости сходимости, при благоприятных условиях. Метод основан на алгоритме наискорейшего спуска, однако имеет ряд особенностей, а именно в данном методе объединяются два понятия: градиент целевой функции и сопряженное направление векторов. Основная итерационная формула метода записывается в виде (16):

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot P_k, \tag{16}$$

где P_k – единичный вектор сопряженных направлений [156].

На нулевой итерации единичный вектор P_k принимается равным $P_0 = \nabla f(x_1, \ldots, x_n)$. При последующих вычислениях вектор P_k можно вычислить по формуле (17):

$$P_k = \nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k + \beta_k \cdot P_{k-1}, \tag{17}$$

где β_k – весовой коэффициент, который используется для определения сопряженных направлений.

Определить весовой коэффициент β_k можно по формуле Флетчера-Ривса (18):

$$\beta_k = \frac{\left|\nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k\right|^2}{\left|\nabla f(x_1, \ldots, x_n)_{k-1}\right|^2}. \tag{18}$$

Согласно представленным формулам вновь определенное сопряженное направление можно получить сложением вектора антиградиента в поворотной точке и вычисленного до этого вектора движения, перемноженного на коэффициент β_k. Можно увидеть, что метод сопряженных градиентов позволяет создать направление поиска, к точке минимума целевой функции, путем анализа информации об уже выполненном поиске, который был выполнен на предыдущих этапах спуска (рисунок 5).

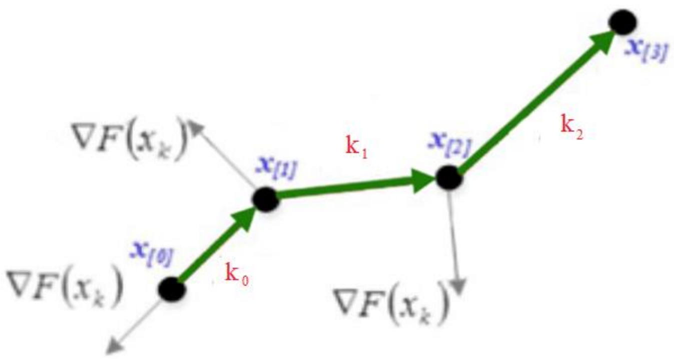


Рисунок 5 – Траектория итерационного поиска по методу сопряженных градиентов

Графическую интерпретацию (рисунок 6) данного метода можно изобразить следующим образом: из предварительно определенной пользователем начальной точки x_0 выполняется движение в направлении p_0 в новую точку x_1, в которой вычисляется вектор-градиент функции. Так как точка x_1 является точкой экстремума (минимума в данном случае) функции в направлении p_0, то вектор-градиент целевой функции в точке x_1 перпендикулярен вектору p_0.

После этого вычисляется вектор p_1 который в свою очередь составляет с вектором p_0 угол девяносто градусов. В конечном итоге, выполняется перемещение вдоль найденного направления в новую точку x_2.

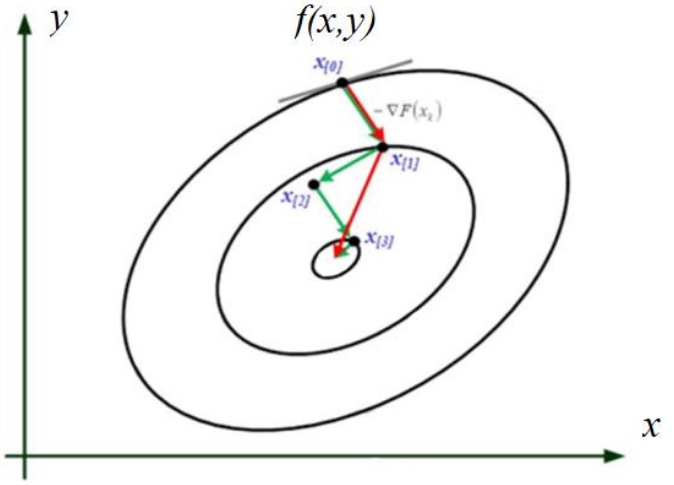


Рисунок 6 – Сравнение итерационного процесса поиска по методу наискорейшего спуска (зелёная ломаная) и методу сопряжённых градиентов (красная ломаная)

Стоит отметить, что во многих работах [126, 156] отмечена польза того, когда через каждые $n+1$ шагов происходит рестарт (перезапуск) алгоритмической процедуры (n – количество определяемых параметров). Рестарт вычислительной процедуры необходим, чтобы «стереть» последнее направление поиска и запустить алгоритм поиска заново в направлении скорейшего спуска.

Как отмечалось выше, значение шага λ_k влияет на производительность метода. Значение шага итерации в алгоритме сопряженных градиентов вычисляется в направлении движения, которое выполняется исходя из условия минимума целевой функции, то есть посредством решения задачи из области одномерной оптимизация, в итоге выполняется движение в направления антиградиента. Данную задачу одномерной оптимизации можно записать в виде (15). Однако, данную задачу можно решить по-разному, чаще всего величина шага λ_k определяется путем решения уравнения (19):

$$\frac{\partial f(x_k - \lambda \cdot P_k)}{\partial \lambda} = 0. \qquad (19)$$

Метод сопряженных градиентов, хоть и относят к методам первого порядка, но при этом он обладает субквадратичной (или даже квадратичной при благоприятных условиях) скоростью сходимости. Стоит отметить, что методы второго порядка чаще всего обладают квадратичной скоростью сходимости, а методы первого порядка, как писалось выше, только линейной скоростью сходимости. Метод сопряженных градиентов является распространенным и эффективным методом поиска минимума (максимума) исследуемых целевых функций.

Основным недостатком данного метода (также как и изложенных ранее методов) является то, что при его использовании часто можно обнаружить только локальный экстремум функции, особенно, если функция достаточно сложная или же если не задавать область поиска и заранее не знать, где находится примерно глобальный экстремум. Для определения других локальных экстремумов или же глобального экстремума необходимо выполнять итерационный процесс из других заданных начальных точек.

Методы сопряженных градиентов имеет следующий алгоритм для реализации в программной среде:

1. Задается минимизируемая целевая функция, пользователь вводит предварительные значения определяемых параметров $x_1, \ldots, x_n$.

2. Вычисляется градиент целевой функции по формуле (11).

3. Производится вычисление координат единичного вектора P_k по формуле (19) и определение координат новой точки итерационного процесса при движении в направление единичного вектора.

4. Определяется весовой коэффициент β_k по формуле (18) и вычисляется единичный вектор сопряженных направлений в текущем приближении.

5. Вычисляется шаг итерации λ_k из условия (15).

6. Выполняется вычисление новых значений определяемых параметров по формуле (16)

7. Проверяется критерий остановки, также определяется необходимость выполнения всей алгоритмической процедуры заново для обнуления последнего направления поиска.

Несмотря на огромное множество модификаций градиентных методов, можно выделить общий алгоритм поиска точки экстремума свойственный всем методам данной группы:

1) определяется предварительное значение искомых параметров $(x^1, \ldots, x^n)$;

2) задается направление движения от предварительного значения к точке экстремума (необходимо вычислить градиент целевой функции);

3) вычисляется длина шага λ_k, либо задается пользователем;

4) выполняется итерационный вычислительный процесс;

5) процедура, описанная выше, выполняется вновь, пока не будет, достигнут критерий остановки.

Сложности при использовании методов данной группы возникают тогда, когда итерационный процесс происходит в окрестности точки экстремума, так как траектория поиска начинает изменяться скачкообразно, это в свою очередь приводит к лавинному возрастанию числа итераций. Как было сказано выше, центральным вопросом использование методов нелинейного программирования, в частности градиентных, является точность вычисления производных различного порядка с использованием компьютеров, данная тема отражена в работах [85, 118]. Чаще всего применяют два способа вычисления производных: аналитический и численный метод (разностные схемы). Первый метод точнее, но использовать его возможно при простой форме записи целевой функции, а также, если целевая функция задана аналитически.

2.2.2 Метод Ньютона второго порядка

Метод Ньютона второго порядка, входит в группу методов нелинейного программирования второго порядка [102,156]. В более общем смысле, метод Ньютона второго порядка представляет собой итерационный метод, основой которого является квадратичная аппроксимация исходной целевой нелинейной функции на каждой итерации. Чтобы оценить сходимость метода, необходимым условием является трижды дифференцируемость исследуемой функции. Существование второй производной в точке экстремума, обеспечивает высокую скорость сходимости метода, по сравнению с методами первого порядка [156]. Метод подробно изучен в трудах [53, 72, 112, 128], а также применен автором диссертации в работах [29,31, 171-173,185, 190].

Однако, его возможность использования в геодезической практике, при решении производственных задач, практически не изучена. На это имеется ряд объективных причин, которые будут рассмотрены ниже.

Для вывода основной формулы метода, необходимо так же, как и в градиентных методах, разложить исходную целевую функцию в ряд Тейлора (20):

$$f(x) \approx f(x^{\otimes}) + f'(x^{\otimes}) \cdot (x - x^{\otimes}) + \frac{1}{2} f''(x^{\otimes}) \cdot (x - x^{\otimes})^2, \tag{20}$$

где $f''(x^{\otimes})$ – матрица вторых производных целевой функции $f(x)$ в точке $x^{\otimes}$.

В основе метода Ньютона второго порядка лежит квадратичная аппроксимация целевой функции, поэтому в ряде Тейлора учитываются первые три слагаемые, для вывода итерационной формулы [113, 156]. Получив значение $x^{\otimes}$, можно вычислить следующее приближение x_{k+1} к точке экстремума. Заменив в формуле (20) $x^{\otimes}$ на x_k, а x на x_{k+1}, также обозначив $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, можно получить формулу (21):

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k) \cdot \Delta x_k + \frac{1}{2} f''(x_k) \cdot \Delta x_k^2. \tag{21}$$

Для определения экстремума в направлении Δx_k, необходимо функцию $f(x_{k+1})$ продифференцировать по Δx_k и приравнять полученное выражение к нулю (22):

$$f'(x_k) + f''(x_k) \cdot \Delta x_k = 0. \tag{22}$$

Выражая из формулы (22) переменную x_{k+1}, получим основную формулу метода Ньютона второго порядка, по которой строится итерационный процесс (23):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \tag{23}$$

где $f'(x_k)$ – первая производная функции $f(x)$ в точке x_k в k приближении; $f''(x_k)$ – вторая производная функции $f(x)$ в точке x_k в k приближении.

Формула (23) описывает итерационный процесс, для функции одной переменной. Записав выражение (23) в матричном виде (24), можно получить итерационную формулу метода для многомерного случая (функции нескольких переменных):

$$X_{k+1} = X_k - H_k^{-1} \cdot \nabla f_k, \tag{24}$$

где ∇f_k – вектор-столбец матрицы первых производных (градиент) целевой функции в k приближении, H_k – матрица вторых частных производных (матрицы Гессе) целевой функции размерностью $n \times n$ в k приближении; X_k – вектор-столбец определяемых параметров в k приближении; X_{k+1} – вектор-столбец определяемых параметров в $k+1$ приближении [156].

Отличительной особенностью классического метода Ньютона второго порядка по сравнению с градиентными методами является то, что в итерационном процессе не нужно определять шаг итерации. Скорость сходимости, а также направление поиска зависит от матрицы Гессе (25):

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^1 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^n \partial x^1} & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^n \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Основным недочетом метода Ньютона второго порядка, считается вычисление матрицы Гессе [156], поэтому данный метод мало используется на практике, так как расчет матрицы вторых частных производных (матрицы Гессе) на каждой итерации является достаточно сложным вычислительным процессом. Однако, внедрение персональных компьютеров позволило автоматизировать процесс вычисления матрицы Гессе. Вычисление частных производных можно реализовать с использованием одного из языков программирования, численным методом. Благодаря этому, задачу по вычислению частных производных для любой целевой функции можно полностью автоматизировать путем создания специальных программных модулей.

На каждой итерации необходимо определять знак матрицы Гессе. Матрица вторых частных производных на каждой итерация должна быть положительно определенной $H(f) > 0$, только при выполнении этого условия, направление поиска будет вести к убыванию целевой функции $f(x)$. В итерациях, где матрица Гессе отрицательно определена $H(f) < 0$, направление поиска минимума целевой функции необходимо заменять. В работе предложено на итерациях, где матрица вторых производных отрицательная для определения направления убывания целевой функции использовать градиентные методы [140].

Основные достоинства метода Ньютона второго порядка:

1) если функция квадратичная, то для нахождения минимума целевой функции $f(x)$, при «**близком»** расположении предварительных значений определяемых параметров к истинным значениям, необходима одна итерация;

2) использование вторых частных производных в итерационном процессе, позволяет увеличить скорость сходимости, также повысить точность получаемых результатов;

3) данный метод менее чувствителен к выбору начального значения параметра, нежели методы первого порядка.

В случае если целевая функция $f(x)$ не является квадратичной, то необходимо k итераций для достижения точки экстремума, пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса [60].

Метод Ньютона второго порядка имеет ряд существенных недостатков, которые усложняют процесс его реализации и которые следует учитывать при его использовании для решения оптимизационной задачи. Рассчитывая численным способом производные первого и второго порядка (конечные разности), снижается точность и скорость метода. Это происходит не только из-за приближенных вычислений, но также из-за неточной аппроксимации исходной целевой функции. Этот аспект особенно ощутим в пространстве, вокруг точки минимума, так как производные первого порядка становятся достаточно малыми величинами. Когда целевая функция не квадратичная, итерационный процесс может зациклиться. Как было сказано выше, необходимо на каждой итерации проверять положительную определенность матрицы Гессе, так как это является главным условием сходимости метода. Знак матрицы Гессе проверяется по критерию Сильвестра. Сложность задания начального параметра, когда в малой степени определена функция (недостаток исходных данных). Необходимость вычисления вторых частных производных минимизируемой функции. Как было изложено выше, метод Ньютона второго порядка не применялся в геодезии из-за сложности его реализации (на тот момент невозможностью полной автоматизации вычислительного процесса).

Блок-схема метода Ньютона второго порядка для функции двух переменных представлена в Приложении А.

Основным положительным моментом данного метода (по которой его следует использовать в геодезическом вычислительном процессе) является то, что в окрестности точки экстремума скорость сходимость метода велика (квадратичная). Такая высока скорость сходимости метода достигается за счет квадратного трехчлена (21), который получается в результате разложения исходной функции в ряд Тейлора. Данный трехчлен (сформированный за счет вычисления производных первого и второго порядка) позволяет с высокой точностью произвести аппроксимацию выпуклой нелинейной функции в малой окрестности. Стоит учитывать, что метод не будет работать, если матрица Гессе вырождена (определить матрицы равен нулю), данный метод может расходиться при отрицательно определенной матрице Гессе [125].

Автор диссертации считает важным отметить и обосновать причину, по которой данный метод ранее не применялся полноценно в геодезических вычислениях. Определим приближенный объем производимых вычислительных операций, которые необходимо произвести для решения оптимизационной задачи в геодезии – вычисление плоских координат определяемых пунктов в сети трилатерации (измерены только расстояния между пунктами сети). Целевая функция для данной задачи будет сформирована на основе ограничительных условиях метода наименьших квадратов и будет иметь математический вид (4). Предположим, что в сети необходимо определить координаты 25 пунктов, и измерено 90 длин линий между пунктами сети.

Необходимо составить целевую функцию. Сначала нужно вычислить по предварительным значениям координат длину стороны сети S_i^B по формуле (26):

$$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}, \tag{26}$$

где x_n, y_n – предварительные значения координат пунктов, n – порядковый номер пункта в сети.

Посчитаем сколько нужно сделать вычислений для формирования целевой функции:

1) $x_{n+1} - x_n$ – вычитание координат по оси X;

2) $(x_{n+1} - x_n)^2$ – возведение приращения координат по оси X в квадрат;

3) $y_{n+1} - y_n$ – вычитание координат по оси Y;

4) $(y_{n+1} - y_n)^2$ – возведение приращения координат по оси Y в квадрат;

5) $(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2$ – сложение квадратов приращений;

6) $\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2}$ – извлечение квадратного корня для определения расстояния между пунктами.

Нужно сделать 6 вычислений для одной длины, то есть 540 вычислений для 90 длин линий. После этого необходимо сформировать целевую функцию (4). То есть от каждой длины стороны вычисленной по формуле (26) отнять длину измеренную (90 операций) и возвести каждую разность в квадрат (90 операций), так как решать задачу будем по методу наименьших квадратов и сложить данные отклонения (90 вычислений). Для создания целевой функции необходимо выполнить 810 вычислительных операций.

Далее необходимо применить формулу (24) для нахождения минимума функции (4). Сначала необходимо составить матрицу градиента ∇f. Определяемых параметров 50 (две координаты (x и y для 25 пунктов), значит размерность матрицы будет 50×1(строка это значение первой производной для каждого параметра от функции (4) (50 операций). Дальше необходимо составить матрицу Гессе Hразмерностью 50×50, то есть 2500 элементов в матрице (столько же операций). Необходимо вычислить обратную матрицу H^{-1}(примерно 5000 операций), потом умножить матрицу H^{-1} на матрицу ∇f (примерно 4250 операций). Прибавление поправок к предварительным значениям координат (50 операций). Для проверки условия сходимости необходимо примерно 200 операций. Также необходимо учесть количество вычислений для каждой отдельной производной (примерно 15000).

Для одной итерации необходимо выполнить примерно 27050 операций. При хорошо вычисленных предварительных значениях определяемых координат, метод может найти решения за две (три) итерации. Также необходимо по критерию Сильвестра проверять знак матрицы Гессе (15000 операций). Поэтому для решения данной задачи при идеальных условиях и долгой подготовки необходимо выполнить минимально 96150 операций. Однако, стоит учитывать, что в оперативной памяти компьютера должно быть место для хранения информации о матрицах, ведь если определяемых параметров 50, то матрица Гессе будет состоять из 2500 элементов, а ее необходимо также сделать обратной для этого изначальную матрицу необходимо сохранить в оперативной памяти компьютера. Это был один из аспектов, почему ранее метод Ньютона второго порядка не применялся в геодезии – из-за «**дороговизны**» каждой итерации. Следовательно, ранее обработка большого числа данных, полученных в ходе полевых работ, указанным методом была практически (физически) невозможной.

2.3 Критерии остановки итерационных процессов

Процесс нахождения оптимального решения, с использованием методов нелинейного программирования имеет итерационный характер, это означает, что при увеличении количества итераций повышается вероятность прийти к верному решению. Однако любой итерационный процесс должен быть конечен, иначе это приведет к зацикливанию алгоритма. Задания условий конечности итерационного процесса является важным аспектом в правильности работы оптимизационных методов. В оптимизации в качестве ограничителя итерационного вычислительного процесса выступает критерий (правило) остановки. Именно этот критерий задает точность (с точки зрения математики, но не геодезии) достижения решения, а также эффективность метода и количество вычислений.

Наиболее распространены в теории оптимизации нижеперечисленные критерии остановки.

1. По абсолютной величине разности последующего и предыдущего значения определяемого параметра (27):

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| \le \varepsilon. \tag{27}$$

2. По абсолютной величине разности значений целевой функции на последующей и предыдущей итерации (28):

$$\left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \le \varepsilon. \tag{28}$$

3. По абсолютному значению производной целевой функции на текущей итерации (29):

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \le \varepsilon \right|. \tag{29}$$

Использование только одного из критериев может привести к «ложному решению, поэтому рекомендуется в программном алгоритме учитывать несколько критериев остановки итерационного процесса [135]. Во всех трех критериях значения критерия остановки меньше заранее известного числа ε. Это число пользователь задает сам, исходя из практического опыта решения задач либо предварительно вычислив его по формулам.

Выбор верного значения ε является важнейшим элементом правильного решения оптимизационной задачи. Как видно из рисунка 7, на k- той итерации произошла остановка вычислительного процесса, согласно выбранному критерию и значению ε. На рисунке 7 можно точно увидеть и понять смысл того, что достичь истинного значения экстремума $x_{истинный}$ является достаточно сложной задачей и всегда сопровождается ошибкой приближения.

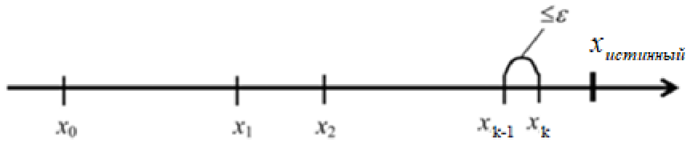


Рисунок 7 – Схема итерационного процесса с критерием остановки

Выполнение итерационной процедуры позволило вычислить только приближенное значение определяемого параметра, при этом следует учитывать, что при любом численном решении есть погрешность вычисления $|x_{истинное} - x_k|$.

Где $x_{истинное}$ – это истинное значение определяемого параметра, которое никогда нельзя узнать, но к нему можно максимально приблизиться. Это особенность и общее свойство всех итерационных методов.

Вычислительный процесс следует остановить, если:

1) достигнута требуемая точность вычисления определяемого параметра;

2) вычисленные параметры не удовлетворяют заданной точности, но скорость продвижения к экстремуму так упала, что нет смысла продолжать дальше;

3) выбранный метод начал расходиться или зациклился [135].

На практике, критерием прерывания по второй или третьей причине является выполнение предельно допустимого числа итераций. Пользователю рекомендуется всегда при создании программных модулей для автоматизации вычислений, учитывать этот критерий и вводить в программу, даже если есть большая уверенность в благополучном завершении вычислений.

2.4 Способы вычисления производных

В работе автор анализирует данные полученные при использовании методов первого и второго порядка, которые в итерационном процессе используют производные различного порядка. Поэтому автор считает нужным отметить в работе, способы позволяющие вычислять производные различного порядка.

Основной сложностью использования методов нелинейного программирования первого и второго порядка является вычисление производных. Особенно это проблема остро встает, если целевая функция задана сложными уравнениями, с множеством параметров. Либо целевая функция вовсе задана не аналитически (возможно в табличном виде). Тогда использование классического способа определения значения производных (таблицы производных) затруднительно. В различных программных продуктах прописаны дополнительные модули, позволяющие автоматизировать процесс вычисления производных. Например, в таком многофункциональном программном продукте как MathCAD 15 есть функции позволяющие вычислить производные различного порядка (рисунок 8).

$$fq \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dxp} z(xp, yp, zp) \\ \frac{d}{dyp} z(xp, yp, zp) \\ \frac{d}{dzp} z(xp, yp, zp) \end{pmatrix}$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dxp^2} z(xp, yp, zp) & \frac{d}{dxp}\left(\frac{d}{dyp} z(xp, yp, zp)\right) & \frac{d}{dxp}\left(\frac{d}{dzp} z(xp, yp, zp)\right) \\ \frac{d}{dyp}\left(\frac{d}{dxp} z(xp, yp, zp)\right) & \frac{d^2}{dyp^2} z(xp, yp, zp) & \frac{d}{dyp}\left(\frac{d}{dzp} z(xp, yp, zp)\right) \\ \frac{d}{dzp}\left(\frac{d}{dxp} z(xp, yp, zp)\right) & \frac{d}{dzp}\left(\frac{d}{dyp} z(xp, yp, zp)\right) & \frac{d^2}{dzp^2} z(xp, yp, zp) \end{bmatrix}$$

Рисунок 8 – Программные возможности MathCAD 15 для вычисления производных

Однако при реализации алгоритмов в других программных средах, к примеру, в VBA пользователю необходимо самостоятельно вычислять производные, либо с помощью создания программных модулей, либо с помощью дополнительных библиотек.

Одним из способов вычисления производных, является численное дифференцирование. К нему математики обращаются тогда, когда необходимо определить производные различного порядка от целевых функций, сформулированных в табличной форме, или же целевая функция имеет большое число аргументов что ведет к усложнению процесса дифференцирования. Последнее ситуация чаще всего складывается, например, когда целевая функция имеет сложный аналитический вид, одним из способов решения данной проблемы является интерполяция производной.

Для вычисления производной первого порядка можно воспользоваться формулой (30):

$$\frac{\delta f(x_1, \ldots, x_n)}{\delta x_n} = \frac{f(x_1 + h, \ldots, x_n) - f(x_1 - h, \ldots, x_n)}{2 \cdot h}, \tag{30}$$

где $\frac{\delta f(x_1, \ldots, x_n)}{\delta x_n}$ – производная первого порядка целевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по параметру x_n; h – малое приращение к аргументу целевой функции [118].

Значение приращения h влияет на точность полученного значения производной и на объем вычислений. При выборе очень малого h ошибки округления при вычислении на компьютере могут быть сравнимы или больше h. Алгоритм уменьшающий ошибку вычисления производной представлен формулой (30). Формула (30) называется центральной разностной схемой и согласно работе [118] является наиболее лучшим способом вычисления производной первого порядка.

По аналогии с получением разностной схемы для вычисления производной первого порядка целевой функции можно сформировать формулу для определения производной второго порядка целевой функции. Формулу для вычисления производной второго порядка можно записать в виде (31):

$$\frac{\delta f(x_1,\ldots,x_n)}{\delta x_n \delta x_n} = \frac{f(x_1+h,\ldots,x_n) - 2f(x_1,\ldots,x_n) + f(x_1-h,\ldots,x_n)}{h^2}, \tag{31}$$

где $\frac{\delta f(x_1,\ldots,x_n)}{\delta x_n \delta x_n}$ – производная второго порядка целевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по параметру x_n.

Важным моментом, является вычисление смешанных производных, так как они являются основой составления матрицы Гессе, их также можно вычислить численными методами с применением разностных схем по формуле (32):

$$\frac{\delta f(x_1,...,x_n)}{\delta x_n \delta x_{n+1}} = \frac{f(x_1+h, x_2+h,...,x_n) - f(x_1, x_2+h...,x_n) - f(x_1+h, x_2...,x_n) + f(x_1, x_2,...,x_n)}{h^4}. \tag{32}$$

2.5 Отличие методов первого и второго порядка от классических строгих методов уравнивания применяемых в геодезии

На протяжении долгого периода времени, в геодезии было принято решать оптимизационные задачи строгими способами уравнивания (коррелатным и параметрическим), с применением в качестве ограничивающего условия метода наименьших квадратов. Это было вызвано ограничениями в методах автоматизации вычислительного процесса. Поэтому применились методы, позволяющие за малое количество приближений получить ответ, который удовлетворяет требуемой точности. Стоит отметить, что параметрический метод вытеснил на сегодняшний момент коррелатный, по нескольким причинам [21]:

1) коррелатный способ требует составление условных уравнений – это затрудняет реализацию метода в программной среде, а также составление условных уравнений является затруднительным процессом при уравнивании больших геодезических построений;

2) применение параметрического метода позволяет пользователю довольно легко автоматизировать процесс вычислений (составление исходных уравнений поправок) и выполнять полную оценку точности измеренных величин и их функций.

Теория параметрического уравнивания подробно рассмотрена в работах [45, 104, 106]. Общий алгоритм данного метода, представляет собой нижеприведённую последовательность операций, которая подробна приведена в работе [21]:

1) пользователь задает искомые параметры и производит создание параметрических уравнений;

2) выполняется вычисление предварительных значений определяемых параметров и создание матрицы-вектора поправок τ к предварительным значения параметров;

3) вычисляется матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок B;

4) создается матрица-вектор свободных членов L;

5) создается система параметрических уравнений по формуле (33)

$$V = B \cdot \tau + L, \tag{33}$$

где V – вектор поправок к результатам измерений [21, 45];

6) производится поиск решения системы параметрических уравнений поправок с ограничительным условием метода наименьших квадратов.

В процессе оценки точности полученных значений параметров определяются такие величины как: средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, обратную весовую матрицу Q уравненных параметров [21, 104].

В качестве примера оценки точности, приведены формулы для пространственной сети, в которой у определяемых пунктов три координаты (x, y, z). Среднеквадратическую ошибку единицы веса μ можно вычислить по формуле (34):

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{u-h}}, \tag{34}$$

где P – весовая матрица результатов измерений; V – матрица поправок к результатам измерений; u – число выполненных измерений; h – число необходимых измерений [21].

Обратная весовая матрица Q уравненных координат для одного определяемого пункта будет иметь вид (35):

$$Q = \begin{pmatrix} q_x & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_y & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_z \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где q_x, q_y, q_z – обратные веса определяемых параметров x, y, z [21].

Средняя квадратическая ошибка m_x положения координаты x определяемого пункта определяется по формуле (36):

$$m_x = \mu \cdot \sqrt{q_x}. \tag{36}$$

Вычисление m_y и m_z для координат y и z производится по такой же формуле (36). Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта вычисляется по формуле (37):

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \qquad (37)$$

Стоит отметить, что сам процесс уравнивания геодезических измерений с использованием параметрического или коррелатного методам требует значительно меньших затрат со стороны производительных мощностей **современных** компьютеров по сравнению с методами второго порядка, за счет использования первых производных целевой функции. Однако, чтобы за одно приближение найти значения определяемых параметров, необходимо выполнить этап предобработки и с высокой точностью вычислить предварительные значения определяемых параметров.

Принципиальная схема сравнения параметрического способа уравнивания и метода Ньютона второго порядка представлена в Приложении Б.

Стоит отметить основные отличия применения методов нелинейного программирования по сравнению с классическими методами:

1) использование методов нелинейного программирования, особенно второго порядка, дает возможность решать большие системы нелинейных уравнений вычислительными алгоритмами, которые наиболее приспособленны для реализации на ЭВМ по средствам написание программных модулей;

2) методы нелинейного программирования дают возможность решать оптимизационные задачи без линеаризации исходных параметрических уравнений, подтверждение данной мысли можно найти в работах В.И. Мицкевича [115, 118, 120], З.М. Юршанского [166];

3) самое главное и актуальное для современной геодезии – использование методов нелинейного программирования позволяет уравнивать геодезические построения не только по методу наименьших квадратов, но и другими способами в соответствии с выбранной целевой функции.

