

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Санкт-Петербургский горный университет»

На правах рукописи

Захарова Алена Александровна



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИНЕРАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ:  
ТЕОРИЯ И ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Специальность 25.00.05 – Минералогия, кристаллография

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата геолого-минералогических наук

Научный руководитель:  
доктор геолого-минералогических наук, профессор  
Войтеховский Ю.Л.

Санкт-Петербург – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1 ОБЗОР ПОДХОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТРУКТУР И ТЕКСТУР МИНЕРАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ.....	9
1.1 Описательный подход.....	9
1.2 Термодинамический подход .....	16
1.3 Количественные методы анализа структур минеральных агрегатов .....	23
1.3.1 История развития количественных методов .....	23
1.3.2 Методы, основанные на частоте контактирования минеральных зерен в агрегате .....	29
1.4 Выводы по главе 1 .....	34
ГЛАВА 2 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР МИНЕРАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ.....	36
2.1 Биминеральные агрегаты.....	36
2.1.1 Бинарные контакты .....	36
2.1.2 Тернарные контакты .....	50
2.2 Триминеральные агрегаты .....	65
2.3 Выводы по главе 2.....	74
ГЛАВА 3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА СТРУКТУР И ТЕКСТУР .....	75
3.1 Методика исследований .....	75
3.2 Амфиболиты Керетского архипелага .....	76
3.3 Апатитовые руды (Хибинский массив) .....	81
3.3.1 Краткая геологическая характеристика месторождений .....	81
3.3.2 Типизация структур .....	84
3.4 Железистые кварциты (Костомукшское рудное поле).....	88
3.4.1 Краткая геологическая характеристика месторождений .....	88
3.4.2 Типизация структур .....	90
3.5 Выводы по главе 3.....	96
ГЛАВА 4 СПОСОБЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОДСЧЕТА МЕЖЗЕРНОВЫХ КОНТАКТОВ	98
4.1 Обзор методик и программного обеспечения .....	98
4.2 Методика полуавтоматической обработки шлифов на МИУ-5М.....	101
4.2.1 Краткое описание анализатора структур МИУ-5М.....	101
4.2.2 Методика работы.....	103
4.2.3 Обработка исходных данных .....	105

4.2.4 Результаты сканирования .....	106
4.3 Выводы по главе 4.....	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	114
СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ.....	115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	116
ПРИЛОЖЕНИЕ А Атлас петрографических структур .....	126
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Проверка корректности построений следов поверхности Харди-Вайнберга методом сечений .....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ В Петрографическое описание шлифов .....	141
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Акт о внедрении результатов.....	162
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.....	163

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность**

Структура и текстура – важнейшие характеристики горных пород и руд наравне с их минеральным и химическим составом. Несмотря на развитие современных технологий, основным подходом к их определению остается качественное описание структурно-текстурных особенностей минеральных агрегатов. Такой подход порождает огромное число разновидностей структур и текстур, границы между которыми строго не обозначены, а сами термины не имеют единого определения и однозначной трактовки.

Структурно-текстурный анализ минеральных агрегатов имеет большое значение для решения задач технологической минералогии, включая прогноз извлечения рудных минералов. Обычно он строится на основе дорогостоящих технологических испытаний. Внедрение методик, позволяющих прогнозировать извлечение полезных компонентов и разделять руды на технологические типы уже на ранних этапах геологоразведочных работ путем анализа их структуры и текстуры позволит значительно снизить затраты на технологические испытания.

Работа носит методический характер и посвящена актуальной проблеме разработки теоретических основ количественной классификации структур минеральных агрегатов, предназначенной для решения широкого круга геолого-генетических и минералоготехнологических задач. Понятие структуры в работе определено строго математически, категория текстуры употребляется в общепринятом (описательном) смысле. Список важнейших структурных терминов, использованных в диссертации, приведен в соответствующем разделе.

### **Степень разработанности темы исследования**

Существует несколько основных подходов к определению структур и текстур минеральных агрегатов. Классический описательный подход (Розенбуш, 1934; Заварицкий, 1955; и др.) основан на наблюдениях горных пород под микроскопом и приводит к большому числу структурных разновидностей, между которыми отсутствуют четкие границы (Половинкина, 1966). Структурные термины при этом не имеют однозначной трактовки (Левинсон-Лессинг, 1963; Жабин, 1979). Структурно-текстурные особенности руд, важные для оценки степени раскрытия минеральных сростков при обогащении (Изоитко, 1997), также определяются в основном описательно (Бетехтин, 1958; Шахов, 1961; Исаенко, 1964).

Термодинамический подход базируется на представлении о межзерновых контактах как зонах разрыва химических связей и зонах краевых дислокаций кристаллических решеток. Строение минеральных агрегатов в этом случае рассматривается с точки зрения приближения к термодинамическому равновесию контактирующих зерен. Это приближение оценивается разными способами: с помощью гранулометрических исследований (Трейвус, 1998), путем

измерения диэдральных углов (Vernon, 1968, Жабин, 1979) и расчета атомарной плотности граней (Бродская, 1988, 2018). Термодинамический подход строго обоснован и позволяет количественно характеризовать процессы кристаллизации горных пород, но не ведет к созданию их строгой структурной классификации.

Количественный подход включает разные методы: модальный анализ по Делессу (Delesse, 1848), Розивалю (Rosiwal, 1898) и Глаголеву (Глаголев, 1941), частоты контактирования минеральных зерен в агрегате (Rogers, Bogy, 1958; Lafeber, 1963), теорию марковских цепей (Вистелиус, 1972), теорию графов (Миронов, 1975; Макагонов, 1979; Маликов, 1985).

Особую роль в развитии количественных методов анализа структур сыграли минералогические интеграционные устройства (МИУ), с помощью которых образец сканируется вдоль серии параллельных линий, а также анализаторы видеоизображений (ВидеоТест, ImageJ и др.).

Несмотря на разнообразие подходов к анализу структур минеральных агрегатов, проблема их количественной классификации и однозначного определения самого понятия «структуры» на сегодняшний день не решена.

**Цель работы** – создание математической модели минерального агрегата (в том числе горной породы, руды), определение его структуры на основе вероятностей межзерновых контактов и разработка количественной классификации структур, предназначенной для использования в геологической практике.

#### **Задачи исследования:**

1. Моделирование структур биминеральных агрегатов на основе статистик бинарных и тернарных межзерновых контактов.
2. Моделирование структур триминеральных агрегатов на основе статистик бинарных межзерновых контактов.
3. Использование построенной модели для выявления связи между структурой руд и степенью извлечения полезного минерала.

#### **Научная новизна:**

1. Для минеральных агрегатов (в том числе горных пород и руд) разработана математическая модель, основанная на статистиках вероятностей бинарных и тернарных межзерновых контактов.
2. Для биминеральных агрегатов выявлены модельные тренды, отражающие закономерности расположения типовых структур и текстур на барицентрических диаграммах вероятностей бинарных и тернарных контактов, и предложена классификационная диаграмма –

барицентрический тетраэдр вероятностей тернарных контактов с 8 полями, каждому из которых отвечает структурная индикатриса 3-го порядка.

3. Для триминеральных агрегатов предложена классификационная диаграмма – барицентрический 6-вершинный симплекс вероятностей бинарных контактов, в тетраэдрических гранях которого построены поля структурных типов.

4. Для апатитовых руд Хибин и железистых кварцитов Костомукши установлена связь между структурными типами руд и степенью извлечения полезного минерала.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

1. Построенные модельные тренды и классификационные диаграммы для бинарных и тернарных контактов позволяют количественно характеризовать структуры и находить тонкие различия между минеральными агрегатами сходного химического и минерального состава.

2. Установленные зависимости между структурными типами руд и степенью извлечения полезного минерала могут быть использованы при минералого-технологическом картировании. Практическая значимость исследования подтверждена актом внедрения, полученным от ООО «ЦНТ Инструментс» (приложение Г).

### **Методология и методы исследования**

Теоретической основой диссертационной работы послужила методология определения структур минеральных агрегатов, разработанная Ю. Л. Войтеховским, которая заключается в типизации структур на основе статистик межзерновых контактов в *n*-минеральном агрегате.

Каменный материал для исследования представлен амфиболитами Керетского архипелага, апатитовыми рудами Хибинского массива и железными рудами Костомукшского рудного поля, всего 35 образцов. Шлифы изучены с помощью поляризационных микроскопов Leica DM750 и Leica DM2700P, а также анализатора структур МИУ-5М. Панорамные снимки шлифов обработаны в графическом редакторе CorelDRAW X8, для подсчетов контактов применена программа ArcGIS. В работе также использованы авторские программы, написанные на языке Python.

### **На защиту выносятся следующие положения:**

1. Моделирование минеральных агрегатов как автоморфизмов минеральных видов позволяет построить классификацию структур на основе статистик бинарных и тернарных межзерновых контактов и предложить для них барицентрические диаграммы нового типа, выявляющие закономерности в расположении классических структур и текстур.

2. Статистическое равновесие Харди-Вайнберга отвечает гомогенному перемешиванию минеральных зерен при любом модальном составе агрегата, а его соответствие статистически равновесному агрегату проверяется критериями согласия.

3. Установленные на основе построенной модели структурные типы апатитовых (Хибины) и железных (Костомукша) руд коррелируют со степенью извлечения полезного минерала.

**Степень достоверности результатов исследования** обеспечена детальным анализом теоретических основ построенной модели, корректной статистической обработкой результатов измерений, соответствием результатов моделирования геологическим и технологическим данным.

#### **Апробация результатов**

Основные положения и результаты работы докладывались на Всероссийской молодежной геологической конференции памяти В.А. Глебовицкого (СПбГУ, 2020), IX Международной научной конференции молодых ученых «Молодые – Научкам о Земле» (РГГУ им. С. Орджоникидзе, 2020), XIX Международном семинаре «Геология, геоэкология, эволюционная география» (РГПУ им. А.И. Герцена, 2020), Геологическом международном студенческом саммите (СПбГУ, 2021, 2022), XXIX Всероссийской молодежной конференции «Строение литосферы и геодинамика» (Институт земной коры СО РАН, 2021), XVII Международном форуме-конкурсе студентов и молодых исследователей “Topical issues of rational use of natural resources” (Санкт-Петербургский горный университет, 2021), международной конференции 72<sup>nd</sup> VNT – Freiberg university forum “Technologies for climate protection”, 15<sup>th</sup> Freiberg – St. Petersburg Colloquium of Young Scientists (Фрайбергская горная академия, 2021), I Международной междисциплинарной научно-практической конференции «Человек в Арктике» (Санкт-Петербургский горный университет, 2021), XIX Всероссийской (с международным участием) Ферсмановской научной сессии (ГИ КНЦ РАН, 2022), XIV Российском семинаре «Технологическая минералогия в оценке качества минерального сырья природного и техногенного происхождения» (ФБГУ «ВИМС», 2022).

**Личный вклад автора** заключается в формулировке задач диссертационного исследования, анализе зарубежной и отечественной научной литературы по проблеме; выполнении теоретических исследований (в том числе разработке программ); обработке и интерпретации геологических данных.

#### **Публикации**

Результаты диссертационной работы в достаточной степени освещены в 13 печатных работах, в том числе в 3 статьях – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (далее – Перечень ВАК), в 2 статьях – в изданиях, входящих в международные базы данных и системы

цитирования Scopus. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (приложение Д).

### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из оглавления, введения, 4 глав с выводами по каждой из них, заключения и библиографического списка. Содержит 163 страницы машинописного текста, 61 рисунок, 22 таблицы, 12 формул, список литературы из 130 наименований и 5 приложений.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю д.г.-м.н., проф. Ю.Л. Войтеховскому, к.г.-м.н., доц. Д.А. Петрову, к.г.-м.н., доц. В.В. Смоленскому (кафедра минералогии, кристаллографии и петрографии Горного университета) за всестороннюю помощь и поддержку при написании работы; д.г.-м.н. С.Г. Скублову (ИГГД РАН), к.г.-м.н. А.А. Компанченко, к.г.-м.н. Ю.Н.Нерадовскому, к.т.н. Д.Н. Шibaевой (КНЦ РАН) за предоставленный фактический материал; д.г.-м.н. Р.Л. Бродской, н.с. Ю.В. Кобзевой, ведущим инженерам И.В. Бильской и В.Д. Ляхницкой (ВСЕГЕИ) за помощь в организации работы на МИУ-5М.

Исследование поддержано грантом Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга (распоряжение № 255 от 03.12.2020 г.)

# ГЛАВА 1 ОБЗОР ПОДХОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТРУКТУР И ТЕКСТУР МИНЕРАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ

## 1.1 Описательный подход

Структура и текстура (иногда обозначаемые общим термином сложение) – важнейшие характеристики минеральных агрегатов наряду с химическим и минеральным составом, отражающие организацию и условия образования геологических тел (Марин, 2014).

Понятие «минеральный агрегат» имеет различные формулировки в литературе, но в этой работе понимается в том смысле, в каком определено в статье Д. П. Григорьева: это естественно сформированное тело, сложенное из минералов, получившее состав и строение в ходе единого процесса кристаллизации. При этом возможны последующие преобразования агрегатов, но при условии сохранения их непрерывности (Григорьев, 1985). Согласно этому определению, к минеральным агрегатам в том числе относятся горные породы и руды.

Рассмотрим сначала горные породы. Они интересовали человека с древнейших времен, но долгое время описывались лишь на макроуровне. С переходом на микроуровень изучения горных пород петрография выделилась как отдельная геологическая наука. Началом микроскопического периода традиционно считается 1858 г., когда появилась классическая работа Г. К. Сорби «О микроскопической структуре кристаллов как показателе происхождения минералов и пород» (Марин, 2014). За первую декаду после выступления Сорби появился ряд микроскопических исследований, но микроскоп как инструмент для изучения горных пород ещё не получил всеобщего признания, и многие ученые скептически относились к данному методу. В 1873 г. вышел первый том «Микроскопической физиографии» Г. Розенбуша, что означало окончательное внедрение микроскопического метода в исследование горных пород (Левинсон-Лессинг, 1936).

Первые учебники по петрографии, написанные профессорами А. П. Карпинским и И. В. Мушкетовым, появились в 1867-1868 годах, они же читали курсы микроскопической петрографии в Горном институте. Кафедра петрографии как отдельное подразделение появилась спустя почти 50 лет (Марин, 2014). Позднее появился учебник Г. Розенбуша, в основу которого положен справочник по магматическим породам на 1600 страниц, составленный самим ученым. Долгое время учебник Розенбуша оставался одним из наиболее полных руководств по описательной петрографии, по нему учились сразу несколько поколений российских геологов (Розенбуш, 1934).

Термин «описательная петрография» (или собственно петрография) обозначает изучение физиографии горных пород, лишь иногда касающееся общих вопросов генезиса и их взаимных отношений, если это необходимо для описания (Заварицкий, 1955). Говоря о физиографии,

Левинсон-Лессинг отмечает, что описание горных пород под микроскопом не должно быть единственной и конечной целью петрографического исследования, как это было в период популярности учебника Розенбуша (Левинсон-Лессинг, 1936).

Классический подход к описанию структуры горных пород подразумевает определение размеров, формы зерен (степени идиоморфизма минералов) и взаимоотношений между ними. Описательный подход порождает огромное количество различных типов структур с нечеткими границами. Макроструктуры пород, которые не могли остаться незамеченными при внешнем осмотре образца, упоминались исследователями ещё в конце XVIII – начале XIX веков. Но особое значение структура приобрела лишь с появлением микроскопического метода. Левинсон-Лессинг в своей книге рассматривает структуру не только как характеристику изверженных пород, но и как один из приемов классификации. Он отмечает особое значение структуры в связи с формами залегания пород (то есть условиями остывания и кристаллизации магмы) (Левинсон-Лессинг, 1936).

С развитием онтогенического подхода (Григорьев, 1975) особое внимание стало уделяться не только вещественному составу, но и структурно-текстурным особенностям минеральных агрегатов. В статье (Бродская, Марин, 1979) авторы отмечают, что современная систематика минералов немислима без учета структурных формул, в то время как на породном уровне достаточным считается определение химического и минерального состава, а сведения о структурно-текстурных особенностях приводятся в малоинформативном виде. Авторы считают, что рациональная систематика горных пород должна учитывать особенности взаимного расположения минеральных зерен с выведением на первый план «структурной формулы породы» (Бродская, Марин, 1979).

Термины «структура» и «текстура» горных пород на сегодняшний день в классическом понимании определяются в том смысле, в каком они описаны в работе Грубенмана (1912 г.): структура породы обусловлена размерами, формой и взаимоотношениями составных частей пород (минералов и стекла), текстура представляет собой расположение этих частей в пространстве (Заварицкий, 1955; Марин, 2014). Таким образом, морфологическая единица структуры – минеральное зерно, а текстуры – минеральный агрегат (Текстуры и структуры руд, 1958).

Описанные выше значения этих терминов не вошли во всеобщее употребление. В английской и французской литературе слова *structure* и *texture* имеют прямо противоположное значение (Левинсон-Лессинг, Струве, 1963). В англоязычной литературе помимо слова «*texture*» существуют и другие термины для обозначения внутреннего строения горной породы: *framework*, *microstructure*, *petrostructure*, причем у разных авторов значения данных терминов отличаются (Vernon, 2004; Петров, 2008). Американские петрографы структуру называют

термином *fabric* (ткань, способ сложения), а текстуру в нашем понимании обозначают словом *structure* (Заварицкий, 1955).

Многие ученые по-своему понимали эти термины. Ю. Г. Старицкий (1954) рассматривает взгляды разных авторов, зачастую противоположные, и приходит к выводу о необходимости единого, общепринятого определения понятий структуры и текстуры. Оно должно отвечать следующим требованиям: быть простым, общим, отражать в себе внешние признаки горных пород и в то же время учитывать их генезис, а также четко разграничивать понятия «структура» и «текстура». Из всех рассмотренных определений автор считает наиболее удачными формулировки А. Г. Бетехтина: «для структуры определяющими пространственными признаками являются форма, размеры и взаимные пространственные соотношения составных частей». По Бетехтину текстура «определяется способом сочетания минеральных агрегатов, каждый из которых имеет свою структуру» (Старицкий, 1954).

Масштабы проблемы отсутствия единой терминологии можно оценить по данным, приведенным в монографии А. Г. Жабина: упоминается 29 различных определений и 16 классификаций (Жабин, 1979, с. 215). Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой четкого понимания различий между структурой и текстурой, а также с отсутствием строгой и универсальной терминологии.

Поскольку структуры и текстуры горных пород определяются описательно, появляется огромное количество их разновидностей (и, следовательно, названий), которым необходимо дать характеристику. Определения тех или иных структур и текстур закреплены в Петрографических словарях (Левинсон-Лессинг, Струве, 1963; Петрографический словарь, 1981), но строгие границы между разновидностями не зафиксированы, и зачастую мнения исследователей относительно конкретного образца расходятся.

Особенности структуры и текстуры пород зависят в основном от физических условий застывания (температуры, времени застывания и давления). Таким образом, обе эти характеристики являются следствием одних и тех же причин и не являются абсолютно независимыми друг от друга. Более того, иногда структура и текстура настолько перекрывают друг друга, что не всегда можно их четко разграничить. Достаточно привести пример флюидальной текстуры в эффузивных породах. Если количество стекла незначительно, лейстовидные микролиты занимают субпараллельное расположение, так как отсутствует свободное пространство для беспорядочного расположения. Таким образом, текстурный признак зависит от структурного (а именно, от формы минералов), и флюидальное расположение микролитов входит в понятие трахитовой структуры (Заварицкий, 1955).

В качестве примера зависимости текстуры от структуры можно также привести формирование конкреций или гидротермальных жил: кристаллы вначале растут свободно, имея

собственную огранку, а затем сталкиваются с препятствием (стенкой или другими кристаллами) и принимают его форму. Получаются зернистая и друзовая структуры, составляющие вместе текстуру агрегата (Григорьев, 1985).

Структурные признаки также зависят от химического и минерального состава породы, так как различные магмы имеют разную способность к кристаллизации. Например, более кислая лава кристаллизуется значительно труднее, следовательно, в эффузивных породах лава основного состава будет застывать в виде кристаллического агрегата, а кислая – давать стекло (при прочих равных условиях) (Заварицкий, 1955).

Подробные описания структур и текстур магматических и метаморфических горных пород (с многочисленными зарисовками и фотографиями) можно найти в соответствующих атласах (Половинкина, 1966; и др.). Помимо описания широко распространенных структур, особое внимание в атласе Ю. Ир. Половинкиной уделяется редко встречающимся горным породам и структурам (рисунок 1). С развитием компьютерных технологий также стали появляться электронные атласы горных пород (Жданов, 1998).

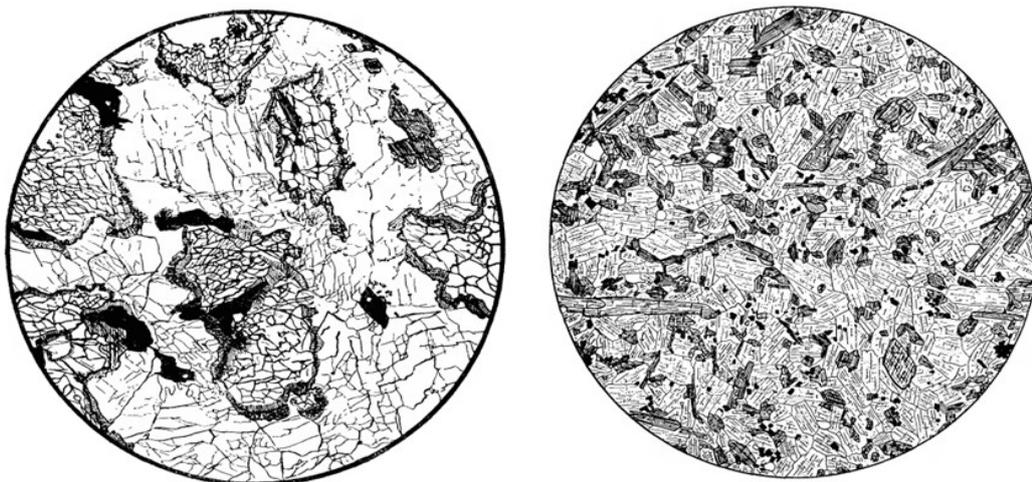


Рисунок 1 – Слева: габбровая структура, справа: спессартит с лампрофировой структурой (Половинкина, 1966).