2.6 Оценка точности полученных результатов с использованием методов нелинейного программирования

Вопрос оценки точности полученных результатов является для геодезии достаточно важным аспектом. Именно поэтому этот вопрос занимает особое место в современных исследованиях по применению новых методов в решении вновь возникающих производственных оптимизационных геодезических задач. Использование параметрического способа уравнивание дает исполнителю готовый алгоритм оценки точности, который описан в п.2.4. Использование напрямую методов нелинейного программирования не дает сразу ответ на вопрос, с какой точностью получены определяемые параметры. Существуют критерии остановки итерационного процесса, которые описаны в п.2.3, однако эти величины не могут выступать критериями точности в геодезическом смысле слова, так как не позволяют найти такие параметры как: весовую матрицу, среднюю квадратическую ошибку положения определяемого пункта и т.д.

Стоит учитывать, что использование новых методов нелинейного программирования в геодезическом вычислительном процессе сопровождается рядом трудностей, в первую очередь нельзя в явном виде создать обратную весовую матрицу Q. Это связано с тем, что алгоритмы многих методов нелинейного программирования не предусматривают формирование матрицы нормальных уравнений неизвестных параметров.

Выполнению оценки точности данных полученных в ходе использования методов нелинейного программирования посвящено ряд трудов. В частности Г.В. Макаров в работе [101] особо уделил внимание вопросу оценки точности значений искомых параметров с использованием методов прямого поиска. В.И. Мицкевич в своих работах [113, 116, 118, 119] указывал на возможность оценки точности значений параметров, полученных методами нелинейного программирования, в частности с использованием метода Ньютона второго порядка. В.И. Мицкевич в докторской работе [118] приводит лично разработанный алгоритм оценки точности. В.И Мицкевич также в работе [101] отмечает, что фрагмент обратной матрицы весов можно получить обобщённым способом Г.В. Макарова.

Алгоритм выполнения оценки точности координат пунктов геодезической сети, значения которых были получены с применением методов нелинейного программирования (методы прямого поиска) приведен в работах [101, 114, 164]. В. И. Мицкевич в работе [116] доказал возможность данным способом производить оценку точности значений определяемых параметров. Г.Г. Шевченко в своих работах [163, 164] конкретизировала и применила данный алгоритм для оценки точности значений определяемых параметров, которые были полученные с применением методов прямого поиска.

Исходя из анализа вышеперечисленных трудов, автор диссертации считает возможным применить данный метод оценки, разработанный В.И. Мицкевичем, в диссертационной работе для оценки точности определяемых параметров полученных при решении произвольной оптимизационной геодезической задачи с использованием метода Ньютона второго порядка. Ниже приведен алгоритм, по которому будет производиться оценка точности в работе.

Пусть было определено n параметров целевой функции $f(x^1,\dots,x^n)$, для которых необходимо произвести оценку точности полученных значений. Необходимо выполнить следующие вычисления:

1. В результате выполнения итерационного процесса с учётом критерия остановки было получено минимальное значение функции $f_{\min}$.

2. К первому определяемому параметру x^1 добавляется приращение Δx^1 и вычисляется новое значение целевой функции $F(x^1+\Delta x_1, x^2,..., x^n)$.

3. После этого от первого определяемого параметра x^1 отнимается приращение Δx^1 и вычисляется значение целевой функции $F(x^1-\Delta x_1, x^2,..., x^n)$.

4. Вычисляется изменение значения целевой функции $\Delta F_1 = F(x^1+\Delta x_1, x^2,...x^n) - 2f_{\min} + F(x^1-\Delta x_1, x^2,...x^n)$.

5. Ко второму определяемому параметру x^2 прибавляется приращение Δx_2 и вычисляется новое значение целевой функции $F(x^1, x^2+\Delta x_2, x^3,..., x^n)$.

6. После этого от второго определяемого параметра x^2 отнимается приращение Δx_2 и вычисляется значение целевой функции $F(x^1, x^2-\Delta x_2, x^3,..., x^n)$.

7. Вычисляется изменение значения целевой функции $\Delta F_1 = F(x^1, x^2+\Delta x_2,...x^n) - 2f_{\min} + F(x^1, x^2-\Delta x_2,...x^n)$.

8. К оставшимся параметрам x^n аналогично добавляются и отнимаются приращения Δx_n и вычисляются изменения целевой функции $\Delta F_n = F(x^n+\Delta x_n) - 2f_{\min} + F(x^n-\Delta x_n)$.

9. После этого одновременно задаются приращения Δx_1 и Δx_2 к параметрам x^1 и x^2.

10. Вычисляется изменение целевой функции ΔF_{12} (38):

$$\begin{aligned}&F(x^1+\Delta x_1, x^2+\Delta x_2,..., x^n) - F(x^1+\Delta x_1, x^2-\Delta x_2,..., x^n) - F(x^1-\Delta x_1, x^2+\Delta x_2,..., x^n) + \\ &+F(x^1-\Delta x_1, x^2-\Delta x_2,..., x^n).\end{aligned} \tag{38}$$

9. По аналогии задаются приращения Δx_1 и Δx_3, Δx_2 и Δx_3 ,и так далее, после этого вычисляются изменения целевой функции соответственно ΔF_{13}, ΔF_{23} и т.д.

10. Определяются коэффициенты нормальных уравнений неизвестных лежащих на диагонали матрицы по формулам (39):

$$N_{11} = \frac{\Delta F_1}{\Delta x_1^2};\; N_{22} = \frac{\Delta F_2}{\Delta x_2^2};\; N_{nn} = \frac{\Delta F_n}{\Delta x_n^2}. \tag{39}$$

11. Вычисление соответствующих недиагональных элементов матрицы коэффициентов нормальных уравнений неизвестных выполняется по формулам (40):

$$N_{12} = \frac{\Delta F_{12}}{2\cdot\Delta x_1\cdot 2\Delta x_2};\; N_{13} = \frac{\Delta F_{13}}{2\cdot\Delta x_1\cdot 2\Delta x_3}. \tag{40}$$

12. Составляется матрица коэффициентов нормальных уравнений по формуле (41):

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1n} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n1} & N_{n2} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

13. Составляется обратная весовая матрица уравненных искомых параметров по формуле (42):

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

14. Вычислить среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ можно по формуле (43):

$$\mu = \sqrt{\frac{f_{\min}}{u-h}}. \tag{43}$$

15. По формуле (36) вычисляются средние квадратические ошибки определяемых параметров.

Выше представлен общий алгоритм оценки точности значений определяемых параметров методами нелинейного программирования, разработанный В.И. Мицкевичем и применяемый автором диссертации в работе. Данный алгоритм подходит и для методов прямого поиска и для методов первого и второго порядка.

Стоит отметить, что В.И. Мицкевич в своих работах [113, 116, 118, 119] утверждает, что при оптимизации с использованием целевой функции МНК по методу Ньютона второго порядка для составления обратной весовой матрицы можно использовать матрицу Гессе по формуле (44):

$$Q = 2H^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^1 \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^1 \partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^2 \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n \partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{44}$$

В диссертационной работе, для оценки точности полученных значений определяемых параметров по методу Ньютона второго порядка будет, обратная весовая матрица будет составляться по формуле (44).

2.7 Выводы по Главе 2

Развитие геодезической измерительной технике позволило: получать за короткий промежуток времени большой массив информации об исследуемом объекте, а также дает «толчок» к появлению новых производственных задач, которые достаточно сложно, либо трудозатратно по времени решать классическими геодезическими методами. С другой стороны развитие вычислительной техники (появление мощных персональных компьютеров) позволяет решать вновь появившиеся оптимизационные геодезические задачи с применением новых методов позволяющих оптимизировать процесс обработки геодезических данных, в частности используя методы нелинейного программирования.

Современная вычислительная техника позволяет производить вычислительные эксперименты с большим объемом информации и делать на основе полученных результатов выводы об эффективности того или иного метода для решения конкретной задачи.

Оптимизационные задачи в геодезии были всегда, так как геодезист всегда стремится к избыточности измерений. Решались эти задачи классическими методами, разработанными специально для конкретных геодезических задач. Стоит отметить, что из-за невозможности автоматизации вычислительного процесса, разработанные строгие методы уравнивания (коррелатный и параметрический метод) требовали предварительной подготовки задачи к решению, что усложняло сам процесс решения. В теории оптимизации, были известны и другие методы решения поставленных задач, в первую очередь методы нелинейного программирования второго порядка, однако долгое время эксперименты по исследованию их эффективности и правильности работы не проводились из-за технических ограничений. Без мощных, быстродействующих компьютеров не возможна обработка больших объемов информации с высокой скоростью, а также применения большого спектра методов нелинейного программирования, так как они по сути своей являются итерационными, а это ведете к большому объему вычислений на каждой итерации.

Алгоритмы методов нелинейного программирования второго порядка были сформулированы и разработаны до того, как появилась возможность их реализации на практике, поэтому изучение их эффективности, производительности и правильности работы при решении многих задач просто необходима.

Во второй главе представлены положительные и отрицательные стороны методов нелинейного программирования, которые будут использованы в работе для тестирования производительности вычислительного процесса, а именно: градиентного метода, метода наискорейшего спуска, метода сопряженных градиентов и метода Ньютона второго порядка. Раскрыты особенности реализации каждого из приведенных методов, а так же сложности с которыми может столкнуться пользователь. Представлены общие формулы каждого метода, по которым будет строиться итерационный процесс и способы их получения.

Основываясь на теоретические исследования основным, наиболее лучшим методом решения оптимизационных геодезических задач является метод Ньютона второго порядка. Основным плюсом данного метода является квадратическая скорость сходимости решения и большая область сходимости метода, по сравнению с методами первого порядка. Основным недостатком сложный вычислительный процесс.

Во второй главе также описаны способы вычисления производных, это очень важно, так как методы первого и второго порядка используют в итерационном процессе производные, которые необходимо вычислять на каждой итерации.

Важным моментом является выбор критерия остановки вычислительного процесса, можно выделить три основных критерия: разность по абсолютной величине значений определяемых параметров на смежных итерациях, значение целевой функции и значение производной. В зависимости от степени сложности решаемой задачи можно выбрать либо один критерий, либо одновременно три – это решение остается за пользователем.

Основным аспектом в геодезии является оценка точности значений полученных в ходе вычислительного процесса. Приведены основные положения по оценке точности полученных значений методами нелинейного программирования. Анализ научных работ Г.В. Макарова [101], В.И. Мицкевича [113, 116, 118, 119] и Г.Г. Шевченко [163, 164], позволил привести в диссертационной работе общий алгоритм для выполнения оценки точности параметров полученных методами нелинейного программирования.

ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВНИЕ РАБОТЫ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ПРИ РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

3.1 Решение тестовых оптимизационных геодезических задач для исследования производительности метода Ньютона второго порядка

На основе теории содержащейся в разделах 2.1 и 2.2, были разработаны программные алгоритмы, позволяющие применить методы нелинейного программирования первого и второго порядка для исследования их работы и анализа полученных данных. В данном разделе приведены результаты и анализ решения следующих тестовых оптимизационных геодезических задач:

1) определение параметров перехода между плоскими прямоугольными системами координат с целью оценки стабильности опорных и деформационных геодезических сетей;

2) определение параметров перехода между пространственными прямоугольными системами координат;

3) вычисление координат определяемого пункта в многократной пространственной линейной засечке;

4) решение многократной линейной засечки в пространстве с двумя определяемыми пунктами;

5) решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости;

6) получение координат определяемых пунктов в плановой сети трилатерации (с разным числом определяемых пунктов);

7) аппроксимация функции для автоматизированного построения сечения по массиву точек.

Решение тестовых задач выполнено с целью анализа работоспособности **метода Ньютона второго порядка** и проверки возможности его применения в обработке геодезических измерений, а также выявить проблемы, возникающие в ходе использования данного алгоритма и осознать пути их решения. Метод Ньютона второго порядка сравнивается с методами первого порядка, а именно с методами, описанными в разделе 2.2. В ходе вычислительного эксперимента было принято, что исходные данные не содержат грубых ошибок. Измерения были смоделированы с искажениями по нормальному закону распределения.

3.1.1 Определение параметров перехода между плоскими прямоугольными системами координат для оценки стабильности опорных и деформационных геодезических сетей

При выполнении маркшейдерско-геодезических работ (сканирование тоннеля, исполнительная съемка зданий и сооружений) часто возникает задача пересчета координат точек из условной прямоугольной системы координат в глобальную систему координат [167], данную задачу однозначно можно решить с помощью параметров перехода (рисунок 9).

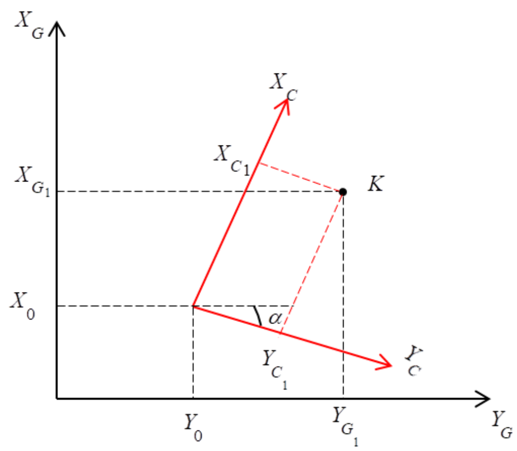


Рисунок 9 – Графическое представление параметров перехода

Стоить отметить, что сама задача определения параметров перехода между системами координат не нова, есть смысл ее решать для использования значений параметров в конкретных прикладных задачах, как например оценка стабильности опорных сетей. Под оценкой стабильности следует понимать контроль «незыблемости» координат (плановых и (или) высотных) опорных пунктов.

Решение данной задачи позволяет ответить на такие вопросы как:

1) какие пункты опорной сети являются нестабильными;

2) какие именно координаты опорных пунктов принять в текущем цикле наблюдений.

Решить задачу по оценки стабильности плановой опорной сети, можно на основе определения параметров перехода (ключи перехода) между двумя плоскими системами прямоугольных координат в различных циклах наблюдений. Если есть более двух опорных пунктов с известными координатами в различных системах координат, то возникает неопределённость решения задачи, которая требует оптимизации. Автор диссертации для определения параметров перехода (X_0, Y_0, α, t) использует целевую функцию (5) (созданную на основе МНК) и для вычисления определяемых параметров находит минимум данной функции с использованием методов нелинейного программирования описанными в Главе 2. Координаты опорных пунктов, которые применялись для вычисления параметров перехода, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для вычисления параметров перехода

Номер пункта	Начальный цикл		Текущий цикл	
	$X^{Г}, м$	$Y^{Г}, м$	$X^{М}, м$	$Y^{М}, м$
1	404.090	573.169	394.352	421.905
2	833.150	726.583	847.786	377.192
3	779.455	1121.626	968.127	757.281
4	338.543	1057.181	541.977	887.468
5	527.757	869.928	632.991	637.318
6	612.390	681.469	628.946	430.773
7	635.985	977.998	776.988	689.002
8	941.450	834.883	991.996	428.808

Используя методы нелинейного программирования, была произведена минимизация целевой функции (5). Задача была решена в среде Mathcad15 путем написания специальных программных модулей. Программа Mathcad15 была выбрана, так как позволяет человеку не сильно знающему языки программирования очень быстро создать программу для вычисления с помощью встроенных функций. Однако программная среда Visual Basic for Applications (VBA) является более благоприятной средой для создания программ. Поэтому автор диссертации реализовал решение данной задачи с использованием метода Ньютона второго порядка путем создания специальной программы (Приложение В). Значения определяемых параметров и характеристики итерационного процесса при задании предварительных значений определяемых параметров далеко от точки минимума целевой функции, представлены в Приложении Г. Однако стоит отметить, что в геодезии грубое задание начальных параметров практически исключено. Данный пример был представлен для того, что показать меньшую зависимость сходимости метода Ньютона второго порядка от начальных значений определяемых параметров, по сравнению с методами использующие производные первого порядка. Используя метод Ньютона второго порядка нет необходимости тратить время на более точное определение предварительных значений искомых параметров. Также стоит отметить, что метод сопряженных градиентов нашел локальный минимум и итерационной процесс остановился, об этом можно судить по значению целевой функции. Решение поставленной задачи было выполнено вновь, но предварительные значения были указаны ближе к точке минимума целевой функции (Приложение Д).

На рисунке 10 изображен итерационный процесс вычисления параметров X_0 и Y_0 с применением четырех методов, данные для графического представления поиска взяты из Приложения Д. Можно увидеть, что вычисление определяемых параметров с использованием метода Ньютона второго порядка происходит по более крутой траектории за счет использования вторых производных в итерационном процессе, по сравнению с другими методами. На рисунке 11 представлена в графической форме информация о числе итераций, которые необходимо произвести для достижения точки минимума целевой функции. Методу Ньютона второго порядка требуется меньшее число приближений при одинаковых исходных данных, по сравнению с другими методами.

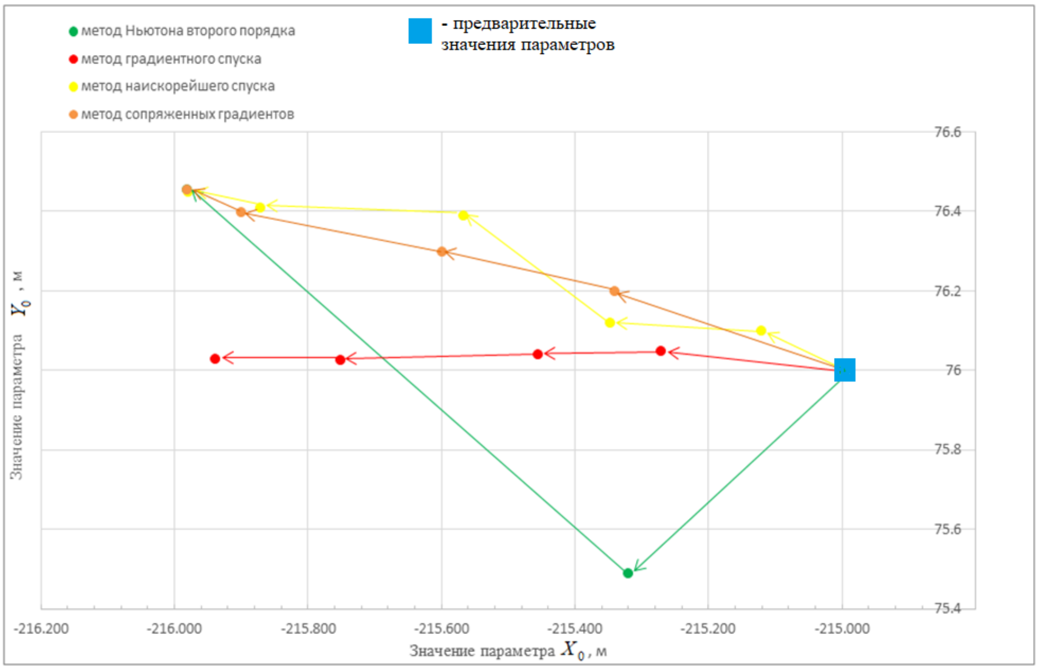


Рисунок 10 – Графическое представление вычисления параметров X_0 и Y_0

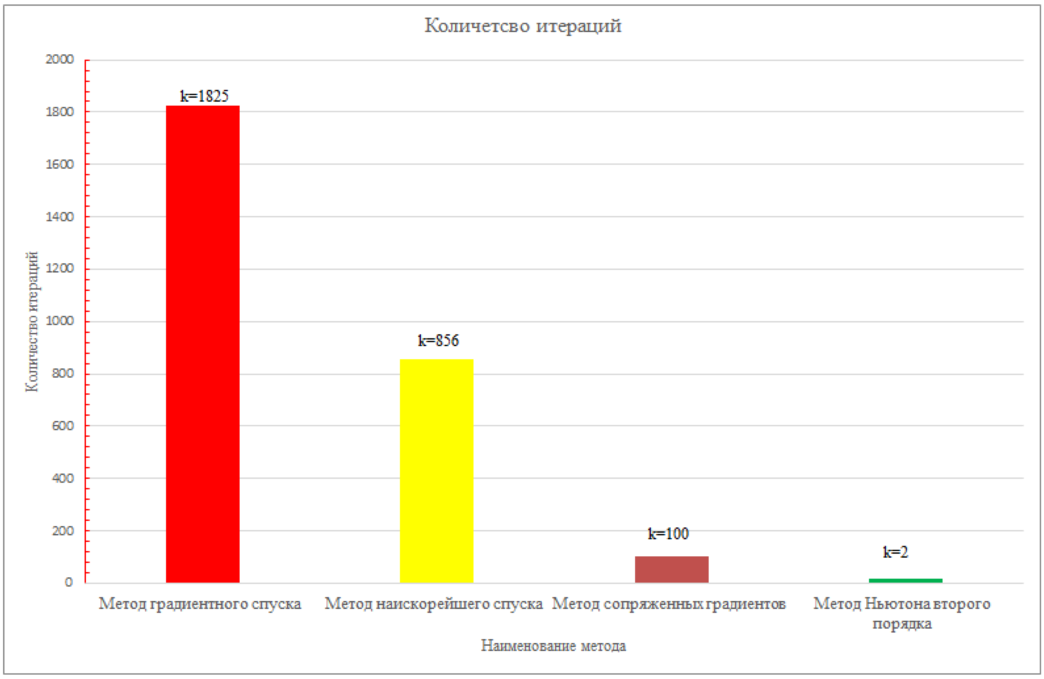


Рисунок 11 – Зависимость числа итераций k от выбранного метода X_0 и Y_0 при одинаковых предварительных значений определяемых параметров

На основе вычислительного эксперимента, была получена информация о области сходимости применяемых методов (рисунок 12) при решении поставленной задачи. На рисунке представлена информация о границах в которых может быть выбрано предварительное значение определяемого параметра X_0. Видно, что метод Ньютона второго порядка обладает гораздо большей областью сходимостью, по сравнению с методами первого порядка. Пунктирной линией показано значения параметра, при котором достигается минимум целевой функции.

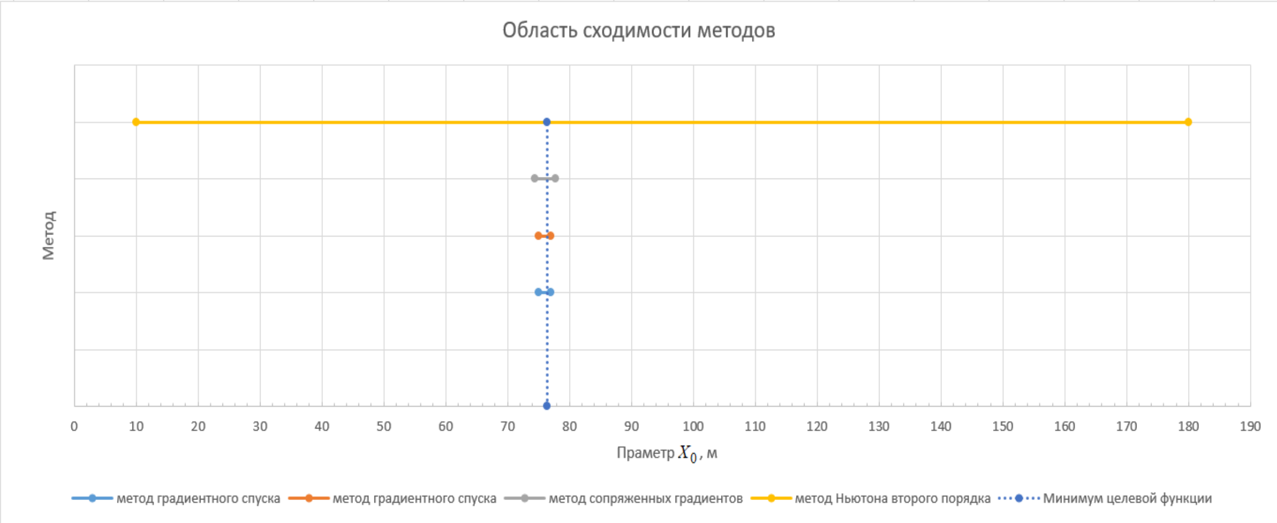


Рисунок 12 – Область сходимости методов при вычислении параметра X_0

После вычисления параметров связи, можно математически выразить связь между координатами пунктов в двух циклах. Для оценки допустимых смещений пункта можно применить критерий Граббса-Смирнова [62]. Зная параметры перехода, можно вычислить изменения координат пунктов опорной сети и сделать вывод, основываясь на критерии Граббса-Смирнова допустимо смещение или нет. Для геодезии важным моментом является вопрос оценки точности полученных результатов, поэтому в таблицах в Приложении Г и Приложении Д приведена информация по оценки точности полученных параметров, выполненная по методике представленной в разделе 2.6.

3.1.2 Определение параметров перехода между пространственными прямоугольными системами координат

Перевычисление пространственных прямоугольных координат из местной системы в глобальную необходимо выполнять в различных областях геодезии. Например, при выполнении исполнительной съемки с использованием тахеометра с различных точек стояния, после необходимо приводить полученные результаты в единую систему координат. Такая же задача возникает при сканировании различных объектов, когда необходимо объединять результаты измерения в единую систему координат для построения цифровой модели (рассмотрено в Главе 1). В.А. Коугия одним их первых предложил для упрощения вычислительного процесса решать данную задачу с применением градиентных методов.

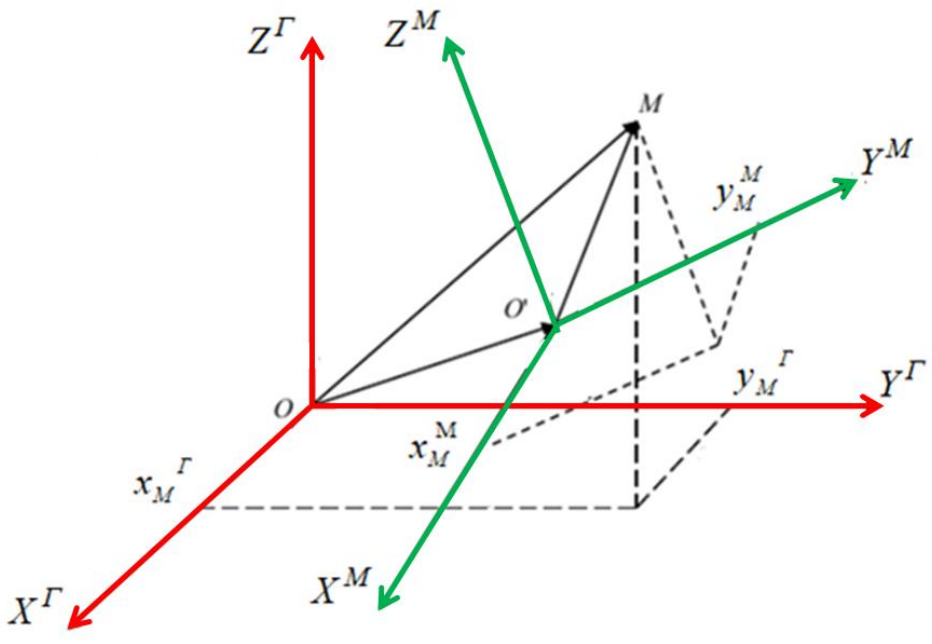


Рисунок 13 – Преобразование прямоугольных координат в пространстве

Переход из одной системы трехмерных прямоугольных координат X^M, Y^M, Z^M к другой системе координат $X^Г, Y^Г, Z^Г$ (рисунок 9) можно осуществить по формуле (45):

$$\zeta = X_Л + R \cdot \vartheta, \tag{45}$$

где ζ – матрица-вектор координат набора точек в глобальной системе координат $(X^Г, Y^Г, Z^Г)$; $X_Л$ – матрица-вектор линейных параметров преобразования (смещения) местной системы координат относительно глобальной; R – ортогональная матрица вращения состоящая из направляющих косинусов; ϑ – матрица-вектор координат набора точек в местной системе координат (X^M, Y^M, Z^M) [85].

Матрицу вращения R можно получить, умножив между собой три матрицы: R_X – матрица поворота местной системы координат на угол α вокруг оси X; R_Y – матрица поворота местной системы координат на угол β вокруг оси Y; R_Z – матрица поворота местной системы координат на угол γ вокруг оси Z. Матрица R является функцией трех переменных α, β, γ [85].

В работе для тестирования производительности методов предполагается, что есть два облако точек в разных системах координат. Чтобы совместить два облако точек и получить модель в единой системе координат необходимо знать элементы ориентирования: линейные –

x_0, y_0, z_0 и угловые – α, β, γ. Значение элементов преобразования, как правило, неизвестны и необходимо зная координаты опорных точек, вычислить данные параметры. Если опорных точек более трех, то возникает задача оптимизации, которая была решена в данной работе с использованием методов нелинейного программирования. Алгоритм решения данной задачи с использованием градиентных методов подробно изложил В.А. Коугия в работе [85].

Алгоритм решения данной задачи заключатся в следующем. Есть n опорных точек, координаты которых известны в двух системах координат, то есть имеется n векторов ζ_n и ϑ_n. Вычитая из каждого вектора координат, первый вектор координат получим (46):

$$\Delta\zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i,\ \Delta\vartheta_i = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i \ \ (i = 1,2,...,n-1). \tag{46}$$

Преобразуя формулу (45) вектор $\Delta\zeta$ можно вычислить по формуле (47):

$$\Delta\zeta_i^{'} = R(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Delta\vartheta_i,\ \ (i = 1,2,...,n-1). \tag{47}$$

Используя ограничение в виде МНК, можно создавать целевую функцию (48):

$$V_i^2 = (\Delta\zeta - R(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Delta\vartheta_i)^2,\ \ (i = 1,2,...,n-1). \tag{48}$$

Путем минимизации целевой функции (48) с использованием методов нелинейного программирования, можно найти угловые параметры α, β, γ.