Понятия структуры и текстуры используются и при изучении строения рудных тел. Особую значимость эти характеристики приобрели с внедрением микроскопического метода (исследование рудных минералов в отраженном свете). Первая информация об использовании микроскопа для изучения структур руд появилась ещё в 1814 г. (И. Берцелиус), но в то время подобный подход не получил широкого распространения (аналогично с микроскопическим методом для изучения горных пород). В последующие годы вышел ряд работ, посвященных исследованию руд подобным методом (Баумгаер, Гуссак, Высоцкий, Кенигсбергер). Первыми работами, в которых помимо обобщения диагностических признаков появились данные о

срастаниях минералов в рудах, стали «Минераграфия и рудоотложение» Ван дер Веена и «Руководство по рудной микроскопии» Шнейдерхена и Рамдора (Текстуры и структуры руд, 1958).

Первую в мире морфологическую классификацию структур минеральных срастаний в рудах предложил И. Ф. Григорьев в 1928 г., а в 1937 г. появилась классическая работа А.Г. Бетехтина, в которой представлена первая генетическая классификации главнейших типов текстур. Эти работы, представлявшие собой результат многолетних исследований и обобщившие имеющиеся на тот момент литературные данные, заложили фундамент учения о текстурах и структурах руд (Исаенко, 1964).

Структурно-текстурные особенности руд отличаются невероятным разнообразием по сравнению с горными породами и отражены в соответствующих атласах (Талдыкин, 1954). Это связано с тем, что процессы рудообразования (особенно если рассматривать гидротермальные месторождения) протекают сложнее, чем процессы образования горных пород, и в них в основном принимают участие металлогенные элементы, которые резко отличаются от петрогенных по геохимическим свойствам (Текстуры и структуры руд, 1958).

Структура руд определяется с помощью тех же характеристик, что и для горных пород, а именно формой, размерами и способом сочетания кристаллических зерен в агрегате. Текстура же определяется положением минерального агрегата в пространстве и взаимоотношениями с другими агрегатами. Но и тут возникает неопределенность, поскольку во многих работах эти понятия смешиваются. При анализе руд также возникает сложность разделения этих терминов: например, интерстиционные структуры очень похожи на цементационные текстуры замещения, различие состоит лишь в тех геологических процессах, которые привели к их формированию. Более того, в иностранной литературе (Шварц, Бастен, Эдвардс) понятия структуры и текстуры вообще не различаются (Шахов, 1961).

К определению структур в рудах нельзя подходить так же строго, как это происходит для горных пород, так как в рудах часто наблюдается резкая неравномерность распределения минералов и меняющаяся на коротких расстояниях зернистость. Несмотря на эту особенность, изучение структур руд (в частности минеральных срастаний) имеет большое значение для выявления закономерностей сочетания минералов и определения последовательности их образования, что дает возможность получить ценные данные об условиях кристаллизации рудных тел (Текстуры и структуры руд, 1958).

В отличие от горных пород, в которых в основном встречаются текстуры массивные и однородные, в рудах эта характеристика отличается широким разнообразием. Особый интерес представляют текстуры руд контактово-метасоматических и гидротермальных месторождений,

в то время как текстуры осадочных, метаморфических и магматических горных пород и руд имеют между собой много общего (рисунок 2) (Текстуры и структуры руд, 1958).

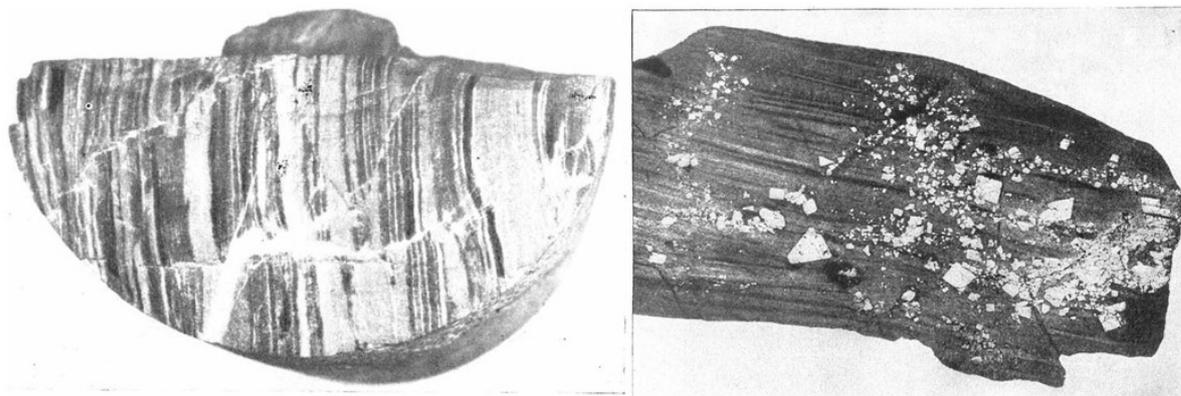


Рисунок 2 – Слева: тонкая слоистость карбонатных марганцевых руд (Усинское м-е, Кузнецкий Алатау, увеличение 2), справа: вкрапленность пирита в слоистом известняке (Турьинские рудники, натуральная величина) (Шахов, 1961)

Текстуры руд сильно зависят от способа отложения минеральных веществ: путем выполнения полостей (трещин) или путем замещения боковых пород. В первом случае получаются различные прожилковые текстуры, а во втором вкрапленные и массивные. В зоне окисления руды подвергаются особому воздействию, которое нередко приводит к полному изменению их первичного строения, что создает ещё большее разнообразие текстур, причем сменяются они на ещё более коротких расстояниях (Текстуры и структуры руд, 1958).

Таким образом, текстурные особенности руд определяются формой, размерами и способом сочетания минеральных агрегатов, отличающихся друг от друга по составу и структуре. По сравнению с горными породами, где особую роль играет структура, характерная особенность строения руд – это текстура. Анализ текстур – важнейшая задачей при изучении руд, а в совокупности с данными о строении рудного тела позволяет разобраться в возрастных соотношениях минеральных агрегатов и определить последовательность минералообразования (Текстуры и структуры руд, 1958).

Структурно-текстурные особенности минеральных агрегатов играют ключевую роль в технологической минералогии и напрямую влияют на процесс обогащения. С точки зрения структуры важны гранулометрический состав и характер межзерновых границ, а также различия механических свойств контактирующих минералов, поскольку для получения качественного концентрата рудные минералы должны быть освобождены от срастаний. Текстуры характеризуют пространственное распределение рудных минералов и делятся на

благоприятные (массивные, пятнистые, полосчатые) и неблагоприятные (катакластические, колломорфные, цементные) для обогащения (Изоитко, 1997).

В заключение раздела отметим, что исторически описательный подход первым использован для характеристики минеральных агрегатов. Вначале они описывались макроскопически, с внедрением микроскопа – в шлифах и аншлифах. Сегодня при всем развитии автоматических методов анализа без классического описания не обходится ни одно исследование. Как и любой подход, он имеет свои недостатки. Сегодня существует огромное количество типов структур и текстур, причем границы между ними размытые, термины строго не определены и различаются у разных авторов. Невозможно дать ответ на вопрос, сколько всего различных структур и текстур существует.

В начале XX века петролог А. Харкер обращал внимание на эту проблему. Он говорит о том, что до сих пор не выработана «никакая философская классификация горных пород» и что существующая систематика, объединяющая породы на основании общих свойств, зависящих от генетических условий, должна рассматриваться «как одно из соглашений, а не как принцип» (Harker, 1908). Подобная проблема есть и в минералогии, где встречается неоднозначная трактовка терминов. Например, название минерала «coesite» в русском переводе употребляется в девяти вариантах (Лазаренко и др., 1972).

Р.Л. Бродская подчеркивает, что проблема количественной характеристики структур и субъективизм при их описании не позволяют увеличить производительность и точность петрографических исследований (Бродская, 1972). С развитием науки и техники описательный подход перестал удовлетворять потребности исследователей, поэтому появились и другие методы, речь о которых пойдет далее.

## 1.2 Термодинамический подход

Процессы формирования любых горных пород (кристаллизация, перекристаллизация, литогенез) сопровождаются изменением энергии. Энергия в общем смысле слова – мера перехода движения материи из одной формы в другую. В магматическом процессе, например, она расходуется в первую очередь на кристаллизацию минералов, некоторая ее часть переходит в окружающую среду. В настоящее время непосредственно наблюдать процессы, формирующие горную породу, можно при изучении кристаллизации современных вулканитов и образования «черных курильщиков» (Горная порода: опыты постижения, 2005).

Если взглянуть на горную породу с точки зрения системного анализа, то она представляет собой систему минеральных индивидов, пор и границ между ними. Структура и текстура (строение) горной породы характеризуют эту систему и определяются границами между индивидами и порами. Но размер пор часто не сопоставим с размером зерен, поэтому в большинстве случаев (за исключением некоторых осадочных пород) предметом анализа становятся границы между индивидами (Горная порода: опыты постижения, 2005).

Граница минерального зерна в агрегате – это поверхность сложного вида, отделяющая каждое зерно от соседних зерен, которые находятся в произвольном или закономерном (например, двойники) положении относительно друг друга. Границы минеральных зерен трехмерны (толщина обычно составляет 0,1–20 мкм) и представляют собой места сочленения и взаимодействия различно ориентированных кристаллических решеток (Жабин, 1979). Химическое соединение, состав которого отвечает определенному минералу, считается минеральным индивидом именно в тот момент, когда некоторый его объем получил границу (или грань кристалла) (Бродская, 2018). Принято считать, что вещества, состоящие из атомов одного элемента, образуют на границах фаз монослой, в то время как граница фаз в полиатомных соединениях имеет толщину в 1–2 элементарные ячейки кристаллической решетки. Граница отличается от минеральных зерен структурой и представляет собой краевую дислокацию решеток, это переходная область между одним и другим минеральным зерном. С точки зрения физики твердого тела граница – это область с постепенно меняющимися значениями энергии, плотности, состава и других термодинамических параметров (Горная порода: опыты постижения, 2005).

Дислокационная структура границы обеспечивает устойчивость минерального зерна в постоянно меняющихся условиях кристаллизации, при росте или растворении индивида (Бродская, 2018). При наблюдении границ минеральных зерен под микроскопом они выглядят как области различного рельефа (в зависимости от показателя преломления зерен) или области изменившихся оптических ориентировок (Горная порода: опыты постижения, 2005).

Изучение границ твердого тела не ограничивается шлифами, они также изучаются локальными методами (методы электронной и атомно-силовой микроскопии). С точки зрения физики твердого тела граница минерального зерна обладает структурой, где рассматриваются ионно-электронная составляющая и адсорбат слоя. В большинстве подобных публикаций граница называется «поверхностным слоем». Таким образом, выявляются терминологические различия, которые возможно произошли из-за самих объектов изучения. В петрографии традиционно изучаются границы срастания минеральных индивидов в агрегате (горной породе), причем с точки зрения агрегатных состояний исследуются срастания твердое-твердое. В физике твердого тела моделируется структура поверхности кристалла. В основном это граница между твердым телом и жидкостью или газом (воздухом) (Бродская и др., 2019).

В нашем случае граница минерального зерна и ее поверхность – понятия нетождественные. Граница индивида представляет собой объемную фазу и характеризуется некоторой толщиной, в то время как поверхность границы принято считать двумерной фазой, она характеризуется топографией, скульптурой, сравнима с поверхностью грани и может быть изучена локальными методами (Горная порода: опыты постижения, 2005).

В большинстве случаев в природе наблюдаются не отдельные минеральные зерна, а минеральные агрегаты. В таком случае минеральные индивиды сталкиваются и образуют новые границы срастания. Таким образом, чаще всего граница минерального зерна одновременно представляет собой и границу срастания с другим индивидом. Другими словами, краевая дислокация одного зерна превращается в дислокацию соседних кристаллических решеток, а на границе кристаллов происходит компенсация двух краевых дислокаций структур. С точки зрения термодинамики, если в агрегате будет достигнуто энергетическое равновесие двух и более соседствующих индивидов, то оно должно наблюдаться на границе их срастания. Она считается локально равновесной, если поверхностная энергия границ каждого индивида в пределах области срастания равна друг другу (Бродская, 2018).

Минеральные зерна в агрегате обладают разной энергией, полученной в ходе кристаллизации в зависимости от ориентировки граней (Бродская, 2018). Есть методы, позволяющие измерить поверхностную энергию в отдельных кристаллах (например, метод раскалывания) (Gilman, 1960). Для горных пород данные о поверхностной энергии разных минералов немногочисленны и получены на основе измерения дигедральных углов (Гульбин, 2016, с. 359). Но как отмечается в статье (Бродская, 2018), даже теоретические рассчитанные значения не являются абсолютными, а экспериментальные методы измерения несовершенны. При этом необходимо учитывать не только две соседние минеральные фазы, но и фазу между ними, а также кривизну межфазной границы (Бродская, 2018). Таким образом, проблема массовой оценки поверхностной энергии зерен в минеральном агрегате пока не решена.

Граница минерального индивида – следствие термодинамических и кинетических характеристик процесса минералообразования, фиксирующее энергетические и силовые поля системы, под которыми понимаются мобильность-стабильность, распределение градиентов давления, температуры и концентрации компонентов, а также иные характеристики процессов роста и растворения минеральных зерен (Бродская, 2007). Система приспосабливается к действующим на нее силам границами минеральных индивидов и границами их срастаний, а результатом адаптации становится то или иное строение горной породы, а именно структура и текстура (Горная порода: опыты постижения, 2005).

Понятия «структура» и «текстура», как указано выше, с точки зрения термодинамики представляют собой функцию условий протекания процесса, параметры которого определяются геологическими факторами. К ним относятся тектонический режим, давления (литостатическое, стресс, летучих компонентов), концентрации компонентов и др. Горные породы формируются под воздействием сразу всех факторов, причем скорость изменения характеристик может меняться. Объединение отдельных зерен в минеральный агрегат, их размеры, ориентировка в пространстве и относительно друг друга отражают этапы кооперативного термодинамического процесса, управляемого определенным параметром, относительные величины которого меняются (Бродская, 2018). В качестве такого параметра рассматривается скорость диссипации (рассеивания) энергии. Диссипативные процессы возможны до тех пор, пока имеется приток энергии или вещества в систему. Диссипативные структуры образуются, пока есть входящий поток энергии. Большая часть кристаллических пород имеет диссипативные структуры, равновесные с породившим их процессом (Бродская, Марин, 2001).

Основное отличие термодинамического подхода от классического описательного заключается в том, что строение горных пород рассматривается с точки зрения взаимного равновесия минеральных зерен на границе индивидов. Термодинамическая модель заключается в рассмотрении энергетических характеристик процесса кристаллизации. Строение горной породы есть следствие самоорганизации системы, которая происходит при выравнивании концентраций растворенных компонентов и других градиентов в системе. Этот механизм реализуется за счет формирования границ новой термодинамической фазы, вдоль которой аккумулируется определенное количество энергии (Бродская, Марин, 2000, 2001).

Возникает вопрос, какую величину использовать для характеристики равновесия границ. В классическом подходе границы минеральных индивидов описываются на основании их формы (идиоморфная-ксеноморфная), но для термодинамического подхода она не подходит. Кроме того, можно говорить о равновесии векторных величин, а энергия – величина скалярная, хотя именно она приводит к балансу или дисбалансу сил внутри термодинамической системы. Необходимо выбрать эквивалент понятия «энергия», который должен отвечать некоторым

требованиям: быть пропорциональным описываемой величине, доступным для количественной оценки, связанным с управляющим параметром процесса агрегации минеральных зерен (Бродская, Марин, 2001).

Параметром измерения энергии может быть атомарная (ретикулярная) плотность границ минеральных зерен (Бродская, 1991). Атомарная плотность отвечает указанным выше требованиям и коррелирует со скоростью роста кристалла в направлении, нормальном к поверхности границы (может быть представлена вектором). Кроме того, атомарная плотность отображает кристаллографические формы кристалла. Наиболее плотны габитусные (низкосимвольные) грани, а высокосимвольные грани имеют малую атомарную плотность (Бродская, 1988; Бродская, Марин, 2001). Самые энергонасыщенные – габитусные грани, такие кристаллы будут наиболее устойчивыми в изменяющихся геологических условиях. Наиболее мобильны грани высокосимвольные (энергоемкие). Они первыми откликаются на смену термодинамического режима, мигрируют и хуже всего защищают объем зерна. В качестве градации устойчивости граней принята терминология Хартмана и Пердока (Hartman, Perdok, 1955): грани F (энергонасыщенные), S (переходные) и K (энергоемкие) (Бродская, 1988, 2018).

Формирование энергонасыщенных или энергоемких границ индивидов напрямую зависит от кинетики процесса. При высоких скоростях кристаллизации индивид образует наиболее плотные грани F (идиоморфные порфиоровые вкрапленники в эффузивных породах). Чем медленнее развивается система и более стабильны условия кристаллизации, тем больше в минеральном агрегате границ K (Бродская, 1988; Бродская, Марин, 2001). Габитус кристаллов играет важную роль в технологической минералогии и влияет на раскрытие сростков: возрастание доли зерен с гранями K ухудшает высвобождение полезных минералов и приводит к увеличению потерь при обогащении (Изоитко, 1997).

В термодинамической модели рассматриваются границы самих минеральных индивидов и границы сростаний индивидов. Границы индивидов могут быть энергонасыщенными и энергоемкими. В то же время границы сростаний могут быть сбалансированными и несбалансированными по атомарной плотности (структурно равновесными или неравновесными). Признак низких скоростей агрегации – структурное равновесие, в то время как структурно неравновесные границы получаются в результате процесса с более высокими кинетическими характеристиками (Бродская, Марин, 2001).

Таким образом, минеральный агрегат отражает в своем строении (структуре и текстуре) меняющиеся термодинамические условия формирования и кинетику процесса. Если в агрегате присутствуют равновесные межзеренные границы, то это указывает на то, что система приблизилась к структурному равновесию между фазами. В целом оно определяется не только равновесием на границах зерен, но и между субагрегатами (Бродская, Марин, 2001).

После завершения процесса кристаллизации в горной породе наступает период дополнительной минимизации свободной энергии межзерновых границ. Они мигрируют, и первичный структурный рисунок сменяется вторичным (Жабин, 1979; Петров, 2008). В ходе перекристаллизации каждое зерно стремится приобрести предельную равновесную форму. Равновесие границ достигается при соблюдении двух условий: минимуме удельной поверхности границ зерен и при векторном равновесии поверхностной энергии в границах зерен (угол между ребрами составляет  $120^\circ$ , рисунок 3). Идеальная форма равновесного зерна представляет собой «ячейку Коксетера» (Coxeter, 1958), которая в среднем имеет 13,56 граней и занимает положение между кубоктаэдром (14 граней) и пентагондодекаэдром (12 граней). Структура Коксетера особенно заметна в мономинеральных агрегатах (мраморах, кварцитах, сплавах) (Жабин, Харченков, 1972; Vernon, 1976; Жабин, 1979).

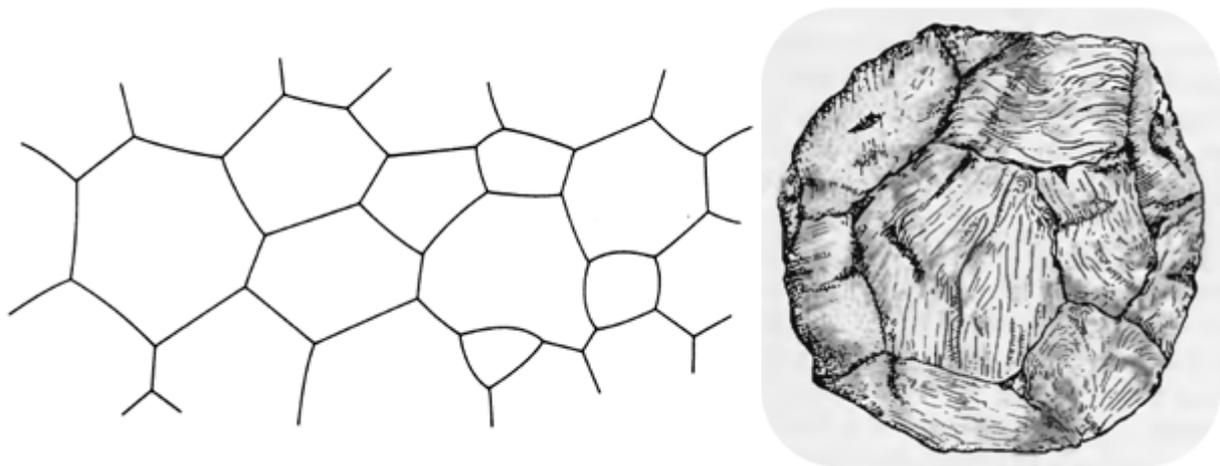


Рисунок 3 – Слева: двумерное сечение равновесного агрегата (Vernon, 1976), справа: реальное зерно кальцита, в котором достигнуто равновесие межзеренных границ (Жабин, 1979).

Кинетику минералообразования можно оценить с помощью нескольких количественных методов, одним из которых являются гранулометрические исследования. Интерес к подобным исследованиям появился после выхода статьи Б. Марша (1988), который использовал уравнение численного баланса для моделирования гранулометрических кривых. Распределение зерен по размерам указывает на скорость нуклеации и роста зародышей, динамику температуры растворов. Ведущая роль в интерпретации отводится физико-химическим моделям образования минеральных агрегатов (рост кристаллов из расплава, вероятностная кристаллизация и др.) (Трейвус, 1998; Гульбин, 2004, 2016).

Измерение дигедральных углов – ещё один количественный метод, позволяющий определить относительную величину межфазного натяжения как главного физического регулятора структурообразования (Жабин, 1979). Р. Вернон (Vernon, 1968) исследовал

гранулиты и гнейсы комплекса Уильяма (Брокен-Хилл, Австралия). Измеряя дигедральные углы между границами зерен, он показал зависимость межфазного натяжения от кристаллографической ориентировки минералов. Для однофазных агрегатов установлено, что среднее значение углов близко к  $120^\circ$ . Это свидетельствует о независимости напряжений на границах от ориентировки зерен. Но для двух- и трехфазных агрегатов среднее значение отклоняется от  $120^\circ$ , и разброс значений увеличивается. Это говорит об усилении влияния кристаллографической ориентировки. Если в агрегате есть минерал с резко выраженной анизотропией свойств (биотит или амфибол), то влияние на углы становится ещё сильнее (Vernon, 1968).