Зная угловые параметры перехода, можно сформировать матрицу R и по формуле (49) вычислить матрицу $X_Л$ линейных параметров:

$$X_Л = \zeta - R \cdot \vartheta. \tag{49}$$

Для контроля вектор $X_Л$ необходимо вычислить по всем точкам и найти среднее значение по формуле (50):

$$X_{Л_{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - R \cdot \vartheta_i)}{n}. \tag{50}$$

Для оценки точности линейных параметров необходимо вычислить вектор столбец поправок по формуле (51):

$$\begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{bmatrix}_i = X_{Л_{ср}} - (\zeta_i - R \cdot \vartheta_i). \tag{51}$$

В конечном итоге по формуле (52) можно вычислить средние квадратические ошибки параметров x_0, y_0, z_0 :

$$m_{x_0} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_{x_0}^2}}{n-1};\ m_{y_0} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_{y_0}^2}}{n-1};\ m_{z_0} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_{z_0}^2}}{n-1}. \quad (52)$$

Данные полученные в ходе итерационного процесса решения данной задачи представлены в Приложении Е, также представлена информация позволяющая сделать вывод о точности полученных параметров. Стоит отметить, что данную задачу можно было решить и с начальными значениями параметров равными нулю. Метод Ньютона второго порядка справился бы с этой задачей за семь приближений. Этот факт еще раз доказывает, меньшую зависимость работоспособности метода от выбора начальных значений определяемых параметров. Исходные данные для решения данной задачи представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Исходные данные для вычисления параметров перехода в пространстве

Номер пункта	Координаты точек в глобальной системе координат			Координаты точек в местной системе координат		
	$X^{Г}, м$	$Y^{Г}, м$	$Z^{Г}, м$	$X^{M}, м$	$Y^{M}, м$	$Z^{M}, м$
1	4956.485	4598.967	7216.994	3456.252	8562.856	2005.856
2	5102.807	4768.680	7471.611	3565.782	8867.956	2105.656
3	5186.939	4645.399	7795.649	3895.882	8958.856	2205.896
4	5100.152	4666.500	8008.234	4001.658	9002.958	2405.986
5	4804.195	4253.918	8068.621	4221.988	8560.256	2536.102
6	4932.445	3902.448	8805.891	4999.999	8679.456	2789.1567

3.1.3 Вычисление координат определяемого пункта в многократной пространственной линейной засечке

Для решения линейной засечки в пространстве, необходимо знать минимум координаты трех исходных пунктов и измерить три дальности. Если исходных данных больше, то возникает задача уравнивания измерений для получения координат определяемого пункта.

Схема многократной линейной засечки представлена на рисунке 14, исходные данные, полученные в ходе моделирования, представлены в таблице 3.

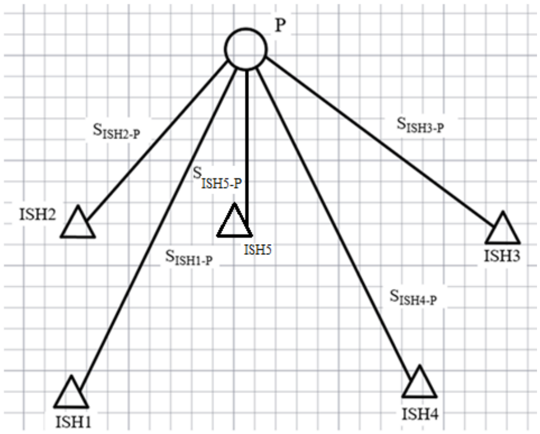


Рисунок 14 – Схема многократной линейной засечки

Требуется определить координаты точки P по координатам пяти исходных пунктов и пяти измеренным расстояниям между исходными и определяемым пунктами.

Таблица 3 – Исходные данные для решения пространственной линейной засечки

Название пункта	Координаты исходных пунктов			Измеренные расстояния	
	$X, м$	$Y, м$	$Z, м$	Название линии	Длина линии, $м$
ISH1	0.000	0.000	5.000	S_{ISH1-P}	129.008
ISH2	160.000	15.000	0.000	S_{ISH2-P}	145.997
ISH3	145.000	185.000	0.000	S_{ISH3-P}	123.958
ISH4	25.000	168.000	0.000	S_{ISH4-P}	79.889
ISH5	123.800	268.500	21.000	S_{ISH5-P}	174.200

Целевая функция созданная с использованием метода наименьших квадратов для многократной линейной засечки имеет вид (53):

$$f(X_P, Y_P, Z_P) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot (S_i^{И} - \sqrt{(x_i - X_P)^2 + (y_i - Y_P)^2 + (z_i - Z_P)^2})^2, \tag{53}$$

где X_P, Y_P, Z_P – пространственные координаты определяемого пункта; k – количество измеренных дальностей; i – порядковый номер измеренной дальности; p_i – вес измерения; $S_i^{И}$ – измеренная дальность; x_i, y_i, z_i – координаты пунктов с известными координатами.

Необходимо найти такие координаты точки P, при которых значение целевой функции (53) примет значение глобального минимума. Результат решения данной задачи представлен в Приложении Ж. Следует отметить, что решение данной задачи актуально при использовании спутниковых технологий, где для определения положения точки на Земле производится многократное решение пространственной линейной засечки путем измерения дальностей от спутников до приемника.

На рисунке 15 представлена графическая интерпретация полученных данных в ходе итерационного процесса, которые представлены в Приложении Ж.

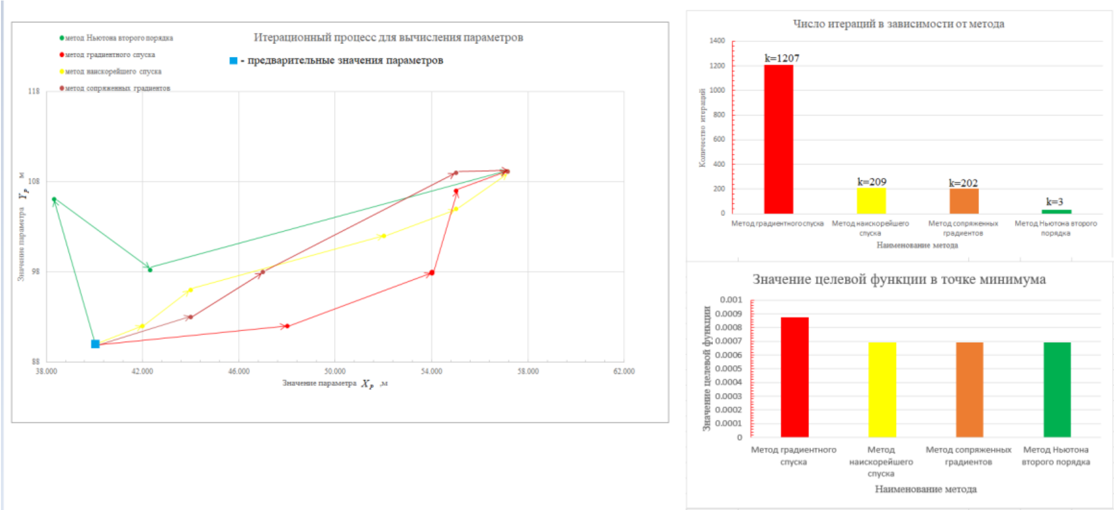


Рисунок 15 – Графическое представление процесса вычисления параметров X_P и Y_P

Из рисунка 15 видно направление выполнения итерационного процесса, метод Ньютона второго порядка позволяет уже на первых итерация (всего три приближения) скачкообразной траекторий попасть в область минимума функции, в то время как методы первого порядка целенаправленно вдоль прямой выполняют движение к этой области, что повышает число итераций.

Оценка точности определения координат определяемого пункта P выполнена по описанной ранее методике (см. раздел 2.6). Информация по оценке точности определяемых параметров также содержится в Приложении Ж.

На рисунке 16 показана область сходимости применяемых методов при определении координат пункта Р. Область сходимости метода Ньютона второго порядка больше по сравнению с методами первого порядка, однако она все же ограничена. Ограниченность области сходимости метода Ньютона второго порядка вызвана тем, что матрица Гессе не может быть отрицательно определена, иначе метод расходится и не позволяет достичь точки минимума функции.

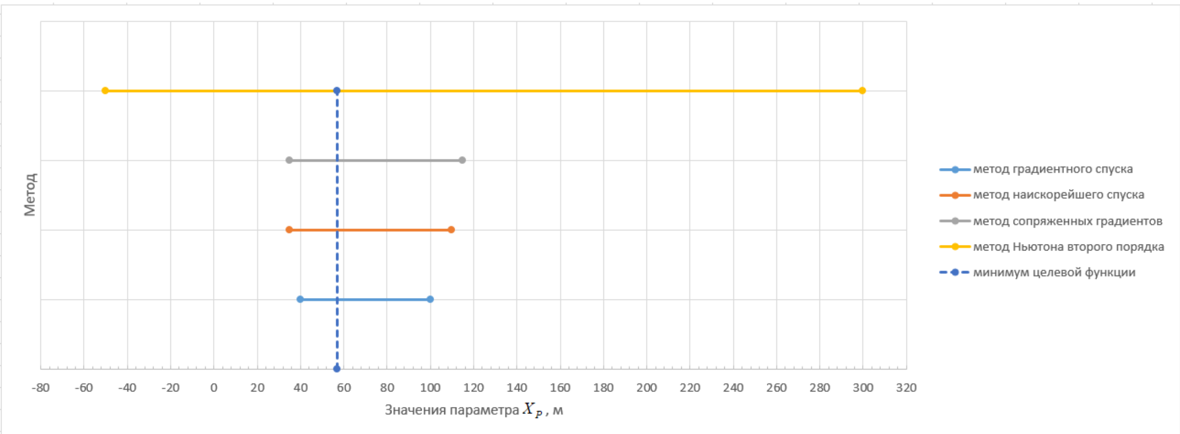


Рисунок 16 – Область сходимости методов при вычислении параметра X_P

3.1.4 Решение многократной линейной засечки в пространстве с двумя определяемыми пунктами

Координаты исходных пунктов и измеренные длины сторон, для решения пространственной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (рисунок 17), представлены в таблице 4.

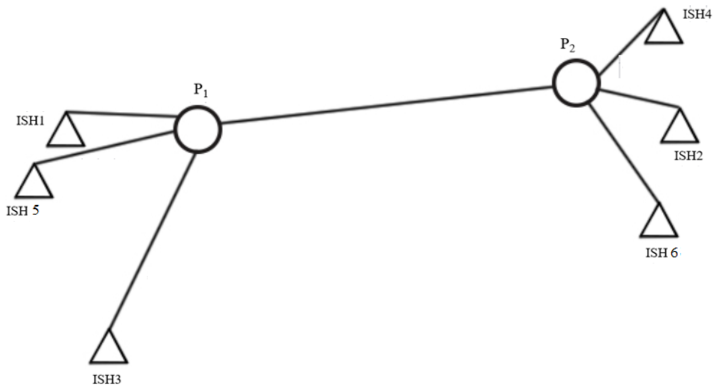


Рисунок 17 – Схема пространственной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами

Таблица 4 – Исходные данные для решения пространственной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами

Название пункта	Координаты исходных пунктов			Измеренные расстояния	
	$X, м$	$Y, м$	$Z, м$	Название линии	Длина линии, м
ISH1	2285.000	1300.000	15.000	$S_{ISH_1-P_1}$	1044.150
ISH2	2285.000	3550.000	25.000	$S_{ISH_3-P_1}$	1182.719
ISH3	315.000	1300.000	100.000	$S_{ISH_5-P_1}$	855.909
ISH4	315.000	3550.000	100.000	$S_{ISH_2-P_2}$	2474.319
ISH5	890.000	1000.000	1.000	$S_{ISH_4-P_2}$	2538.783
ISH6	895.000	3700.000	2.000	$S_{ISH_6-P_2}$	2513.746
–	–	–	–	$S_{P_1-P_2}$	98.010

Для решения данной задачи была применена целевая функция (53). Данная задача была решена два раза: с предварительными значениями определяемых параметров, которые были взяты далеко от области минимума целевой функции и с значениями близкими к данной области. Метод Ньютона позволил найти верное решение в каждом случае, показав свою высокую производительность по сравнению с методами первого порядка. Грубые предварительные значения были выбраны опираясь на условие, что матрица Гессе должна быть положительна определена для того, чтобы указывать направление убывания целевой функции.

Информация, полученная в ходе итерационного вычислительного процесса с предварительными значениями отдаленными от области минимума функции вместе с оценкой точности полученных значений координат пунктов, представлена в Приложении И и Приложении Л. Информация, полученная в ходе итерационного вычислительного процесса с близкими к области минимума целевой функции предварительными значениями вместе с оценкой точности полученных значений координат пунктов, представлена в Приложении К и Приложении М.

На рисунке 18 представлена графическая интерпретация данных полученных в ходе вычислительного эксперимента (Приложение И). При одинаковых предварительных значениях определяемых параметров только метод Ньютона второго порядка позволил за меньшее число итераций и время решить поставленную задачу.

При решении данной задачи возникли некоторые сложности. Во-первых, скорость решения сильно зависела от предварительных значений определяемых параметров, на рисунке 18 показано, что при одинаковых предварительных значений определяемых параметров, методам первого порядка понадобилось гораздо больше итераций нежели методу Ньютона второго порядка.

При решении данной задачи в среде MathCAD 15 было измерено время решения задачи (приведено на рисунке 18), анализ показал, что методу Ньютона второго порядка понадобилось меньше времени на решение задачи, хотя и вычислений на каждой итерации больше по сравнению с градиентными методами. Это вызвано тем, что метод Ньютона второго порядка позволяет на первых итерациях четко определить направление уменьшения функции, в то время как градиентные методы за счет малых изменений градиента на каждой итерации совершают «малые шаги» для достижения минимума функции.

Во-вторых, изначально в качестве предварительных значений определяемых параметров были взяты значения нулевые, так как это было удобно, чтобы не тратить время на расчет данных значений. Однако выяснилось, что метод Ньютона вычисляет такие значения параметров, которые не минимизируют функцию, а наоборот происходит лавинный рост целевой функции метод зацикливается и перестает работать. Выяснилось, что при этих значениях матрица Гессе является отрицательно определенной и метод не работает, данная проблема будет подробно рассмотрена в 4 Главе.

В–третьих, метод сопряженных градиентов (см. рисунок 18), по времени решения задачи очень близок к методу Ньютона второго порядка, однако если подставить полученные значения параметров в целевую функцию, то получается большое значение – это говорит о том, что были определены значения локального минимума. В ходе итерационного процесса направление поиска по методу сопряженных градиентов «скатилось» в овраг, и метод нашел локальный, а не глобальный минимум.

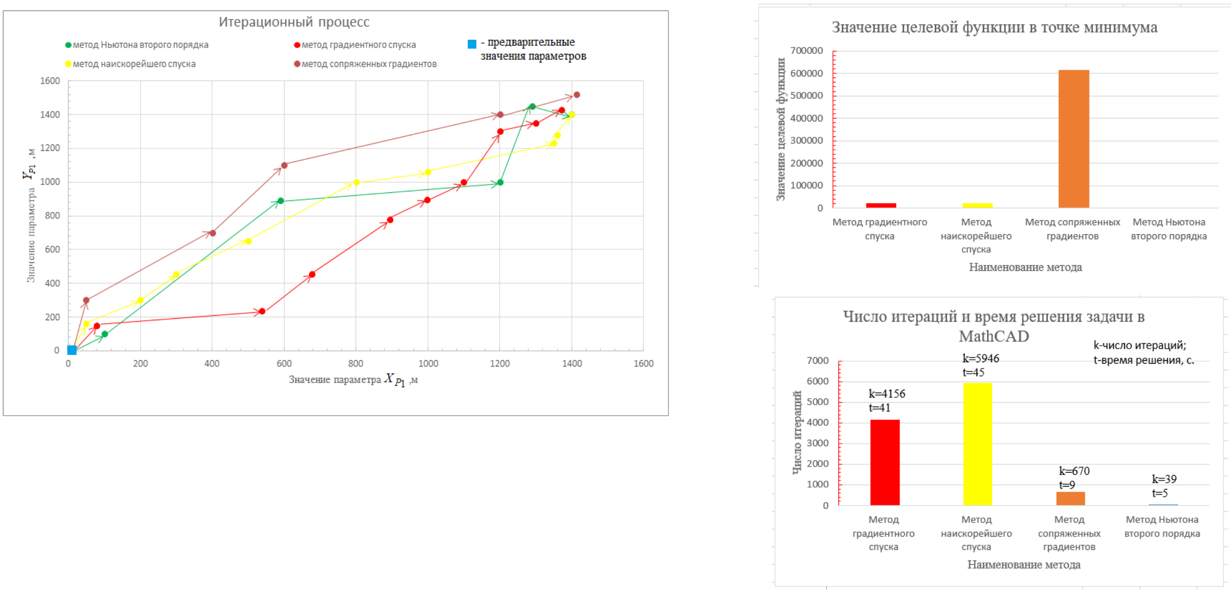


Рисунок 18 – Графическое представление процесса вычисления параметров X_{P1} и Y_{P1}

На рисунке 19 представлена графическая информация об области сходимости используемых методов для определения координат пунктов. Видно, что область сходимости метода Ньютона второго порядка на порядок больше по сравнению с градиентными методами.

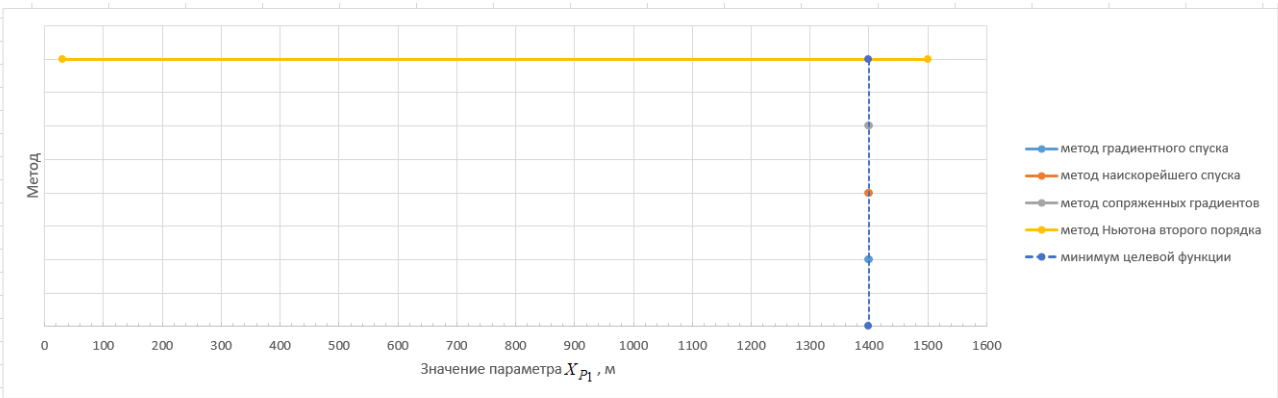


Рисунок 19 – Область сходимости методов при вычислении параметра X_{P1}

3.1.5 Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости

Схема обратной линейно-угловой засечки представлена на рисунке 20.

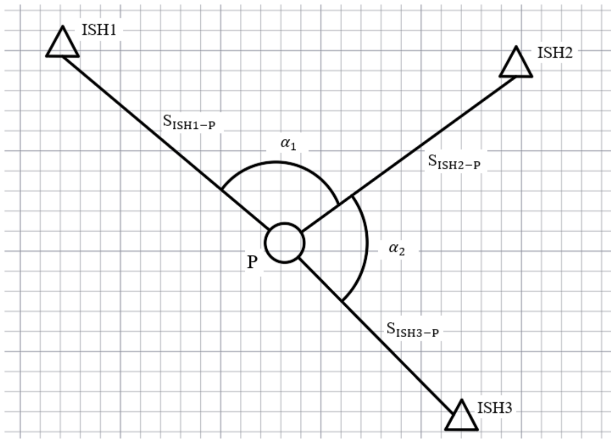


Рисунок 20 – Схема обратной линейно-угловой засечка

Исходные данные для решения задачи представлены в таблице 5. Данная задача решена в работе, для отражения работоспособности метода Ньютона второго порядка при обработке линейно-угловых измерений.

Таблица 5 – Исходные данные для решения обратной линейно-угловой засечки

Название пункта	Координаты исходных пунктов		Измеренные расстояния		Измеренные углы	
	$X, м$	$Y, м$	Название линии	Длина линии, $м$	Названи е	Величина
ISH1	202.968	62.727	S_{ISH1-P}	102.215	α_1	$55^\circ 48^{'} 29.0^{''}$
ISH2	230.339	178.819	S_{ISH2-P}	140.671	α_2	$65^\circ 11^{'} 45.5^{''}$
ISH3	101.403	179.422	S_{ISH3-P}	74.390	–	–

Для решения обратной линейно-угловой засечки на плоскости была создана целевая функция (54):

$$F(X_P, Y_P) = \sum_{i=1}^{n} (\tau_i^{изм} - \tau_i^{выч})^2, \tag{54}$$

где $\tau_i^{выч}$ – вектор-столбец, вычисленных значений по предварительным координатам, измеренных элементов в засечке; $\tau_i^{изм}$ – вектор-столбец измеренных элементов в засечке; X_P, Y_P – координаты определяемого пункта; n – число измеренных элементов.

Вектор-столбец $\tau_i^{выч}$ можно вычислить по формуле (55):

$$\tau_i^{выч} = \begin{pmatrix} S_{ISH1-P} \\ S_{ISH2-P} \\ S_{ISH3-P} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(X_{ISH1} - X_P)^2 + (Y_{ISH1} - Y_P)^2} \\ \sqrt{(X_{ISH2} - X_P)^2 + (Y_{ISH2} - Y_P)^2} \\ \sqrt{(X_{ISH3} - X_P)^2 + (Y_{ISH3} - Y_P)^2} \\ arctg\left(\frac{Y_{ISH2} - Y_P}{X_{ISH2} - X_P}\right) - arctg\left(\frac{Y_{ISH1} - Y_P}{X_{ISH1} - X_P}\right) \\ arctg\left(\frac{Y_{ISH3} - Y_P}{X_{ISH3} - X_P}\right) - arctg\left(\frac{Y_{ISH2} - Y_P}{X_{ISH2} - X_P}\right) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Данные полученные в ходе итерационного процесса представлены в Приложении Н вместе с информацией об оценки точности полученных параметров.

3.1.6 Получение координат определяемых пунктов в плановой сети трилатерации (с разным числом определяемых пунктов)

Основной целью решения данной задачи, была проверка производительности методов нелинейного программирования. Оценить влияния скорости решения и сложности реализации методов нелинейного программирования с ростом числа исходных данных (измеряемых величин) и ростом количества определяемых параметров. Плановая сеть трилатерации представляет собой сеть, состоящая из определяемых пунктов и измеренных расстояний между ними. В ходе вычислительного эксперимента, были смоделированы сети трилатерации с различным количеством определяемых пунктов. Основная цель данного вычислительного эксперимента проверить, как сильно растет время решения задачи и число итераций при использовании метода Ньютона второго порядка в ходе итерационного процесса. Общая информация о смоделированных сетях представлена в таблице 6. Исходные данные для уравнивания сетей трилатерации с различным количеством пунктов и измеренных сторон, представлены в Приложении П. Схема сети трилатерации №1 представлена на рисунке 21.

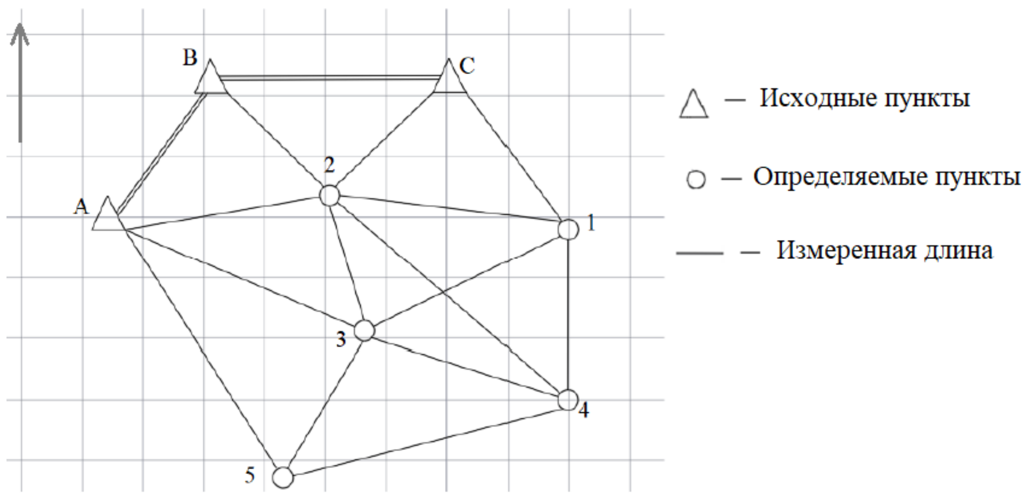


Рисунок 21 – Схема сети трилатерации №1

Таблица 6 – Информация о сетях трилатерации

Название сети	Число пунктов		Число измеренных длин сторон сети
	исходных	определяемых	
№1	3	5	14
№2	3	10	24
№3	3	15	35
№4	3	20	47
№5	3	25	72

Координаты опорных пунктов представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Координаты опорных пунктов

Название пункта	Координаты исходных пунктов	
	$X, м$	$Y, м$
A	645.112	426.229
B	1028.568	857.277
C	740.339	1333.496

Сначала вычисление координат пунктов сети №1 было произведено с предварительными значениями, которые далеко расположены от точки минимума целевой функции, так как для точного вычисления предварительных значений необходимо выполнить подготовительные работы: вычислить длины сторон между пунктами с известными координатами, вычисление углов в треугольниках по теореме косинусов, вычисление приращений по соответствующим осям и в итоге получение предварительных значений координат. Удобнее было бы задать предварительные значения равными нулю и выполнить итерационный процесс. Однако если принять все предварительные значения определяемых параметров (координаты определимых пунктов) равными нулю, то матрица Гессе становится вырожденной и применить метод Ньютона второго порядка не представляется возможном (Приложение Р). Задача была решена все же с далекими от точки минимума предварительными значениями определяемых параметров, но которые находились в области сходимости метода. Выбор значений был основан на условие положительности матрице Гессе (Приложение С). Задача по определению координат пунктов сети №1 была решена также с точными предварительными значениями (Приложение Т).

На рисунке 22 представлена графическая информация об области сходимости используемых методов для определения координат пунктов сети трилатерации №1. Видно, что область сходимости метода Ньютона второго порядка сопоставима с областью сходимости метода сопряженных градиентов.

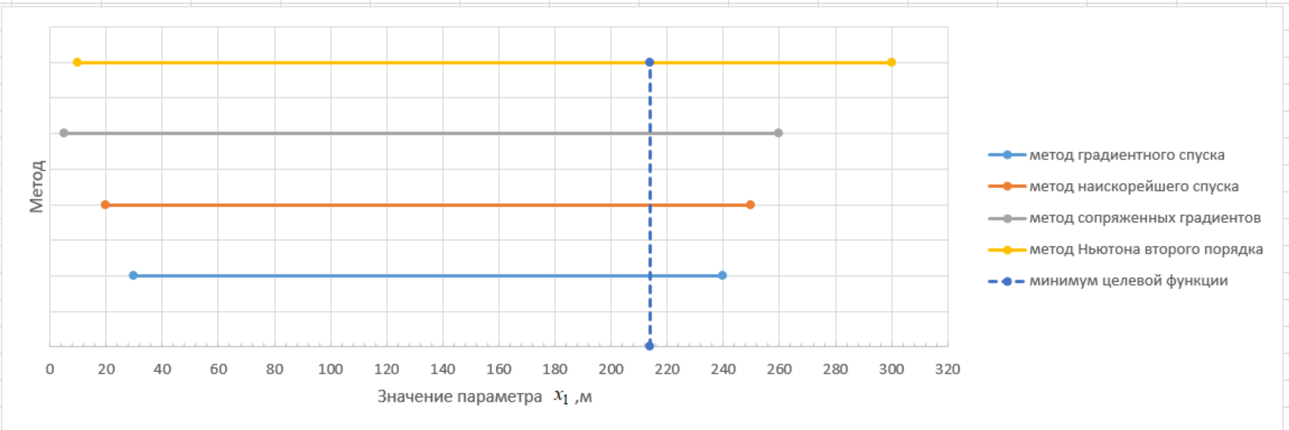


Рисунок 22 – Область сходимости методов при вычислении параметра x_1

Основываясь на полученных результатах для сравнения производительности метода Ньютона второго порядка при увеличении количества определяемых параметров (увеличения числа пунктов в сети) был выбран метод сопряженных градиентов, остальные методы первого порядка не учитывались в сравнение, так как на порядок хуже метода сопряженных градиентов. Данные полученные в ходе вычислительного эксперимента представлены в таблице 8.

Таблица 8 – Данные полученные в ходе исследования скорости решения задачи по уравниванию сети трилатерации при различном числе определяемых пунктов

Название сети	Число определяемых пунктов	Метод решения			
		метод сопряженных градиентов		метод Ньютона второго порядка	
		Число итераций	Время решения в среде MathCAD 15, с	Число итераций	Время решения в среде MathCAD 15, с
№1	5	401	0.7	6	0.8
№2	10	656	2.2	8	1.1
№3	15	871	2.8	10	1.2
№4	20	1045	4.5	11	1.8
№5	25	1245	5.2	12	2.1

Основываясь на полученных данных в ходе уравнивания сетей трилатерации с различным числом определяемых пунктов, была составлена графическая интерпретация полученных данных (рисунок 23). Можно сделать вывод, что при увеличении числа определяемых параметров растет и время решения задачи, как в случае использования метода сопряженных градиентов, так и в случае метода Ньютона второго порядка. Однако число итераций для достижения точки минимума целевой функции значительно меньше требуется в методе Ньютона второго порядка, нежели в методе сопряженных градиентов. Однако автор диссертации столкнулся с основной проблей метода Ньютона это матрица Гессе, на вычисление которой тратится основная часть времени решения задачи, поэтому при росте числа определяемых параметров время решения задачи увеличивается, но не с таким градиентом, как в методе сопряженных градиентов. На рисунке 24 подробно показана тенденция увеличения времени решения задачи в зависимости от числа определяемых параметров, с применением различных методов.

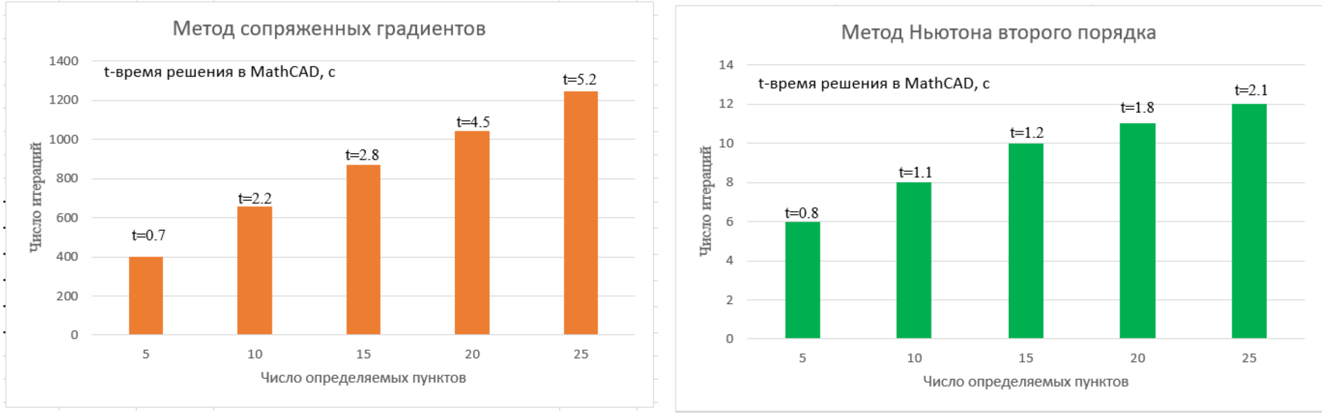


Рисунок 23 – Зависимость числа итераций от количества определяемых пунктов

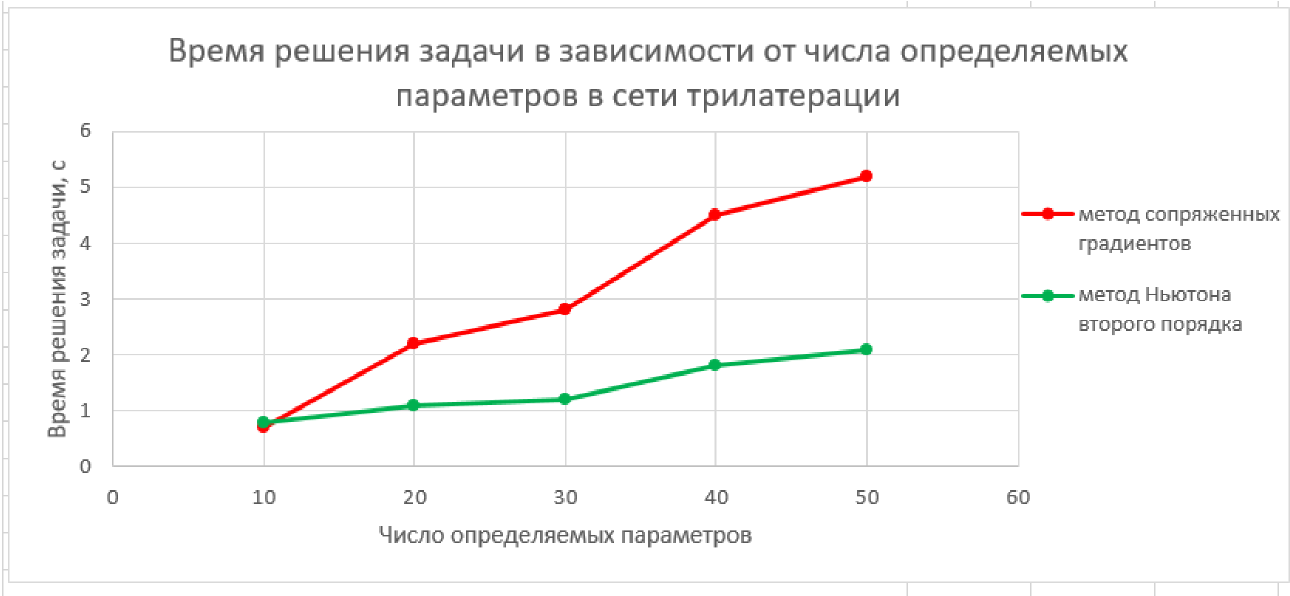


Рисунок 24 – Время решения задачи в зависимости от количества определяемых параметров

3.1.7 Аппроксимация функции для автоматизированного построения геометрических примитивов по массиву точек

Инженеру часто необходимо описать в виде функциональной зависимости связь между величинами, заданными таблично или в виде набора точек. В свою очередь современный геодезист, определенное время из своего рабочего графика тратит на работу в определенных системах автоматизированного проектирования (САПР). Это позволяет более рационально обработать тот большой объем информации, который он получил в полевых работах для создания графического материала. Как было сказано выше, современный геодезист при выполнении различных производственных задач может использовать либо современные сканирующие системы, либо роботизированные тахеометры, которые за короткий промежуток времени позволяют получить огромный массив данных (чаще всего координаты точек лазерных отражений). После этого, данную информацию можно импортировать в специализированные САПР к примеру AutoCAD или Civil 3D [134, 188] для создания графического материала (карт, планов, сечений и другой документации). Для вычерчивания планов зданий, фасадов либо рельефа местности в продуктах AutoCAD исполнителю необходимо достаточно долго выполнять монотонную работу по соединению точек и созданию чертежей с использованием геометрических примитивов. Для автоматизации данной работы можно использовать методы нелинейного программирования, в частности применять их для определения параметров аппроксимирующей функции.

Под аппроксимацией следует понимать определение параметров аналитической функции описывающей набор точек, полученных в результате измерений. Для того, что бы автоматизировать процесс создания геометрических примитивов необходимо создать массив данных, в данном случае это будут координаты каждой точки. Подбираемое уравнение тренда, максимально описывающие границы объектов могут быть заданы в виде:

1) Линейной функции $y = kx + m,$ где y – значение координаты по оси ординат; x – значение координаты по оси абсцисс; k – угловой коэффициент прямой; m – свободный член (линейный коэффициент прямой).

2) Полинома t – ой степени $y = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$, где $a_t, a_{t-1}, ..., a_0$ – линейные коэффициенты полинома.

3) Логарифмической функцией $y = k \cdot \ln(x) + m.$

4) Уравнения окружности $R^2 = (X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2$, где X_i, Y_i – координаты i -той точки окружности; X_0, Y_0 — координаты центра окружности; R — радиус окружности.

Неизвестные коэффициенты представленных выше функций можно вычислить с использованием методов нелинейного программирования. Целевая функция в данном случае может быть задана либо с использованием МНК по формуле (56):

$$f(x) = \left[(y_{исх} - y_{выч})^2 \right], \tag{56}$$

где $y_{исх}$ – изначальное значение функции; $y_{выч}$ – значения функции, вычисленные в ходе аппроксимации.

Либо целевая функция может быть задана с использованием МНМ по формуле (57):

$$f(x) = \left[\left| y_{исх} - y_{выч} \right| \right], \tag{57}$$

Поиск коэффициентов аппроксимирующих функций выполняется по алгоритмам, описанным в Главе 2, полученные значения вычисляются на основании поиска минимального значений целевой функции (56) либо (57) в зависимости от применяемого метода.

Стоит отметить, что при аппроксимации полиномом $t-$ой степени, необходимо принимать степень полинома обязательно меньше числа количества точек, по которым необходимо произвести аппроксимацию геометрического примитива [164]. В качества примера, можно привести ситуацию, когда есть пять точек, то для аппроксимации можно использовать полином нулевой степени и меньше пятой степени.

На практике обычно применяются полиномы не очень высоких степеней, так как с ростом степени полинома растет степень колебания аппроксимирующей функции.

После аппроксимации необходимо выбрать аналитическую функцию, которая наилучшим образом описывает геометрический объект или геометрический примитив. Для этого можно применить методы статистического анализа закономерностей, более подробно данная информация представлена в работе Г.Г. Шевченко [164]. На выбор наилучшего уравнения тренда указывают значения следующих величин[138]:

1) средняя квадратическая ошибка аппроксимации σ_{an};

2) средняя ошибка аппроксимации θ_{an};

3) коэффициент детерминации R^2;

4) Стандартная ошибка аппроксимации σ_t.

Средняя квадратическая ошибка аппроксимации σ_{an} определятся по формуле (58):

$$\sigma_{an} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{исх} - y_{выч})^2}{n - p - 1}}, \tag{58}$$

где n – количество точек, по которым производится аппроксимация; p – количество определяемых параметров аппроксимирующей функции. Чем меньше значение ошибки σ_{an}, тем функция наилучшим образом описывает границы объекта.

Средняя ошибка аппроксимации θ_{an} определятся по формуле (59):

$$\theta_{an} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_{исх} - y_{выч}}{y_{исх}}\right| \cdot 100\%. \tag{59}$$

Если θ_{an} менее 10%, то подобранная аппроксимирующая функция считается удовлетворительной [164].

Коэффициент детерминации R^2 определятся по формуле (60):

$$R^2 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{исх} - y_{выч})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_{исх} - y_{ср})^2}}, \tag{60}$$

где $y_{ср}$ – среднее значение функции исходного ряда.

Чем ближе коэффициент детерминации к 1, тем лучше уравнение описывает исходный временной ряд.

Стандартная ошибка аппроксимации σ_t определятся по формуле (61):

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{исх} - y_{выч})^2}{n - p}}. \tag{61}$$

Чем меньше ошибка, тем лучше уравнение тренда.

В работе были смоделированы координаты точек, по которым необходимо построить геометрические примитивы (рисунок 25), координаты загружены в Excel для удобства обработки и проверки возможности автоматизации построение геометрических примитивов. Координаты точек представлены в Приложении У.

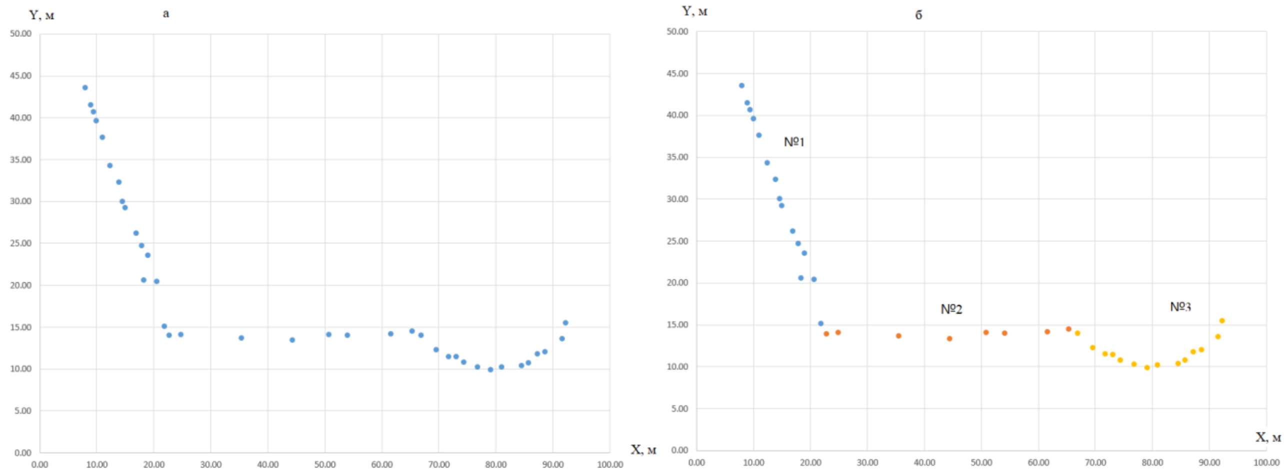


Рисунок 25 – Исходный набор аппроксимируемых точек

Для удобства решения задачи, массив точек был разбит на три группы и для каждой функции были определены параметры аппроксимирующей функции. Поиск минимума целевой функции был выполнен с ограничительным условием МНК и МНМ. В качестве модели аппроксимирующей функции для группы №1 и №2 была выбрана прямая, а для группы полином второй степени. Для поиска параметров аппроксимирующей функции были использованы методы Ньютона второго порядка и метод сопряженных градиентов. Данные полученные в ходе итерационного процесса представлены для аппроксимации группы точек №1, №2 и №3 представлены в Приложении Ф, Приложении Х и Приложении Ц соответственно.

Информация об оценке точности подобранной аппроксимирующей модели содержится также в данных приложениях. Результат аппроксимации фигур геометрических примитивов представлен на рисунке 26.

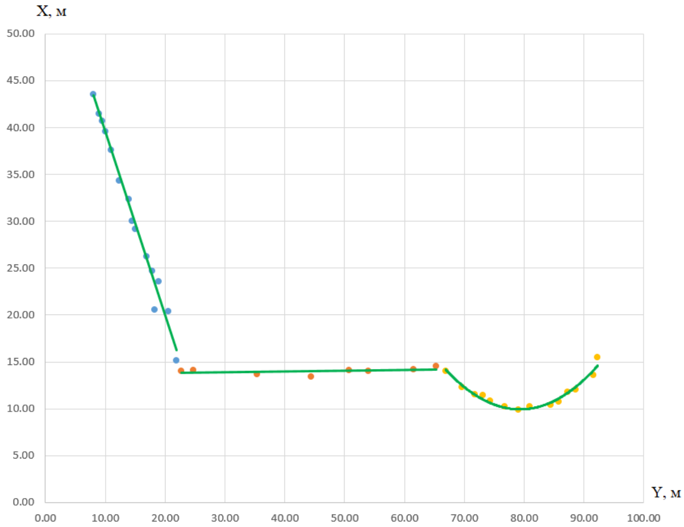


Рисунок 26 – Результат работы программы в Excel для аппроксимации геометрических примитивов

3.2 Выводы по Главе 3

Решение различного рода оптимизационных геодезических задач различной степени трудности и анализ полученной информации показало, что применение целевой функции с ограничением метода наименьших квадратов в большей степени упрощает итерационный вычислительный процесс, построенный с использованием Ньютона второго порядка, так как целевая функция в этом случае является квадратичной.

Основываясь на методе Ньютона второго порядка и исследований условий сходимости данного метода, был создан программный алгоритм, работоспособность которого была апробирована и проверена в ходе решения семи тестовых геодезических оптимизационных задач. Было выполнено исследования, как влияет предварительные значениях определяемых параметров на сходимость данного алгоритма, поэтому ряд задач было решено несколько раз при близких и отдаленно заданных предварительных значениях определяемых параметров к глобальной точке минимума целевой функции.

Было произведено сравнение работы и производительности данного алгоритма, с методами, использующими только первые производные для итерационного процесса.

Полученные результаты и их анализ позволяет говорить о высокой эффективности применения метода Ньютона второго порядка по сравнению с методами первого порядка. Во-первых, применение метода Ньютона позволяет многократно увеличить скорость решения задачи как с точки зрения количества итераций, так и с точки времени решения. Во-вторых, применение программного алгоритма метода Ньютона второго порядка, расширяет область сходимости решения задачи, что дает возможность пользователю не тратить время на расчет предварительных значений определяемых параметров. Однако стоит отметить, что предварительные значения параметров должны удовлетворять условию положительной определенности матрицы Гессе иначе метод не будет работать. Данный факт подтвердился при вычислении координат определяемых пунктов в сети трилатерации, когда при отдаленных значениях определяемых параметров от точки минимума функции метод Ньютона не позволял найти решение, а метод сопряженных градиентов, хотя и грубо и с большим количеством приближений позволил решить данную задачу.

Важно отметить, что метод Ньютона второго порядка обладает потенциалом достичь глобального минимума целевой функции за 2-3 приближения при благопритяных условиях, даже если исходные предварительные значения определяемых параметров приняты отдаленными от точки минимума целевой функции. Использование метода Ньютон второго порядка, позволяет безошибочно определить направлении минимизации целевой функции за счет использования матрицы Гессе, то есть пользователю нет необходимости вычислять шаг итерации, этим преимуществом не обладает не один метод первого порядка, где необходимо грамотно подходить в выбору шага.

С другой стороны стоит отметить, что при увеличении числа определяемых параметров, возрастает объем вычислений на каждой итерации, особенно это заметно при вычислении матрицы Гессе. При уравнивании сети трилатерации с разным числом определяемых пунктов видно, как возрастает время решения задачи при увеличении числа пунктов при использовании метода Ньютона.

В третьей главе обосновано первое защищаемое положение, а именно Применение оптимизационного метода Ньютона второго порядка для обработки геодезических измерений повышает эффективность процесса решения задачи по фактору времени в 2-3 раза и по фактору числа итераций в 5-10 раз относительно методов первого порядка в зависимости от предварительных значений определяемых параметров.

Если устранить в программном алгоритме на основе метода Ньютона такие недостатки как зависимость сходимости метода от предварительных значений определяемых параметров и его производительность от числа данных параметров, то данный алгоритм являлся бы наиболее эффективным по сравнению с другими методам нелинейного программирования для применения в геодезической практике.

Так как использованием данного алгоритма показало, что число итераций практически не зависит от начальных значений параметров, поэтому, не смотря на то, что в геодезии грубое задания начальных параметров практически исключено, так как их можно рассчитать предварительно, хотелось бы, чтобы разрабатываемый метод сходился при любых значениях параметров. Так как это сделает решение задачи более удобным пользователю и ускорит процесс решения. Например, при определении координат пунктов в сети трилатерации необходимо было решить последовательно ряд задач для определения предварительных значений координат, а именно: использовать теорему Пифагора, использовать теорему косинусов, вычислить дирекционные углы, решить прямую геодезическую задачу. При увеличении числа определяемых пунктов, возрастает и время предварительной обработки задачи для вычисления предварительных координат. Поэтому логичнее было бы разработать программный алгоритм, позволяющий принять все предварительные координаты нулевыми и метод все равно позволял бы решить задачу.

При анализе работы методов были выработаны следующие рекомендации. Если необходимо определить большое значение параметров (больше пяти) и функция достаточно «изрезана», а предварительные значения известны с невысокой точностью либо нужно тратить время на их вычисление, то следует использовать оптимизацию **по методу Ньютона второго порядка**. При различных видах измерений, а именно угловых и линейных следует использовать также метод Ньютона второго порядка. Если предварительные значения определяемых параметров известны с высокой точностью, имеется малое количество определяемых параметров и целевая функция монотонна, то следует использовать методы первого порядка, желательно метод сопряженных градиентов, так как он показал высокую производительность, по сравнению с другими методами первого порядка.

ГЛАВА 4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА В ПРОГРАММНОМ АГОРИТМЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА

4.1 Обоснование использование алгоритмом прямого поиска в методе Ньютона второго порядка

Использование в итерационном процессе методов прямого поиска (или как их многие называют методы нулевого порядка), дает возможность не вычислять различного рода производные, что в определенной мере упрощает вычислительный процесс. Основным достоинством методов данной группы, является способность использовать методы прямого поиска для решения оптимизационной задачи, в случае, когда целевая функция не задана аналитически, а допустим задана только алгоритмически.

Согласно работам [84, 113, 115, 117, 118] при решении нелинейных оптимизационных геодезических задач методы первого и второго порядка сходятся быстрее, чем прямые методы поиска. Однако авторы Г.Г. Шевченко [55, 63, 161, 162, 163, 164] и Н. Н. Елисеева [54, 56,65,66,] в своих работах отмечают, с ростом числа определяемых параметров, возрастает и трудность, а в некоторых случаях и вовсе становится невозможным вычислить производные для итерационного процесса, построенного по методам второго или первого порядка, поэтому разработка методов прямого поиска и их внедрение в геодезический вычислительный процесс является лучшим развитием событий. Автор диссертации считает, что аналитическое вычисление производных можно заменить вычислением производных с применением разностных схем (см. раздел 2.4), хотя конечно необходимо учитывать в данном случае возникающие ошибки аппроксимации производных, особенно стоит повышать точность вычисления производных по данному методу возле точки экстремума, так как малейшая неточность может повлиять на конечный результат [118].

Второе обстоятельство, которое отмечают авторы Г.Г. Шевченко и Н. Н. Елисеева, что использование методов первого и второго порядка в итерационном процессе требует от пользователя дополнительного времени для подготовки задачи к решению, а именно расчет производных и определение области сходимости метода, что не требуется делать при использование методов прямого поиска.

Вследствие упомянутых выше трудностей, на сегодняшний день многие склоняются к использованию исключительно только методов прямого поиска для решения оптимизационных геодезических задач. Это вызвано простотой реализации алгоритмов данной группы методов, поскольку при использовании методов прямого поиска для определения минимума целевой функции необходимо вычислять только значения целевой функции при различных значениях аргументов. Для определения минимума функции такими методами, требуется большее время и большее число итераций по сравнению с методом Ньютона второго порядка, однако это не является проблемой при наличии современных мощных компьютеров. Однако, автор диссертации считает должным отметить, что при увеличении числа определяемых параметров возрастает и нагрузка на вычислительный аппарат компьютера. Как это происходило при уравнивании сети трилатерации с числом определяемых пунктов больше 25 или при решении пространственной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (см. главу 3).

Автор диссертации считает, что является необходимым на сегодняшний день разработка алгоритмов, применение которых дает пользователю возможность за короткий промежуток времени и без учета влияния предварительных значений определяемых параметров получить верный, с высокой точностью результат. Метод Ньютона второго порядка обладает такими ресурсами, за счет использования вторых частных производных целевой функции, скорость решения задачи выше, при меньшом числе приближений по сравнению с методами первого порядка. Особенно это важно в решении такого рода задач как объединение сканов в единую модель по алгоритму ICP, где от числа ближайших точек зависит и точность получаемой модели, и время нахождения решения.

Однако, в ходе вычислительного эксперимента при решении тестовых оптимизационных геодезических задач (см. главу 3), было обнаружено, что не при всех предварительных значениях параметров данный метод Ньютона второго порядка дает верное решение, иногда метод просто не работает. Это связано в первую очередь с тем, что матрица Гессе указывает направление в сторону уменьшения функции, только при условии, если она положительно определена. Поэтому пользователю необходимо подготавливать задачу к решению, а именно вычислять предварительные значения с учетом того, чтобы они не делали матрицу Гессе отрицательной. Если не следовать этому условию, то метод может расходиться и метод теряет свое главное преимущество – это скорость решения. Использование только методов прямого поиска, расширяет область выбора предварительных значений, так как данные методы не имеют ограничений по знаку производных, так как производные не используются в итерационном процессе, однако необходимо задать большее количество условий для вычисления различных значений целевой функции, что усложняет процесс поиска и увеличивает время поиска.

Автор диссертации предлагает создание программного алгоритма основанного на методе Ньютона второго порядка и на методах прямого поиска, в частности методе Пауэлла и методе Дэвиса-Свена-Кемпи (ДСК). Использование данного программного алгоритма позволит усилить положительные стороны метода Ньютона второго порядка, а именно уменьшить зависимость от предварительных значений определяемых параметров. Пользователю было бы удобно использовать алгоритм, в котором число итераций в меньшей степени зависит от предварительных значений определяемых параметров. Главной причиной соединения метода Ньютона второго порядка с методами прямого поиска является увеличение потенциала метода с точки зрения повышения быстродействия оптимизационного процесса.

4.2 Алгоритмы прямого поиска

Теория поисковых методов и способы их внедрения в человеческую деятельность представлены в большом количестве научных работ [12, 13, 19, 74, 94, 156].

Существуют следующие виды поисковых методов:

1) метод Розенброка; метод Розенброка

2) метод Нелдера и Мида (поиск по деформируемому многограннику);

3) прямой поиск Хука-Дживса;

4) метод релаксации;

5) метод Пауэлла;

6) метод случайного поиска;

7) метод Дэвиса-Свенна-Кэмпи (ДСК).

Стоит отметить, что методы Пауэлла и ДСК относятся к методам квадратической аппроксимации целевой функции. Выше уже отмечалось, что метод Ньютона второго порядка также можно отнести к методам квадратической аппроксимации, за счет использования вторых частных производных. Поэтому логично использовать метод Пауэлла и метод ДСК для расширения области сходимости метода Ньютона. Главным отличием и одновременно достоинством методов квадратической аппроксимации от других методов прямого поиска является значительное устремление к минимуму исследуемой функции за малое количество приближений, по сравнению с другими методами прямого поиска. Метод Пауэлла и метод ДСК нашли широкое применение в геодезии, чаще всего их применяют вместе друг с другом в различных модификациях [22, 56, 161, 164]. Однако из анализа научной литературы стало ясно, что еще никто не применял методы прямого поиска и методы второго порядка совместно.

В работе [156] David M. Himmelblau приводит алгоритм действий для поиска минимума целевой функции комбинацией методов ДСК и Пауэлла, первые приближения выполняются по методу ДСК, а заключительные итерации выполняются по методу Пауэлла. Однако Г.Г. Шевченко в своих работах [22, 83, 163, 164], доказывает, что первый этап минимизации целевой функции на основе алгоритма ДСК не удобен для реализации в программной среде, в виду необходимости учитывать большое количество условий для изменения определяемых параметров в нужном направлении. Также в работах [56, 164] отмечено, что на заключительном этапе формула для итерационного процесса по алгоритму Пауэлла довольно сложная и громоздкая, что делает ее не удобной для реализации в программной среде.

Автор Елисеева Н.Н в работе [56] доказывает, что различие двух этих методов заключается только в алгоритме «уменьшения отрезка аппроксимации» и предлагает для удобства данные методы объединить под общим термином «метод парабол». Подробно алгоритм минимизации целевой функции с помощью комбинации алгоритмов ДСК и Пауэлла описан в работах [56, 156, 164]. Исходя из анализа множества научных источников по методам прямого поиска, автор диссертации выбрал именно этот алгоритм для модификации метода Ньютона второго порядка. Так как это позволяет не потерять квадратичную скорость сходимости метода Ньютона второго порядка, ведь не многие методы прямого поиска обладают такой скоростью сходимости. А во вторых, сходимость методов ДСК и Пауэлла в меньшей степени зависит от предварительных значений определяемых параметров, что позволяет не тратить время на точное вычисление предварительных значений определяемых параметров.

Суть алгоритма на основе комбинации метода ДСК и метода Пауэлла заключается в следующем:

1. Задана целевая функция $F(x^1, x^2, ..., x^n)$ зависящая от $x^1, x^2, ..., x^n$ определяемых параметров.

2. Задается предварительное значение параметра x^1 и шаг приращения Δx_1.

3. Приращение Δx_1 прибавляется и отнимается только к первому параметру x^1, остальным параметрам также задаются предварительные значения, но они остаются неизменными.

4. Вычисляются значения целевой функции с измененными параметрами $F(x^1 - \Delta x_1, x^2, ..., x^n)$ и $F(x^1 + \Delta x_1, x^2, ..., x^n)$

5. Вычисляется новое значение определяемого параметра по формуле (62):

$$x^{1*} = x^1 + \frac{\Delta x_1 (F(x^1 - \Delta x_1, x^2, ..., x^n) - F(x^1 + \Delta x_1, x^2, ..., x^n))}{2 \cdot (F(x^1 - \Delta x_1, x^2, ..., x^n) - 2 \cdot F(x^1, x^2, ..., x^n) + F(x^1 + \Delta x_1, x^2, ..., x^n))}. \quad (62)$$

6. Изменяется следующий параметр x^2 и вычисляется новое значение функции, только вместо параметра x^1 в целевую функцию подставляется значение x^{1*}.

7. Рекомендуется через определенно число итераций уменьшать либо увеличивать величину приращения, чтобы избежать зацикливания алгоритма.

8. Итерационный процесс будет выполняться пока не будет выполнен критерий остановки.

В общем случае, данный метод может требовать достаточно большое количество итераций для поиска оптимального решения. Однако его основное достоинство, что область сходимости у него намного больше, по сравнению с методом Ньютона второго порядка.

4.3 Модифицированный программный алгоритм метода Ньютона второго порядка

Автор диссертации разработал следующий алгоритм, позволяющий минимизировать основные недостатки алгоритма метода Ньютона второго порядка:

1. Пользователь создает целевую функцию $F(x^1, x^2, ..., x^n)$ и выбирает, с каким ограничением он будет находить минимум целевой функции (по МНК или МНМ).

2. Задает предварительные значения определяемых параметров (рекомендуется задать либо заранее известные к истинным значениям либо принять все параметры равными нулю).

3. С использованием метода квадратической аппроксимации, а именно методом Пауэлла-ДСК за определенное количество приближений (опытным путем было установлено два-три приближения) производится уточнение предварительных значений по формуле (62).

4. Производится создание матрицы Гессе и проверяется ее положительность, если условие выполняется, то уточненные предварительные значения используются на следующем этапе.

5. Полученные уточненные предварительные значения используются в методе Ньютона второго порядка, формируется матрица первых производных и матрица вторых производных.

6. Выполняется итерационный процесс по формуле (24), пока не будет выполнен критерий остановки.

7. Выполняется оценка точности полученных значений параметров.

Схема алгоритма модифицированного метода Ньютона второго порядка представлена на рисунке 27. Применение только метода Ньютона второго порядка ограничивает область выбора предварительных значений определяемых параметров и заставляет тратить время на предрасчет предварительных значений параметров, что является не удобным при большом количестве определяемых параметров по мнению автора диссертации. Однако, применение только методов прямого поиска увеличивает количество вычислений, что может привести к увеличению времени решения задачи, либо излишней нагрузки систем компьютера. Разработанный алгоритм позволяет сделать модифицированный метод Ньютона второго порядка универсальным при использовании его в решении оптимизационных геодезических задач.