Анализ формы минеральных индивидов также имеет большое значение для оценки условий кристаллизации. Для описания форм зерен обычно используют набор безразмерных показателей, вычисляемых из соотношения характерных размеров зерен и их сечений (коэффициенты удлинения, сферичности и др.) Есть и показатели, описывающие геометрию межзеренных границ: локальные (неровности, шероховатости) и глобальные неоднородности (форма зерна как целого – сферичность, угловатость) (Гульбин, 2004).

Анализ структурных изображений можно также проводить на основе фрактальной геометрии. Это универсальный способ анализа пространственных изображений независимо от степени их сложности. В целом фрактальные модели описывают особенности геометрии объектов с помощью степенных уравнений. Характеристикой сложности выступает фрактальная размерность – показатель извилистости границ. Она минимальна для гладких контактов и возрастает по мере увеличения степени их шероховатости. Зависимость носит логарифмический характер и позволяет определять значение энтропии как критерия неравновесности природных систем (Гульбин, 2004).

В заключение отметим, что термодинамические и кинетические процессы на границах зерен имеют большое значение не только для горных пород и руд, но и для металлов и сплавов. Наиболее важны здесь диффузия и миграция границ зерен, влияющие на состояние и работоспособность механизмов (Бокштейн и др., 1986).

С точки зрения термодинамики «структура» понимается как временное или пространственно-временное упорядочение, возникающее в системе вдали от равновесия и придающее ей устойчивость в меняющихся условиях. В ходе твердофазных реакций ведущая тенденция термодинамического процесса – минимизация свободной энергии на границах зерен. Упорядоченным минеральным агрегатом можно считать такой, у которого все межзеренные границы взаимно равновесные. Для измерения энергии на границах зерен предложено использовать атомарную (ретикулярную) плотность (Бродская, 1988).

Описанный термодинамический подход имеет физическое обоснование и позволяет количественно характеризовать сложные процессы кристаллизации горных пород. Но измерение свободной энергии на границах зерен для всего объема минерального агрегата представляет сложную техническую задачу и не ведет к созданию строгой классификации структур.

## 1.3 Количественные методы анализа структур минеральных агрегатов

### 1.3.1 История развития количественных методов

Любая наука в ходе развития переходит от простого описания объектов, процессов и явлений к формализации, которая позволяет строго определить термины и систематизировать объекты. На этом этапе важно определить существенные черты объектов, на основе которых в дальнейшем строится теория.

Подходы к описанию минеральных агрегатов изменялись подобным образом. В первых учебниках ставилась задача качественного описания их огромного разнообразия путем определения минералов, форм и размеров зерен, а также структур и текстур в целом. Таковы учебники А. П. Карпинского, И. В. Мушкетова и Г. Розенбуша (Марин, 2014). С развитием науки и техники появилась необходимость использовать количественные методы анализа. Но любые геологические объекты представляют собой системы со сложными и разнообразными отношениями. Поэтому создание математической теории – непростая задача (Усманов, 1977). «Сущность проблемы, по-видимому, состоит в том, чтобы обнаружить такие математические структуры и алгебры, которые были бы изоморфны геологическим системам, то есть позволяли бы их описывать на математическом языке» (Косыгин, Соловьев, 1969; Косыгин, 1970).

В кристаллографии математическая теория, описывающая структуры кристаллов, появилась в конце XIX века и связана с именами Е. С. Федорова и А. Шенфлиса. Выведенные ими 230 пространственных групп симметрии представляют собой вершину современной кристаллографии (Шафрановский, 1980).

Один из интересных количественных подходов – применение теории графов для изучения отношений между составными частями минерального агрегата. Граф представляет собой изображение системы в виде двух множеств, соединенных парными связями. Множество объектов называется множеством вершин, а множество парных связей – множеством ребер (Зыков, 1987). А. В. Маликов применял теорию графов для моделирования закономерностей соприкосновения зерен на уровне минеральных сростаний. В статье (Маликов, 1985) предложено использовать теорию графов для описания сростаний 4 зерен. Автор применяет этот подход для анализа строения друз таблитчатых кристаллов барита и выявляет зависимость между наиболее вероятным видом сростаний и степенью уплощения кристаллов. Обнаруженные закономерности сростаний отражают генезис минеральных агрегатов и могут использоваться для сравнения их строения (Маликов, 1985).

Теория графов применяется также в работе (Макагонов, 1979) для характеристики симметрии минеральных сростков. В этом случае вершина графа означает группу симметрии индивида, а ребро, связывающее вершины – группу симметрии сростка двух индивидов.

Переход от небольших минеральных агрегатов к горным породам и рудам связан с увеличением разнообразия межзерновых отношений в агрегате. Интересный подход к анализу горных пород на основе минеральных ассоциаций предложил Ю. П. Миронов (1975). Для изучения и расчленения на комплексы мезозойских гранитоидов Восточного Забайкалья он использовал аппарат теории множеств, аналитическую лингвистику и теорию графов. Последняя описывает отношения минералов в изучаемых гранитоидах аналогично тому, как А. В. Маликов описывал взаимоотношения минеральных зерен в сростаниях (рисунок 4). С помощью графов автор строит схемы строения горных пород, переходя к композиционным графам массивов. Использование графов наглядно отражает результаты изучения структурной равновесности и неравновесности и обнаруживает около 40 новых принципов классификации горных пород, каждый из которых позволяет провести новые границы на геологической карте и по-новому осмыслить закономерности формирования горных пород.

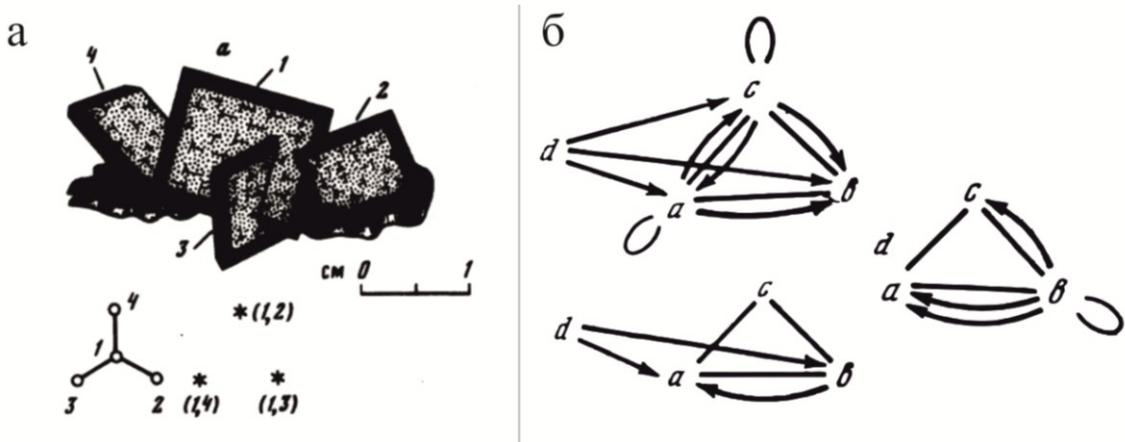


Рисунок 4 – А и Б-графы для сростков кристаллов барита, цифрами показано соответствие между кристаллами и вершинами графов (а, Маликов, 1985); примеры графов для аплитов Голготайского массива, а – кварц, b – калиевый полевой шпат, c – плагиоклаз, d – биотит (б, Миронов, 1975).

В середине XIX века впервые применен модальный анализ, который заключается в определении объемных долей содержаний минерала в агрегате (мод). Французский ученый М. Делесс (Delesse, 1848, перевод на русский язык дан в сборнике Горная порода: опыты постижения, 2005) предложил планиметрический метод измерения мод и считал, что объемные доли породообразующих фаз равны их площадным долям в плоских сечениях. Он утверждал, что площадь минеральной фазы в некоторой плоскости всегда постоянна: это условие соблюдается в больших сечениях тем точнее, чем равномернее фаза распределена в горной породе. Этот метод имеет следующий недостаток: на практике условие постоянства площадей

не соблюдается, так как они варьируют в широком диапазоне и обычно суммируются для большого количества шлифов разной площади (Петров, 2008; Войтеховский, 2009).

В конце XIX века А. Розиваль (Rosiwal, 1898, перевод на русский язык дан в сборнике Горная порода: опыты постижения, 2005) усовершенствовал планиметрический метод и понизил размерность пространства на единицу. Он предложил использовать линии вместо площадей и назвал эту линию индикатрисой. Линии, покрывающие плоскость шлифа, не обязательно должны быть параллельны и находиться на равных расстояниях, а могут иметь вид пилообразных или даже хаотичных кривых. В методе Розиваля также осталось неучтенным соответствие линий реальной объемной доле минерала в породе (Войтеховский, 2009).

Спустя ещё 50 лет линейный метод Розиваля преобразован А. А. Глаголевым (1941), превратившим индикатрису в систему точек. Метод заключался в равномерном нанесении большого числа точек на плоское сечение и подсчете точек, попавших на зерна каждого минерала. А. А. Глаголев считал, что точечный метод дает максимально корректный результат, так как точность определения состава породы соответствует числу зерен, и точками можно охватить все минеральные зерна в плоском сечении. Он первый из отечественных ученых создал систему формул для определения погрешностей метода при анализе различных горных пород (Глаголев, 1941; Войтеховский, 2009). Теория количественно-минералогического (модального) анализа в законченном виде описана Ф. Чейзом (Чейз, 1963).

Модальный состав минеральных агрегатов – важная характеристика при решении петрологических и минералого-технологических вопросов. Он может определяться геометрическими методами в шлифах и с помощью модального анализа измельченной породы. В начале XX века велись дискуссии, какой из этих методов дает более точный результат. Но оба метода имеют свои недостатки и преимущества, что связано с большим разнообразием составов и структурно-текстурных характеристик горных пород и руд (Войтеховский, 2009).

Помимо модального состава, с помощью количественных методов анализа изучается также пространственное распределение минеральных зерен. Одним из первых таких параметров стал коэффициент агрегативности, который выражается двумя способами: метрическим (доля периметра зерна, которая приходится на границу с каждым минералом-соседом) и топологическим (число зерен, с которыми срастается изучаемое зерно) (Петров, 2008). На основе второго способа разработана методика анализа комбинаторно-топологического подобия (моделирование строения горных пород с помощью разбиения Делоне) (Кобзева, 2002). Интересная методика получения коэффициента агрегативности предложена Р. Бляшке (Blaschke, 1970). Одновременно с определением модального состава в шлифах измерялись длины границ между зернами: суммировались общая длина границ и длина границ зерен для каждого минерального вида, причем последняя относилась к модальной доле

этого минерала. Так оценивалась степень однородности пространственного расположения индивидов в агрегате. Р. Бляшке применял матрицы (в строках располагались длины границ одного минерала с остальными), сумма чисел в строках равнялась 1, дальнейшие преобразования матриц не выполнялись (Blaschke, 1970; Бродская, Марин, 1979).

Изучением пространственного распределения минеральных зерен в агрегате также занимался Р. Кретц. В своей статье он описал ряд методик для определения случайности распределения зерен в породе (Kretz, 1969). Позднее перечень методик дополнился ещё несколькими, и сегодня существуют три модели распределения зерен в пространстве: случайное, кластерное и упорядоченное (Петров, 2008).

С развитием геологии появилась потребность в выделении отдельной научной дисциплины, которая бы решала возникающие задачи математическим путем. В середине XX века этой проблемой занимался советский геолог А. Б. Вистелиус. Термин «математическая геология» им определяется как дисциплина, которая занимается построением, анализом и использованием при решении задач концептуальных вероятностных моделей геологических явлений. Он положил начало выделению этого раздела геологии в самостоятельную область науки (Вистелиус, 1980). В частности, он применил к изучению горных пород теорию марковских цепей для определения степени соответствия гранита «идеальному» и степени его метасоматических изменений. Под «идеальным» гранитом Вистелиус подразумевает породу, которая образовалась из расплава при постоянном давлении, то есть кристаллизация происходила в условиях, близких к точке тройной эвтектики. Метод основан на анализе последовательности зерен кварца, плагиоклаза и калиевого полевого шпата на линии сканирования. В «идеальном» граните она должна соответствовать простой цепи Маркова (Вистелиус, 1972). Метод имеет следующие недостатки:

- в качестве образцов рассматриваются только равномернозернистые граниты, при этом в природе чаще всего встречаются граниты с непостоянным размером зерен, что влечет за собой вопрос о корректности применения подобного подхода (Гульбин, 2004);
- породы, соответствующие «идеальному» граниту, встречаются крайне редко: 5 % исследованных образцов по (Вистелиус, 1972), поэтому применение подобного метода не рационально.

В 1980-х появились первые видеоанализаторы структур, что сыграло особую роль в развитии количественных методов анализа. Наиболее известными среди отечественных устройств являются МИУ-5М и «Видеотест» (Бродская, Марин, 2001). МИУ-5М задумывался как продолжение и развитие линейно-дискретного метода геометрического анализа (Глаголев, 1941). Это интеграционное устройство, сканирующее образец в плоскости предметного столика микроскопа вдоль параллельных линий. Прибор дает возможность полного и непрерывного

анализа образца, что можно использовать для выявления особенностей структур и текстур минерального агрегата. Программа «Видеотест» относится к серии анализаторов изображений и позволяет получать статистические характеристики в больших выборках (Бродская, Марин, 2001). Видеоанализаторы нашли широкое применение в изучении минеральных агрегатов. Их используют для гранулометрического анализа, оценки формы минеральных зерен, измерения дигедральных углов, удельной поверхности границ между зернами и коэффициентов агрегативности (Бродская, Марин, 2001; Гульбин, 2004).

Монография Ф. А. Усманова – важное исследование, посвященное построению общих основ математического анализа структур геологических объектов. В начале работы автор рассматривает бинарные отношения между геологическими телами, описывает математические модели и свойства геологических структур. В первой части монографии он предлагает два подхода для систематики геологических структур на математической основе: геометрический (выделяются классы структур, инвариантных относительно преобразований данного вида) и системный (структуры выделяются по форме, размерам, геометрическим отношениям между составными частями). Во второй части автор рассматривает статистические методы анализа геологических структур. Он разработал оригинальное решение основных стереологических задач геологии и предложил два статистических метода (случайных полей и контактов) для исследования пространственных связей между системами геологических тел (Усманов, 1977).

Рассуждая о понятии структуры, Ф. А. Усманов говорит о необходимости выбора такого термина, который одновременно отвечал бы целям построения общей математической теории геологических структур и отражал традиционное понятие структуры. Автор предлагает следующее определение: «структурой геологического объекта, или геологической структурой, называется любая совокупность геометрических свойств составных частей и / или геометрических отношений между составными частями геологического объекта». Он обращает особое внимание на отсутствие математической теории структур горных пород, руд и тектонических структур: «при сопоставлении учения о структуре кристаллов с учением о структурах горных пород и руд ... обнаруживается огромный разрыв». Он подчеркивает, что учение о структурах кристаллов представляет собой хорошо развитую теорию, в то время как учение о структурах горных пород и руд сводится к нестрогому словесному описанию. Отсутствие строгой математической теории в этом случае объясняется тем, что структуры кристаллов в математическом отношении более просты и упорядочены. Следовательно, создание строгой теории для них не так трудоемко, как для горных пород и руд, в которых отношения намного более разнообразны (Усманов, 1977).

При рассмотрении исторического развития количественных методов анализа минеральных агрегатов стоит упомянуть вероятностно-феноменологический подход к

описанию процесса кристаллизации. Подход основан на представлении о возникающих (или же имеющихся с самого начала) центрах кристаллизации, вокруг которых происходит нарастание твердого вещества (этот субстрат называют зародышем, кристаллитом или зерном). Процесс кристаллизации описывается как закономерное возникновение центров кристаллизации и роста зародышей. В результате использования модели получают временные характеристики процесса, например, доля кристаллической фазы в некотором объеме к определенному контрольному моменту времени (Беленький, 1980).

Подобные модели впервые появились в начале XX века в металлургии и применялись для изучения процессов затвердевания металла из расплава. В 1937 г. А. Н. Колмогоров опубликовал работу, в которой в строгой форме сформулировал предпосылки геометрико-вероятностной модели кристаллизации металлов. Тем самым заложены основы статистической теории кристаллизации. Простота метода, математическая строгость и логичность позволяют применять его для решения широкого круга задач (Беленький, 1980). Процесс кристаллизации в рамках К-модели описывается на основании следующих посылок (Беленький, 1980).

1. Неограниченность объема маточной среды.
2. Центры кристаллизации возникают случайно и равномерно с некоторой интенсивностью  $\alpha(t)$ . Если выделить в маточной среде область объема  $V$ , то вероятность возникновения в ней одного зародыша в течение малого промежутка  $dt$  равна  $\alpha(t)Vdt$ .
3. Каждый зародыш независимо от места и времени появления имеет единую для всех зародышей выпуклую форму и ориентацию (принцип геометрического подобия). Это позволяет ввести понятие линейной скорости роста зародыша  $R$ .
4. В каждый момент времени скорости роста одинаковы для всех существующих в данный момент зародышей (единство скорости роста). Таким образом,  $R$  зависит только от времени  $R = v(t)$ .

На основании этих посылок А. Н. Колмогоров предложил формулу для расчета доли  $q(t)$  маточного объема в момент  $t$ . Формула позволяет по заданным функциям  $\alpha(t)$  и  $v(t)$  рассчитать кинетическую кривую кристаллизации как функцию времени и представляет собой основную формулу вероятностно-феноменологической теории (Беленький, 1980).

Другие математические теории образования поликристаллических агрегатов, объясняющие распределение минеральных зерен по размерам, рассмотрены в работе (Трейвус, 1998).

### 1.3.2 Методы, основанные на частоте контактирования минеральных зерен в агрегате

В середине XX века появились методы, основанные на определении вероятности встречаемости контактов между минералами. Одним из первых появился метод контактной области, предложенный в статье (Rogers, Vogy, 1958). Авторы предположили, что вид и площади контактов в кристаллических породах могут предоставить информацию о зарождении и росте кристаллов. Они исследовали гранитные и метаморфические породы и выяснили, что кристаллы калиевого полевого шпата в гранитах меньше контактируют друг с другом, чем в метаморфитах, что может быть связано с зарождением кристаллов в более жидкой среде при более высокой температуре. Р. Кретц (Kretz, 1969) использует этот метод для определения случайности в распределении минералов в агрегате. Он отмечает, что число мономинеральных контактов увеличится в случае отклонения от случайности к агрегации, а отклонение от регулярности увеличит количество полиминеральных контактов. Используется также метод контактных частот, разработанный Д. Лафебером (Lafeber, 1963). Цель работы Р. Кретца – определение степени однородности обогащенного кальцием гранулита. Автор сравнивает оба метода и отмечает несоответствие: один завышает число пироксен-пироксеновых контактов, а другой занижает. Автор объясняет это влиянием на расчеты размеров кристаллов. При описании минеральных агрегатов в статье (Amstutz, Giger, 1970) использованы координационные числа. В них эклектично смешаны числа минеральных зерен и их контактов, что, по-видимому, и не позволило развить теорию.

Ю. Л. Войтеховский предложил методологию типизации структур, основанную на определении частоты встречаемости разных межзерновых контактов в n-минеральном агрегате. В отличие от упомянутых выше методов, он универсален, не требует исходных генетических предположений об образовании минеральных агрегатов, приводит к их классификации и согласованной номенклатуре (Войтеховский, 2014, 2016). Она основана на системном подходе – описании объекта с точки зрения составляющих его элементов и их отношений (Берталанфи, 1969). Структура минерального агрегата рассматривается как совокупность фундаментальных отношений контактирования, которые лежат в основе организации минерального агрегата. Такой подход упоминал Ф. А. Усманов (1977): «в основу математической теории геологических структур нужно положить небольшое число отношений..., рассматриваемых как простейшие элементарные структуры». Отношения нужно подобрать таким образом, чтобы их комбинации отражали всевозможные структуры геологических объектов.

В рамках методологии Ю. Л. Войтеховского предлагается концепция о горной породе как пространстве. В современном представлении горные породы – природные минеральные агрегаты определенного состава и строения, которые образуются в ходе различных

геологических процессов и слагают самостоятельные тела в земной коре (Марин, 2014). В то же время, «сегодня отсутствует мотивированное и конструктивное определение горной породы» (Белоусов, 1987). В. И. Вернадский ещё в 1930-х упоминал «пространство горной породы» как специфическое состояние «пространства земной реальности» (Вернадский, 1987). На основе этой категории Ю. Л. Войтеховский предложил ряд последовательных математических образов и определение минерального агрегата, основанное на естественных отношениях контактирования минеральных зерен. С математической точки зрения горная порода – это множество минеральных зерен. Пространством будет называться множество, элементы которого связаны определенными отношениями. Горная порода представлена как пространство толерантности, топологическое, измеримое, метрическое и частично упорядоченное (коррелированное) пространство (Войтеховский, 2016).

Ю. Л. Войтеховский предложил использовать статистический подход к определению структур, основанный на определении вероятностей межзерновых контактов в  $n$ -минеральной горной породе («метод структурной индикатрисы»). Ф. А. Усманов (1977) отмечал, что вероятностное описание структур удобно применять к геологическим объектам, в которых выделяется большое число составных частей, в том числе горным породам и рудам.

Важная черта организации минеральных агрегатов, а также металлов и сплавов – контактирование 4 зерен в точке, 3 – по ребру и 2 – по поверхности (Салтыков, 1958; Беленький, 1980). Таким образом, целесообразно было бы использовать вероятности  $p_{ijkl}$  (контакты между 4 зернами), но они не попадают в петрографический шлиф (геометрическая вероятность пересечения точки шлифом равна 0). Тройные контакты  $p_{ijk}$  между зернами (в объеме представляют собой ребра) видны в шлифе в виде точек, бинарные  $p_{ij}$  – в виде линий. Статистики  $p_{ijk}$  и  $p_{ij}$  можно подсчитать в шлифах. Далее теория построена на статистиках  $p_{ij}$  для полиминеральных агрегатов, на  $p_{ijk}$  – для биминеральных. В некоторых случаях возможно восстановление вероятностей  $p_{ijkl}$  по  $p_{ijk}$ , а последних – по  $p_{ij}$  (1). Для этого необходимо исключить некоторое количество контактов из общего числа теоретически возможных (эти условия следуют из теорем о разрешимости систем линейных уравнений) (Горная порода: опыты постижения, 2005).

$$p_{ijkl} \rightarrow p_{ijk} \rightarrow p_{ij} \quad (1)$$

где  $i, j, k, l$  – контактирующие минералы.