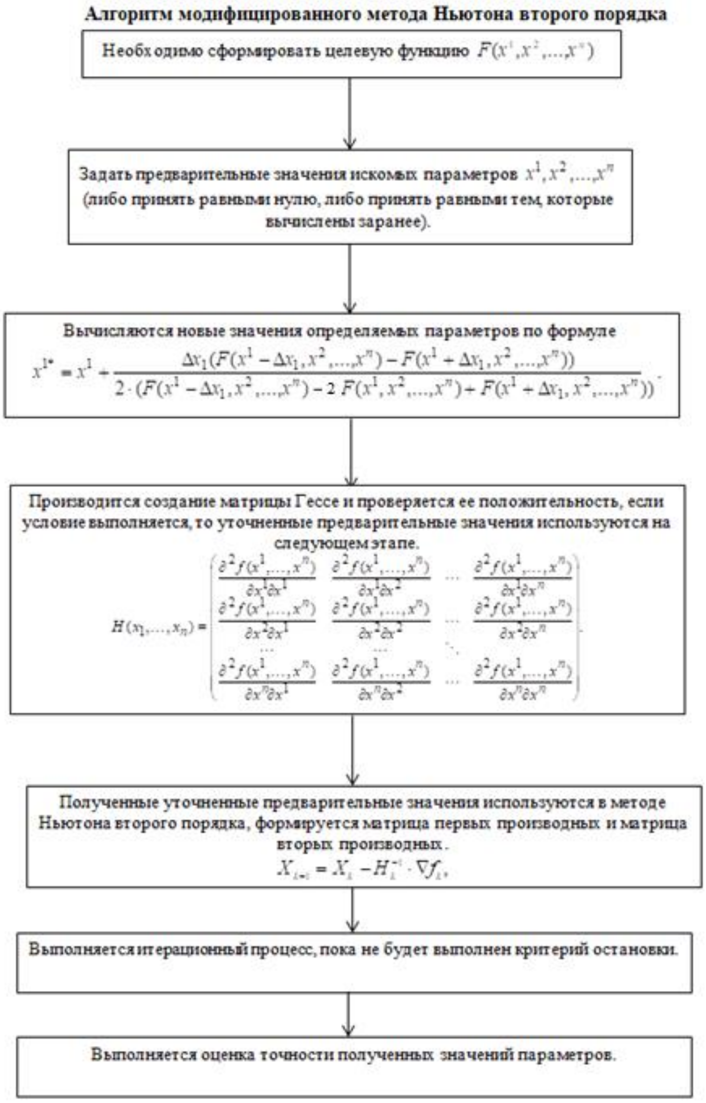


Рисунок 27 – Схема модифицированного метода Ньютона второго порядка

4.4 Квазиньютоновские методы

В работах [164, 172], а также самим автором диссертации в работах [29, 171, 172], высказано мнение, что в ходе построения итерационного процесса по методу Ньютона второго порядка при решении оптимизационных геодезических задач, проявились ряд существенных недостатков, устранить которые в дальнейшем за счет использования методов прямого поиска стремится автор диссертации:

1) На работоспособность метода очень сильно влияет вид оптимизируемой целевой функции. Сильно «изрезанная» целевая функция не позволяет вычислить с высокой степенью точности квадратичное приближение в ходе разложения в ряд Тейлора, что в свою очередь понижает скорость сходимости метода и иногда даже приводит к его неправильной работе. Это приводит к тому, что направление поиска, сформированное данным методом, оказывается

далеким от направления на истинный экстремум. Эта проблема наблюдалась при выполнении вычислительного эксперимента, при заданиях начальных значений определяемых параметров, которые являются отдаленными от точки глобального минимума целевой функции (см. главу 3). Одним из способов решения данной проблемы является точное задание предварительных значений определяемых параметров (близких к точке минимума целевой функции).

2) В случаях, когда целевая функция во всей области определения невыпуклая, то матрица Гессе на одной из итерации может потерять свойство положительной определённости, и тогда направление поиска будет увеличивать значение целевой функции, а не уменьшать. Решить эту проблему можно путем, проверки на каждой итерации знака матрицы Гессе по критерию Сильвестра, что является весьма трудоемким процессом и высокозатратным с точки зрения использования производительной мощности компьютера.

3) Повышение требований к мощности компьютера при увеличении числа определяемых параметров, при использовании метода Ньютона второго порядка также является серьезной проблемой возникшей в ходе реализации метода на практике.

Указанные обстоятельства делают использование классического ньютоновского метода нестабильным. Из-за приведенных выше причин, классический метод Ньютона второго порядка имеет большое число различных модификаций. Совокупность таких методов образуют обширный класс ньютоподобных или же корректнее будет сказать квазиньютоновских методов. Алгоритмы данных методов стараются сохранить общую структуру классического метода, на котором они основаны, но также избавиться от его основных недостатков. Среди множества алгоритмов выделяют особенно метод BFGS [75, 76, 141], названный в честь его создателей: Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno.

4.4.1 Алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно (BFGS)

Стоит отметить, что в отличие от классического метода Ньютона второго порядка в квазиньютоновских методах не вычисляется напрямую матрица Гессе, то есть нет необходимости находить частные производные второго порядка. Вместо этого гессиан вычисляется приближенно, исходя из сделанных до этого приближений.

Данный метод эффективен и устойчив [107], поэтому нашел широкое применение на практике при решении задач оптимизации. Например, в среде MathCAD 15, существует функция Minimize (), которая позволяет найти минимум целевой функции с использованием данного алгоритма (рисунок 28).

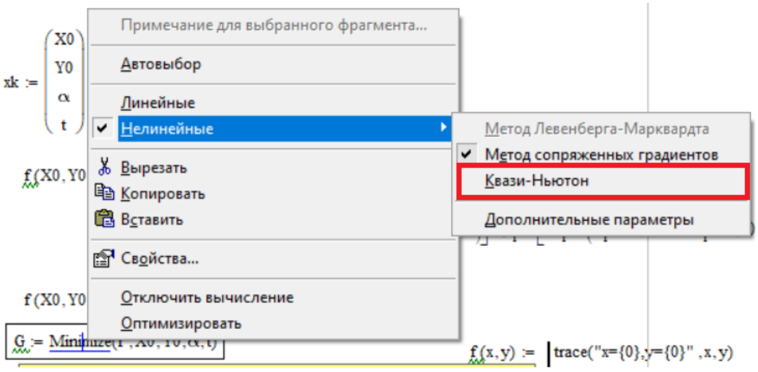


Рисунок 28 – Функция Minimize () в среде MathCAD 15

Алгоритм метода BFGS:

1) Необходимо задать минимизируемую целевую функцию, предварительные значения определяемых параметров, а также критерий остановки итерационного процесса.

2) Необходимо сформировать начальное приближение матрицы Гессе H_0. Не существует общей формулы, которая хорошо бы работала во всех случаях, поэтому и существует большое разнообразие квазиньютоновских методов. В некоторых методах в качестве начального приближения матрицы Гессе рекомендуется создавать матрицу на основе предварительных значений определяемых параметров. В методе **BFGS** в качестве начального приближения принимается единичная матрица I (63):

$$H_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}. \tag{63}$$

3) Вычисляется направление p_k , в котором будет выполняться движение в направление минимума целевой функции по формуле (64):

$$p_k = H_k^{-1} \cdot \nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k. \tag{64}$$

4) Вычисляются последующие значения определяемых параметров по формуле (65):

$$x_{k+1} = x_k + \varpi \cdot p_k, \tag{65}$$

где ϖ – коэффициент оптимизации.

5) Коэффициент ϖ находится с использованием методов линейной оптимизации, где ϖ должен удовлетворять условиям Вольфе [107], которые можно записать в виде (66):

$$\begin{cases} f(x_k + \varpi \cdot p_k) \le f(x_x) + c_1 \cdot \varpi \cdot \nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k^T \cdot p_k \\ \nabla f(x_1 + \varpi \cdot p_k, \ldots, x_n + \varpi \cdot p_k)_k^T \cdot p_k \ge c_2 \cdot \nabla f(x_1, \ldots, x_n)_k^T \cdot p_k \end{cases}, \tag{66}$$

где c_1, c_2 – константы, которые выбирают следующим образом $0 \le c_1 \le c_2 \le 1$. Большинство авторов, советуют использовать следующие значения коэффициентов: $c_1 = 0.0001$и $c_2 = 0.9$. Главное следовать правилу: выбирать значение константы c_1 такое, чтобы оно было близко к нулю, это делается для того, чтобы целевая функция уменьшалась после каждого приближения. В то время как, значение константы $, c_2$ должно быть значительно больше (рядом с единицей), это позволяет говорить о том, что проекция градиента в новом приближении изменит свое направление или уменьшится. Фактически, необходимо найти такое значение ϖ, чтобы функция $f(x_k + \varpi \cdot p_k) \to \min$.

6) Необходимо вычислить вектор шага алгоритма итерации $s_k = x_{k+1} - x_k$ и вектор изменения градиента в данном приближении $y_k = \nabla f(x_1,\ldots,x_n)_{k+1} - \nabla f(x_1,\ldots,x_n)_k$.

7) Необходимо аппроксимировать матрицу Гессе по формуле (67):

$$H_{k+1}^{-1} = (I - \varpi \cdot s_k \cdot y_k^T) \cdot H_k^{-1} \cdot (I - \varpi \cdot y_k \cdot s_k^T) + \varpi \cdot s_k \cdot s_k^T. \quad (67)$$

8) Желательно параметр ϖ принимать равным $\varpi = \dfrac{1}{y_k^T \cdot s_k}$. [107]

9) Алгоритм продолжает выполняться до тех пор пока не будет выполнен критерий остановки.

Алгоритм достаточно устойчив к минимизации сложных целевых функций [107] и имеет сверхлинейную скорость сходимости, что является достаточным для оптимизации решения большинства практических задач [75, 107]. Классический метод Ньютона второго порядка сходится гораздо быстрее (имеет квадратическую скорость сходимости), однако «стоимость» каждой итерации выше, поскольку необходимо вычислять вторые производные.

Метод **BFGS** имеет один весомый плюс: самокорректирующиеся свойства. Если матрица аппроксимирующая матрицу Гессе не верно оценивает кривизну функции, вследствие чего происходит замедление процесса нахождения экстремума, тогда аппроксимация гессиана стремится исправить ситуацию за несколько приближений. Самокорректирующие свойства алгоритма работают только в том случае, если реализован соответствующий линейный поиск (соблюдены условия Вольфе) [107]. Именно поэтому автор диссертации сравнивает в работе разработанный модифицированный метод Ньютона второго порядка с методом BFGS.

4.5 Решение тестовых оптимизационных задач модифицированным методом Ньютона второго порядка

В данном разделе приведены результаты апробации разработанного модифицированного алгоритма метода Ньютона второго порядка. Для проверки работоспособности разработанного оптимизационного метода и проверки его высокой производительности были решены следующие задачи:

1) вычисление координат определяемого пункта в многократной пространственной линейной засечке;

2) решение многократной линейной засечки в пространстве с двумя определяемыми пунктами;

3) решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости;

4) получение координат определяемых пунктов в плановой сети трилатерации (с разным числом определяемых пунктов).

Данные задачи были выбраны, так как при использовании классического метода Ньютона второго порядка (см. главу 3) возникли сложности при выборе предварительных значений определяемых параметров, что вызвало понижение скорости решения задач, а в некоторых случаях метод Ньютона второго порядка нельзя было применить, так как он не работал при данных предварительных значениях определяемых параметров. Исходные данные были взяты из Главы 3.

В данном подразделе автор диссертации производит анализ трех методов: классического метода Ньютона второго порядка, квазиньютоновского метода BFGS и разработанного автором диссертации - модифицированного метода Ньютона второго порядка.

4.5.1 Вычисление координат определяемого пункта в многократной пространственной линейной засечке

Начальные данные для решения задачи и сама формулировка задачи представлены в разделе 3.1.3. Целевая функция метода наименьших квадратов для решения задачи имеет вид (53). Результат решения данной задачи представлен в Приложении Ш. Все предварительные значения определяемых параметров были приняты равными нулю, все три метода позволили найти решение, однако классический метод Ньютона второго порядка и метод BFGS позволили определить только локальный минимум функции, а не глобальный. Об этом можно судить по значению целевой функции, видно, что оно на порядок больше, по сравнению с модифицированным методом Ньютона второго порядка.

Использование в итерационном процессе классического метода Ньютона второго порядка методов прямого поиска (методы Пауэлла и ДСК) позволило расширить область сходимости модифицированного метода Ньютона второго порядка по сравнению с другими методами (рисунок 29). В разделе 3.1.3 на рисунке 16 содержится информация об области сходимости методов при решении данной задачи. Благодаря использованию прямых методов поиска нет необходимости в предварительном вычислении значений определяемых параметров пользователем.

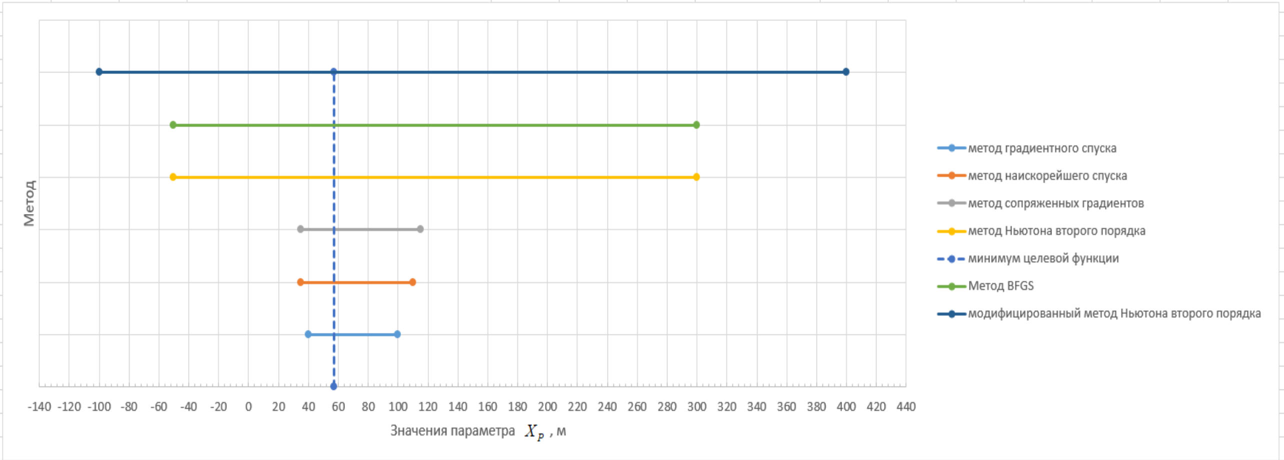
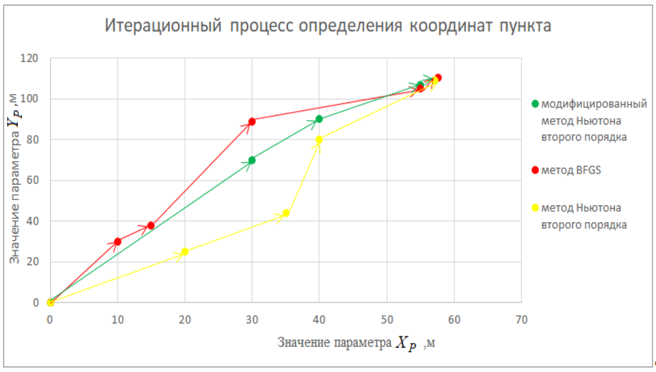


Рисунок 29 – Область сходимости методов при вычислении параметра X_P

На рисунке 30 представлена графическая интерпретация данных представленная в Приложении Ш. Направление поиска классического метода Ньютона второго порядка и модифицированного метода Ньютона второго порядка на конечном этапе поиска совпадают. Однако разработанный алгоритм предоставляет возможность найти значения определяемых параметров позволяющих достичь глобального минимума целевой функции.



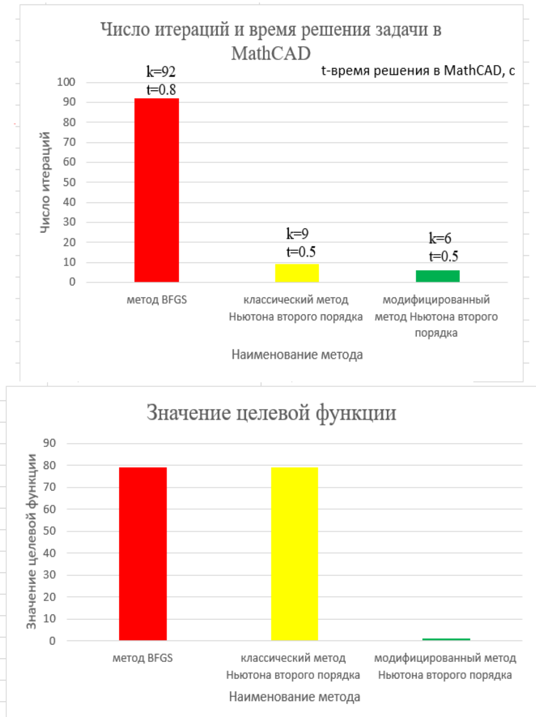


Рисунок 30 – Графическая интерпретация решения пространственной линейной засечки при определении параметров X_P и Y_P

4.5.2 Решение многократной линейной засечки в пространстве с двумя определяемыми пунктами

Начальные данные для решения задачи и сама формулировка задачи представлены в разделе 3.1.4. Целевая функция метода наименьших квадратов для решения задачи имеет вид (53). Результат решения данной задачи представлен в Приложении Щ. При заданных предварительных значениях определяемых параметров, классический метод Ньютона второго порядка не справился с решением задачи (матрица Гессе была вырождена). Метод BFGS и модифицированный метод Ньютона второго порядка позволили решить данную задачу, однако метод BFGS также позволил найти локальный минимум функции (если смотреть по значению целевой функции). На рисунке 31 представлена графическая интерпретация решения многократной линейной засечки в пространстве с двумя определяемыми пунктами.

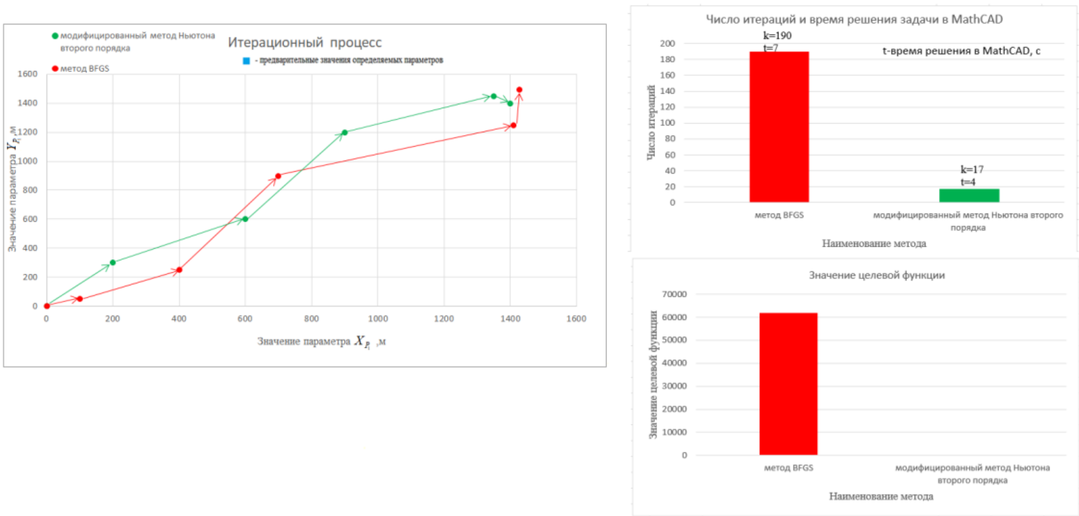


Рисунок 31 – Графическая интерпретация процесса поиска при определении параметров X_{P1}, Y_{P1}

Модифицированный метод Ньютона второго порядка показал также увеличение области сходимости по сравнению с классическим методом Ньютона второго порядка. На рисунке 31 показана область сходимости разработанного метода по сравнению с другими методами.

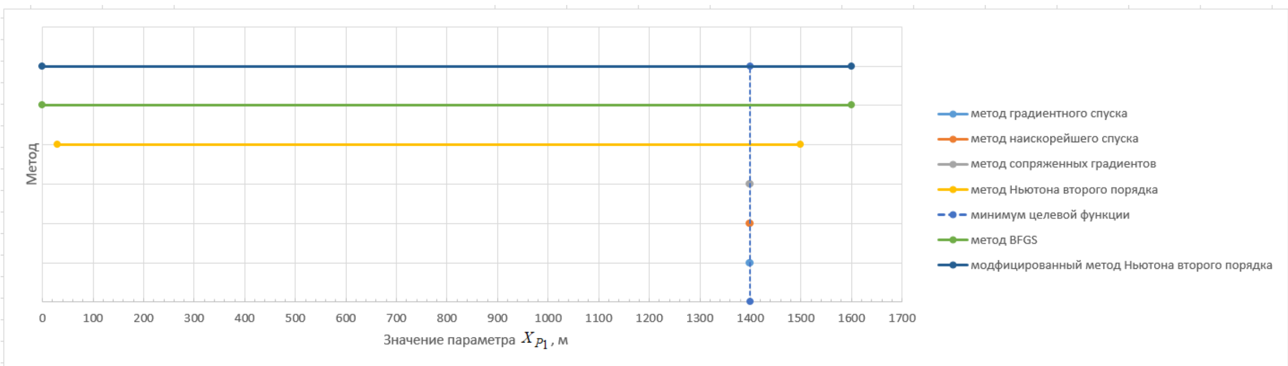


Рисунок 31 – Область сходимости методов при вычислении параметра X_{P1}

4.5.3 Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости

Начальные данные для решения задачи и сама формулировка задачи представлены в разделе 3.1.5. Целевая функция метода наименьших квадратов для решения задачи имеет вид (41). Результат решения данной задачи представлен в Приложении Э.

4.5.4 Получение координат определяемых пунктов в плановой сети трилатерации (с разным числом определяемых пунктов)

Начальные данные для решения задачи и сама формулировка задачи представлены в разделе 3.1.6. Целевая функция метода наименьших квадратов для решения задачи имеет вид (41). Было произведено уравнивание сети трилатерации №1. Результат решения данной задачи представлен в Приложении Ю.

В ходе уравнивания сети трилатерации с разным числом определяемых пунктов с использованием метода BFGS и модифицированного метода Ньютона второго порядка была получена информация по числу итераций и количеству времени решения задачи в зависимости от используемого метода при одинаковых предварительных значений определяемых координат пунктов.

Таблица 9 – Данные полученные в ходе исследования скорости решения задачи по уравниванию сети трилатерации при различном числе определяемых пунктов

Название сети	Число определяемых пунктов	Метод решения			
		Метод BFGS		Модифицированный метод Ньютона второго порядка	
		Число итераций	Время решения в среде MathCAD 15, с	Число итераций	Время решения в среде MathCAD 15, с
№1	5	294	1.2	15	1.0
№2	10	353	1.8	16	1.1
№3	15	401	2.3	18	1.2
№4	20	456	2.9	19	1.5
№5	25	501	3.3	21	1.7

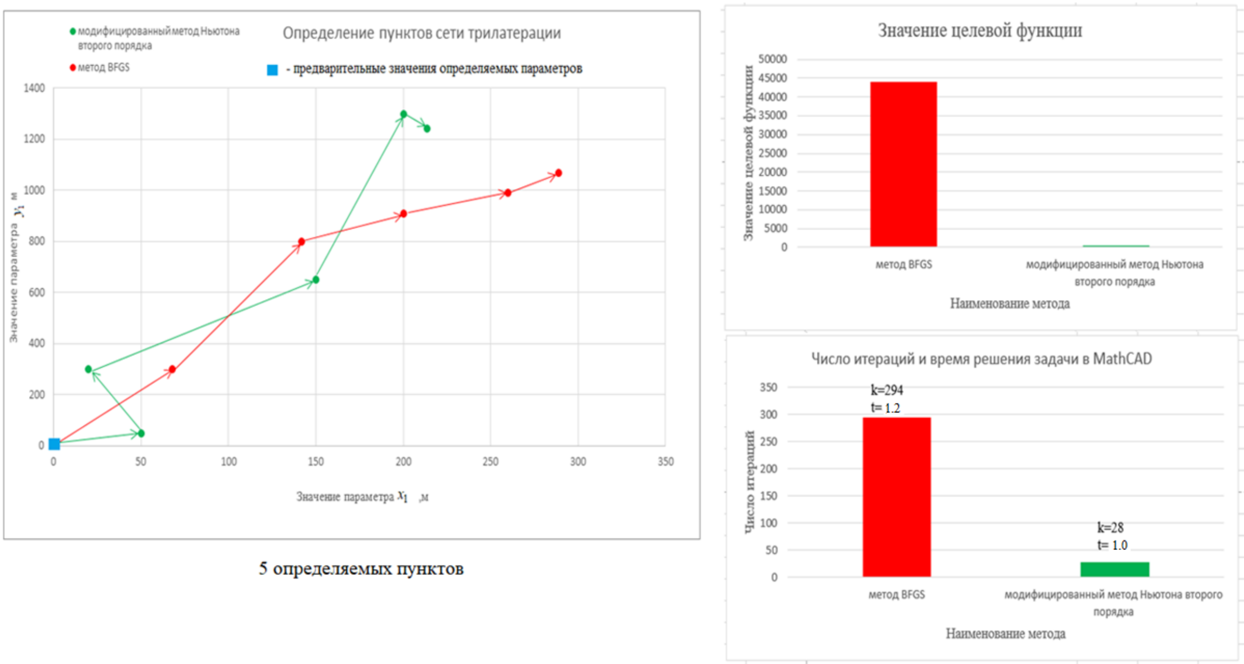


Рисунок 32 – Графическое представление информации полученной в ходе уравнивания сети трилатерации №1

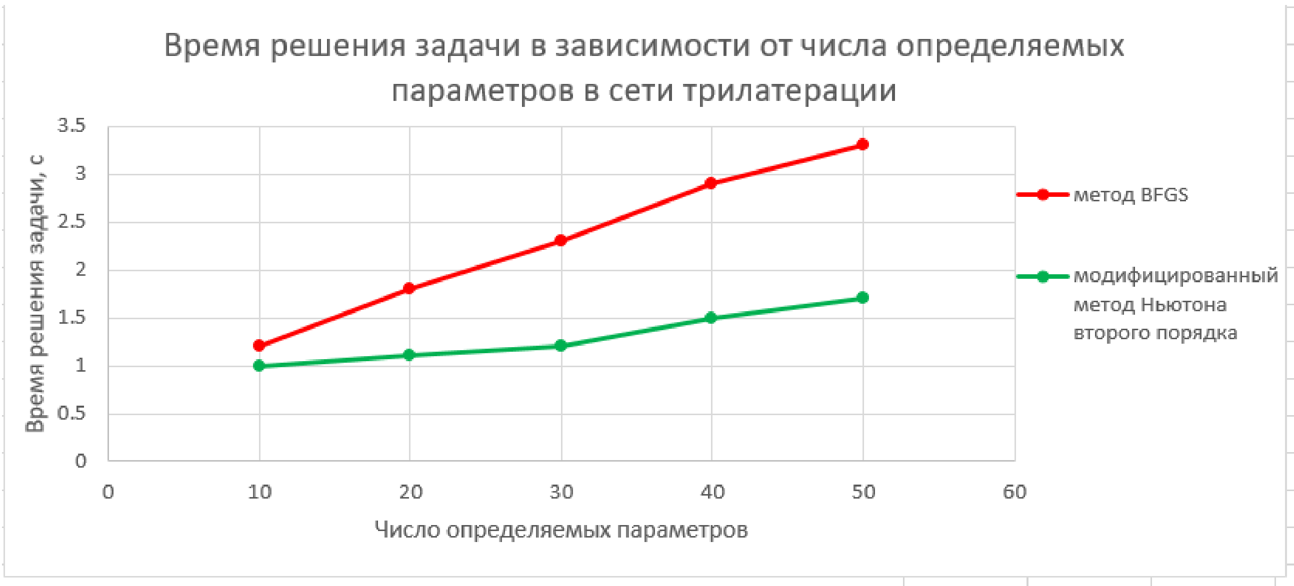


Рисунок 33 – Время решения задачи в зависимости от количества определяемых параметров

На рисунке 34 показана область сходимости разработанного метода по сравнению с другими методами.