Существует проблема стереологической реконструкции, которая заключается в соответствии значений параметров (в том числе вероятностей  $p_{ij}$ ), измеряемых в 2D, их значениям в 3D (Бродская, 1972). Но поскольку исторически структуры минеральных агрегатов изучались в плоских срезах, вероятности контактирования минеральных зерен, посчитанные в шлифах, принимаются далее в качестве истинных.

В рамках предложенной методологии горная порода рассматривается как автоморфизм (Войтеховский, 1998, 2014, 2016) – многозначное отображение в себя минеральных видов  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , реализуемых в минеральных индивидах, управляемых оператором  $p_{ij}$  (2). Автоморфизмы используются в кристаллографии, например, как симметрические преобразования кристаллических полиэдров, совмещающие их с собой при поворотах, отражениях в плоскостях и центре инверсии (Попов и др., 1972; Чупрунов, 2004).

$$\{m_i\}_1^n \xrightarrow{p_{ij}} \{m_i\}_1^n \quad (2)$$

Сумма вероятностей всех бинарных межзерновых контактов равна единице (3):

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (3)$$

В левую часть уравнения (3) можно добавить минералы в виде произведений переменных  $m_i$  и  $m_j$  (выражающих контакты минералов  $m_i$  и  $m_j$ ), тогда сумма в левой части уравнения преобразуется в произведение матриц (4). В матрице вероятностей уравнения (4) заложена квадратичная форма, соответствующая квадратичной поверхности центрального типа в  $n$ -мерном пространстве (структурная индикатриса) (Боревич, 1988; Гантмахер, 1988). Ее тип определяется приведением симметрической матрицы  $[p_{ij}]$  к диагональному виду (5) (Войтеховский, 1998). Аналог структурной индикатрисы для кристалла – оптическая индикатриса, представляющая собой геометрический образ его оптических свойств (Лодочников, 1974; Марин, 2014).

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij} m_i m_j = [m_1 m_2 \dots m_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = E \quad (4)$$

$E$  – единичная матрица.

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{11} & & & \\ & q_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$q_{nn}$  – диагональные элементы матрицы.

В рамках предложенной методологии Ю. Л. Войтеховский предложил определение петрографической структуры как «инварианта горной породы, фиксируемого (геометрически) индикатрисой и (алгебраически) канонической диагональной формой матрицы вероятностей  $p_{ij}$  межзерновых контактов». Номенклатура основана на значениях  $q_{nn}$  в диагональной матрице: «структура  $S_n^m$  соответствует диагональной матрице  $Q_{ii}$ , в которой на  $n$  позициях стоят  $m$  положительных элементов». Для биминерального агрегата возможны две структуры: «эллиптическая» (+ и +) и «гиперболическая» (+ и –). Последняя существует в двух вариантах в

зависимости от положения плюса на диагонали (расположения гиперболы относительно координатных осей) (рисунок 5) (Войтеховский, 2014).

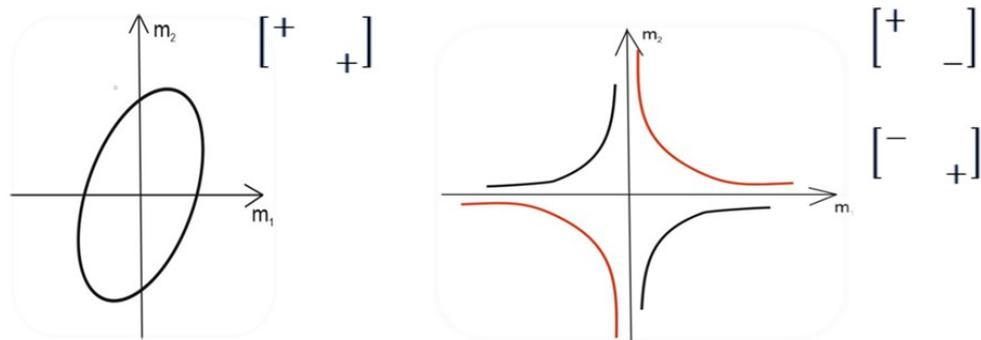


Рисунок 5 – Структурные индикатрисы и соответствующие им диагональные матрицы для биминерального агрегата: эллипс (слева) и гиперболы (справа) (Войтеховский, 2014).

При  $n > 2$  эллиптический тип распознается по структуре  $S_n^n$ , остальные варианты – гиперboloиды в  $n$ -мерном пространстве. Для  $n$ -минерального агрегата возможны  $n$  типов структур (от 1 до  $n$  плюсов на диагонали). Гиперболический тип структуры в таком случае также имеет несколько подтипов в зависимости от количества и положения плюсов на диагонали. В общем случае количество структурных подтипов составляет  $2^n - 1$ , что значительно расширяет предлагаемую классификацию. (Войтеховский, 2000, 2014, 2016).

Помимо определения структурного типа в рамках методологии можно определять структурные позиции отдельных минералов, убирая соответствующие столбцы и строки из матрицы вероятностей  $p_{ij}$  (метод вычитания аксессуаров). Структурные позиции минералов одинаковы, если одинаковы структурные типы вмещающих матриц. Такой подход позволяет выявить более тонкие особенности организации минеральных агрегатов, что важно при близких модальных составах (Войтеховский, 2000; Voytekhovsky et al., 2020).

Для бинарных контактов в биминеральных агрегатах наглядно изобразить соотношение различных типов контактов можно в барицентрическом треугольнике (три типа межзерновых контактов, рисунок 6). Подобные барицентрические диаграммы в геологии активно используются для оценки химического состава: классические AFM-диаграммы и диаграммы смесимости компонентов для минералов (Григорьев, 1990).

В отличие от описательного подхода, где возникают дискуссии о типах структур и границах между ними, в этом методе для биминеральных пород граница четко фиксируется. Это равновесие моно- и полиминеральных контактов (равновесие Харди-Вайнберга, рисунок 6). Этот термин появился в начале XX века в генетике для описания скрещивания генов в потомстве. Выявлено, что при постоянном значении вероятностей  $p$  и  $q$  встречи аллели данного гена число особей с разными генотипами (доминантным  $d$ , рецессивным  $r$  и гетерозиготным  $h$ )

тоже постоянно, причем  $d = p^2$ ,  $h = 2pq$ ,  $r = q^2$  (Коренева, 1969; Вольтерра, 1976; Лайтхилл и др., 1981). Подобные соотношения выводятся для биминеральных горных пород:  $p_{11} = p_1^2$ ,  $p_{22} = p_2^2$ ,  $p_{12} = 2p_1p_2$  (Voytekhovskiy et al., 2020).

Равновесие Харди-Вайнберга соответствует идеальному перемешиванию минеральных зерен в объеме горной породы и отвечает массивной текстуре в статистическом смысле. Сегодня массивная текстура определяется описательно: «...зерна распределены более или менее равномерно...» (Петрографический словарь, 1981, с. 424), а критериев однородности структуры вообще не существует (Гликин, Петров, 1998, с. 85).

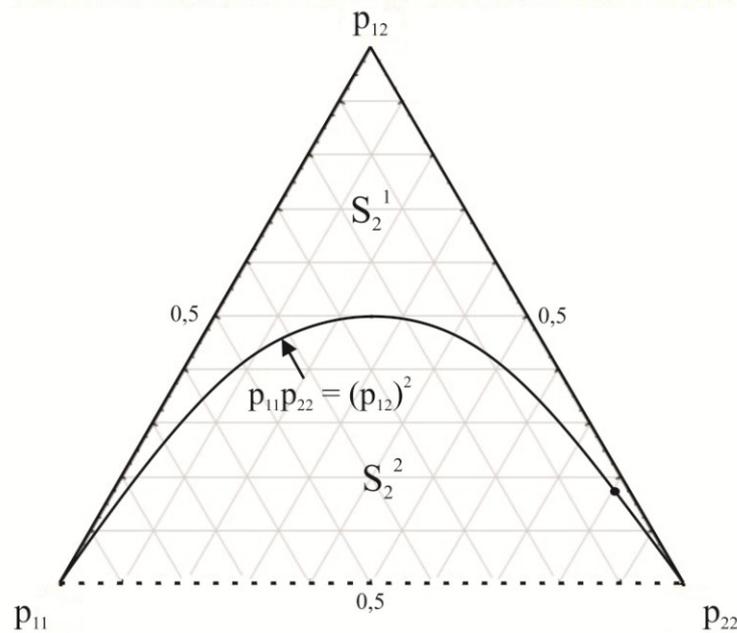


Рисунок 6 – Барицентрическая диаграмма вероятностей  $\{p_{ii}, p_{ij}, p_{jj}\}$  для биминерального агрегата. Показаны типы структур для соответствующих полей диаграммы и уравнение баланса вероятностей (равновесие Харди-Вайнберга) (Войтеховский, 2014).

Метод структурной индикатрисы используется для кристаллических пород любого состава и с любым количеством минералов, так как все алгебраические преобразования производятся автоматически при помощи матричных калькуляторов. Практическое применение метода заключается в разделении монотонных толщ (Войтеховский, 2014), расчленении и корреляции разрезов (Захарова и др., 2020-1). Он позволяет выявлять тонкие различия в горных породах близкого состава, незаметные при описательном подходе, что можно использовать при картировании интрузивных тел (Voytekhovskiy et al., 2020).

## 1.4 Выводы по главе 1

В главе рассмотрены различные подходы к описанию структур и текстур. Описательный подход существовал ещё в домикроскопическую эпоху и основан на определении различных параметров минеральных зерен (формы, размеров) и взаимных отношений минералов и агрегатов. Его основной недостаток – отсутствие строгой классификации структур и текстур: качественное описание порождает огромное число различных типов, границы между которыми четко не определены, часто определение структуры в шлифе – предмет спора. Проблема наблюдается и в терминологии: понятия «структура» и «текстура» отличаются у разных авторов и в разных странах.

Второй подход – термодинамический, основанный на представлении о межзерновых контактах как зонах разрыва химических связей и краевых дислокаций кристаллических решеток. Его преимущество – физико-химическое обоснование. Но он не ведет к классификации структур с естественными границами. Проблема измерения поверхностной энергии на границах зерен, к тому же с пересчетом параметров из 2D в 3D для минеральных агрегатов не решена.

Третий подход – количественный анализ, существующий в петрографии более 150 лет. Измерения диэдральных углов, оценка форм зерен, гранулометрический анализ и определение других параметров используются для выяснения генезиса породы или решения задач технологической минералогии, но тоже не ведут к строгому определению и количественной оценке структур.

Метод структурной индикатрисы также относится к количественному анализу структур и основан на фундаментальном отношении контактирования минеральных зерен в агрегате. Статистический подход позволяет дать строгое математическое определение основным понятиям: «минеральный агрегат» и «структура», ответить на вопрос о числе структур и резких границах между ними. Основное преимущество данного подхода – универсальность. Строгое определение типа структуры позволяет выявлять даже тонкие различия между горными породами и рудами близкого состава, которые незаметны при обычном описании. Метод структурной индикатрисы применим к полнокристаллическим агрегатам любого состава с любым количеством минералов, что позволяет его широко применять для решения различных геологических задач. Использование метода для мелко- и тонкозернистых агрегатов сегодня ограничено лишь техническими возможностями. Помимо определения общего типа структуры, можно определять структурные позиции отдельных минералов, что также важно для выявления тонких различий между горными породами (например, при картировании интрузивных тел).

Основной недостаток предлагаемого статистического подхода – трудоемкость, так как вероятности межзерновых контактов подсчитываются вручную. При использовании современных компьютерных технологий автоматизация процесса вполне возможна. В заключение отметим, что все описанные в работе теоретические разработки и практические приложения предлагаются в дополнение к существующим методам и должны использоваться вместе с ними.

## ГЛАВА 2 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР МИНЕРАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ

### 2.1 Биминеральные агрегаты

#### 2.1.1 Бинарные контакты

Моделирование основано на методологии типизации структур минеральных агрегатов, подробное теоретическое обоснование которой дано в главе 1. Для организации горных пород, руд, а также металлов и сплавов характерно контактирование (в объеме) 4 зерен в точке, 3 по ребру и 2 по поверхности (Салтыков, 1958). Исторически сложилось, что горные породы и руды изучаются в плоских сечениях (шлифах), поэтому моделирование также выполнено в плоскости. На плоскости контакт двух зерен представляет собой ребро, трех – точку, а контакты четырех зерен никогда не попадают в плоский срез. В первой части главы выполнено моделирование для бинарных контактов, во второй – для тернарных контактов.

Перед началом моделирования необходимо выбрать шаблон. Согласно теореме Эйлера для плоских графов справедливо равенство:  $\Gamma - P + B = 1$ , где  $\Gamma$  – грани,  $P$  – ребра,  $B$  – вершины (рисунок 7).

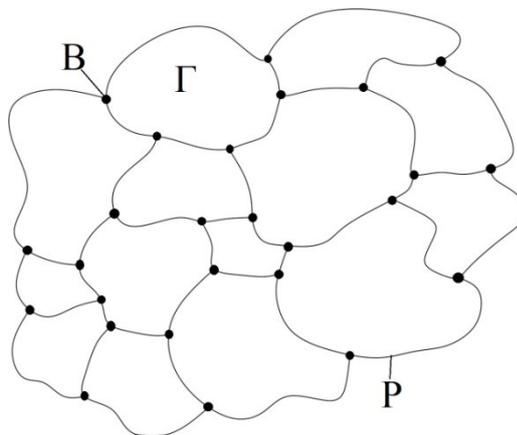


Рисунок 7 – Образец плоского графа с обозначенными гранями, ребрами и вершинами.

Без учета краевых эффектов справедливо равенство  $3B = 2P$ , поскольку каждое ребро принадлежит одновременно двум вершинам. Подставим это равенство в уравнение Эйлера, предварительно умножив его на три:  $[3\Gamma - 3P + 3B = 3] \rightarrow [3\Gamma - 3P + 2P = 3] \rightarrow [3\Gamma - P = 3] \rightarrow [P = 3\Gamma - 3 \approx 3\Gamma \text{ при } \Gamma \rightarrow +\infty]$ . Если в агрегате  $n$  зерен, то число межзерновых контактов будет  $3n$ . Средняя координация зерна (также без учета краевых эффектов):  $2P / \Gamma = (6\Gamma - 6) / \Gamma = 6 - 6 / \Gamma \approx 6 \text{ при } \Gamma \rightarrow +\infty$ . Таким образом, для упрощения процесса моделирования в качестве шаблона можно использовать гексагональную сетку (рисунок 8).

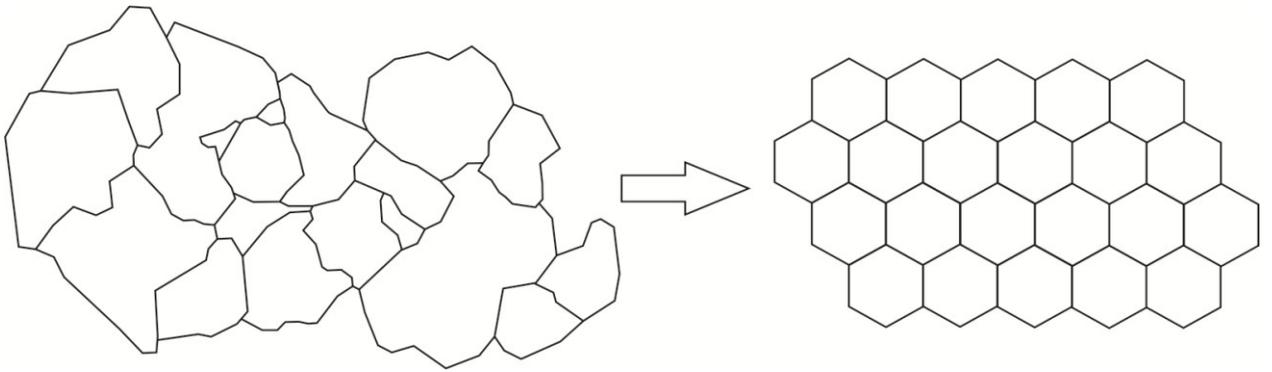


Рисунок 8 – Переход от реальной горной породы к шаблону для моделирования.

Моделирование структур целесообразно начинать с бинарных контактов в биминеральных агрегатах как наиболее простого варианта. Матрица вероятностей в этом случае выглядит следующим образом (6):

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12/2} \\ p_{12/2} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

где 1 и 2 – минералы, слагающие агрегат.

В главе 1 показана барицентрическая диаграмма для этого случая (треугольник) и описаны два типа структурных индикатрис – эллипс (тип структуры  $S_2^2$ ) и гипербола (тип структуры  $S_2^1$ ). На основе исследования остальных областей диаграммы автором построены все возможные структурные индикатрисы для этого случая. Несмотря на строгую границу между двумя основными типами структур, между всеми индикатрисами наблюдаются непрерывные переходы, как и происходит в реальных структурах (рисунок 9). Таким образом, даже для самого простого случая существует 9 типов структурных индикатрис, что расширяет классификацию. Для наглядности также показаны примеры моделей структур для разных областей диаграммы (рисунок 10) (Войтеховский и др., 2021-1).

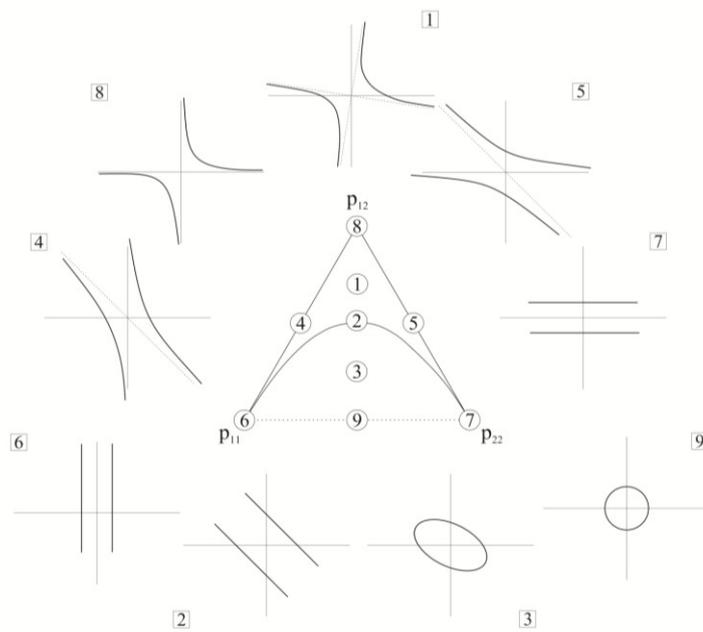


Рисунок 9 – Барицентрический треугольник вероятностей  $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$  (1 и 2 – минералы).

Показаны структурные индикатрисы для разных областей диаграммы.

Цифрой 2 обозначена линия равновесия Харди-Вайнберга.

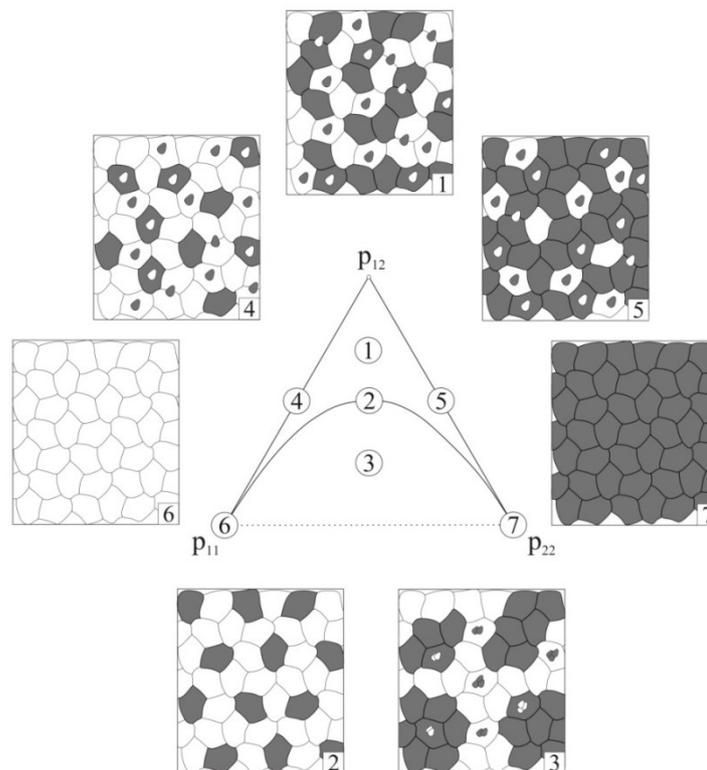


Рисунок 10 – Модели структур биминеральных агрегатов для разных областей барицентрического треугольника. Состояния  $p_{12} = 1$  и  $p_{11} + p_{22} = 1$  (пунктирное ребро без вершин) в минеральных агрегатах невозможны. Обозначения соответствуют рисунку 9.

В рамках исследования автором созданы искусственные шлифы с целью разработки наглядного пособия, содержащего разнообразные вариации петрографических структур (с точки зрения их математического определения). Для атласа использован шаблон на основе неправильной гексагональной сетки для большего сходства с реальными горными породами. Искусственные шлифы на рисунке 11 на первый взгляд кажутся одинаковыми, при этом переход от структуры  $S_2^2$  к  $S_2^1$  четко фиксируется математически (таблица 1), что подчеркивает проблему определения строгой границы между структурами при использовании только описательного подхода.

Таблица 1 – Примеры расчетов для атласа структур.