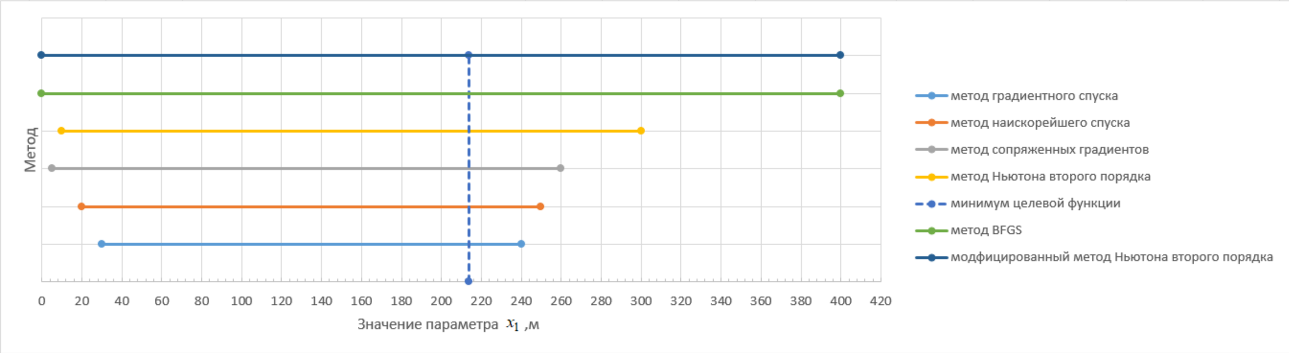


Рисунок 34 – Область сходимости методов при вычислении параметра x_1

4.6 Апробация разработанного алгоритма

Разработанный алгоритм был применен для определения параметров ориентирования сканов в пространстве для построения модели объекта. Исходные данные предоставлены ООО «Научно-производственное предприятие «Бента». Съемка выполнена лазерной сканирующей системой Faro Focus s120. Ориентирование сканов производилось по опорным точка, координаты которые приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Исходные данные для вычисления параметров перехода в пространстве

Номер пункта	Координаты опорных точек в глобальной системе координат			Координаты опорных точек в местной системе координат		
	$X^Г, м$	$Y^Г, м$	$Z^Г, м$	$X^М, м$	$Y^М, м$	$Z^М, м$
1	-0.635	-4.399	-1.027	4.510	2.342	-3.585
2	0.267	-2.963	-1.025	5.368	3.838	-3.605
3	0.262	-2.950	-3.172	5.362	3.852	-5.697
4	-0.639	-4.366	-3.131	4.150	2.347	-5.696
5	0.927	-1.935	-3.844	5.956	4.874	-6.391
6	0.216	-3.029	-3.829	5.306	3.748	-6.389
7	-0.585	-4.286	-3.839	4.570	2.450	-6.388
8	-1.369	-5.330	-3.816	3.826	1.386	-6.396
9	-6.235	-0.473	-1.223	-1.293	6.062	-3.765
10	-5.185	1.061	-0.709	-0.262	7.609	-3.288
11	2.716	0.167	-3.119	7.628	7.072	-5.776
12	2.534	0.256	-3.837	7.512	7.085	-6.386

На рисунке 35 представлено изображение облака точек в программе Autodesk ReCap 360.

Рисунок 35 – Облако точек лазерных отражений программе Autodesk ReCap 360

Вычисление параметров ориентирования производилось четырьмя методами: методом сопряженных градиентов, классическим методом Ньютона второго порядка, методом BFGS и модифицированным методом Ньютона второго порядка. Данные получение в ходе решения задачи представлены в Приложении АА. Модифицированный метод Ньютона второго порядка показал свою работоспособность и позволил решить поставленную задачу.

4.7 Выводы по Главе 4

Квазиньютоновские методы достаточны разновидные, нет единого подхода к тому, как аппроксимировать матрицу Гессе. Поэтому квазиньютоновские методы образуют группу алгоритмов, основанных на аппроксимации матрицы вторых производных. С одной стороны это приводит к экономии оперативной памяти компьютера, что позволяет упростить вычислительный процесс, с другой стороны, цена этого упрощения – рост времени решения оптимизационной задачи и увеличение влияния предварительных значений определяемых параметров на сходимость метода.

Квазиньютоновские методы можно отнести, с некоторым упрощением, к методам второго порядка, то есть они имеют сверхлинейную скорость сходимости к решению, в свою очередь классический метод Ньютона второго порядка имеет квадратическую скорость сходимости. Однако по сравнению с градиентными методами (методы нелинейного программирования первого порядка) квазиньютоновские методы по прежнему выигрывают в скорости решения задачи и области сходимости метода. Дополнительным плюсом использования квазиньютоновских методов является то, что нет необходимости определять знак матрицы Гессе [75, 107].

Одним из самых эффективных квазиньютоновских методов является метод BFGS, преимуществом данного алгоритма является простота программной реализации. Однако основным недостатком применения данного метода, является рост числа итерация для нахождения минимума целевой функции. Данный недостаток можно сгладить тем, что благодаря производительности современных компьютеров при решении не сложных оптимизационных задач для пользователя не становится заметно по времени рост числа приближений.

В данной главе рассмотрены основные минусы, возникающие в ходе применения метода Ньютона второго порядка при решении оптимизационных геодезических задач, а также предложены способы уменьшения влияния данных недостатков на вычислительный процесс.

Автором диссертации предложено использовать стратегию алгоритмов прямого поиска для уменьшения влияния предварительных значений на число итераций. Исследование научной литературы показало, что комбинация методов Пауэлла-ДСК позволяет достичь квадратической скорости сходимости соизмеримой со скоростью метода Ньютона второго порядка.

Классический метод Ньютона, квазиньютоновский метод BFGS, модифицированный метод Ньютона второго порядка, разработанный автором диссертации были применены при решении четырех тестовых оптимизационных геодезических задач. Были выбрана именно те задачи для проверки работоспособности разработанного модифицированного метода, с которыми классический метод Ньютона второго порядка либо не справился при данных предварительных значений определяемых параметром (см. главу 3), либо очень долго происходил процесс решения задачи (сеть трилатерации с большим числом определяемых пунктов). Полученные результаты показали, что модифицированный метод Ньютона второго порядка является наиболее эффективным по сравнению с квазиньютоновским и классическим методом и дает верное решение за минимальное число итераций (см. Приложение Ш, Приложение Щ, Приложение Э).

Таким образом, обосновано второе защищаемое положение. Применение методов прямого поиска в алгоритме метода Ньютона второго порядка, позволяет создать модифицированный метод Ньютона второго порядка, который позволяет расширить область сходимости метода и сделать итерационный процесс менее зависимым от предварительных значений определяемых параметров, по сравнению с методами первого порядка, ньютоновскими и квазиньютоновскими методами.

На основе второго и третьего защищаемых положений разработан модифицированный метод Ньютона второго порядка, состоящий из двух этапов. На первом этапе пользователь задает любые предварительные значения определяемых параметров и применяя метод Пауэлла-ДСК (относится к методам прямого поиска) за два приближения происходит уточнение предварительных значений параметров, для того, чтобы матрица Гессе была положительно определена. На втором этапе используя классический алгоритм метода Ньютона второго порядка происходит за минимальное число итерация нахождения оптимально верных значений искомых параметров. Данный метод позволяет расширить область сходимости решения задачи.

Разработанный алгоритм был применен для решения производственной задачи для определения параметров ориентирования сканов с применением опорных точек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация представляет собой законченную научно - квалификационную работу, в которой предлагается новое решение актуальной научной задачи – разработка автоматизированного метода оптимизации многоточечных геодезических измерений. По результатам выполнения диссертационной работы сделаны следующие выводы и рекомендации:

1. Доказана и обоснована целесообразность изучения, развития и использования в геодезическом вычислительном процессе методов нелинейного программирования, в частности метода Ньютона второго порядка, особенно для многоточечных измерений. При этом показана сравнительная оценка эффективности и производительности различных методов нелинейного программирования в ходе решения ряда оптимизационных геодезических задач.

2. Разработан программный алгоритм, реализующий метод Ньютона второго порядка, который за счёт использования матрицы частных производных второго порядка позволяет выполнять квадратичную аппроксимацию целевой функции для нахождения ее минимума.

3. Разработаны автоматизированные программы, реализующие методы нелинейного программирования в ходе обработки геодезических измерений.

4. Разработан автоматизированный метод оптимизации многоточечных геодезических измерений, базирующийся на использовании метода Ньютона второго порядка и метода Пауэлла-ДСК (относится к методам прямого поиска). Новый метод позволяет упростить вычислительный процесс, дает возможность пользователю не вычислять с высокой точностью предварительные значения определяемых параметров, так как использование данного метода позволяет расширить область сходимости решения задачи.

5. Эффективность разработанного метода подтверждена в ходе решения семи различных тестовых оптимизационных геодезических задач при различных исходных данных.

6. Произведено исследование влияния количества определяемых параметров на скорость решения оптимизационной задачи, что весьма важно для использования метода при обработке многоточечных измерений (лазерное сканирование, цифровая фотосъемка).

7. Перспектива дальнейшего исследования заключается в расширении спектра решаемых задач разработанным методом, выявлении его эффективности при оценке динамических и трехмерных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абу, Д. И. Математическая обработка и анализ точности наземных пространственных геодезических сетей методами нелинейного программирования и линейной алгебры: дис. … кан. техн. наук: 05.24.01 / Дака Имад Абу. – Новополоцк, 1998. – 142 с.

2. Авакян, В. В. Прикладная геодезия. Технологии инженерно-геодезических работ [Текст] / В. В. Авакян. – М.: Инфра-Инженерия, 2016. – 2-е изд. – 588 с. – ISBN 978-5-9729-0110-4.

3. Азанов, В. М. Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию [Текст] / В. М. Азанов, Ю. С. Кан // Труды ИСА РАН. – 2015. – Т. 65. – №2. – С. 18-26.

4. Аккерман, А. Рост производительности и развитие фотограмметрии [Текс] / А. Аккерман // Геоматика. – 2011. – №1. – С. 23-32.

5. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] / И.Л. Акулич// - М.:Высшая школа. – 1995. – 280 с.

6. Алкачев, Т. Э. История и пути развития электронных геодезических приборов [Текст] / Т. Э. Алкачев, Н. А. Шишов, М. А. Пастухов // Наука. Техника. Технологии. (Политехнический вестник). – 2013. – №3. – С. 37-39.

7. Андрианов, А. Л. Зарождение и ранняя история линейного программирования: дис. … кан. физ.-мат. наук: 07.00.10 / Александр Львович Андрианов. – М., 2018. – 215 с.

8. Аоки, М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования [Текст] / М. Аоки; пер. с английского Э. Б. Дубро. – М.: Наука, 1977. – 343 с.

9. Асламова, В. С. Оптимизация технологических процессов. Часть 1. Метод Лагранжа и численные методы безусловной оптимизации функции одной переменной [Текст]: Учеб. пособие / В. С. Асламова, И. В. Васильев, О. А. Засухина. – Ангарск: АГТА, 2005. – 104 с.

10. Бабенко, Е.А. Симплекс метод с искусственным базисом [Текст] / Е.А. Бабенко, В.М. Мажура, Р.З. Куршубадзе, К.А. Ковалева // Научный журнал КубГАУ – 2015. – №112. – С. 1767-1780.

11. Баран, П. И. Исследование точности решения геодезических задач методами математического программирования [Текст] / П. И. Баран // Инженерная геодезия. – 1987. – №30. – С. 5-8.

12. Батищев, Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования [Текст] / Д. И. Батищев. – М.: Советское радио, 1975. – 216 с.

13. Батищев, Д. И. Методы оптимального проектирования [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Д. И. Батищев. – М.: «Радио и связь», 1984. – 248 с.

14. Батищев, Д. И. Численные методы [Текст]: Учеб. пособие / Д. И. Батищев. – Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2018. – 72 с. – ISBN 978-5-88247-900-7.

15. Безусловная оптимизация. Метод сопряженных градиентов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://simenergy.ru/math-analysis/solution-methods/90-conjugate-gradient (дата обращения 09.08.2021).

16. Белл, Э. Т. Творцы математики [Текст] / Э. Т. Белл. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

17. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман; пер. с английского. И. М. Андреевой, А. А. Корбут, И. В. Романовского, И. Н. Соколовой; под редакцией Н. Н. Воробьева. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.: ил.

18. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования [Текст] / Р. Беллман, С. Дрейфус; пер. с английского Н. М. Митрофановой, А. А. Первозванского, А. П. Хусу, О. В. Шалаевского; под редакцией А. А. Первозванского. – М.: Наука, 1965. – 458 с.

19. Бирюков, Р. С. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст]: Учебно-методическое пособие / Р. С. Бирюков, С. Ю. Городецкий, С. А. Григорьева, З. Г. Павлючонок, В. П. Савельев. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.

20. Богданова, Е. Л. Оптимизация в проектном менеджменте: нелинейное программирование [Текст]: Учеб. пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 190 с.

21. Брынь, М.Я. Уравнивание геодезических измерений параметрическим способом: учебное пособие / М.Я. Брынь, А.В. Астапович, Д.А. Афонин. – СПб. : ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2014. – 48 с.

22. Брынь, М. Я. Уравнивание пространственных геодезических построений поисковыми методами Пауэлла и Девиса-Свенна-Кемпи [Текст] / М. Я. Брынь, Г. Г. Шевченко // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. – 2019. – №10. – С. 26-31.

23. Будо, А. Ю. Сравнительный анализ результатов уравнивания, полученных по двум полярным методикам при обработке плановых геодезических сетей [Текст] / А. Ю. Будо // Вестник ПГУ. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2010. – №12. – С. 115-122.

24. Бурмистров, Г.А. Основы способа наименьших квадратов [Текст] / Г.А Бурмистров. – М.: Госгеолтех, 1963. – 392 с.

25. Бурша, М. Основы космической геодезии. Часть I. Геометрическая космическая геодезия [Текст] / М. Бурша; пер. с чешского А. В. Буткеевича, Б. Н. Дьякова; под редакцией А. В. Буткеевича. – М.: Недра, 1971. – 128 с.

26. Бурша, М. Основы космической геодезии. Часть II. Динамическая космическая геодезия [Текст] / М. Бурша; пер. с чешского А. В. Буткеевича, В. В. Киричука; под редакцией М. У. Сагитова. – М.: Недра, 1975. – 280 с.

27. **Быкасов, Д.А.** Программа расчета широты места по зенитальным наблюдениям солнца методом Ньютона / Д.А. Быкасов, О.В. Косарев, А.Б. Маховиков, Е.В. Катунцов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.: правообладатель Санкт-Петербургский горный университет. – рег. № 2018611417 от 01.02.2018– М.: Роспатент, 2018.

28. Быкасов, Д.А. Автоматизация процесса коррелатного уравнивания геодезического четырехугольника / Д.А. Быкасов, О.В. Косарев, Е.Г. Водкайло, А.А. Прямова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.: правообладатель Санкт-Петербургский горный университет. – рег. № 2018614252 от 03.04.2018– М.: Роспатент, 2018.

29. **Быкасов, Д. А.** Применение метода Ньютона второго порядка при решении маркшейдерско-геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Д. А. Быкасов // Маркшейдерский вестник. – 2020. – №5 (138). – С. 22-26. – ISSN 2073-0098.

30. **Быкасов, Д.А.** Программа для параметрического уравнивания геодезического четырёхугольника и пересчёта координат из одной системы в другую с использованием метода Ньютона второго порядка / Д.А. Быкасов, В.Г. Филиппов, А.В. Зубов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.: правообладатель Санкт-Петербургский горный университет. – рег. № 2021619091 от 04.06.2021– М.: Роспатент, 2021.

31. **Быкасов, Д.А.** Применение метода ньютона второго порядка при решение нелинейных геодезических задач / Д.А. Быкасов. – Текст: непосредственный // Актуальные проблемы недропользования: Тезисы докладов XIX Всероссийской конференции-конкурса студентов и аспирантов, Санкт-Петербург, 12–16 апреля 2021 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский горный университет, 2021. – С. 139.

32. Вайнаускас, В. В. Система моделей оптимизации и оценки геодезических и фотограмметрических опорных сетей [Текст] / В. В. Вайнаускас // Геодезия и картография. – 1979. – №8. – С. 23-30.

33. Вайнаускас, В. В. Оптимизация и оценка геодезической и фотограмметрической измерительной информации при построении опорных сетей [Текст] / В. В. Вайнаускас // Geodesy and Cartography. – 1983. – Т. 12. – №1. – С. 26-34.

34. Валиева, А. Р. Обоснование применения лазерного сканирования в оценке деформаций высотных конструкций [Текст] / А. Р. Валиева // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2016. – №4. – С. 60-64.

35. Вейс, Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. [Текст]: Монография / Г. Вейс; пер. с английского А. М. Микиша. – М.: Недра, 1967. – 234 с.

36. Вергаев, В.А. Вычислительная математика [Текст] / В.А. Вергаев, И.Г. Журкин, М.В. Красикова, Ю.М. Нейман, С.А. Смирнов // – М.: Недра, 1976. – 230 с.

37. Видуев, Н. Г. Дисперсионный анализ в теории и практике геодезических измерений [Текст] / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1968. – 103 с.

38. Видуев, Н. Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений [Текст] / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.

39. Видуев, Н. Г. Теория оптимизации в инженерной геодезии [Текст] / Н. Г. Видуев, Н. Т. Ковтун // Инженерная геодезия. – 1975. – №18. – С. 63-73.

40. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика [Текст] / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1975. – 208 с.

41. Гапанович, В. С. Методы решения оптимизационных задач [Текст]: Учеб. пособие / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. – 272 с. – ISBN 978-5-9961-0861-9.

42. Гераськин, М.И. Линейное программирование [Текст]: Учеб. пособие / М.И. Гераськин, Л.С. Клентак. – Самара: Изд-во СГАУ, 2014 – 104 с.

43. Гергель, В. П. Современные методы принятия оптимальных решений [Текст]: Учеб. пособие / В. П. Гергель, В. А. Гришагин, С. Ю. Городецкий. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2001. – 119 с.

44. Глушков, В. В. Космическая геодезия: методы и перспективы развития [Текст] / В. В. Глушков, К. К. Несретдинов, А. А. Шаравин. – М.: Институт политического и военного анализа, 2002. – 448 с.: ил.

45. Гордеев, В.А. Теория ошибок измерений и уравнительные вычисления : учебное пособие. 2-е изд., испр. И доп. / В.А. Гордеев. – Екатеринбург : Изд-во УГГУ, 2004. – 429 с.

46. Городецкий, С. Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / С. Ю. Городецкий. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 219 с.

47. Гребенникова, И. В. Методы оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / И. В. Гребенникова. – Екатеринбург: УрФУ, 2017. – 148 с. – ISBN 978-5-7996-2090-5.

48. Гринберг, Г.М. Применение электронно-вычислительных машин при уравнивании триангуляции и полигонометрии [Текст] / Г.М. Гринберг // М.: Наука, 1970. – С. 115-121.

49. Гутер, Р. С. Отыскание экстремумов функций большого числа переменных [Текст] / Р. С. Гутер, П. А. Гайдаев // Вестник ВИА им. Куйбышева. – 1995. – №79. – С.108-115.

50. Данциг, Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения [Текст] / Дж. Б. Данциг; перевод с английского Г. Н. Андрианова, Л. И. Горькова, А. А. Корбута, А. Н. Ляпунова; общая редакция и предисловие Н. Н. Воробьева. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

51. Дегтярёв, А. М. Использование методов оптимизации для решения инженерно-геодезических задач [Текст] / А. М. Дегтярёв, В. В. Ялтыхов // Вестник СГУГиТ. – 2015. – №1 (29). – С. 24-33.

52. Доронкина, А. Н. Подход к моделированию процесса оптимизации параметров эллиптических орбит спутниковой системы [Текст] / А. Н. Доронкина // Программные продукты и системы. – 2015. – №1 (109). – С. 87-91. DOI: 10.15827/0236-235X.109.087-091.

53. Дэннис, Д. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Д. Дэннис, Р. Шнабель. – М.: Мир, 1988. – 440 с.

54. Елисеева, Н. Н. Применение поисковых методов при решении нелинейных оптимизационных задач [Текст] / Н. Н. Елисеева // Сборник материалов XIV Международной научно-практической конференции, посвящённой 25-летию Конституции Республики Беларусь «Модернизация хозяйственного механизма сквозь призму экономических, правовых, социальных и инженерных подходов». – Минск: БНТУ. – 2019. – С. 364-369.

55. Елисеева, Н. Н. Применение метода поиска при решении оптимизационных задач в геодезии [Текст] / Н. Н. Елисеева // Сборник тезисов докладов XVII Всероссийской конференции-конкурса студентов и аспирантов горно-геологического, нефтегазового, энергетического, машиностроительного и металлургического профиля. – СПб.: СПбГУ. – 2019. – С. 160.

56. Елисеева, Н. Н. Обоснование применения и разработка поисковых методов при решении нелинейных оптимизационных задач в геодезии: дис. … кан. техн. наук: 25.00.32 / Надежда Николаевна Елисеева. – Санкт–Петербург, 2020. – 160 с.

57. Жаров, В. И. Геодезические измерения на радиотелескопе РАТАН-600 [Текст] / В. И. Жаров // Юбилейный сборник – САО РАН 50 лет. – 2018. – С. 75-85.

58. Желтко, Ч.Н. Алгоритм определения координат при мониторинге сооружений с использованием поискового метода уравнивания / Ч.Н. Желтко, Г.Г. Шевченко, Д.А. Гура, А.А. Кузнецова // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2013. – № 3. – С. 60-64.с.

59. Желтко, Ч.Н. Поисковый способ уравнивания и оценка точности неизвестных в методе наименьших квадратов: монография / Ч.Н. Желтко [и др.]; под ред. Ч.Н. Желтко. – Краснодар: ФГБОУ ВО «КубГТУ», 2016. – 103 с.

60. Зеленков, Г. А. Подход к разработке алгоритмов ньютоновских методов оптимизации, программная реализация и сравнение эффективности / Г. А. Зеленков, А. Б. Хакимова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 367-377.

61. Зубов, А. В. Оценка стабильности опорных и деформационных маркшейдерско-геодезических сетей [Текст] / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Маркшейдерский вестник. – 2013. – №2 (94). – С. 21-23.

62. Зубов, А. В. Применение градиентного метода при решении геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Труды межвузовской научно-практической конференции. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. – 2013. – С. 90-93.

63. Зубов, А. В. Применение поисковых методов при решении оптимизационных нелинейных инженерно-геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Материалы II Всероссийской научно-практической конференции «Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов в области топогеодезического и навигационного обеспечения». – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского. – 2018. – С. 372-377.

64. Зубов, А. В. Применение метода оптимизационной параболы для решения нелинейных маркшейдерско-геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Маркшейдерский вестник. – 2019. – №1 (128). – С. 24-27. – ISSN 2073-0098.

65. Зубов, А.В. Получение параметров связи между плоскими системами координат методом Ньютона второго порядка / А.В. Зубов, **Д.А. Быкасов.** – Текст: непосредственный // Геодезия, землеустройство и кадастры: проблемы и перспективы развития: Сборник материалов II Международной научно-практической конференции, Омск, 26 марта 2020 года. – Омск: Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина, 2020. – С. 58-62.

66. Зубов, А. В. Определение кренов строительных сооружений башенного типа путём аппроксимации результатов обмеров окружностью [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Материалы II Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы геодезии, кадастра, рационального земле- и природопользования». – Тюмень: Тюменский индустриальный университет. – 2019. – С. 145-149.

67. Зуховицкий, С. И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – 2-е изд., пер. и доп. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

68. Импортозамещение программного обеспечения в госсекторе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.tadviser.ru/index.php/ (дата обращения 27.07.2021).

69. Исследование точности приближенных способов уравнивания плановых геодезических сетей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.dslib.net/geodezia/issledovanie-tochnosti-priblizhennyh-sposobov-uravnivanija-planovyh.html (дата обращения 07.12.2020).

70. История развития компьютеров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.polnaja-jenciklopedija.ru/nauka-i-tehnika/istoriya-razvitiya-kompyuterov.html (дата обращения 09.08.2021).

71. История становления и развития теории оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://m.studme.org/183569/matematika_himiya_fizik/istoriya_stanovleniya_razvitiya_teorii_optimizatsii (дата обращения 23.06.2021).

72. Канторович, Л.В. О методе Ньютона / Л.В. Канторович // Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1949. – № 28. – С. 104–144.

73. Карманов, В. Г. Математическое программирование [Текст] / В. Г. Карманов. – М.: Наука, 1975. – 272 с.: ил.

74. Карпенко, А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой [Текст]: Учеб. пособие / А. П. Карпенко. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 446 с.

75. Каширина, И. Л. Исследование и сравнительный анализ методов оптимизации, используемых при обучении нейронных сетей [Текст] / И. Л. Каширина, М. В. Демченко// Вестник ВГУ,. – 2018. – №4. – С. 123-133.

76. Квазиньютоновские методы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/470638/ (дата обращения 10.08.2021).

77. Клыпин, И. А. Разработка и исследование алгоритма математической обработки геодезических сетей в разных системах координат: дис. … кан. техн. наук: 25.00.32 / Игорь Андреевич Клыпин. – М., 2011. – 90 с.

78. Клыпин, И. А. Современные задачи уравнительных вычислений [Текс] / И. А. Клыпин // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. – 2011. – №4. – С. 52-53.

79. Ковтун, Н.Т. Уравнивание триангуляции методом чебышевских приближений [Текст] / Н.Т. Ковтун. Инженерная геодезия. Киев. – 1979. – № 22. – С. 72-74.

80. Козин, Е. В. Фотограмметрия [Текст]: Учеб. пособие / Е. В. Козин, А. Г. Карманов, Н. А. Карманова. – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 142 с.

81. Коробочкин, М. И. Математическое моделирование в геодезии [Текст]: Учеб. пособие для студентов вузов / М. И. Коробочкин. – М.: ГУЗ, 2011. – 316 с. – ISBN 978-5-9215-0210-9.

82. Коробочкин, М. И. Математическое моделирование геопространственных данных [Текст]: Учебник / М. И. Коробочкин, Е. В. Калинова, А. Д. Тихонов. – М.: ГУЗ, 2017. – 377 с. – ISBN 978-5-9215-0333-5.

83. Коробочника, М. Я. Построение прогнозной модели поисковым методом нелинейного программирования по геодезическим данным [Текст] / М. Я. Брынь, Г. Г. Шевченко // Инженерные изыскания. – 2019. – №4. – С. 48-58.

84. Коугия, В. А. Математическое моделирование при обработке геодезических измерений [Текст]: Учеб. пособие / В. А. Коугия. – СПб, 2007. – 100 с.

85. Коугия, В. А. Определение градиентным методом элементов связи между трёхмерными системами координат [Текст] / В. А. Коугия, Н. В. Канашин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2008. – №2. – С. 22-28. – ISSN 0536-101X.

86. Коугия, В. А. Избранные труды [Текс]: Монография / В. А. Коугия; под ред. М. Я. Брыня. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2012. – 448 с.

87. Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации [Текст]: Учеб. пособие для академического бакалавриата / Е. А. Кочегурова. – М. : Юрайт, 2016. – 133 с.

88. Кравцов, В. В. Роль компьютерной техники в цифровой картографии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.vishagi.ru/publish/ ck1.html (дата обращения 05.08.2021).

89. Красикова, М. В. Оценка точности неизвестных при решении системы нормальных уравнений методом сопряжённых градиентов [Текст] / М. В. Красикова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1969. – №5. – С. 79-82.

90. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование [Текст]: Учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск.: Высш. шк., 1994. – 286 с.: ил. – ISBN 5-339-00961-0.

91. Кузьменко, И. Н. Применение теории случайных функций в геодезии [Текст]: Монография / И. Н. Кузьменко, Ю. В. Полищук, Л. А. Шаповалова. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1980. – 94 с.

92. Куштин, В. И. Разработка и исследование методов аналитического трансформирования снимков и их использование при решении научно-технических задач: дис. … кан. техн. наук: 05.24.02 / Владимир Иванович Куштин. – Ростов-на-Дону, 1999. – 228 с.

93. Ларин, Р. М. Методы оптимизации. Примеры и задачи [Текст]: Учеб. пособие / Р. М. Ларин, А. В. Плясунов, А. В. Пятник. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2003. – 115 с.

94. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 344 с. – ISBN 978-5-8114-1217-4.

95. Лесных, Н. Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://textarchive.ru/c-1246773-pall.html (дата обращения 26.07.2021).

96. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений [Текст] / Ю. В. Линник. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Физмалит, 1962. – 349

97. Луманн, Т. Ближняя фотограмметрия и 3D-зрение [Текст] / Т. Луманн, С. Робсон, С. Кайл, Я. Бом; пер. с английского В. А. Князя, В. В. Князя. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 704 с. – ISBN 978-5-9710-5298-2.

98. Мазуров, Б. Т. Метод наименьших квадратов (история и развитие) [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. А. Падве // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. – 2017. – Т. 1. – №1. – С. 150-154.

99. Мазуров, Б. Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики [Текст]: Монография / Б. Т. Мазуров. – Новосибирск: Агентство «Сибпринт», 2019. – 360 с.

100. Макаров, Г. В. Оценка точности при использовании поисковых методах уравнивания [Текст] / Г. В. Макаров, В. В. Афанасьев, Б. В. Афанасьев // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 20-22.

101. Макаров, Г.В. Использование аффинных преобразований при локальных геодезических съемках с помощью GPS-приёмников [Текст] / Г.В Макаров, Г.И. Худяков // Записки Горного института. – 2013. – №204. – С. 15-18.

102. Максимов, Ю.А. Алгоритмы решения задач нелинейного программирования [Текст] / Ю.А. Максимов, Е. А.Филлиповская. – М. : МИФИ, 1982. – 52 с.

103. Маркузе, Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1972. – 152 с.

104. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.

105. Маркузе, Ю.И. Исследование исходной матрицы обратных весов неизвестных при рекуррентном способе уравнивания измерений / Ю.И. Маркузе, Лэ Ань Куонг, Чан Тиен Ранг // Геодезия и картография. – 2016. – № 11. – С. 7-10.

106. Машимов, М.М. Уравнивание геодезических сетей / М.М. Машимов. – М. : Недра, 1979. – 367 с.

107. Метод BFGS или один из самых эффективных методов оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/333356/ (дата обращения 10.08.2021).

108. Микиша, А. М. Космические методы в геодезии [Текст] / А. М. Микиша. – М.: Знание, 1983. – 64 с.: ил.

109. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы [Текст] / М. Мину; пер. с французского и предисловие А. В. Штерна. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с. – ISBN 5-02-013980-7.

110. Михайлович, Е. В Исследование гравитационного влияния Луны и Солнца на движение космических аппаратов [Текст] / Е. В. Михайлович // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 2010. – №6. – С. 25-28.

111. Михайлович, Е. В. Методика учета возмущающих сил и преобразования координат в динамическом методе космической геодезии: дис. …кан. техн. наук: 25.00.32 / Елена Владимировна Михайлович. – Новосибирск, 2010. – 134 с.

112. Михеев, С.Е. Сходимость метода Ньютона на различных классах функций / С.Е. Михеев // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 10, № 3. – С. 72-86.