№ искусственного шлифа	Матрица вероятностей, расположение элементов по (6)	Тип структуры
19	$\begin{bmatrix} 0,337 & 0,244 \\ 0,244 & 0,174 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$
26	$\begin{bmatrix} 0,326 & 0,237 \\ 0,237 & 0,199 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$

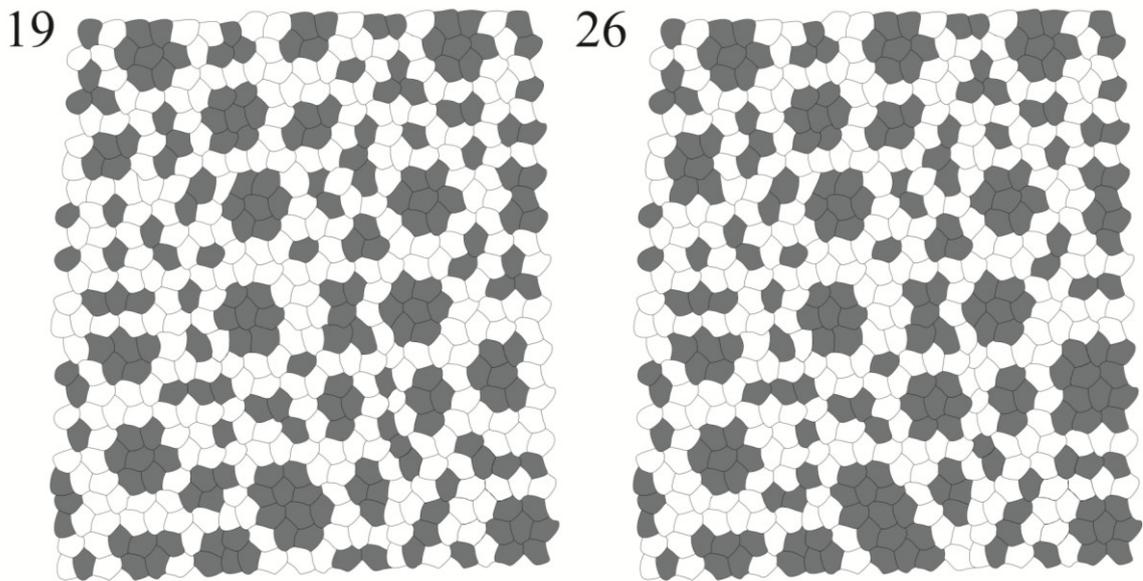


Рисунок 11 – Примеры искусственных шлифов двух структурных типов ( $S_2^1$  слева и  $S_2^2$  справа).

Автором разработан атлас структур, содержащий 44 искусственных шлифа, расположение фигуративных точек которых показано на барицентрической диаграмме (рисунок 12). Все рисунки искусственных шлифов из атласа структур представлены в приложении А. Слева направо вдоль диаграммы (рисунок 12) наблюдается преобладание черно-черных или бело-белых контактов (условно более мелано- или лейкократовая порода) с их примерно

одинаковым содержанием посередине диаграммы. Для фигуративных точек, расположенных вдоль линии равновесия Харди-Вайнберга (точки 4, 6, 11, 35, рисунок 12), распределение зерен в шлифах наиболее однородно и приближено к массивной текстуре в ее статистическом смысле. Для правой части диаграммы созданы лишь некоторые примеры (рисунок 12), поскольку все точки из левой части отображаются на правую путем замены черных зерен в белой матрице на белые в черной.

По распределению фигуративных точек на диаграмме видно, что искусственные шлифы с наличием кластеров (шлировые текстуры) тяготеют к нижней части диаграммы (в них больше мономинеральных контактов). С увеличением доли полиминеральных контактов кластеры распадаются, и наблюдается переход к цепочечным структурам. Пример такого тренда показан на рисунке 13.

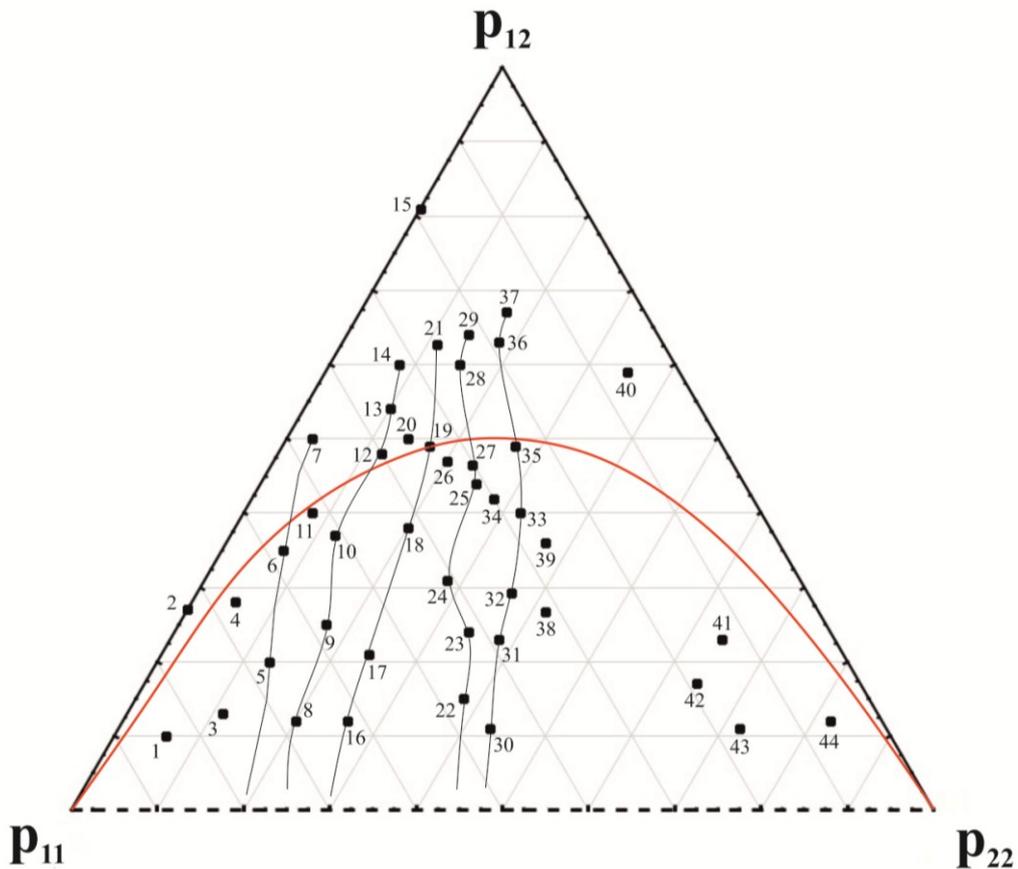


Рисунок 12 – Барицентрическая диаграмма  $\{p_{11}, p_{12}, p_{22}\}$ . Точки соответствуют искусственным шлифам из атласа. Красным показана линия равновесия Харди-Вайнберга.

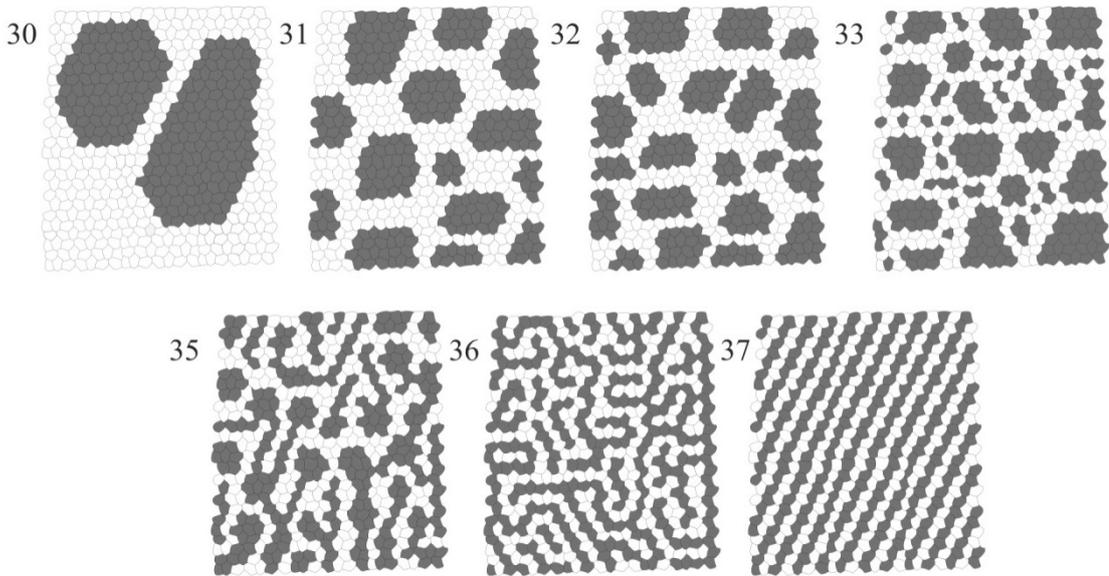


Рисунок 13 – Пример тренда изменения структур при движении снизу вверх (тренд показан на рисунке 10). Номера искусственных шлифов соответствуют точкам на диаграмме.

Атлас искусственных шлифов выявляет лишь некоторые закономерности зависимости структуры и текстуры от статистики межзерновых контактов. Для расширения исследования выполнено моделирование типовых структур и текстур, межзерновые контакты в которых создают специфические отношения в топологическом смысле, а не с точки зрения количества контактов (Войтеховский и др., 2020-1, 2021-2). В качестве основы для моделирования взята правильная гексагональная сетка, где для каждого случая отдельно подсчитывались контакты  $p_{чч}$ ,  $p_{чб}$ ,  $p_{бб}$  в общем виде. Подробно каждый случай описан ниже.

### 1. Вкрапленные структуры (единичные зерна, равномерно рассеянные в матрице).

Пусть  $n$  – всего зерен, тогда  $3n$  – общее число бинарных межзерновых контактов;  $kn$  – число черных зерен, где  $0 < k < 0,25$  (для каждого типа структуры верхний предел для  $k$  будет отличаться). Тогда число бинарных контактов:  $N_{чч} = 0$ ,  $N_{чб} = 6kn$  (поскольку у каждого зерна вокруг 6 соседей, краевые эффекты не учтены, рисунок 14, а),  $N_{бб} = 3n - 6kn$ . Соответствующие вероятности находятся делением числа контактов на общее их количество для каждого случая:

$$p_{чч} = 0, p_{чб} = \frac{6kn}{3n} = 2k, p_{бб} = 1 - 2k$$

Серия вкрапленных структур образует непрерывный тренд на ребре ( $p_{бб}$ ,  $p_{чб}$ ) барицентрической диаграммы, ограниченный значением  $p_{чб}$  для  $k = 0,25$  (здесь и далее тренды показаны на рисунке 20).

## 2. Пойкилитовые структуры.

Пусть  $n$  – общее число зерен (ойкокристаллов),  $m$  – общее число вкрапленников (хадакристаллов). Число контактов:  $N_{\text{чч}} = 0$ ,  $N_{\text{чб}} = m$  (поскольку каждый вкрапленник создает один черно-белый контакт, рисунок 14, б),  $N_{\text{бб}} = 3n$ . Вероятности для этого случая:

$$p_{\text{чч}} = 0, p_{\text{чб}} = \frac{m}{3n+m} = \frac{1}{3n/m+1}, p_{\text{бб}} = \frac{3n}{3n+m} = \frac{1}{1+m/3n}$$

Если вкрапленников относительно мало, то  $\frac{m}{3n} \rightarrow 0$ , тогда  $p_{\text{чб}} \rightarrow 0$ ,  $p_{\text{бб}} \rightarrow 1$ . И наоборот, если хадакристаллов много, то  $\frac{3n}{m} \rightarrow 0$ , тогда  $p_{\text{чб}} \rightarrow 1$ ,  $p_{\text{бб}} \rightarrow 0$ . Тренд пойкилитовых структур занимает все ребро ( $p_{\text{бб}}$ ,  $p_{\text{чб}}$ ) барицентрической диаграммы (рисунок 20).

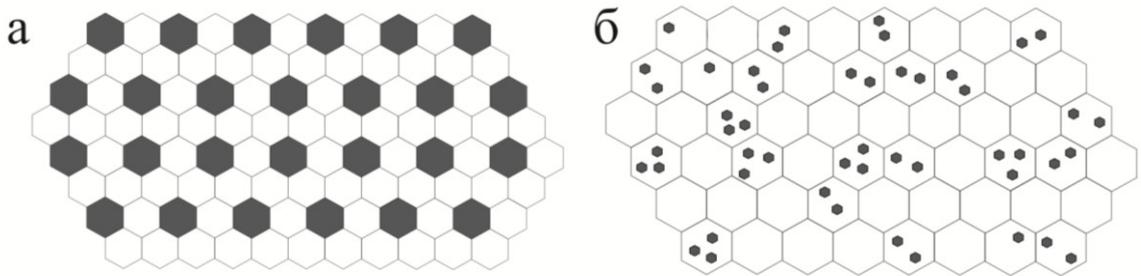


Рисунок 14 – Модели вкрапленной (а) и пойкилитовой (б) структур на гексагональной сетке.

## 3. Цепочечные структуры, полосчатые текстуры.

Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $3n$  – общее число межзерновых контактов. Пусть  $kn$  – число черных зерен, соединенных в цепочки, где  $0 < k < 0,5$  (чередование черных и белых единичных полос, рисунок 16, а). Тогда  $N_{\text{чч}} = kn$ ,  $N_{\text{чб}} = 4kn$  (поскольку у каждого зерна вокруг 4 соседа),  $N_{\text{бб}} = 3n - 5kn$ . Соответствующие вероятности:

$$p_{\text{чч}} = \frac{kn}{3n} = \frac{k}{3}, p_{\text{чб}} = \frac{4kn}{3n} = \frac{4k}{3}, p_{\text{бб}} = 1 - \frac{5k}{3}.$$

Максимальная концентрация черных зерен достигается при  $k = 0,5$ . На барицентрической диаграмме цепочечные структуры образуют непрерывный тренд (рисунок 20).

Полосчатые текстуры моделируются на основе цепочечных: это цепочки, соединенные в два и более ряда (рисунок 16, в). Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $3n$  – общее число межзерновых контактов. Пусть  $kn$  – число черных зерен, соединенных в полосы, где  $0 < k < 0,5$ . Пусть  $m$  – число зерен в одной цепочке (линии),  $t$  – число линий в одной полосе. Общая формула для расчета количества черных-черных контактов ( $N_{\text{чч}}$ ) представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Расчет  $N_{\text{чч}}$  для одной полосы.

2	3	4	5	...	t
4m	7m	10m	13m		(3t-2)m

Чтобы найти количество полос, необходимо общее число зерен в полосах разделить на число зерен в одной полосе:  $\frac{kn}{tm}$ . Тогда

$$N_{чч} = \frac{(3t-2)knm}{tm} = \frac{(3t-2)kn}{t}, N_{чб} = \frac{4mkn}{tm} = \frac{4kn}{t}, N_{бб} = 3n - \frac{(3t-2)kn}{t} - \frac{4kn}{t}.$$

Соответствующие вероятности:

$$p_{чч} = \frac{(3t-2)kn}{3nt} = \frac{(3t-2)k}{3t}, p_{чб} = \frac{4kn}{3nt} = \frac{4k}{3t}, p_{бб} = 1 - \frac{4k}{3t} - \frac{(3t-2)k}{3t}.$$

Тренды полосчатых текстур находятся целиком в области структуры  $S_2^2$  и располагаются веерообразно (рисунок 15).

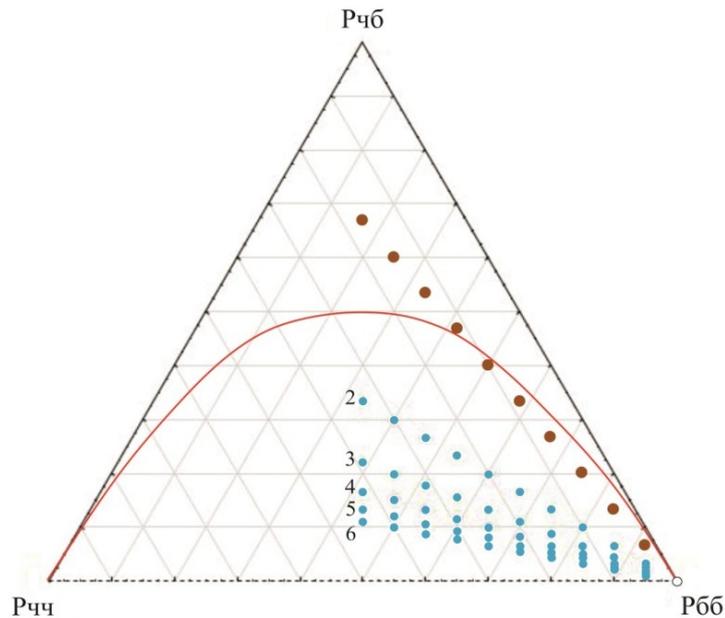


Рисунок 15 – Барицентрический треугольник ( $p_{ii}$ ,  $p_{ij}$ ,  $p_{jj}$ ). Коричневым цветом показан тренд цепочечных структур, голубым – тренды полосчатых (цифра обозначает число линий в одной полосе). Красным показана линия равновесия Харди-Вайнберга.

#### 4. Структуры с ветвящимися кластерами.

В этом случае подразумевается расположение зерен в виде разветвленных кластеров (рисунок 16, б). В природе такие кластеры наблюдаются в гранитах типа В, где зерна кварца образуют лапчато-агрегативные кластеры в полевошпатовой матрице (Бескин и др., 1979). Моделирование выполнено для кластеров из 7 зерен.

Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $3n$  – общее число контактов. Пусть  $kn$  – число зерен в кластере. Тогда  $N_{\text{чч}} = kn$ ,  $N_{\text{чб}} = 4kn$ ,  $N_{\text{бб}} = 3n - 5kn$ . Соответствующие вероятности в этом случае совпадают с предыдущим – цепочечной структурой, небольшое отличие заключается в максимальном значении  $k = 0,32$ . Увеличение максимального  $k$  связано с более компактным расположением таких кластеров в основной матрице. Совпадение в расчетах вероятностей легко объяснить, поскольку ветвящиеся кластеры – это цепочки с дополнительным зерном в центре, от которого они расходятся, что не сказывается на общей статистике контактов (расположение тренда таких структур совпадает с положением тренда для цепочечных, рисунок 20).

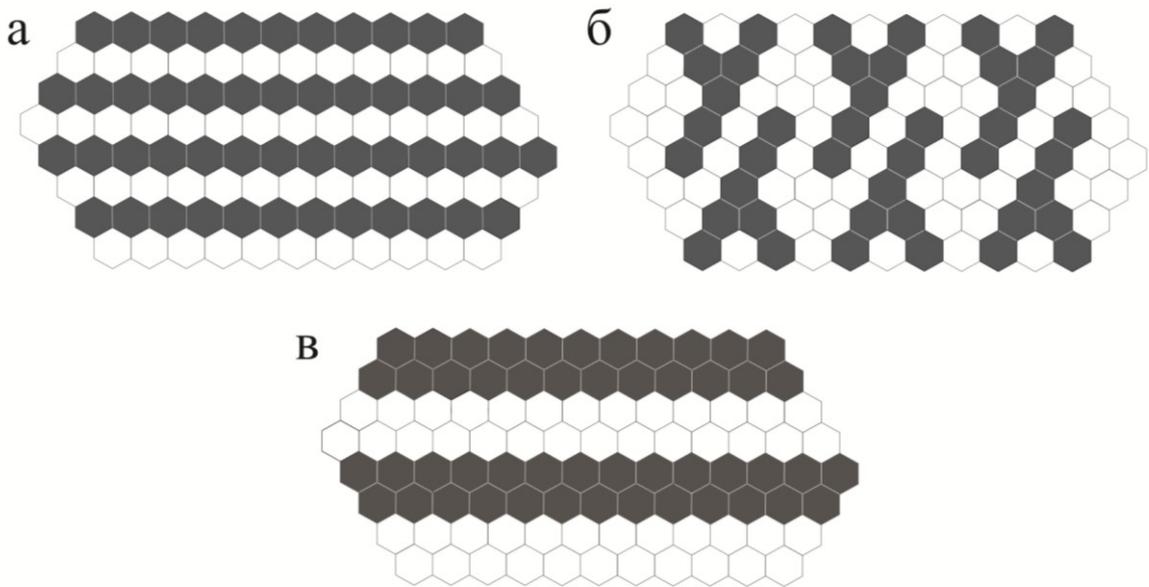


Рисунок 16 – Модели цепочечной (а), ветвящейся (б) структуры и полосчатой текстуры (в).

## 5. Шлировые текстуры.

Такие текстуры сложены из кластеров с определенным числом зерен, отличающихся от основной матрицы (в нашем случае это изометричные шлиры из черных зерен в белой матрице, рисунок 17). Рассмотрим кластеры по 7 зерен (рисунок 17, справа): пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $3n$  – общее число бинарных контактов. Пусть  $kn$  – общее число зерен, собранных в шлиры. Число шлиров равно  $\frac{kn}{7}$ . Тогда число контактов  $N_{\text{чч}} = \frac{12kn}{7}$ ,  $N_{\text{чб}} = \frac{18kn}{7}$ ,  $N_{\text{бб}} = 3n - \frac{30kn}{7}$ .

Вероятности контактирования:  $p_{\text{чч}} = \frac{12kn}{3n \cdot 7} = \frac{4k}{7}$ ,  $p_{\text{чб}} = \frac{6k}{7}$ ,  $p_{\text{бб}} = 1 - \frac{10k}{7}$ .

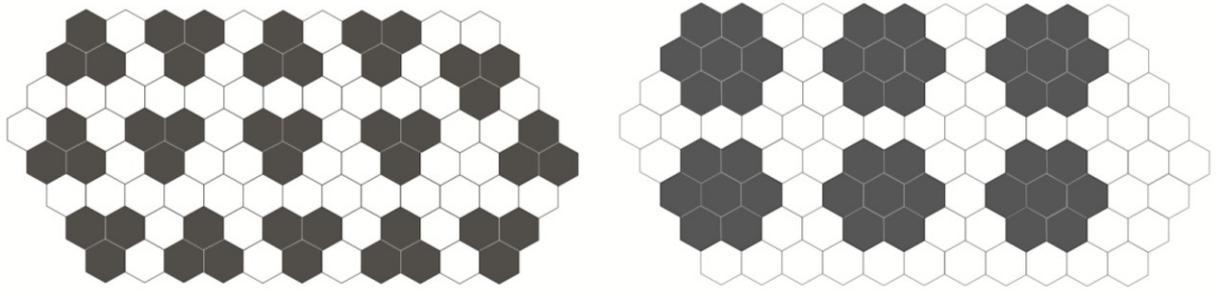


Рисунок 17 – Модели шлировых текстур.

Сводная таблица полученных формул для расчетов при моделировании шлиров с разным числом зерен показана в таблице 3.

Таблица 3 – Формулы для построения трендов для разного числа зерен в шлире.

Число зерен в шлире	Число шлиров	$N_{\text{чч}}$	$N_{\text{чб}}$	$N_{\text{бб}}$	$p_{\text{чч}}$	$p_{\text{чб}}$	$p_{\text{бб}}$	$k$
2	$\frac{kn}{2}$	$\frac{kn}{2}$	$5kn$	$3n - \frac{11kn}{2}$	$\frac{k}{6}$	$\frac{5k}{3}$	$1 - \frac{11k}{6}$	0,35
3	$\frac{kn}{3}$	$kn$	$4kn$	$3n - 5kn$	$\frac{k}{3}$	$\frac{4k}{3}$	$1 - \frac{5k}{3}$	0,38
4	$\frac{kn}{4}$	$\frac{5kn}{4}$	$\frac{7kn}{2}$	$3n - \frac{19kn}{4}$	$\frac{5k}{12}$	$\frac{7k}{6}$	$1 - \frac{19k}{12}$	0,43
7	$\frac{kn}{7}$	$\frac{12kn}{7}$	$\frac{18kn}{7}$	$3n - \frac{30kn}{7}$	$\frac{4k}{7}$	$\frac{6k}{7}$	$1 - \frac{10k}{7}$	0,42
19	$\frac{kn}{19}$	$\frac{42kn}{19}$	$\frac{30kn}{19}$	$3n - \frac{72kn}{19}$	$\frac{14k}{19}$	$\frac{10k}{19}$	$1 - \frac{24k}{19}$	0,45
37	$\frac{kn}{37}$	$\frac{90kn}{37}$	$\frac{42kn}{37}$	$3n - \frac{132kn}{37}$	$\frac{30k}{37}$	$\frac{14k}{37}$	$1 - \frac{44k}{37}$	0,44
61	$\frac{kn}{61}$	$\frac{156kn}{61}$	$\frac{54kn}{61}$	$3n - \frac{210kn}{61}$	$\frac{52k}{61}$	$\frac{18k}{61}$	$1 - \frac{70k}{61}$	0,48
91	$\frac{kn}{91}$	$\frac{240kn}{91}$	$\frac{66kn}{91}$	$3n - \frac{306kn}{91}$	$\frac{80k}{91}$	$\frac{22k}{91}$	$1 - \frac{102k}{91}$	0,36

Тренды шлировых текстур закономерно покрывают правый угол барицентрической диаграммы (рисунок 20), причем с увеличением числа зерен в кластере тренд смещается в сторону ребра  $P_{\text{чч}} - P_{\text{бб}}$ . Расположение тренда для 3 зерен в кластере совпадает с трендами цепочечной и ветвящейся структур, поскольку именно с 3 зерен начинаются ветвящаяся структура и простейшая цепочка (рисунок 16) в зависимости от того, где будет расположено третье зерно.

## 6. Порфи́ровые и порфи́ровидные структуры.

Моделирование таких структур основано на предыдущем случае: вкрапленники рассматриваются как шлиры, у которых стерты внутренние границы (рисунок 18), что позволяет вывести формулу для расчетов.

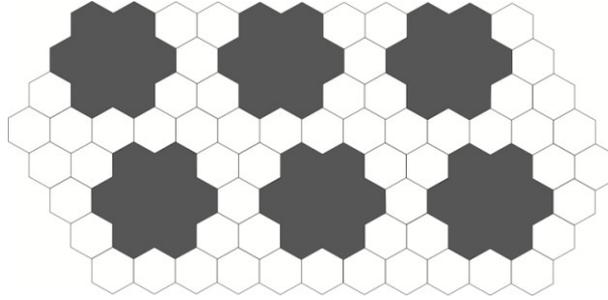


Рисунок 18 – Модель порфи́ровидной структуры.

Характеристика шлиров получена на основе предыдущего случая (таблица 4).

Таблица 4 – Сводная характеристика модельных шлиров.

d	3	5	7	9	11
n(d)	7	19	37	61	91
v(d)	12	42	90	156	240
p(d)	18	30	42	54	66
$\Sigma$	21	57	111	183	273

Условные обозначения: d – диаметр шлира (единичное зерно в структуре принято за 1), n(d) – число зерен в шлире, v(d) – число внутренних границ в шлире, p(d) = 6d – число внешних границ шлира,  $\Sigma = N_{\text{чч}} + N_{\text{бб}}/2 = 3n(d)$ .

Пусть n – общее число минеральных зерен, тогда 3n – общее число бинарных контактов. Пусть kn – число зерен, собранных в шлиры диаметра d, тогда 3kn – число контактов во всех шлирах. Число зерен в шлире  $n(d) \approx \frac{\pi d^2}{4}$ . Тогда число шлиров в структуре  $\frac{kn}{n(d)} = \frac{4kn}{\pi d^2}$ . Чтобы превратить шлиры в порфи́ровые вкрапленники, необходимо стереть внутренние границы. Очевидно, что  $N_{\text{чч}} = 0$ . Далее, число белых-белых границ равно разности общего числа контактов (3n) и общего числа контактов в шлирах (3kn). Согласно таблице 4 в 3kn входит лишь половина черно-белых контактов, следовательно, ещё одну половину необходимо вычесть (половина внешних границ шлира (вкрапленника), умноженная на количество шлиров в структуре). Таким образом,  $N_{\text{бб}} = 3n - 3kn - \frac{p(d)}{2} * \frac{kn}{n(d)} = 3n(1-k) - 3d * \frac{4kn}{\pi d^2} = 3n(1-k) - \frac{12kn}{\pi d}$ .

Число внешних контактов в таком случае будет равно произведению  $p(d)$  на количество шпиров (вкрапленников), взятому с коэффициентом  $2/3$ , поскольку стирание внутренних границ уменьшает число внешних контактов. Тогда  $N_{чб} = \frac{2}{3} * p(d) * \frac{kn}{n(d)} = \frac{2}{3} * 6d * \frac{4kn}{\pi d^2} = \frac{16kn}{\pi d}$ .

Для нахождения вероятностей необходимо найти сумму всех контактов.  $N_{бб} + N_{чб} = 3n*(1-k) - \frac{12kn}{\pi d} + \frac{16kn}{\pi d} = 3n*(1-k) + \frac{4kn}{\pi d}$ . Тогда соответствующие вероятности:

$$p_{чч} = 0, p_{чб} = \frac{\frac{16kn}{\pi d}}{3n(1-k) + \frac{4kn}{\pi d}} = \frac{16kn}{3n(1-k)\pi d + 4kn} = \frac{16k}{3\pi d(1-k) + 4k}, p_{бб} = 1 - p_{чб}.$$

Порфиновые структуры в совокупности покрывают ребро ( $p_{бб}$ ,  $p_{чб}$ ) барицентрической диаграммы (рисунок 20). Каждый тренд начинается вблизи вершины  $p_{бб}$  и простирается к вершине  $p_{чб}$  тем дальше, чем меньше относительный диаметр кластера. Предельное значение  $k$  вычисляется из условия  $p_{чб} < 1$  при фиксированном значении  $d$ :  $k < \frac{\pi d}{4 + \pi d}$  (рисунок 19). Согласно рисунку, наибольшее значение  $p_{чб}$  наблюдается при наименьшем значении кластера и наибольшей его концентрации в структуре. С увеличением диаметра кластера наблюдается уменьшение значения  $p_{чб}$  при фиксированном  $k$ , что вполне согласуется с уменьшением числа черно-белых контактов в более крупных кластерах.

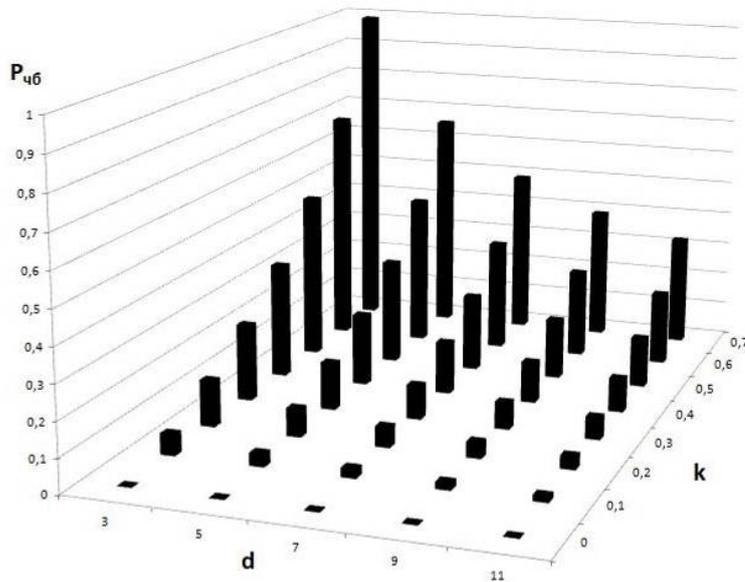


Рисунок 19 – Соотношение  $d$  и  $k$  для порфиновых структур.

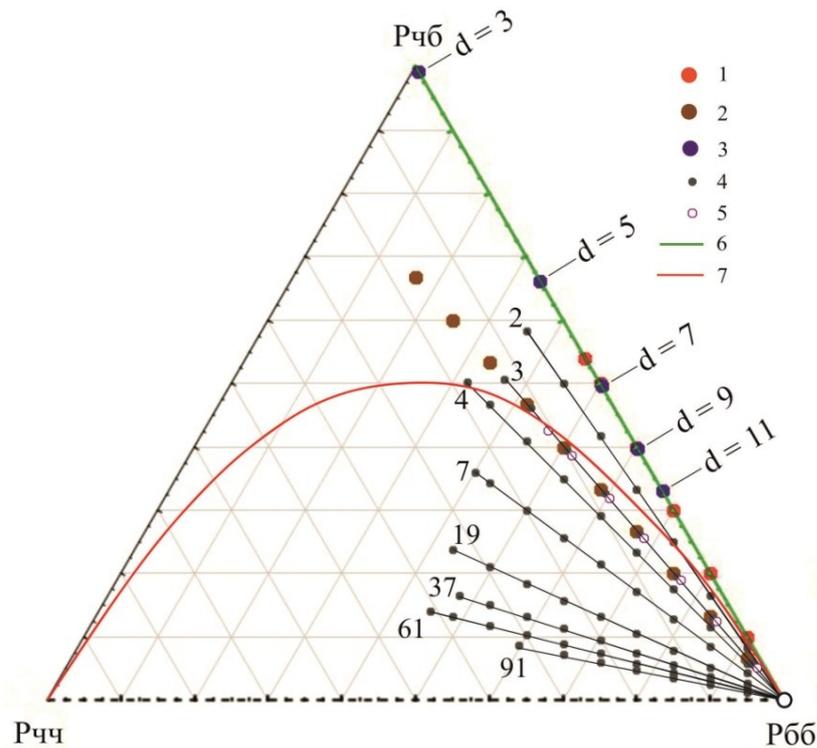


Рисунок 20 – Баричесентрическая диаграмма вероятностей ( $p_{ii}$ ,  $p_{jj}$ ,  $p_{ij}$ ). Цифрами на рисунке обозначены структуры и текстуры: 1 – вкрапленная, 2 – цепочечная, 3 – порфиоровые ( $d$  – относительный диаметр вкрапленника), 4 – шлировые (количество зерен в шлире указано числами), 5 – с ветвящимися кластерами, 6 – пойкилитовые; 7 – линия равновесия Харди–Вайнберга.

Модельные тренды закономерно заполняют баричесентрический треугольник, за исключением поля около вершины  $P_{чб}$  (рисунок 20). Это объясняется тем, что структура без мономинеральных контактов (идеальная «шахматная доска») невозможна, поскольку в плоском срезе отсутствуют куотернарные контакты. В связи с этим хотя бы один минерал в структуре образует мономинеральные контакты (например, во вкрапленных или пойкилитовых структурах). Чаще всего в реальных горных породах присутствуют мономинеральные контакты обоих видов. Для середины диаграммы ( $P_{бб} = P_{чч} = 0,5$ ) была оценена предельная точка для модельных трендов. Как видно из рисунка 20, максимальная длина тренда в поле диаграммы наблюдается для цепочечных структур, предельное значение  $p_{чб} = \frac{4k}{3}$  достигается при  $k = 0,5$ , таким образом  $p_{чб} = 0,667$ . Определение значений точек и формы предельной границы для всей диаграммы – сложная задача, и в этой работе не рассматривается.

Таким образом, в этом разделе показано моделирование структур и текстур на основе статистики бинарных межзерновых контактов в биминеральном агрегате. Показана сводная баричесентрическая диаграмма для моделей структур, значения вероятностей для которых

получены из расчетов по созданным моделям. Для выявления более строгих закономерностей выполнено моделирование классических типов структур и текстур на основе соотношений межзерновых контактов. Получена барицентрическая диаграмма с модельными трендами, и показана возможность моделирования любых структур и текстур при заданном виде кластера. Типовые структуры и текстуры закономерно заполняют правый угол диаграммы трендами, определяемыми видом кластера и его концентрацией (модальным составом агрегата). Левая часть диаграммы (рисунок 20) заполняется аналогичным образом при замене цвета (белые кластеры в черной матрице). Поскольку реальные горные породы не соответствуют приведенным выше примерам структур, их фигуративные точки должны занимать промежуточные положения между модельными трендами. Сопоставление точек минеральных агрегатов с модельными трендами позволит выявить различия между близкими структурами и определить соответствие реальных структур и текстур модельным трендам.

На диаграмме (рисунок 20) видно соотношение различных структур и текстур с равновесием Харди-Вайнберга, которое по своей сути выражает понятие «массивная текстура» с точки зрения равномерного распределения минеральных индивидов в агрегате (равновесие моно- и полиминеральных контактов). Из диаграммы следует, что ближе всего к линии равновесия расположены тренды пойкилитовых структур, а также цепочечных структур и шлировых текстур с небольшим числом зерен в кластере. Начинаясь вблизи вершины  $P_{66}$  диаграммы, эти структуры и текстуры на значительном протяжении следуют вблизи линии равновесия. Сразу от вершины резко отклоняются шлировые текстуры с большими кластерами, а также при движении к вершине  $P_{чб}$  неравновесными становятся пойкилитовые и порфиновые структуры, что объясняется резким увеличением числа черно-белых контактов в структуре.

### 2.1.2 Тернарные контакты

Как упоминалось ранее, в объеме породы три минерала контактируют по ребру, а контакт трех зерен в шлифе представляет собой точку. Соответствующая математическая теория для тернарных контактов разработана только для биминеральных агрегатов, хотя использование подобных контактов информативнее и целесообразнее, поскольку статистика бинарных выводится из них.

При наличии в агрегате двух минералов возможны 4 типа тернарных контактов:  $p_{111}$ ,  $p_{112}$ ,  $p_{122}$ ,  $p_{222}$  (рисунок 21), наглядно показать которые можно на барицентрической диаграмме в виде тетраэдра (Войтеховский и др., 2020-2). В минералогии подобная диаграмма используется для изображения смесимости компонентов для кальцитовых карбонатов (Григорьев, 1990).

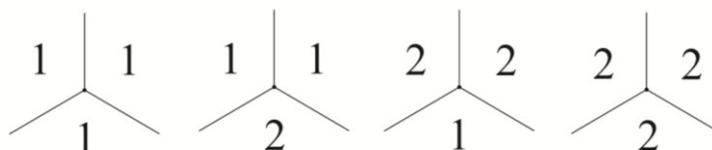


Рисунок 21 – Возможные типы тернарных контактов, цифрами обозначен минеральный вид.

Поскольку каждый тернарный контакт порождает несколько бинарных, легко находятся соотношения между этими типами контактов:

$$p_{11} = p_{111} + p_{112}/3, p_{22} = p_{222} + p_{122}/3, 2p_{12} = 2p_{112}/3 + 2p_{122}/3 \quad (7)$$

Линия равновесия Харди-Вайнберга в этом случае остается линией, как и для бинарных контактов, но она располагается в теле тетраэдра и не делит диаграмму на два поля, которые соответствуют типу структуры, как это происходит для бинарных контактов. Уравнение для линии равновесия выводится из общего уравнения:

$$(p_1 m_1 + \dots + p_n m_n)^3 = \sum p_{ijk} m_i m_j m_k = 1 \quad (8)$$

где  $m_i m_j m_k$  – тернарный контакт минеральных зерен вида  $i, j, k$ .

Для биминерального агрегата путем преобразований уравнения (8) получим:

$$p_{111} = p_1^3, p_{112} = 3p_1^2 p_2, p_{122} = 3p_1 p_2^2, p_{222} = p_2^3$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – относительное количество минерального вида в агрегате.

В таблице 5 приведены результаты расчетов. Тетраэдр визуализирован с помощью авторской программы на базе языка Python (рисунок 22).

Таблица 5 – Данные для построения линии Харди-Вайнберга.

p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	...	p <sub>111</sub>	p <sub>112</sub>	p <sub>122</sub>	p <sub>222</sub>
0,00	1,00	...	0,000	0,000	0,000	1,000
0,05	0,95	...	0,000	0,007	0,135	0,857
0,10	0,90	...	0,001	0,027	0,243	0,729
0,15	0,85	...	0,003	0,057	0,325	0,614
0,20	0,80	...	0,008	0,096	0,384	0,512
0,25	0,75	...	0,016	0,141	0,422	0,422
0,30	0,70	...	0,027	0,189	0,441	0,343
0,35	0,65	...	0,043	0,239	0,444	0,275
0,40	0,60	...	0,064	0,288	0,432	0,216
0,45	0,55	...	0,091	0,334	0,408	0,166
0,50	0,50	...	0,125	0,375	0,375	0,125
0,55	0,45	...	0,166	0,408	0,334	0,091
0,60	0,40	...	0,216	0,432	0,288	0,064
0,65	0,35	...	0,275	0,444	0,239	0,043
0,70	0,30	...	0,343	0,441	0,189	0,027
0,75	0,25	...	0,422	0,422	0,141	0,016
0,80	0,20	...	0,512	0,384	0,096	0,008
0,85	0,15	...	0,614	0,325	0,057	0,003
0,90	0,10	...	0,729	0,243	0,027	0,001
0,95	0,05	...	0,857	0,135	0,007	0,000
1,00	0,00	...	1,000	0,000	0,000	0,000

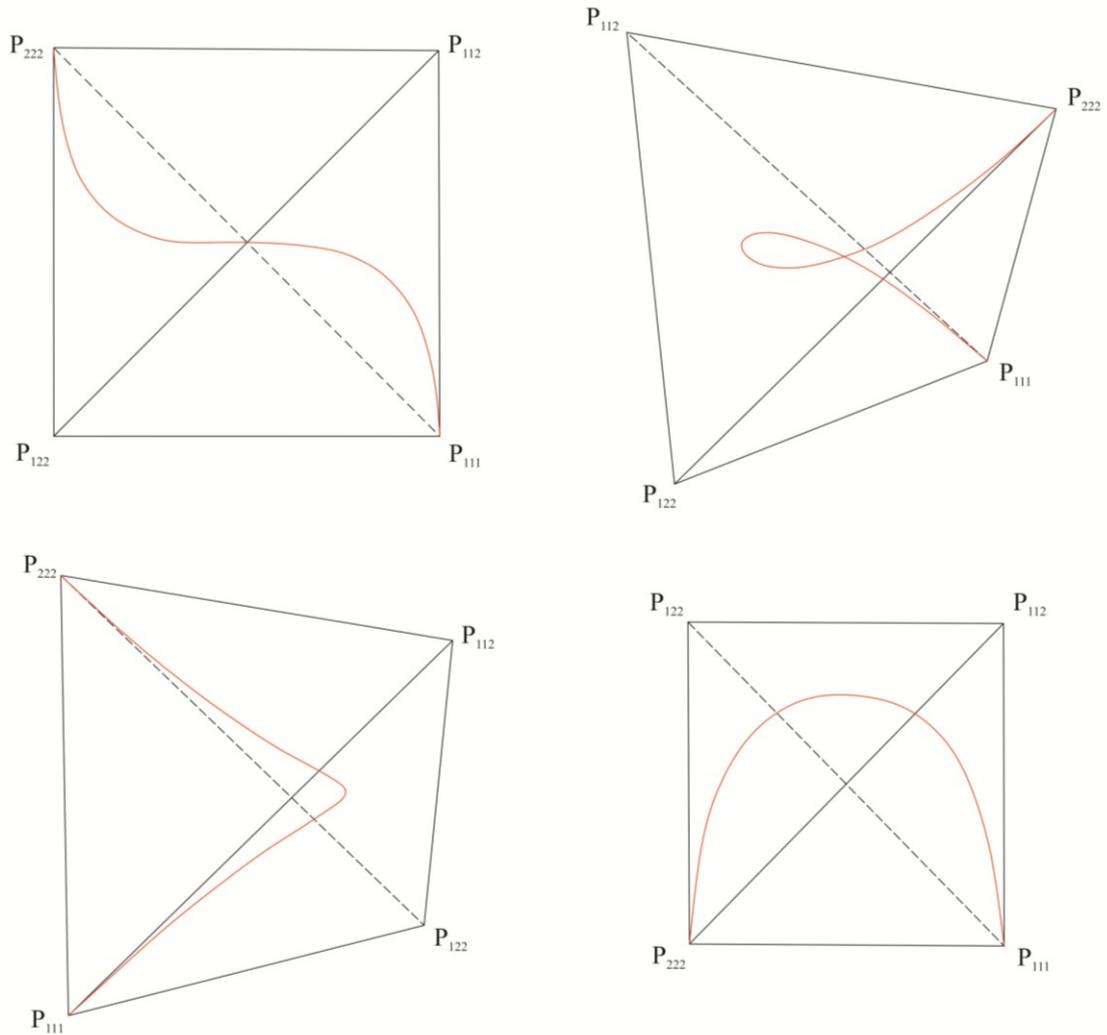


Рисунок 22 – Линия равновесия Харди-Вайнберга для тернарных контактов в биминеральных агрегатах (красный цвет, показаны разные проекции).