113. Мицкевич, В.И. Оценка точности пространственных засечек методами нелинейного программирования [Текст] / В.И. Мицкевич, Д.И. Абу // Геодезия и картография. – 1994. – №1. – С. 22-24.

114. Мицкевич, В. И. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности [Текст] / В. И. Мицкевич, В. В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1994. – №7. – С. 14-16.

115. Мицкевич, В.И. Исследование влияния некоторых ошибок по результатам уравнивания сплошных геодезических сетей [Текст] / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1995. – №3. – С. 11-13.

116. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования [Текст] / В.И. Мицкевич // Новополоцк: ПГУ, 1997. – 64с.

117. Мицкевич, В. И. Особенности уравнивания геодезических сетей по методу наименьших модулей [Текст] / В. И. Мицкевич, В. В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1997. – №5. – С. 23-24. – ISSN 0016-7126.

118. Мицкевич, В. И. Теория математической обработки геодезических построений методами нелинейного программирования: дис. … д-ра техн. наук: 25.00.32 / Валерий Иванович Мицкевич. – Новополоцк, 2004. – 133 с.

119. Мицкевич, В. И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования [Текст]: Учеб. пособие / В. И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 2007. – 64 с.

120. Мицкевич, В. И. Математические методы и модели на ЭВМ [Текст]: Учебно-метод. комплекс / В. И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 2007. – 184 с. – ISBN 978-985-418-568-2.

121. Мудров В.И. Методы обработки измерений [Текст] / В.Л. Кушко. – М.: Советское радио. 1976. -192 с.

122. Назаренко, В. Г. Уравновешивание триангуляции методом квадратичного программирования [Текст] / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1966. – №3. – С. 41-49.

123. Назаренко, В. Г. О решении задач геодезического уравновешивания методом квадратичного программирования [Текст] / В. Г. Назаренко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1967. – №3. – С. 21-24.

124. Назаренко, В. Г. Математическое программирование в уравнительных вычислениях [Текст] / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1968. – №4. – С. 134-139.

125. Немировский, А. С. Информационная сложность и эффективность методов оптимизации [Текст] / А. С. Немировский, Юдин Д. Б. – Наука, М.: 1976. . – 105 с.

126. Обзор градиентных методов в задачах математической оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/413853/ (дата обращения 09.08.2021).

127. Определение координат характерных точек объектов недвижимости [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.roscadastre.ru/html/standart/4.pdf (дата обращения 13.12.2020).

128. Ортега, Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

129. Павлов, В. И. Фотограмметрия. Теория одиночного снимка и стереоскопической пары снимков [Текст]: Учеб. пособие / В. И. Павлов. – 2-е изд., пер. и доп. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет), 2006. – 175 с. – ISBN 5-94211-175-8.

130. Падве, В. А. Потенциал универсального синтезированного алгоритма МНК-оптимизации геодезических данных [Текст] / В. А. Падве // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2011. – № 2. – С. 34-42.

131. Пандул, И. С. Развитие геодезии с древнейших времён до наших дней [Текст] / И. С. Пандул, Б. Я. Пукшанский // Маркшейдерский вестник. – 2008. – №5. – С. 13-16.

132. Парамзин, А. В. Разработка и исследование методов представления и уточнения параметров геопотенциала: дис. … кан. техн. наук: 05.24.01 / Алексей Валентинович Парамзин. – М., 1984. – 144 с.

133. ПО КРЕДО ДАТ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://credo-dialogue.ru/produkty/korobochnye-produkty/239-credo-dat-professional-naznachenie.html (дата обращения 09.08.2021).

134. ПО САПР: автоматизация проектирования, инструментарии, веб- и мобильный доступ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.autodesk.ru/products/autocad/overview?term=1-YEAR (дата обращения 05.08.2021).

135. Прокопенко, Н. Ю. Методы оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / Н. Ю. Прокопенко. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный архитектурно – строительный университет, 2018. – 118 с.

136. Русская версия MapInfo Pro 2019 и MapInfo Pro Advanced 2019 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mapinfo.ru/ (дата обращения 05.08.2021).

137. Рыбников, К. А. История математики [Текст] / К. А. Рыбников. – М.: Издательство МГУ, 1960. – Т. 1. – 190 с.

138. Садовникова, Н. А. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебно-методический комплекс / Н. А. Садовникова, Р. А. Шмойлова. – Вып. 3. – М. : Изд. центр ЕАОИ, 2009. – 264 с.

139. Свириденко, А. Б. Априорная поправка в ньютоновских методах оптимизации [Текст] / А. Б. Свириденко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – № 4 (7). – С. 835 – 863.

140. Свириденко, А. Б. Априорная поправка в ньютоновских методах оптимизации / А. Б. Свириденко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 835-863.

141. Свириденко, А. Б. Взаимосвязь и реализация квазиньютоновских и ньютоновских методов безусловной оптимизации [Текст] / А. Б. Свириденко, Г. А. Зеленков // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – № 1 (8). – С. 55 – 78.

142. Селютин, А. Д. Аппроксимация полиномов n степени методом наименьших квадратов [Текст] / А. Д. Селютин // Молодой учёный. – 2018. – №16 (202). – С. 91-95. – ISSN 2072-0297.

143. Середович, В. А. Наземное лазерное сканирование [Текст]: Монография / В. А. Середович, А. В. Комиссаров, Д. В. Комиссаров, Т. А. Широкова. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 261 с. – ISBN 978-5-87693-336-2.

144. Синявская, М. Л. Разработка научно-методических основ технологического развития геодезии: дис. … кан. техн. наук: 25.00.32 / Мария Леонидовна Синявская. – Новосибирск, 2018. – 123 с.

145. Соловьёв, И. В. Геодезия и прикладная информатика [Текст] / И. В. Соловьёв // Вестник МГТУ МИРЭА. – 2014. – №2. – С. 126-144.

146. Соломатин, В.А. Оптические и оптико-электронные приборы в геодезии, строительстве и архитектуре [Текст] / В.А. Соломатин. – М.: Машиностроение. 2013. – 288 с.

147. Строк, А.В. Технологический алгоритм предрасчета точности плановых геодезических сетей на персональном компьютере / А.В. Строк // Вестник Полоцкого

государственного университета. Серия В: Прикладные науки. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 105-113.

148. Тараничев, Н.А. Применение способа Ньютона для обработки результатов геодезических измерений [Текст] / Н.А Тараничев // Геодезия и картография. – 1964. – №4. – С. 22-27.

149. Таранов, В. С. Оптимизация параметров эллиптических орбит спутниковой системы [Текст] / В. С. Таранов // Материалы национальной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и техники». – 2018. – С. 368-369.

150. Тимов, Х. И. Приложение теории выпуклого программирования для уравнивания условных и посредственных измерений [Текст] / Х. И. Тимов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1968. – №1. – С. 49-50.

151. Турчак, Л. И. Основы численных методов [Текст]: Учеб. пособие / Л. И. Турчак. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.

152. Угаров, С. Г. Оптимизация построения фотограмметрических сетей с использованием элементов внешнего ориентирования фотоснимков, определенных при помощи стандартного геодезического GPS-оборудования [Текст] / С. Г. Угаров, С. А. Ефимов, А. А. Капралов // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия: География. – 2010. – Т. 23 (62). – №1. – С. 280-285.

153. Улыбышев, Ю. П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов [Текст] / Ю. П. Улыбышев // Космическая техника и технологии. – 2016. – №4 (15). – С. 67-79.

154. Улыбышев, Ю. П. Оптимизация траекторий космических аппаратов для мягкой посадки на Луну [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://readings. gmik.ru/lecture/2007-OPTIMIZATSIYA-TRAEKTORIY-KOSMICHESKIH-APPARA TOV-DLYA-MYAGKOY-POSADKI-NA-LUNU (дата обращения 14.07.2020).

155. Уравнивание геодезических измерений параметрическим способом по курсу ТМОГИ для студентов III курса геодезического факультета [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.miigaik.ru/upload/iblock/6fa/6fa7eb140d4f1f18a53615b211a45299.pdf (дата обращения 13.12.2020).

156. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау; пер. с английского И. М. Быховской, Б. Т. Вавилова; под редакцией М. Л. Быховского. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

157. Холоднов, В. А. Решение задач безусловной оптимизации с использованием системы компьютерной математики MathCAD [Текст]: Методические указания / В. А.

Холоднов, В. А. Сиренек, В. Н. Чепикова, Е. С. Боровинская, В. М. Крылов. – СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2009. – 47 с.

158. Цифровая экономика РФ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://digital.gov.ru/ru/activity/directions/858/ (дата обращения 27.07.2021).

159. Черноусько, Ф. Л. Динамическое программирование [Текст] / Ф. Л. Черноусько // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №2. – С. 139-144.

160. Шац, В. Н. Стохастический метод решения задач классификации и обучения [Текст] / В. Н. Шац // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2011. – Т. 7. – №1. – С. 257-268.

161. Шевченко, Г.Г. Об обработке результатов определения пространственного положения деформационных марок с использованием поискового способа метода наименьших квадратов / Г.Г. Шевченко, Д.А. Гура, Ю.В. Лобанова // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2018. – Т. 15. – № 4. – С. 653-665.

162. Шевченко, Г.Г. Об уравнивании свободных геодезических сетей поисковым методом при геодезическом мониторинге зданий и сооружений / Г.Г. Шевченко, М.Я. Брынь // Сборник трудов Международного форума Геопространственное обеспечение проектирования, строительства и эксплуатации инженерных сооружений, г. Новосибирск, 27-29 марта 2019 г. – С. 145-156.

163. Шевченко, Г. Г. Использование поисковых методов для уравнивания и оценки точности элементарных геодезических построений [Текст] / Г. Г. Шевченко // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80. – №10. – С. 10-20. DOI: 10.22389/0016-7126-2019-952-10-10-20.

164. Шевченко, Г. Г. Разработка технологии геодезического мониторинга зданий и сооружений способом свободного станционирования с использованием поискового метода нелинейного программирования: дис. … кан. техн. наук: 25.00.32 / Гриттель Геннадьевна Шевченко. – Санкт–Петербург, 2020. – 212 с.

165. Шнитко, С. Г. Алгоритмы уравнивания и оценки точности геодезических сетей нелинейными методами [Текст] / С. Г. Шнитко // Вестник ПГУ. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2012. – №8. – С. 133-135. – ISSN 2070-1683.

166. Юршанский, З.М. Уравнивание и оценка точности опорных геодезических сетей способом последовательных приближений : автореферат дис. на соискание ученой степени кандидата технических наук / З.М. Юршанский. – М-во культуры СССР. Белорус. политехн. ин-т им. И. В. Сталина. – Минск : [б. и.], 1953. – 10 с.

167. Akyilmaz, O. Total Least Squares in Geodetic Coordinate Transformation / O. Akyilmaz// Survey Review. – 2007. – № 39. – S. 68-80.

168. Awange, J. L. Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics / J. L. Awange, E. W. Grafarend – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 333 p.

169. Bajtala, M. Impact of a horizontal refraction on a geodetic network adjustment / M. Bajtala, Š. Sokol // International Scientific and Professional Conference on Geodesy, Cartography and Geoinformatics. – 2017. – №1. – pp. 3-8.

170. Beregovoi, D. V. Monitoring of Quarry Slope Deformations with the Use of Satellite Positioning Technology and Unmanned Aerial Vehicles / D. V. Beregovoi, J. A. Younes, M. G. Mustafin // Procedia Engineering. – 2017. – №189. – pp. 737-743.

171. **Bykasov, D.A.** Applying Newton's second order optimization method to define transition keys between planar coordinate systems/ D.A. Bykasov, A.V. Zubov, M.G. Mustafin// E3S Web Conf.: Topical Problems of Agriculture, Civil and Environmental Engineering (TPACEE 2020). – 2020. – Vol. 224. – №.1. – Pp. 1-9.

172. **Bykasov, D.A.** Application of Newton's method to solve optimization geodetic tasks/ D.A. Bykasov, A.V. Zubov, M.G. Mustafin// E3S Web Conf.: TOPICAL ISSUES 2021. – 2021. – Vol. 266. – №.1. – Pp. 1-9.

173. **Bykasov, D.A.** Application of the Newton method in solving of the optimization geodetic tasks / D.A. Bykasov. – Текст: непосредственный // Scientific conference abstracts. The XVII International Forum-Contest Of Students And Young Researchers « Topical Issues Of Rational Use Of Natural Resources». – Saint-Petersburg: Saint-Petersburg Mining University, 2021. – P. 228.

174. Degtyarev, A.M. Optimization methods for engineering geodesy problems solution / A.M. Degtyarev, V.V. Yaltykhov // Vestnik SGGA [Vestnik SSGA]. – 2015. – 1(29). – pp. 24-33.

175. Huang, Z. Validation of a numerical method for predicting shear deformation of reinforced concrete beams / Z. Huang, Y. Tu, S. Meng, N. Bagge, J. Nilimaa, T. Blanksvärd // Engineering Structures. – 2019. – Vol. 197.

176. Eliseeva, N. N. The application of search methods for solving optimization problems in geodesy / N. N. Eliseeva, A. V. Zubov // Scientific conference abstracts. The XV International Forum-Contest of Students and Young Researchers «Topical Issues of Rational Use of Natural Resources 2019». – 2019. – P. 238.

177. Grundig, L. Rigorous non-linear least square adjustment of extensive geodetic networks / L.Grundig, K. Linkwitz // Veroffentlich Deutsche geodetische Kommisions Bauer Akademie Wissenschafthch. – 1977. – №221. – S.43-51.

178. Kelley, R.P. Some results on nonlinear and constrained least squares / R.P. Kelley, W.A. Tompson // Manuscripta geodaetica. – 1978. – №4. – S.299-320.

179. Kosarev, O.V. Modeling of industrial iot complex for underground space scanning on the base of arduino platform / Kosarev O.V.,Tcvetkov P.S.,Makhovikov A.B.,Vodkaylo E.G.,Zulin V.A., **Bykasov D.A.** – Текст: электронный // Topical Issues of Rational Use of National Resources. – CRC Press. – 2019. – Vol. 1.

180. Kovačič, B. Non-contact monitoring for assessing potential bridge damages / B. Kovačič, L. MurÅ¡ec, S. Toplak, S. Lubej // E3S Web of Conferences Series: Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering 2019 (TPACEE 2019). – Vol. 164 (2020) 03001. – pp. 20-36.

181. Kuzin, A. A. Satellite-based techniques for monitoring of bridge deformations / A. A. Kuzin, V. A. Valkov, A. I. Kazantsev // Journal of Physics Conference Series: International conference complex equipment of quality control laboratories. – Vol.1118 (2018) 012044. pp. – 1-6.

182. Mathcad Prime 7: математическое ПО для инженерных расчетов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.mathcad.com/ru (дата обращения 27.07.2021).

183. Monico, G. Distortion Modeling between Geodetics Network in Brazil: A Grid-Based Approach /G. Monico, J. Paulo, P. Camargo, M. Galo // Conference: FIG Working Week 2008. – 2008. – №1. – pp. 135-141.

184. Munoz-Guijosa, J. M. Application of an active rectifier used to mitigate currents distortion in 6-10 KV distribution grids / J. M. Munoz-Guijosa, S. B. Kryltcov, S. V. Solovev// Journal of Mining Institute – 2019. – № 236. – S. 229-238.

185. Mustafin, M.G. Adjustment of Planned Surveying and Geodetic Networks Using Second-Order Nonlinear Programming Methods / M.G. Mustafin, **D.A. Bykasov.** – Текст: электронный // Computation. – MDPI. – 2021. – Vol. 9. – №. 12. – P.1-17. DOI: 10.3390/computation9120131.

186. Nesterov, Yu. Gradient methods for minimizing composite functions / Yu. Nesterov // Mathematical Programming. – 2013. – 140(1). – pp. 125-161.

187. Sholomitskii, A. Design and Preliminary Calculation of the Accuracy of Special Geodetic and Mine Surveying Networks / A. Sholomitskii, E. Lagutina // IOP Conf. Series Earth and Environmental Science. – Vol.272 (2019) 022010. pp. – 1-7.

188. Shu, C. Improving Algorithm to Compute Geodetic Coordinates / C. Shu, F. Li, S. Wang // Conference: International Workshop on Geoscience and Remote Sensing. – 2008. – Vol 2. – №1. – pp. 340-343.

189. Spatial Analyzer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.promgeo.com/ software/sa/ (дата обращения 05.08.2021).

190. Tsvetkov, V.Ya. Littoral monitoring using unmanned aerial vehicle / V. Ya. Tsvetkov, V. V. Oznamets // Geodesy and cartography. – 2020. – 81(5). – pp. 2-10.

191.Vasil’ev, A. S. Special strategy of treatment of difficulty-profile conical screw surfaces of single-screw compressors working bodies/ A. S. Vasil’ev, A. A. Goncharov // Journal of Mining Institute – 2019. – № 235. – S. 60-64.

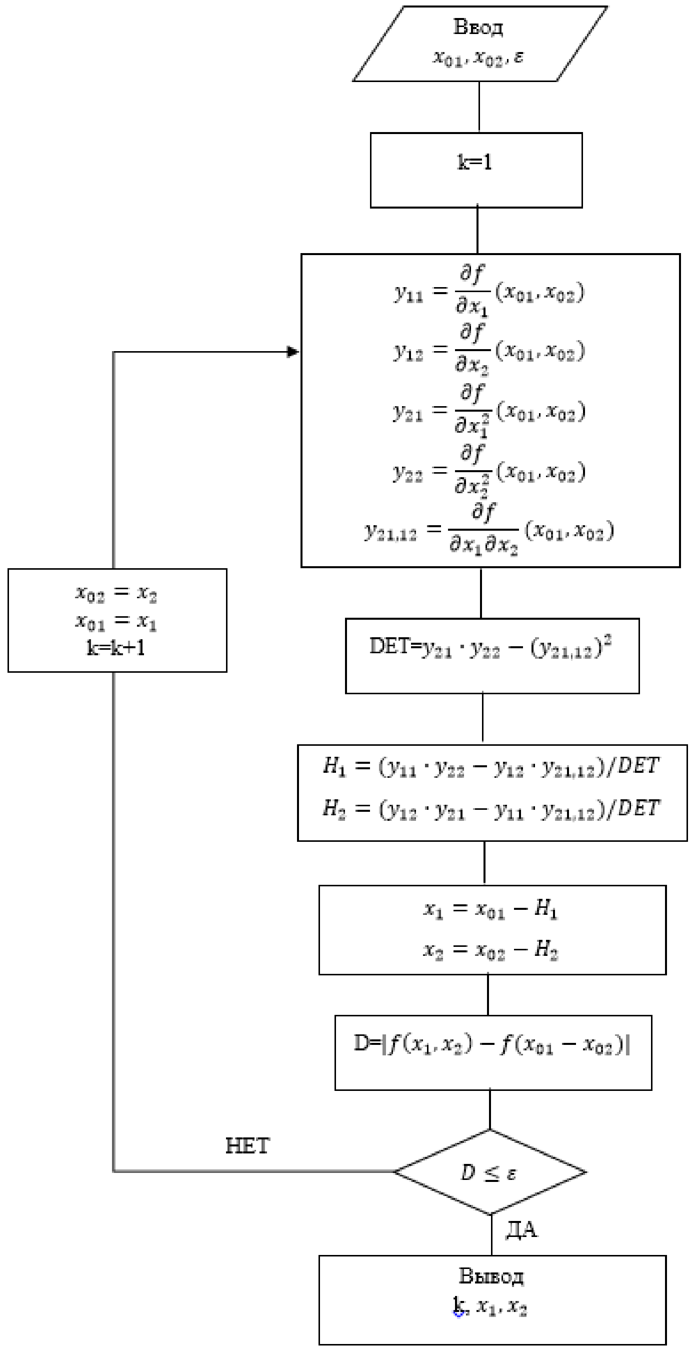
192. Yan, J. Feasibility of Gauss-Newton method for indoor positioning / J. Yan, C. Tiberius, G. Bellusci, G. Janssen // IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. – 2008. – pp. 660-670.

193. Yu, J. Analysis of GNSS postseismic deformation of Wenchuan earthquake / J. Yu, S. Zhao, B. Tan.//. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica. – 2018. – 47(9). – pp. 1196-1206.

194. Zelizňaková, V. The comparison of selected robust estimation methods for adjustment of measurements in geodetic network / V. Zelizňaková, T. Hurčík // International Scientific and Professional Conference on Geodesy, Cartography and Geoinformatics. – 2017. – №1. – pp. 119-124.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Блок-схема метода Ньютона второго порядка



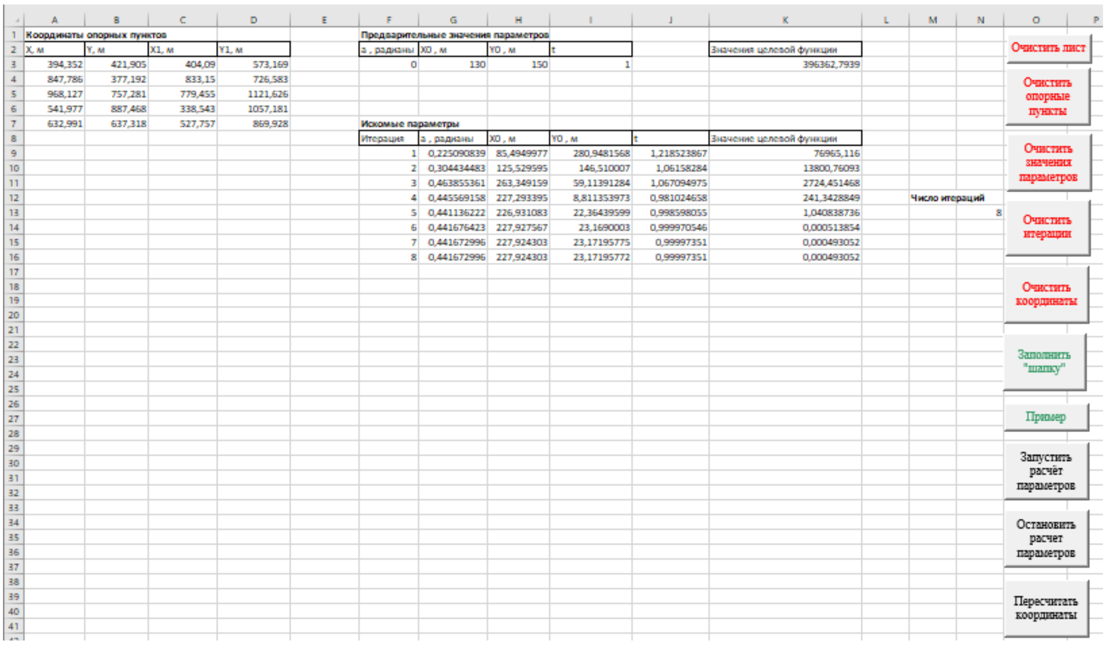
ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Сравнение параметрического способа уравнивания с методом Ньютона второго порядка

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Интерфейс программы в VBA для определения параметров перехода между плоскими системами координат

а) Лист с выполненным расчётом параметров.



Координаты опорных пунктов

X, м	Y, м	X1, м	Y1, м
394,352	421,905	404,09	573,169
847,786	377,192	833,15	726,583
968,127	757,281	779,455	1121,626
541,977	887,468	338,543	1057,181
632,991	637,318	527,757	869,928

Предварительные значения параметров

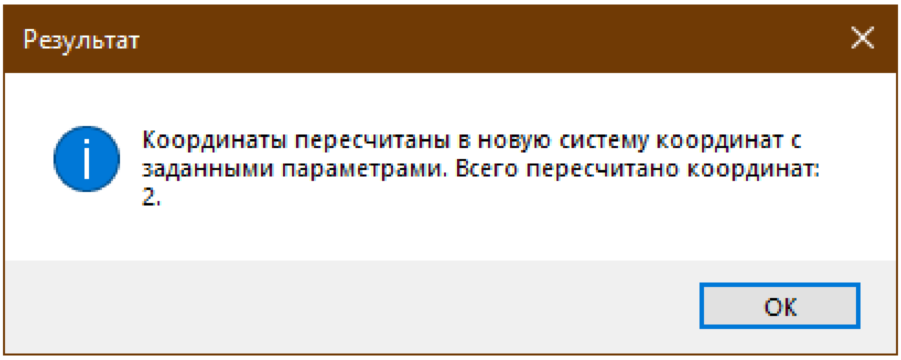
a , радианы	X0 , м	Y0 , м	t	Значения целевой функции
0	130	150	1	396362,7939

Искомые параметры

Итерация	a , радианы	X0 , м	Y0 , м	t	Значение целевой функции
1	0,225090839	85,4949977	280,9481568	1,218523867	76965,116
2	0,304434483	125,529595	146,510007	1,06158284	13800,76093
3	0,463855361	263,349159	59,11391284	1,067094975	2724,451468
4	0,445569158	227,293395	8,811353973	0,981024658	241,3428849
5	0,441136222	226,931083	22,36439599	0,998598055	1,040838736
6	0,441676423	227,927567	23,1690003	0,999970546	0,000513854
7	0,441672996	227,924303	23,17195775	0,99997351	0,000493052
8	0,441672996	227,924303	23,17195772	0,99997351	0,000493052

Число итераций 8

б) Уведомление об успешном пересчёте координат.



ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Вычисление параметров перехода между плоскими системами координат (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Таблица Г.1 – Вычисление параметров перехода между плоскими системами координат (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска*	метод наискорейшего спуска*	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		–	–	445	9
Начальное значение Целевой функции		7.421×10^{6}			
Предварительное значение искомых параметров	$X_0, м$	0.000			
	$Y_0, м$	0.000			
	$\alpha, рад$	0.0000000			
	t	0.000			
Конечное значение целевой функции		–	–	24.493×10^{3}	53.773×10^{-3}
Полученные значения искомых параметров	$X_0, м$	–	–	-0.039	-215.982
	$Y_0, м$	–	–	0.014	76.455
	$\alpha, рад$	–	–	-0.2690000	-0.4416416
	t	–	–	0.876	1.000
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		–	–	110.5954	0.1691

Продолжение таблицы Г.1

Средние квадратические ошибки определения элементов преобразования	m_{X_0}, *мм*	–	–	16304.2	25.4
	m_{Y_0}, *мм*	–	–	16044.4	25.4
	m_α, "	–	–	34.64×10^3	46.53
	m_t	–	–	0.15	0.00

* метод не работает при данных предварительных значениях определяемых параметров, вследствие возникновения бесконечной рекурсии (зацикливание программного алгоритма)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Вычисление параметров перехода между плоскими системами координат (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица Д.1 – Вычисление параметров перехода между плоскими системами координат (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		1825	856	100	2
Начальное значение целевой функции		10.981×10^{0}			
Предварительное значение искомых параметров	X_0, *м*	-215.000			
	Y_0, *м*	76.000			
	α	-0.4400000			
	t	1.000			
Конечное значение целевой функции		167.939×10^{3}	60.239×10^{-3}	53.773×10^{-3}	53.773×10^{-3}
Время решения задачи, с		1.6	1.1	1.1	0.8
Полученные значения искомых параметров	X_0, *м*	-215.939	-215.980	-215.982	-215.982
	Y_0, *м*	76.031	76.449	76.455	76.455
	α	-0.4408752	-0.4416528	-0.4416416	-0.4416416
	t	1.132	1.000	1.000	1.000
Средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, *м*		289.3074	0.1742	0.1691	0.1691

Продолжение таблицы Д.1

Средние квадратические ошибки определения элементов преобразования	m_{X_0}, *мм*	32124.2	25.4	25.4	25.4
	m_{Y_0}, *мм*	28702.3	25.4	25.4	25.4
	m_{α},"	70.4×10^3	47.78	46.53	46.53
	m_t	0.3	0.00	0.00	0.00

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Вычисление параметров перехода между пространственными системами координат (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица Е.1 – Вычисление параметров перехода между пространственными системами координат (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи			
		градиентный спуск	наискорейшего спуска	сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		1289	990	310	3
Начальное значение целевой функции		5.660×10^{6}			
Предварительное значение искомых параметров	α	0.3490658			
	β	0.6981317			
	γ	1.0471975			
Конечное значение целевой функции		48.085×10^{0}	347.970×10^{0}	8.337×10^{-7}	8.280×10^{-7}
Полученные значения искомых параметров	α	0.4555145	0.4545665	0.4537850	0.4537851
	β	0.8195577	0.8210877	0.8203049	0.8203049
	γ	1.0978597	1.089997	1.0995572	1.0995573
	x_0, *м*	144.009	159.662	150.002	150.001
	y_0, *м*	297.987	234.949	324.002	324.002
	z_0, *м*	313.102	338.079	294.998	294.998
Оценка точности					

Продолжение таблицы Е.1

Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		4.0001	10.7778	0.5400	0.5400
СКО угловых параметров	m_α / m_β / m_γ, *сек*	1135.02 / 880.06 / 1460.05	3090.89 / 2364.88 / 3962.75	1.1 /1.2 / 2.0	1.1 /1.2 / 2.0
Средние квадратические ошибки определяемых лилейных параметров	m_{x_0}, *мм*	387.4	1387.7	2.3	2.3
	m_{y_0}, *мм*	721.5	1846.2	1.1	1.1
	m_{z_0}, *мм*	490.2	1237.5	0.9	0.9

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Решение пространственной многократной линейной засечки с одним определяемым пунктом

Таблица Ж.1 – Решение пространственной многократной линейной засечки с одним определяемым пунктом