Для тернарных контактов линия равновесия не разбивает тетраэдр на 2 типа, как в барицентрическом треугольнике, поэтому на основе соотношений (7) построена классифицирующая поверхность. Подставим эти значения в уравнение линии равновесия для бинарных контактов в биминеральной породе  $p_{11}p_{22} = p_{12}^2$  (9):

$$\begin{aligned} (p_{111} + 1/3p_{112})(p_{222} + 1/3p_{122}) &= (1/3p_{112} + 1/3p_{122})^2 \rightarrow \\ (3p_{111} + p_{112})(p_{122} + 3p_{222}) &= (p_{112} + p_{122})^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Следы классифицирующей поверхности на гранях тетраэдра находятся методом сечений: обнуляется одна из вероятностей, а другая берется с некоторым шагом. Сумму двух оставшихся легко найти. Затем одна неизвестная вероятность выражается через другую и решается квадратное уравнение с одной неизвестной. Пример таблицы с расчетами показан на рисунке 23.

p111	p222	p112+p122	p112		p122		p112					
0	0,24	0,76	0,76-p122		решений нет		–		p111	p222	p122	p112
0	0,25	0,75	0,75-p122		p122 = 0		0,75		0	0,25	0	0,75
0	0,26	0,74	0,74-p122		p122 = 0,15		0,59		0	0,26	0,15	0,59
0	0,27	0,73	0,73-p122		p122 = 0,20		0,53		0	0,27	0,2	0,53
0	0,28	0,72	0,72-p122		p122 = 0,24		0,48		0	0,28	0,24	0,48
0	0,29	0,71	0,71-p122		p122 = 0,27		0,44		0	0,29	0,27	0,44
0	0,3	0,7	0,7-p122		p122 = 0,29		0,41		0	0,3	0,29	0,41

Рисунок 23 – Фрагмент таблицы Excel с расчетами вероятностей для построения классифицирующей поверхности.

На основании расчетов получено 175 точек и при помощи авторской программы построены следы классифицирующей поверхности на гранях тетраэдра (рисунок 24). Линия равновесия, построенная ранее, лежит в плоскости этой поверхности (Войтеховский и др., 2020-2, 2021-2).

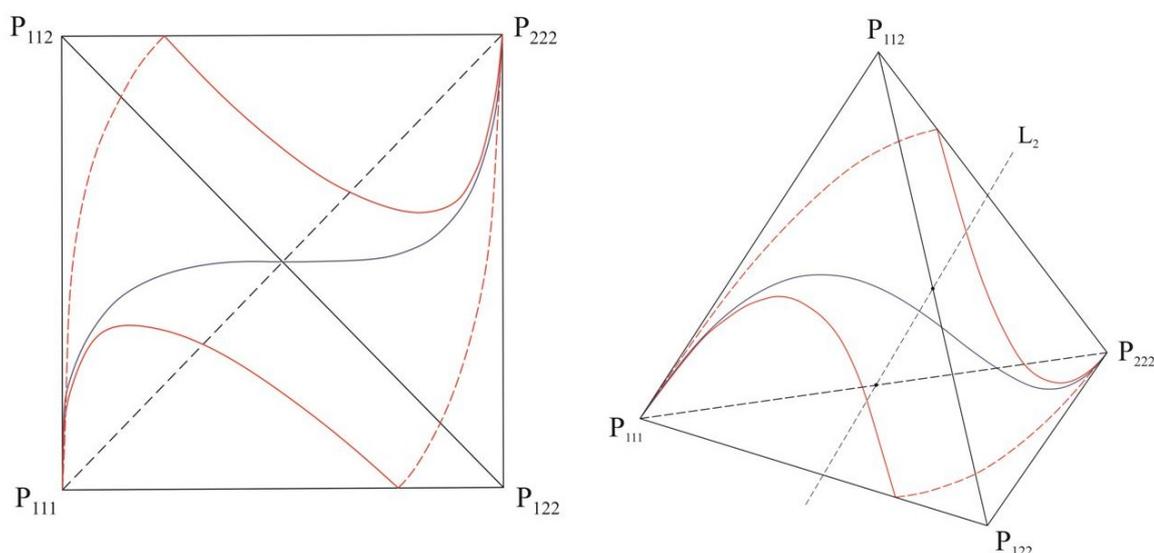


Рисунок 24 – Барицентрический тетраэдр во фронтальной и аксонометрической плоскостях.

Синим показана линия равновесия Харди-Вайнберга, красным – следы классифицирующей поверхности на гранях тетраэдра. Поверхность и линия равновесия симметричны относительно оси  $L_2$  тетраэдра (показана на проекции справа).

Таким образом, только для бинарных контактов в биминеральных агрегатах линия Харди-Вайнберга разделяет поля структурных типов. Во всех остальных случаях она означает лишь равновесие моно- и полиминеральных межзерновых контактов. Для любой барицентрической диаграммы (треугольника, тетраэдра или многомерного симплекса) можно построить классифицирующую поверхность, которая разбивает диаграмму на два поля, в которых равновесие контактов нарушается в ту или иную сторону.

Ранее выполнено моделирование классических структур и текстур для бинарных контактов с целью выявления закономерностей в их расположении на барицентрической

диаграмме. Аналогичное моделирование выполнено для тернарных контактов, поскольку они более информативны (Захарова и др., 2021-2). Основой послужили те же модели структур и текстур, что и для бинарных контактов (рисунки 14, 16-18), но в этом случае число контактов вычисляется на основе количества вершин, поскольку три зерна на плоскости контактируют в точке. Для начала получим общую формулу:  $3B = 2P, P = 3n \Rightarrow B = \frac{2}{3}P = 2n$ , где  $B$  – число вершин,  $P$  – число ребер,  $n$  – число минеральных зерен в шлифе.

### 1. Вкрапленные структуры.

Пусть  $n$  – всего зерен, тогда  $2n$  – общее число тернарных межзерновых контактов;  $kn$  – число черных зерен, где  $0 < k < 0,25$ . Максимальные значения  $k$  будут аналогичны бинарным контактам, так как этот коэффициент не зависит от способа подсчета. Тогда число тернарных контактов:  $N_{ччч} = 0, N_{ччб} = 0, N_{чбб} = 6kn, N_{ббб} = 2n - 6kn$ . Соответствующие вероятности:

$$p_{ччч} = 0, p_{ччб} = 0, p_{чбб} = \frac{6kn}{2n} = 3k, p_{ббб} = 1 - 3k.$$

Модельные тренды здесь и далее показаны на рисунке 27 (за исключением полосчатых текстур). Тренд вкрапленных структур в барицентрическом тетраэдре представляет собой линию и располагается на ребре  $p_{ббб}$ - $p_{чбб}$ .

### 2. Пойкилитовые структуры.

Пусть  $n$  – общее число зерен (ойкокристаллов),  $m$  – общее число вкрапленников (хадакристаллов). Общее число контактов –  $2n$ . Поскольку мы моделируем ситуацию, где вкрапленники не соприкасаются друг с другом, контактировать будут только белые зерна:  $N_{ччч} = 0, N_{ччб} = 0, N_{чбб} = 0, N_{ббб} = 2n$ . Таким образом, тренд пойкилитовых структур в барицентрическом тетраэдре выглядит как точка ( $p_{ббб} = 1$ , остальные значения вероятностей равны нулю, рисунок 27).

### 3. Цепочечные структуры.

Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $2n$  – общее число межзерновых контактов. Пусть  $kn$  – число черных зерен, соединенных в цепочки, где  $0 < k < 0,5$ . Тогда  $N_{ччч} = 0, N_{ччб} = 2(kn-1), N_{чбб} = 2kn, N_{ббб} = 2n - 2(kn-1) - 2kn$ .

Соответствующие вероятности:  $p_{ччч} = 0, p_{ччб} = \frac{2(kn-1)}{2n} = \frac{kn-1}{n} = k - \frac{1}{n} \approx k$  (при  $n \rightarrow +\infty$   $\frac{1}{n} \rightarrow 0, p_{чбб} = \frac{2kn}{2n} = k, p_{ббб} = 1 - 2k$ . Тренд цепочечных структур расположен на грани тетраэдра (рисунок 27).

#### 4. Полосчатые текстуры.

Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $2n$  – общее число межзерновых контактов. Пусть  $kn$  – число черных зерен, соединенных в полосы,  $0 < k < 0,5$ . Пусть  $m$  – число зерен в одной линии,  $t$  – число линий в одной полосе. Расчет количества контактов «ччч» внутри полос приведен в таблице 6.

Таблица 6 – Расчет  $N_{ччч}$  для одной полосы.

2	3	4	5	...	t
2m	4m	6m	8m	...	(2t-2)m

Количество полос в структуре будет равно частному от деления общего числа черных зерен, соединенных в полосы, на число зерен в одной полосе:  $\frac{kn}{tm}$ . Тогда число контактов:  $N_{ччч} = \frac{kn*(2t-2)m}{tm} = \frac{kn(2t-2)}{t} = \frac{2kn(t-1)}{t}$ ;  $N_{ччб} = \frac{2m*kn}{tm} = \frac{2kn}{t}$ ;  $N_{чбб} = \frac{2m*kn}{tm} = \frac{2kn}{t}$ ;  $N_{ббб} = 2n - \frac{2kn(t-1)}{t} - \frac{4kn}{t}$ .  
 Найдем соответствующие вероятности:  $p_{ччч} = \frac{2kn(t-1)}{t*2n} = \frac{k(t-1)}{t}$ ;  $p_{ччб} = p_{чбб} = \frac{2kn}{t*2n} = \frac{k}{t}$ ;  $p_{ббб} = 1 - \frac{k(t-1)}{t} - \frac{2k}{t}$ . Тренды полосчатых текстур расположены в теле тетраэдра (в отличие от цепочечных структур) веерообразно, как и в случае бинарных контактов (рисунок 25).

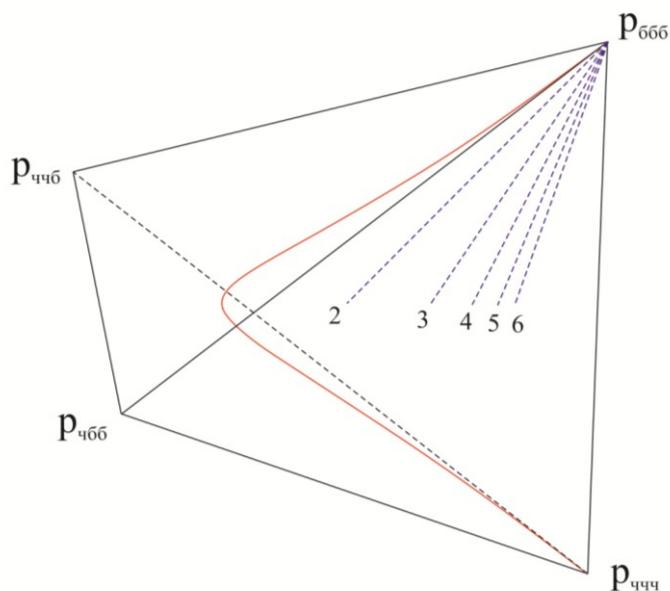


Рисунок 25 – Барицентрический тетраэдр с нанесенными трендами полосчатых текстур. Цифра обозначает число линий в одной полосе ( $t$ ), красным показана линия равновесия Харди-Вайнберга.

## 5. Структуры с ветвящимися кластерами.

Важная особенность таких структур при расчетах на основе тернарных контактов – зависимость получаемых вероятностей от числа зерен в кластере. Это объясняется появлением двух различных полиминеральных контактов и зависимостью  $N_{\text{ччч}}$  от числа кластеров. На основе этой зависимости выводится общая формула. Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $2n$  – общее число межзерновых контактов;  $kn$  – число черных зерен, соединенных в кластеры,  $t$  – число зерен в кластере. Число кластеров в таком случае будет равно  $\frac{kn}{t}$ . Число тернарных контактов:  $N_{\text{ччч}} = \frac{kn}{t}$ ,  $N_{\text{ччб}} = (2t - 3) \cdot \frac{kn}{t}$ ,  $N_{\text{чбб}} = (2t + 3) \cdot \frac{kn}{t}$ ,  $N_{\text{ббб}} = 2n - (N_{\text{ччч}} + N_{\text{ччб}} + N_{\text{чбб}})$ .

Соответствующие вероятности:  $p_{\text{ччч}} = \frac{k}{2t}$ ,  $p_{\text{ччб}} = \frac{k(2t-3)}{2t}$ ,  $p_{\text{чбб}} = \frac{k(2t+3)}{2t}$ ,  $p_{\text{ббб}} = 1 - (\frac{k}{2t} + \frac{k(2t-3)}{2t} + \frac{k(2t+3)}{2t}) = 1 - \frac{k(1+4t)}{2t}$ . Тренды этих структур закономерно расположены в теле тетраэдра (рисунок 27).

## 6. Шлировые текстуры.

Моделирование шлировых текстур покажем на примере изометричных кластеров из 7 зерен. Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $2n$  – общее число межзерновых контактов;  $kn$  – число черных зерен, объединенных в шлиры, число шлиров в объеме породы –  $\frac{kn}{7}$ . Число контактов:  $N_{\text{ччч}} = \frac{6kn}{7}$ ,  $N_{\text{ччб}} = \frac{6kn}{7}$ ,  $N_{\text{чбб}} = \frac{12kn}{7}$ ,  $N_{\text{ббб}} = 2n - \frac{24kn}{7}$ . Вероятности контактирования:  $p_{\text{ччч}} = \frac{3k}{7}$ ,  $p_{\text{ччб}} = \frac{3k}{7}$ ,  $p_{\text{чбб}} = \frac{6k}{7}$ ,  $p_{\text{ббб}} = 1 - \frac{12k}{7}$ . Аналогично рассчитываются значения и для шлиров другого размера (таблица 7). Тренды шлировых текстур веерообразно расположены в теле тетраэдра, за исключением тренда для кластеров из двух зерен, который расположен на грани (рисунок 27).

Таблица 7 – Расчеты вероятностей для разного числа зерен в шлире.

Число зерен в шлире	Число шлиров	$N_{\text{ччч}}$	$N_{\text{ччб}}$	$N_{\text{чбб}}$	$N_{\text{ббб}}$	$p_{\text{ччч}}$	$p_{\text{ччб}}$	$p_{\text{чбб}}$	$p_{\text{ббб}}$	$k_{\text{max}}$
2	$\frac{kn}{2}$	0	$kn$	$4kn$	$2n - 5kn$	0	$\frac{k}{2}$	$2k$	$\frac{5k}{1 - \frac{2}{2}}$	0,35
3	$\frac{kn}{3}$	$\frac{kn}{3}$	$kn$	$3kn$	$2n - \frac{kn}{3} - 4kn$	$\frac{k}{6}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{3k}{2}$	$\frac{1}{1 - \frac{13k}{6}}$	0,38

Продолжение таблицы 7

4	$\frac{kn}{4}$	$\frac{kn}{2}$	kn	$\frac{5kn}{2}$	$2n - 4kn$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{5k}{4}$	$1 - 2k$	0,43
7	$\frac{kn}{7}$	$\frac{6kn}{7}$	$\frac{6kn}{7}$	$\frac{12kn}{7}$	$2n - \frac{24kn}{7}$	$\frac{3k}{7}$	$\frac{3k}{7}$	$\frac{6k}{7}$	$1 - \frac{12k}{7}$	0,42
19	$\frac{kn}{19}$	$\frac{24kn}{19}$	$\frac{12kn}{19}$	$\frac{18kn}{19}$	$2n - \frac{54kn}{19}$	$\frac{12k}{19}$	$\frac{6k}{19}$	$\frac{9k}{19}$	$1 - \frac{27k}{19}$	0,45
37	$\frac{kn}{37}$	$\frac{54kn}{37}$	$\frac{18kn}{37}$	$\frac{24kn}{37}$	$2n - \frac{96kn}{37}$	$\frac{27k}{37}$	$\frac{9k}{37}$	$\frac{12k}{37}$	$1 - \frac{48k}{37}$	0,44
61	$\frac{kn}{61}$	$\frac{96kn}{61}$	$\frac{24kn}{61}$	$\frac{30kn}{61}$	$2n - \frac{150kn}{61}$	$\frac{48k}{61}$	$\frac{12k}{61}$	$\frac{15k}{61}$	$1 - \frac{75k}{61}$	0,48
91	$\frac{kn}{91}$	$\frac{150kn}{91}$	$\frac{30kn}{91}$	$\frac{36kn}{91}$	$2n - \frac{216kn}{91}$	$\frac{75k}{91}$	$\frac{15k}{91}$	$\frac{18k}{91}$	$1 - \frac{108k}{91}$	0,36

### 7. Порфиновые структуры.

Моделирование подобных структур, как и в случае бинарных контактов, основано на рассмотрении вкрапленников в виде шлиров, у которых стерты внутренние границы. Основываясь на предыдущем случае, получим необходимые характеристики шлиров (таблица 8).

Таблица 8 – Сводная характеристика модельных шлиров.

d	3	5	7	9	11
n(d)	7	19	37	61	91
v(d)	6	24	54	96	150

Продолжение таблицы 8

p(d)	6	12	18	24	30
m(d)	12	18	24	30	36
$\Sigma$	12	36	72	120	180

Условные обозначения:  $d$  – диаметр шлира (единичное зерно в структуре принято за 1),  $n(d)$  – число зерен в шлире,  $v(d)$  – число внутренних границ ( $N_{\text{ччч}}$ ),  $p(d) = 3d-3$  – число контактов  $N_{\text{ччб}}$ ,  $m(d) = 3d+3$  – число контактов  $N_{\text{ббб}}$ ,  $\Sigma = N_{\text{ччч}} + N_{\text{ччб}} = 2n(d)$ .

Пусть  $n$  – общее число зерен, тогда  $2n$  – общее число межзерновых контактов. Пусть  $kn$  – число черных зерен, собранных в шлиры диаметра  $d$ , тогда  $2kn$  – число контактов во всех шлирах. Число зерен в шлире  $n(d) \approx \frac{\pi d^2}{4}$ . Число шлиров в структуре:  $\frac{kn}{n(d)} = \frac{4kn}{\pi d^2}$ . Чтобы превратить шлиры во вкрапленники, нужно стереть внутренние границы. Тогда  $N_{\text{ччч}} = 0$ ,  $N_{\text{ччб}} = 0$ . Количество  $N_{\text{ббб}}$  равно произведению числа контактов «чбб» в одном шлире на число шлиров в структуре, поскольку при стирании внутренних границ число контактов «чбб» остается прежним. Таким образом,  $N_{\text{ббб}} = \frac{(3d+3) \cdot 4kn}{\pi d^2} = \frac{12kn(d+1)}{\pi d^2}$ . Число границ «ббб» будет равно разности общего числа контактов ( $2n$ ) и общего числа контактов в шлирах ( $2kn$ ). Но согласно таблице 8 в  $2kn$  входит только  $N_{\text{ччч}}$  и  $N_{\text{ччб}}$ , значит, необходимо дополнительно вычесть  $N_{\text{чбб}}$ . Следовательно,  $N_{\text{ббб}} = 2n - 2kn - \frac{12kn(d+1)}{\pi d^2} = 2n(1-k) - \frac{12kn(d+1)}{\pi d^2}$ . Тогда  $N_{\text{общ}} = N_{\text{чбб}} + N_{\text{ббб}} = 2n(1-k)$ . Соответствующие вероятности:  $p_{\text{ччч}} = 0$ ,  $p_{\text{ччб}} = 0$ ,  $p_{\text{чбб}} = \frac{12kn(d+1)}{\pi d^2 \cdot 2n(1-k)} = \frac{6k(d+1)}{\pi d^2 \cdot (1-k)}$ ,  $p_{\text{ббб}} = 1 - p_{\text{чбб}}$ . Поскольку для модельных трендов должно выполняться условие  $p_{\text{чбб}} < 1$  (по смыслу вероятности), предельное значение  $k$  вычисляется на основе соотношения  $k < \frac{\pi d^2}{6d+6+\pi d^2}$  (таблица 9).

Таблица 9 – Предельные значения  $k$  для разного диаметра вкрапленника.

d	3	5	7	9	11
$k_{\text{max}}$	0,541	0,686	0,762	0,809	0,841

Тренды порфириковых структур закономерно расположены на ребре  $\mathbf{p_{ббб}-p_{чбб}}$ . Для удобства сравнения на рисунке приведены точки для  $k = 0,5$  (рисунок 27).

Таким образом, для тернарных контактов фигуративные точки модельных трендов закономерно заполняют тетраэдр (аналогично барицентрическому треугольнику), но запрещенных областей здесь уже больше (рисунок 26). Пустыми останутся грани, где один из полиминеральных контактов равен нулю ( $p_{666}$ ,  $p_{ччч}$ ,  $p_{ччб}$  и  $p_{666}$ ,  $p_{ччч}$ ,  $p_{чбб}$ ). Это объясняется тем, что при наличии мономинеральных и одного из полиминеральных контактов другой в породе появляется автоматически. Все четыре вершины тетраэдра разрешены, из ребер тетраэдра разрешенными будут три:  $p_{чбб} - p_{666}$ ,  $p_{ччб} - p_{ччч}$ ,  $p_{чбб} - p_{ччб}$ , в остальных случаях порода перестает существовать.

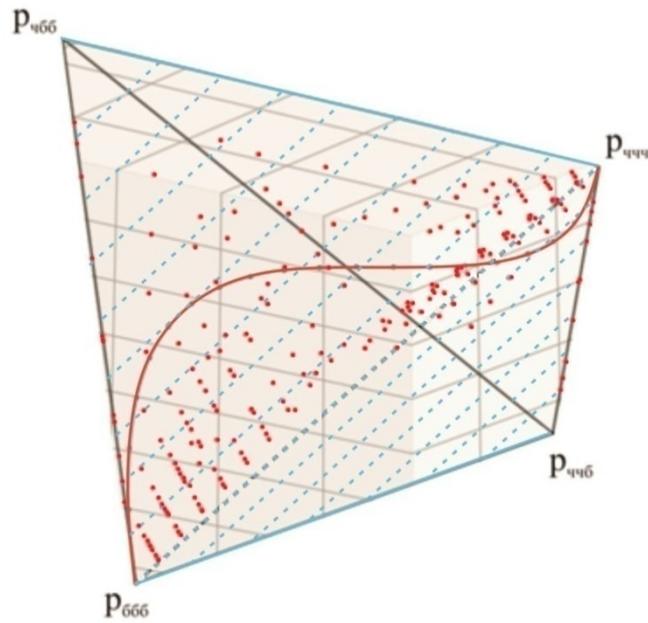


Рисунок 26 – Барицентрический тетраэдр со всеми фигуративными точками (показаны красным). Красным цветом также обозначена линия равновесия Харди-Вайнберга. Голубым цветом показаны запрещенные области.