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		1297	209	202	3
Начальное значение целевой функции		1.748×10^{3}			
Предварительное значение искомых параметров	X_P	40.000			
	Y_P	90.000			
	Z_P	30.000			
Конечное значение целевой функции		8.755×10^{-4}	692.088×10^{-6}	692.088×10^{-6}	692.088×10^{-6}
Полученные значения искомых параметров	X_P	57.136	57.139	57.139	57.139
	Y_P	109.106	109.108	109.108	109.108
	Z_P	43.361	43.379	43.379	43.379
Обратная весовая матрица уравненных координат		$Q = \begin{pmatrix} 0.703 & -0.085 & 0.140 \\ -0.085 & 0.374 & 0.155 \\ 0.140 & 0.155 & 1.749 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 0.176 & -0.021 & 0.035 \\ -0.021 & 0.094 & 0.039 \\ 0.035 & 0.039 & 0.437 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 0.176 & -0.021 & 0.035 \\ -0.021 & 0.094 & 0.039 \\ 0.035 & 0.039 & 0.437 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 0.176 & -0.021 & 0.035 \\ -0.021 & 0.094 & 0.039 \\ 0.035 & 0.039 & 0.437 \end{pmatrix}$
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		0.0213	0.0186	0.0186	0.0186
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	$m_x, мм$	17.4	15.6	15.6	0.8
	$m_y, мм$	12.7	11.3	11.3	0.6
	$m_z, мм$	27.5	24.6	24.6	1.2

Продолжение таблицы Ж.1

Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_P	34.9	31.2	31.2	31.2

ПРИЛОЖЕНИЕ И

Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Таблица И.1 – Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		4156	5946	670	39
Начальное значение целевой функции		8.510×10^{6}			
Предварительное значение искомых параметров	X_{P1}	10.000			
	Y_{P1}	1.000			
	Z_{P1}	1.000			
	X_{P2}	1.000			
	Y_{P2}	1.000			
	Z_{P2}	1.000			
Конечное значение целевой функции		4.311×10^{3}	0.776×10^{0}	6.162×10^{4}	8.606×10^{-7}
Время решения задачи, с		41.0	45.0	9.0	5.0

Продолжение таблицы И.1

Полученные значения искомых параметров	X_{P_1}	1371.551	1399.946	1413.255	1400.000
	Y_{P_1}	1426.295	1400.886	1518.320	1400.000
	Z_{P_1}	-503.011	559.603	28.788	559.999
	X_{P_2}	1374.008	1402.252	1410.258	1401.000
	Y_{P_2}	1315.633	1310.646	1291.019	1302.000
	Z_{P_2}	-522.906	598.832	28.044	561.000

ПРИЛОЖЕНИЕ К

Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица К.1 – Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		2963	1892	285	4
Начальное значение целевой функции		3.220×10^{0}			
Предварительное значение искомых параметров	X_{P_1}	1398.000			
	Y_{P_1}	1398.000			
	Z_{P_1}	557.000			
	X_{P_2}	1398.000			
	Y_{P_2}	1300.000			
	Z_{P_2}	556.000			
Конечное значение целевой функции		1.817×10^{-3}	8.606×10^{-7}	6.00×10^{-2}	8.606×10^{-7}

Продолжение таблицы К.1

Полученные значения искомых параметров	X_{P_1}	1399.997	1400.000	1400.089	1400.000
	Y_{P_1}	1399.995	1400.000	1398.937	1400.000
	Z_{P_1}	560.001	559.999	560.441	559.999
	X_{P_2}	1400.991	1401.000	1400.802	1401.000
	Y_{P_2}	1302.007	1302.000	1300.968	1302.000
	Z_{P_2}	560.921	561.000	556.442	561.000

ПРИЛОЖЕНИЕ Л

Оценка точности пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Таблица Л.1 – Оценка точности пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (отдаленное задание предварительных значений определяемых параметров от точки минимума функции)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, мм$		29364.0	391.3	111015.0	0.4
Пункт P_1					
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	$m_x, мм$	11194.9	149.5	36518.3	0.2
	$m_y, мм$	15713.6	433.2	57202.5	0.9
	$m_z, мм$	16674.1	274.1	84568.4	0.5
Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта $M_{P_1}, мм$		25500.3	534.0	108432.1	1.0
Пункт P_2					
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	$m_x, мм$	22161.5	349.9	63835.9	0.4
	$m_y, мм$	13368.0	640.4	33359.4	1.0
	$m_z, мм$	43149.4	2526.5	52027.3	4.3

Продолжение таблицы Л.1

Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_{P_2}, *мм*	50316.1	2629.8	88852.2	4.5

ПРИЛОЖЕНИЕ М

Оценка точности пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица М.1 – Оценка точности пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, *мм*		19.1	0.4	109.9	0.4
Пункт P_1					
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_x, *мм*	7.8	0.2	44.5	0.2
	m_y, *мм*	43.9	0.9	230.5	0.9
	m_z, *мм*	21.7	0.5	115.7	0.5
Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_{P_1}, *мм*		49.6	1.0	261.7	1.0
Пункт P_2					
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_x, *мм*	17.8	0.4	99.2	0.4
	m_y, *мм*	47.2	1.0	196.4	1.0
	m_z, *мм*	207.7	4.3	870.3	4.3

Продолжение таблицы М.1

Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_{P_2}, *мм*	213.7	4.5	897.7	4.5

ПРИЛОЖЕНИЕ Н

Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости

Таблица Н.1 – Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости

Параметры		Метод решения задачи			
		метод градиентного спуска	метод наискорейшего спуска	метод сопряженных градиентов	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		2978	3980	101	3
Начальное значение целевой функции		223.344×10^{0}			
Предварительное значение искомых параметров	X_P	100.000			
	Y_P	100.000			
Конечное значение целевой функции		0.039×10^{0}	2.485×10^{-3}	2.479×10^{-3}	2.479×10^{-3}
Полученные значения искомых параметров	X_P	110.061	110.201	110.203	110.203
	Y_P	105.632	105.582	105.581	105.581
Оценка точности					
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		0.1132	0.0283	0.0283	0.0283
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	$m_x, мм$	45.1	15.2	15.2	15.2
	$m_y, мм$	47.4	12.1	12.1	12.1
Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта $M_P, мм$		65.4	16.2	16.2	16.2

ПРИЛОЖЕНИЕ П

Исходные данные для уравнивания сетей трилатерации №1, №2, №3, №4, №5

Таблица П.1 – Исходные данные для уравнивания сетей трилатерации №1, №2, №3, №4, №5

Номер точки	Наименование линии	Длина, м
1	С – 2	492,886
2	В – 2	448,178
3	А – 2	445,726
4	А – 3	512,201
5	3 – 2	504,961
6	2 – 4	733,414
7	2 – 1	523,911
8	1 – С	534,601
9	3 – 1	654,977
10	3 – 4	482,249
11	4 – 1	456,648
12	5 – А	617,706
13	5 – 3	322,978
14	5 – 4	700,240
15	5 – 11	548,554
16	5 – 9	1107,723
17	5 – 6	836,962
18	3 – 11	652,840
19	4 – 11	606,650
20	6 – 11	811,220
21	8 – 11	719,350
22	7 – 6	698,355
23	7 – 8	766,908
24	6 – 9	436,770
25	7 – 10	743,585
26	7 – 9	758,988
27	10 – 9	1003,866
28	9 – 11	841,161
29	6 – 8	195,970
30	8 – 9	267,048
31	9 – 12	518,482
32	10 – 12	1027,350
33	10 – 13	1421,374
34	13 – 14	707,371
35	12 – 14	618,558
36	13 – 15	731,901
37	14 – 15	775,044
38	14 – 9	827,754

Продолжение таблицы П.1

39	12 – 11	1053,607
40	12 – 13	579,068
41	11 – 14	712,699
42	4 – 14	1132,899
43	11 – 17	1230,870
44	14 – 18	1250,189
45	14 – 17	987,100
46	14 – 16	810,842
47	15 – 16	373,840
48	16 – 23	883,411
49	15 – 23	1049,707
50	16 – 22	750,619
51	17 – 23	949,910
52	22 – 23	527,548
53	23 – 24	770,790
54	22 – 24	743,887
55	24 – 25	787,590
56	21 – 24	812,822
57	17 – 22	556,569
58	18 – 22	1149,997
59	22 – 21	709,160
60	17 – 21	955,339
61	16 – 17	451,771
62	18 – 17	765,793
63	17 – 20	1081,844
64	18 – 21	1030,250
65	18 – 4	535,790
66	18 – 20	702,770
67	18 – 1	611,275
68	18 – 19	814,036
69	1 – 20	1020,914
70	1 – 19	662,263
71	19 – 20	632,894
72	20 – 21	578,701

ПРИЛОЖЕНИЕ Р

Решение сети трилатерации №1 (отдаленное к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе вырождена

Таблица Р.1– Решение сети трилатерации №1 (отдаленное к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе вырождена

Параметры		Метод решения задачи			
		градиентный спуск*	наискорейший спуск	сопряженные градиенты	метод Ньютона второго порядка*
Число итераций		–	2891	683	–
Начальное значение целевой функции		5.082×10^{6}			
Предварительное значение искомых параметров	x_1 / y_1	0.000 / 0.000			
	x_2 / y_2	0.000 / 0.000			
	x_3 / y_3	0.000 / 0.000			
	x_4 / y_4	0.000 / 0.000			
	x_5 / y_5	0.000 / 0.000			
Конечное значение целевой функции		–	4.913×10^{8}	378.531×10^{0}	–
Полученные значения искомых параметров	x_1 / y_1	–	1104.558 / 749.335	211.789 / 1221.375	–
	x_2 / y_2	–	-4925.758 / -5467.253	581.348 / 860.162	–
	x_3 / y_3	–	1709.125 / 2810.235	161.153 / 570.396	–
	x_4 / y_4	–	2298.365 / 3010.789	-150.005 / 939.309	–
	x_5 / y_5	–	211.524 / 179.612	38.588 / 280.604	–
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		–	1.280×10^{4}	11.262	–

Продолжение таблицы Р.1

Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_{x_1} / m_{y_1}, *м*	–	$9.32\times10^3 / 8.27\times10^3$	10.00 / 12.25	–
	m_{x_2} / m_{y_2}, *м*	–	$6.52\times10^3 / 6.27\times10^3$	8.06 / 7.84	–
	m_{x_3} / m_{y_3}, *м*	–	$8.28\times10^3 / 7.17\times10^3$	9.89 / 10.69	–
	m_{x_4} / m_{y_4}, *м*	–	$1.01\times10^4 / 1.04\times10^4$	10.51 / 17.62	–
	m_{x_5} / m_{y_5}, *м*	–	$1.26\times10^4 / 1.42\times10^4$	13.43 / 16.29	–

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Решение сети трилатерации №1 (отдаленное к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе не вырождена

Таблица С.1 – Решение сети трилатерации №1 (отдаленное к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе не вырождена

Параметры		Метод решения задачи			
		градиентный спуск*	наискорейший спуск	сопряженные градиенты	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		–	3001	586	11
Начальное значение целевой функции		4.982×10^{6}			
Предварительное значение искомых параметров	x_1 / y_1	10.000 / 10.000			
	x_2 / y_2	10.000 / 10.000			
	x_3 / y_3	10.000 / 10.000			
	x_4 / y_4	10.000 / 10.000			
	x_5 / y_5	10.000 / 10.000			
Конечное значение целевой функции		–	3.897×10^{0}	2.413×10^{0}	22.451×10^{-6}
Полученные значения искомых параметров	x_1 / y_1	–	212.999 / 1241.999	213.517 / 1242.222	213.737 / 1241.370
	x_2 / y_2	–	580.778 / 866.998	580.685 / 867.828	580.501 / 867.248
	x_3 / y_3	–	159.232 / 589.001	159.880 / 589.763	159.347 / 588.656
	x_4 / y_4	–	-147.025 / 961.036	-146.365 / 962.073	-146.869 / 961.209
	x_5 / y_5	–	43.895 / 288.035	43.290 / 289.190	43.237 / 287.272
Средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, *мм*		–	1139.7	897.99	1.94

Продолжение таблицы С.1

Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_{x_1} / m_{y_1}, *мм*	–	1010.0 / 1227.6	800.6 / 900.8	1.7 / 2.0
	m_{x_2} / m_{y_2}, *мм*	–	812.4/ 791.1	641.9 / 600.5	1.4 / 1.3
	m_{x_3} / m_{y_3}, *мм*	–	990.3 / 1051.3	800.8 / 830.4	1.6 / 1.8
	m_{x_4} / m_{y_4}, *мм*	–	1069.0 / 1759.8	840.5 / 1394.6	1.8 / 3.0
	m_{x_5} / m_{y_5}, *мм*	–	1304.6 / 1559.6	1020.5 / 1235.8	2.2 / 2.6

ПРИЛОЖЕНИЕ Т

Решение сети трилатерации №1 (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица Т.1 – Решение сети трилатерации №1 (близкое к точке минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи			
		градиентный спуск*	наискорейший спуск	сопряженные градиенты	метод Ньютона второго порядка
Число итераций		2894	2033	401	6
Начальное значение целевой функции		48.995×10^{0}			
Предварительное значение искомых параметров	x_1 / y_1	211.000 / 1240.000			
	x_2 / y_2	579.000 / 866.000			
	x_3 / y_3	158.000 / 588.000			
	x_4 / y_4	-145.000 / 960.000			
	x_5 / y_5	43.000 / 287.000			
Конечное значение целевой функции		57.459×10^{-3}	2.856×10^{-3}	27.687×10^{-3}	131.825×10^{-9}
Полученные значения искомых параметров	x_1 / y_1	213.735 / 1241.367	213.735 / 1241.367	213.763 / 1241.430	213.736 / 1241.368
	x_2 / y_2	580.424 / 867.247	580.500 / 867.247	580.515 / 867.261	580.501 / 867.247
	x_3 / y_3	159.365 / 588.720	159.350 / 588.680	159.363 / 588.730	159.346 / 588.653
	x_4 / y_4	-146.825 / 961.198	-146.859 / 961.215	-146.851 / 961.283	-146.870 / 961.206
	x_5 / y_5	43.230 / 287.248	43.248 / 287.258	43.042 / 287.478	43.240 / 287.266
СКО единицы веса $\mu, мм$		138.4	30.9	96.2	0.6

Продолжение таблицы Т.1

Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_{x_1} / m_{y_1}, *мм*	122.8/ 149.2	27.4 / 33.3	85.4 / 103.8	0.5 / 0.6
	m_{x_2} / m_{y_2}, *мм*	98.6 / 96.1	22.0 / 21.4	68.6 / 66.8	0.4 / 0.4
	m_{x_3} / m_{y_3}, *мм*	120.0 / 127.8	26.8 / 28.5	83.5 / 88.9	0.5 / 0.5
	m_{x_4} / m_{y_4}, *мм*	129.8/ 214.0	28.9 / 47.7	90.2 / 148.8	0.5 / 0.9
	m_{x_5} / m_{y_5}, *мм*	158.2 / 189.3	35.3 / 42.2	110.0 / 131.7	0.7 / 0.8

ПРИЛОЖЕНИЕ У

Координаты точек для аппроксимации геометрических примитивов

Таблица У.1– Координаты точек для аппроксимации геометрических примитивов

Номер точки	Координаты, м	
	X	Y
1	21.856	15.100
2	16.956	26.200
3	18.969	23.563
4	14.567	30.000
5	20.621	20.400
6	9.985	39.600
7	12.400	34.300
8	17.856	24.700
9	9.458	40.676
10	11.000	37.600
11	13.900	32.326
12	9.000	41.500
13	15.023	29.200
14	8.000	43.567
15	18.325	20.563
16	22.728	13.978
17	24.786	14.126
18	35.400	13.700
19	44.400	13.400
20	50.800	14.102
21	54.000	13.989
22	61.600	14.200
23	65.300	14.500
24	66.900	14.000
25	69.600	12.256
26	71.800	11.500
27	73.089	11.453
28	74.400	10.800
29	76.789	10.256
30	79.125	9.875
31	80.978	10.236
32	84.500	10.400
33	85.800	10.754
34	88.700	12.000
35	87.265	11.756
36	91.600	13.600
37	66.900	14.000

ПРИЛОЖЕНИЕ Ф

Аппроксимация набора точек из группы №1

Таблица Ф.1– Аппроксимация набора точек из группы №1

Параметры		Метод решения задачи			
		метод сопряженных градиентов		метод Ньютона второго порядка	
		Вид целевой функции		Вид целевой функции	
		МНК	МНМ	МНК	МНМ*
Число итераций		68	53	1	2
Начальное значение целевой функции		1.51×10^4	459.20×10^0	1.51×10^4	459.20×10^0
Предварительное значение искомых параметров	k	0.000			
	b	0.000			
Конечное значение целевой функции		15.34×10^0	215.15×10^0	15.34×10^0	–
Полученные значения искомых параметров	k	-1.958	1.537	-1.958	-38494853009866790000000000
	b	59.077	0.128	59.077	379368865694855450000000000
Средняя квадратическая ошибка аппроксимации	σ_{an}	1.13	19.21	1.13	–
Средняя ошибка аппроксимации	θ_{an}	3.2%	46.2%	3.2%	–
Коэффициент детерминации	R^2	0.99	0.82	0.99	–
Стандартная ошибка аппроксимации	σ_t	1.08	18.45	1.08	–

ПРИЛОЖЕНИЕ Х

Аппроксимация набора точек из группы №2

Таблица Х.1 – Аппроксимация набора точек из группы №2

Параметры		Метод решения задачи			
		метод сопряженных градиентов		метод Ньютона второго порядка	
		Вид целевой функции		Вид целевой функции	
		МНК	МНМ	МНК	МНМ*
Число итераций		59	81	1	–
Начальное значение целевой функции		1.57×10^{3}	111.99×10^{0}	1.57×10^{3}	1.57×10^{3}
Предварительное значение искомых параметров	k	0.000	0.000	0.000	0.000
	b	0.000	0.000	0.000	0.000
Конечное значение целевой функции		639.40×10^{-3}	27.31×10^{0}	639.40×10^{-3}	–
Полученные значения искомых параметров	k	0.008	0.259	0.008	–
	b	13.622	0.011	13.622	–
Средняя квадратическая ошибка аппроксимации	σ_{an}	0.35	6.29	0.35	–
Средняя ошибка аппроксимации	θ_{an}	1.6%	24.4	1.6%	–
Коэффициент детерминации	R^2	0.41		0.41	–
Стандартная ошибка аппроксимации	σ_t	0.32	5.62	0.32	–

ПРИЛОЖЕНИЕ Ц

Аппроксимация набора точек из группы №3

Таблица Ц.1 – Аппроксимация набора точек из группы №3

Параметры		Метод решения задачи			
		метод сопряженных градиентов		метод Ньютона второго порядка	
		Вид целевой функции		Вид целевой функции	
		МНК	МНМ	МНК	МНМ*
Число итераций		82	75	1	–
Начальное значение целевой функции		196.41×10^{1}	164.38×10^{0}	196.41×10^{1}	–
Предварительное значение искомых параметров	a	0.000	0.000	0.000	–
	b	0.000	0.000	0.000	–
	c	0.000	0.000	0.000	–
Конечное значение целевой функции		1.84×10^{0}	25.22×10^{0}	1.84×10^{0}	–
Полученные значения искомых параметров	a	0.027	0.002	0.027	–
	b	-4.365	0.000	-4.365	–
	c	183.032	0.000	183.032	–
Средняя квадратическая ошибка аппроксимации	σ_{an}	0.47	3.48	0.47	–
Средняя ошибка аппроксимации	θ_{an}	2.4%	22.5%	2.4%	–
Коэффициент детерминации	R^2	0.99	0.97	0.99	–
Стандартная ошибка аппроксимации	σ_t	0.45	3.32	0.45	–

ПРИЛОЖЕНИЕ Ш

Решение пространственной многократной линейной засечки модифицированным метода Ньютона второго порядка

Таблица Ш.1 – Решение пространственной многократной линейной засечки модифицированным метода Ньютона второго порядка

Параметры		Метод решения задачи		
		классический метод Ньютона второго порядка	квазиньютоновский метод BFGS	модифицированный метод Ньютона второго порядка
Число итераций		9	92	6
Начальное значение целевой функции		5.096×10^4		
Предварительное значение искомых параметров	X_P	0.000		
	Y_P	0.000		
	X_P	0.000		
Конечное значение целевой функции		79.724×10^0	79.724×10^0	692.088×10^{-6}
Полученные значения искомых параметров	X_P	57.661	57.661	57.139
	Y_P	110.143	110.143	109.108
	X_P	-37.429	-37.429	43.379
Оценка точности				
Обратная весовая матрица уравненных координат		$Q = \begin{pmatrix} 0.684 & -0.053 & -0.154 \\ -0.053 & 0.398 & -0.265 \\ -0.154 & -0.265 & 1.909 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 0.684 & -0.053 & -0.154 \\ -0.053 & 0.398 & -0.265 \\ -0.154 & -0.265 & 1.909 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 0.176 & -0.021 & 0.035 \\ -0.021 & 0.094 & 0.039 \\ 0.035 & 0.039 & 0.437 \end{pmatrix}$
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, м$		6.314	6.314	0.019
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	$m_x, мм$	5222.3	5222.6	0.8
	$m_y, мм$	3985.6	3985.6	0.6
	$m_z, мм$	8723.8	8723.8	1.2

Продолжение таблицы Ш.1

Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_P	10920.5	10920.5	1.6

ПРИЛОЖЕНИЕ Щ

Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами модифицированным метода Ньютона второго порядка (отдаленное от точки минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Таблица Щ.1 – Решение пространственной многократной линейной засечки с двумя определяемыми пунктами модифицированным метода Ньютона второго порядка (отдаленное от точки минимума задание предварительных значений определяемых параметров)

Параметры		Метод решения задачи		
		классический метод Ньютона второго порядка*	квазиньютоновский метод BFGS	модифицированный метод Ньютона второго порядка
Число итераций		–	190	17
Начальное значение целевой функции		8.559×10^{6}		
Предварительное значение искомых параметров	X_{P1}	0.000		
	Y_{P1}	0.000		
	Z_{P1}	0.000		
	X_{P2}	0.000		
	Y_{P2}	0.000		
	Z_{P2}	0.000		
Конечное значение целевой функции		–	6.284×10^{4}	8.606×10^{-7}
Полученные значения искомых параметров	X_{P1}	–	1426.883	1400.000
	Y_{P1}	–	1496.449	1400.000

Продолжение таблицы Щ.1

Полученные значения искомых параметров	X_{P1}	–	1426.883	1400.000
	Y_{P1}	–	1496.449	1400.000
	Z_{P1}	–	-8.470	559.999
	X_{P2}	–	1454.554	1401.000
	Y_{P2}	–	1287.726	1302.000
	Z_{P2}	–	-2.228	561.000

ПРИЛОЖЕНИЕ Э

Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости модифицированным методом Ньютона второго порядка

Таблица Э.1 – Решение обратной линейно-угловой засечки на плоскости модифицированным методом Ньютона второго порядка

Параметры		Метод решения задачи		
		классический метод Ньютона второго порядка	квазиньютоновский метод BFGS	модифицированный метод Ньютона второго порядка
Число итераций		4	92	3
Начальное значение целевой функции		5.288×10^{4}	5.288×10^{4}	5.288×10^{4}
Предварительное значение искомых параметров	X_P	0.000	0.000	0.000
	Y_P	0.000	0.000	0.000
Конечное значение целевой функции		2.479×10^{-3}	2.479×10^{-3}	2.479×10^{-3}
Полученные значения искомых параметров	X_P	110.203	110.203	110.203
	Y_P	105.581	105.582	105.581
Оценка точности				
Средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, *мм*		28.1	28.1	28.1
Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_x, *мм*	15.4	15.4	15.4
	m_y, *мм*	12.4	12.4	12.4
Средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта M_P, *мм*		19.7	19.7	19.7

ПРИЛОЖЕНИЕ Ю

Решение сети трилатерации №1 модифицированным методом Ньютона второго порядка (отдаленное от точки минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе вырождена

Таблица Ю.1 – Решение сети трилатерации №1 модифицированным методом Ньютона второго порядка (отдаленное от точки минимума задание предварительных значений определяемых параметров) матрица Гессе вырождена

Параметры		Метод решения задачи		
		классический метод Ньютона второго порядка *	квазиньютоновский метод BFGS	модифицированный метод Ньютона второго порядка
Число итераций		–	294	28
Начальное значение целевой функции		5.082×10^{6}		
Предварительное значение искомых параметров	x_1 / y_1	0.000 / 0.000		
	x_2 / y_2	0.000 / 0.000		
	x_3 / y_3	0.000 / 0.000		
	x_4 / y_4	0.000 / 0.000		
	x_5 / y_5	0.000 / 0.000		
Конечное значение целевой функции		–	44.863×10^{3}	131.825×10^{-9}
Полученные значения искомых параметров	x_1 / y_1	–	288.806 / 1070.175	213.736 / 1241.368
	x_2 / y_2	–	652.085 / 777.799	580.501 / 867.247
	x_3 / y_3	–	201.616 / 380.299	159.346 / 588.653
	x_4 / y_4	–	-63.580 / 810.951	-146.870 / 961.206
	x_5 / y_5	–	71.944 / 39.043	43.240 / 287.266
Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu, мм$		–	122288.2	0.6

Продолжение таблицы Ю.1

Средние квадратические ошибки координат определяемого пункта	m_{x_1} / m_{y_1}, *мм*	–	122859.0 / 137861.9	0.5 / 0.6
	m_{x_2} / m_{y_2}, *мм*	–	103131.0 / 89048.9	0.4 / 0.4
	m_{x_3} / m_{y_3}, *мм*	–	108866.2 / 121819.8	0.5 / 0.5
	m_{x_4} / m_{y_4}, *мм*	–	123931.2 / 189717.5	0.5 / 0.9
	m_{x_5} / m_{y_5}, *мм*	–	161274.7 / 143656.5	0.7 / 0.8

ПРИЛОЖЕНИЕ Я

Свидетельство о регистрации программы ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021619091

Программа для параметрического уравнивания геодезического четырёхугольника и пересчёта координат из одной системы в другую с использованием метода Ньютона второго порядка

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет» (RU)*

Авторы: *Быкасов Дмитрий Александрович (RU), Филиппов Владимир Геннадьевич (RU), Зубов Андрей Владимирович (RU)*

Заявка № **2021618302**

Дата поступления **02 июня 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***04 июня 2021 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018611417

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ШИРОТЫ МЕСТА ПО ЗЕНИТАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ СОЛНЦА МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет» (RU)*

Авторы: *Косарев Олег Валерьевич (RU), Маховиков Алексей Борисович (RU), Быкасов Дмитрий Александрович (RU), Катунцов Евгений Владимирович (RU)*

Заявка № **2017662654**

Дата поступления **06 декабря 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***01 февраля 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ АА

Вычисление параметров ориентирования сканов

Таблица АА.1 – Вычисление параметров ориентирования сканов

Параметры		Метод решения задачи			
		сопряженных градиентов	Классический метод Ньютона второго порядка	метод BFGS	модифицированный метод Ньютона второго порядка
Число итераций		901	4	15	3
Начальное значение целевой функции		0.036			
Предварительное значение искомых параметров	α, *рад*	0.0000000			
	β, *рад*	0.0000000			
	γ, *рад*	0.0000000			
Конечное значение целевой функции		48.131×10^{-3}	48.131×10^{-3}	48.131×10^{-3}	48.131×10^{-3}
Полученные значения искомых параметров	α, *рад*	-0.0008129	-0.0008129	-0.0008129	-0.0008129
	β, *рад*	-0.0044262	-0.0044262	-0.0044262	-0.0044262
	γ, *рад*	0.0473289	0.0473289	0.0473289	0.0473289
	x_0, *м*	-5.238	-5.238	-5.238	-5.238
	y_0, *м*	-6.529	-6.529	-6.529	-6.529
	z_0, *м*	2.576	2.576	2.576	2.576
Оценка точности					
Средняя квадратическая ошибка единицы веса μ, *м*		5.40×10^{-4}	5.40×10^{-4}	5.40×10^{-4}	5.40×10^{-4}

Продолжение таблицы АА.1

СКО угловых параметров	m_α / m_β / m_γ, *сек*	10.1 /8.2 / 11.9	10.1 /8.2 / 11.9	10.1 /8.2 / 11.9	10.1 /8.2 / 11.9
Средние квадратические ошибки определяемых лилейных параметров	m_{x_0}, *мм*	1.1	1.1	1.1	1.1
	m_{y_0}, *мм*	2.3	2.3	2.3	2.3
	m_{z_0}, *мм*	1.5	1.5	1.5	1.5

ПРИЛОЖЕНИЕ АБ Акт внедрения

19 Бента 91

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСВЕННОСТЬЮ
«НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ «БЕНТА»

190000, Санкт-Петербург, ул. Якубовича, д. 22, пом. 3-Н, литер А
тел./факс: +7 (812) 315-21-57, 315-70-10
mail@benta.spb.ru

«УТВЕРЖДАЮ»
Генеральный директор
ООО «НПП «БЕНТА»
__________Виноградов П.К.
«21» февраля 2022 г.

АКТ
внедрения результатов работы
Быкасова Дмитрия Александровича на тему
«Метод обработки многоточечных геодезических измерений с использованием алгоритмов нелинейного программирования при оптимизации второго порядка»

Комиссия ООО «Научно-производственное предприятие «БЕНТА» в составе Виноградова К.П. и Науменко А.И. рассмотрела вопрос об использовании результатов диссертационной работы Быкасова Д.А. и установила следующее. В ходе выполнения диссертационной работы составлен программный алгоритм модифицированного метода Ньютона второго порядка, который реализован в программе, имеющей свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619091. Данный алгоритм внедрен в процесс обработки геодезических измерений для определения параметров перехода между прямоугольными системами координат в ходе выполнения сканирования объектов с нескольких точек стояния. Эффективность алгоритма проверена при решении прикладных задач.

Заместитель ген. директора ООО «НПП «Бента»
кандидат технических наук ________ / Виноградов К.П. /

Главный специалист
кандидат технических наук ________ / Науменко А.И. /

Общество с ограниченной ответственностью «Научно-производственное предприятие «БЕНТА» Санкт-Петербург для документов