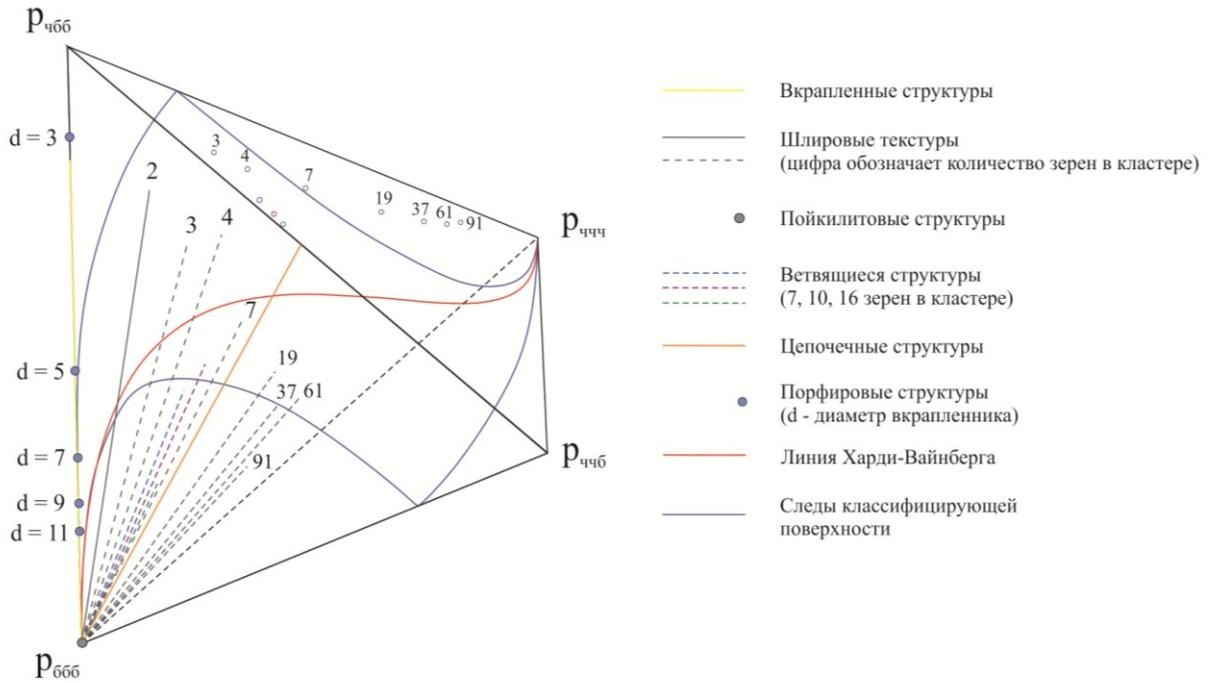


Рисунок 27 – Барицентрическая диаграмма вероятностей ( $p_{iii}$ ,  $p_{ijj}$ ,  $p_{jjj}$ ,  $p_{jjj}$ ) со всеми построенными трендами. Сплошные тренды расположены на ребре или грани тетраэдра, штриховые – в теле тетраэдра.

Перейдем к построению структурных индикатрис для тернарных контактов. В основе него лежит классификация Ньютона кривых 3-го порядка на плоскости (Савелов, 2002) и алгебраическая теория для уравнений третьей степени (Манин, 1972). Аналитическим путем впервые получены индикатрисы для тернарных контактов (рисунок 28). Структурные индикатрисы в этом случае задаются общим уравнением (10) (Войтеховский и др., 2021-1)

$$\sum p_{ijk} m_i m_j m_k = 1 \quad (10)$$

где  $i, j, k = 1, 2$ .

Общее уравнение записывается в ином виде:

$$p_{111} m_1^3 + p_{112} m_1^2 m_2 + p_{122} m_1 m_2^2 + p_{222} m_2^3 = 1 \quad (11)$$

Ниже приведены примеры расчетов для получения типов структурных индикатрис. Отметим, что индикатрисы для точек тетраэдра, симметричных относительно  $L_2$ , будут симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов в координатах ( $m_1$ ,  $m_2$ ).

- 1) Вершина  $p_{111}$  (аналогично для  $p_{222}$ ):  $p_{111} = 1, m_1^3 = 1 \forall m_2 \Rightarrow m_1 = 1 \forall m_2$ .
- 2) Вершина  $p_{112}$  (аналогично для  $p_{122}$ ):  $p_{112} = 1, m_1^2 m_2 = 1, m_2 = \frac{1}{m_1^2}, m_1 \neq 0$ .

Берем производную:  $m'_2 = -\frac{2}{m_1^3} \geq 0$  при  $m_1 \leq 0$ . При  $m_1 \rightarrow 0$   $m_2 \rightarrow +\infty$ ; при  $m_1 \rightarrow \pm\infty$   $m_2 \rightarrow 0$ . Асимптоты – координатные оси  $m_1$  и  $m_2$ .

Для наглядности также приведены примеры структур минеральных агрегатов для разных областей диаграммы (рисунок 29).

Для визуализации структурных индикатрис также разработана авторская программа, которая позволяет получать тип индикатрисы на основе заданных значений вероятностей, что можно использовать для применения предлагаемого статистического подхода на практике (рисунок 28). Принцип работы программы заключается в непосредственном построении структурной индикатрисы по точкам в координатах  $(m_1; m_2)$ : исходные значения вероятностей подставляются в уравнение (11), затем для каждого значения  $m_1$  в диапазоне  $[-10; 10]$  решается уравнение относительно  $m_2$ , например: пусть  $p_{111} = 0,1$ ;  $p_{112} = 0,8$ ;  $p_{122} = 0,1$ ;  $p_{222} = 0$ ;  $m_1 = -10$ . Подставляем:

$$0,1 * (-10^3) + (0,8 * -10^2) * m_2 + 0,1 * (-10) * m_2^2 - 1 = 0;$$

$$-100 + 80m_2 - m_2^2 - 1 = 0; m_2^2 - 80m_2 + 101 = 0; m_2 = 1,28; m_2 = 78,72.$$

С помощью аналогичной программы исследованы точки внутри тетраэдра и получены структурные индикатрисы: два типа, которые уже были встречены ранее, меняют свою форму в зависимости от заданных значений и также плавно переходят один в другой (примеры структурных индикатрис и граница между типами показаны на рисунке 30).

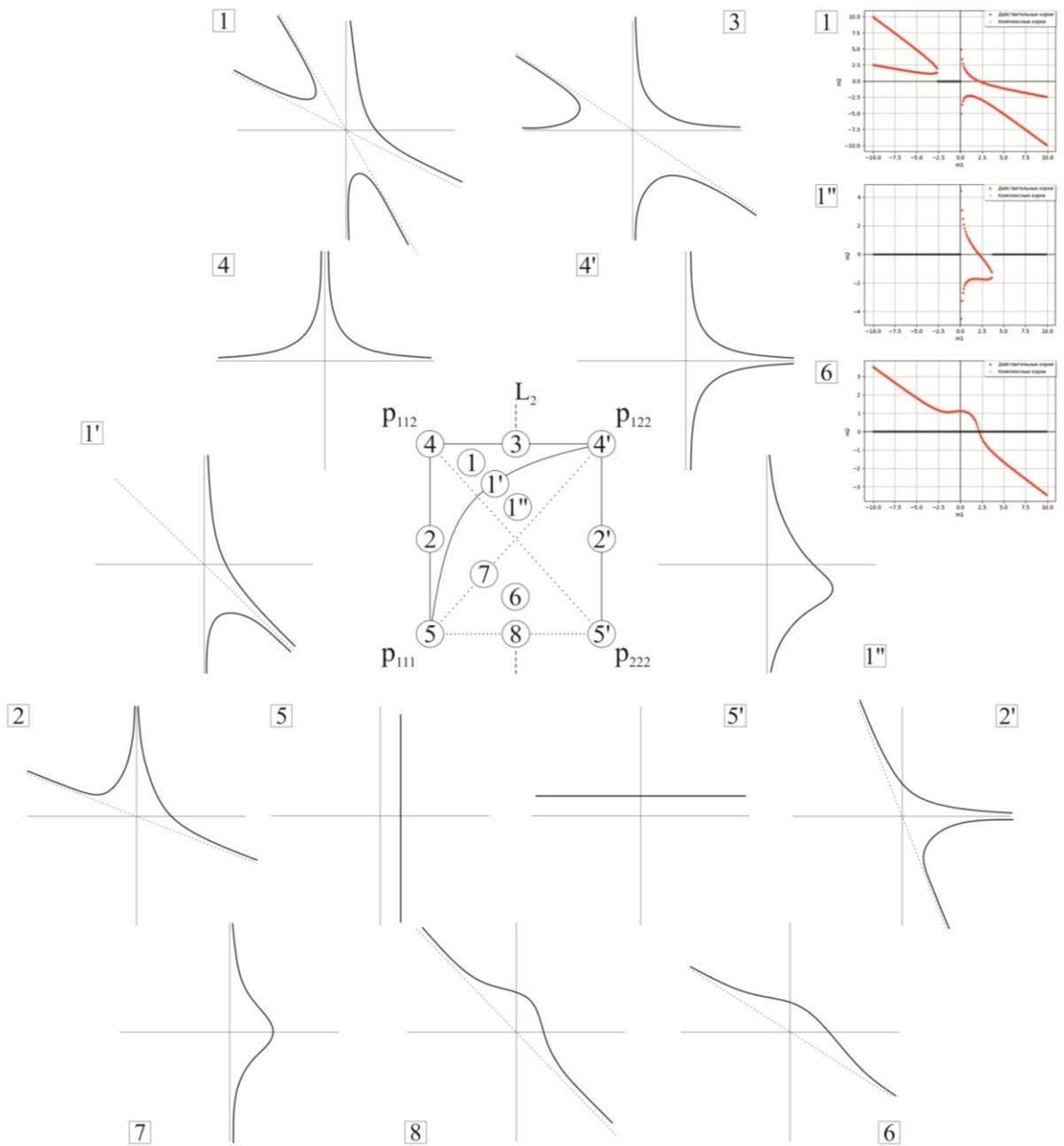


Рисунок 28 – Барицентрический тетраэдр вероятностей  $\{p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}\}$  и возможные типы структурных индикатрис для его вершин, ребер и граней. Справа наверху показаны результаты построений в программе.

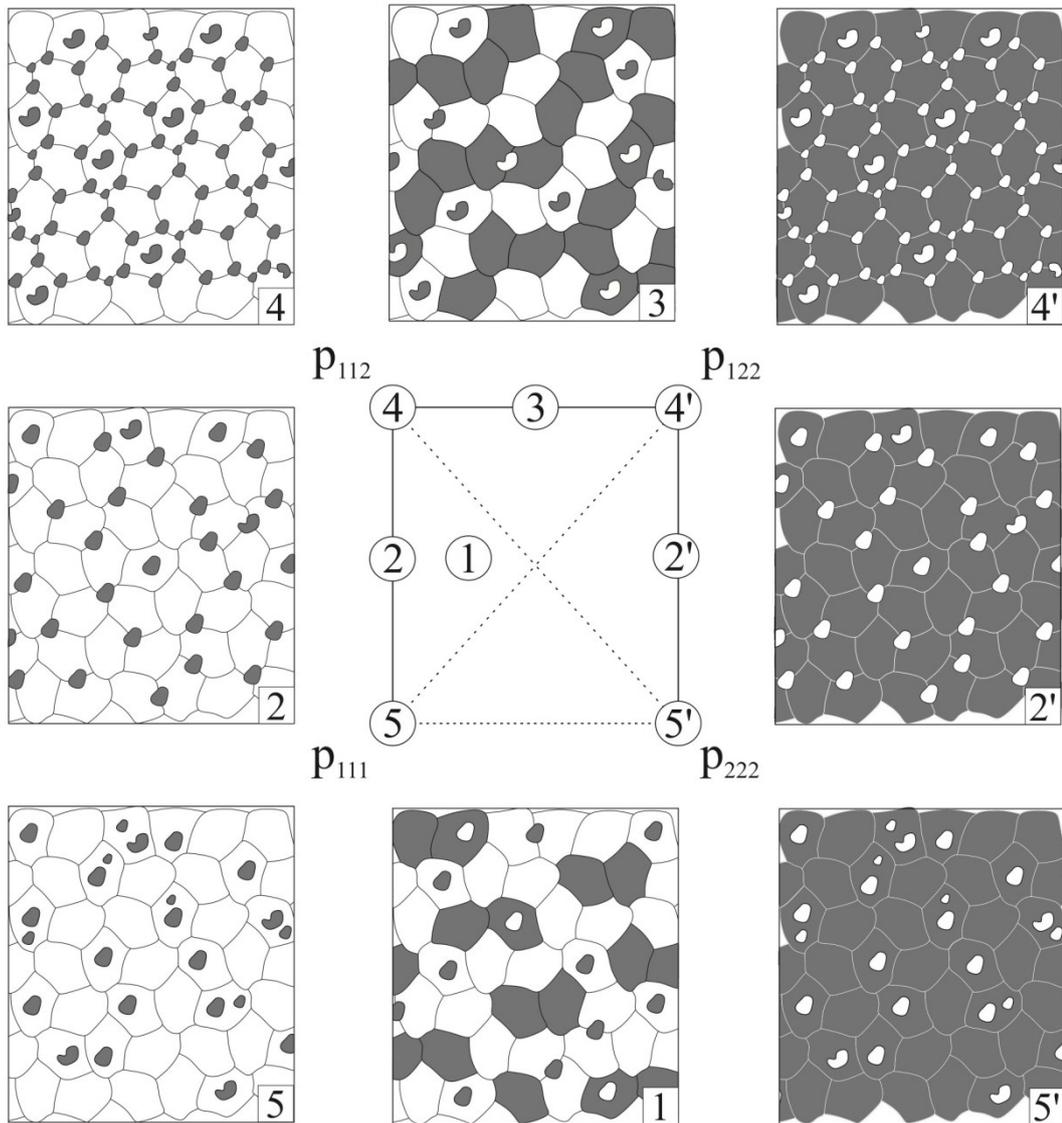


Рисунок 29 – Модели структур биминеральных агрегатов для разных областей барицентрического тетраэдра. Состояния  $p_{112} = 0$  (без ребра  $p_{122} + p_{222} = 1$ ) и  $p_{122} = 0$  (без ребра  $p_{112} + p_{111} = 1$ ) в минеральных агрегатах невозможны. Обозначения соответствуют рисунку 28.

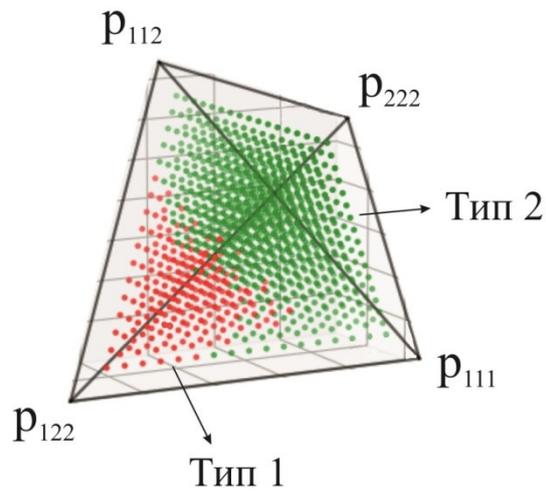
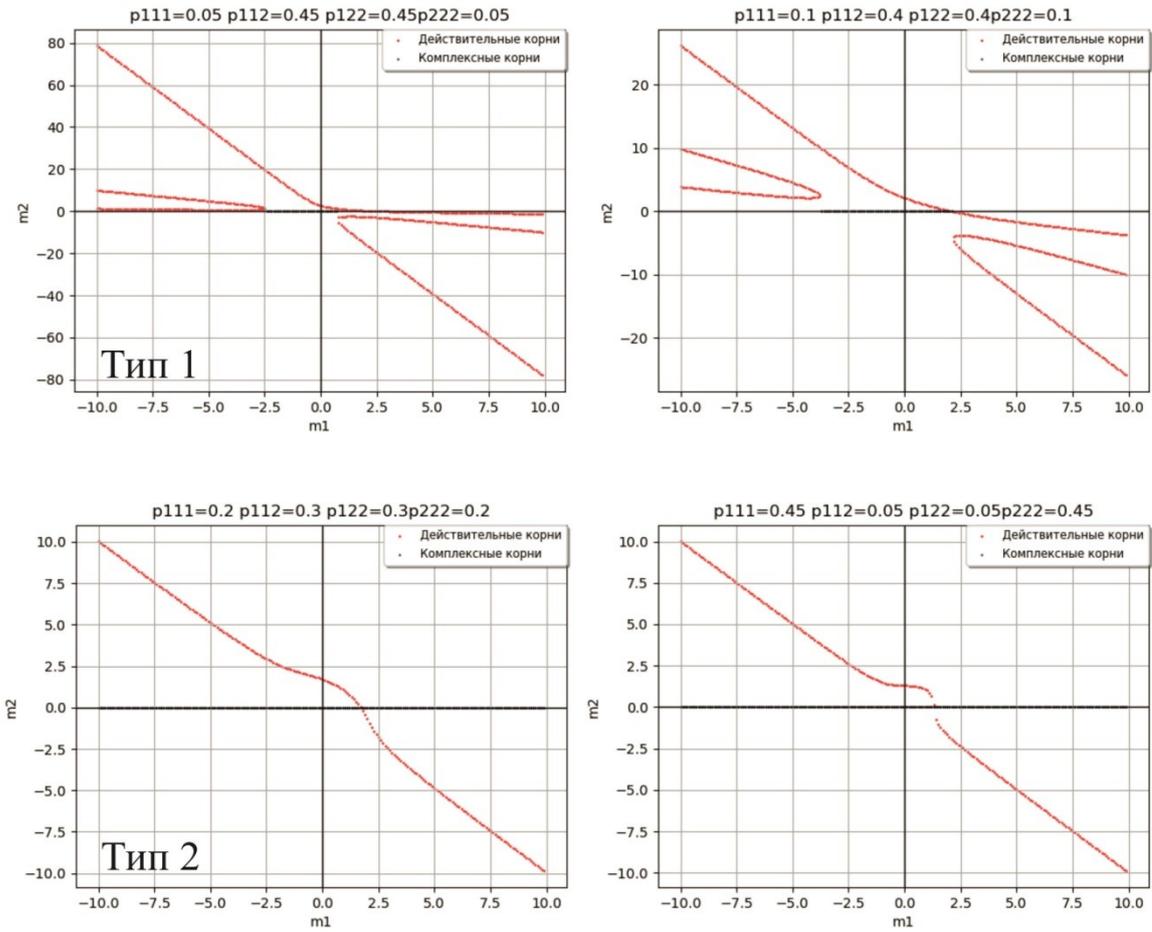


Рисунок 30 – Возможные типы структурных индикатрис для точек внутри барицентрического тетраэдра. Внизу показана граница перехода между 2 типами.

## 2.2 Триминеральные агрегаты

При рассмотрении методологии типизации структур (глава 1) говорилось о том, что ее можно применять для любого числа минералов в агрегате. Посчитать статистику бинарных межзерновых контактов и найти диагональную форму полученной матрицы можно даже для большого числа минералов. Типизация структур для любого числа минералов основана на диагональной форме матрицы вероятностей (глава 1). Основная проблема для полиминеральных агрегатов – визуализация барицентрических диаграмм, поскольку в этом случае они расположены в многомерном пространстве.

Далее рассмотрен простейший случай – триминеральные агрегаты. Моделирование выполнено на основе бинарных контактов, поскольку для тернарных отсутствует математический аппарат. Для трех минералов возможны три типа структур (рисунок 31, модели созданы на основе шаблона, описанного в первой части этой главы). Соответствующие матрицы вероятностей приведены в таблице 10.

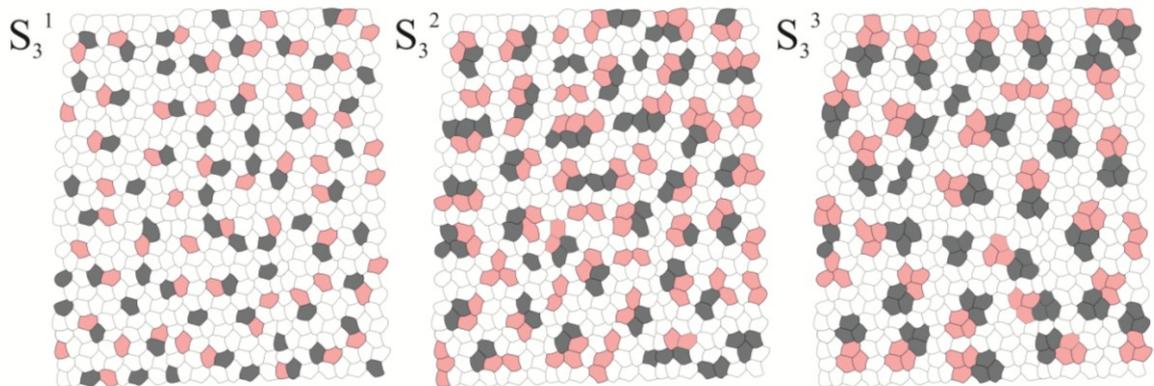


Рисунок 31 – Модели трех возможных структурных типов для триминеральных агрегатов.

Таблица 10 – Расчеты для моделей структурных типов (по рисунку 31).

Шаблон матрицы	Матрица вероятностей	Диагональная форма	Структурный тип
$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12/2} & p_{13/2} \\ p_{12/2} & p_{22} & p_{23/2} \\ p_{13/2} & p_{23/2} & p_{33} \end{bmatrix}$ где 1 – белый, 2 – серый, 3- розовый	$\begin{bmatrix} 0,58 & 0,11 & 0,09 \\ 0,11 & 0 & 0,01 \\ 0,09 & 0,01 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
	$\begin{bmatrix} 0,41 & 0,09 & 0,13 \\ 0,09 & 0,03 & 0,04 \\ 0,13 & 0,04 & 0,04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
	$\begin{bmatrix} 0,46 & 0,09 & 0,09 \\ 0,09 & 0,06 & 0,03 \\ 0,09 & 0,03 & 0,06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^3$

Для бинарных контактов в биминеральных агрегатах барицентрическая диаграмма – треугольник ( $r_{ii}$ ,  $r_{ij}$ ,  $r_{jj}$ ), где поля структурных типов разделены линией равновесия Харди-Вайнберга. Для тернарных контактов линия равновесия уже не служит разделительной границей между структурными типами, т. к. в этом случае диаграмма – барицентрический тетраэдр ( $r_{iii}$ ,  $r_{ijj}$ ,  $r_{iij}$ ,  $r_{jjj}$ ) в трехмерном пространстве.

При переходе к трем минералам число типов контактов увеличивается до 6:  $r_{111}$ ,  $r_{222}$ ,  $r_{333}$ ,  $r_{112}$ ,  $r_{122}$ ,  $r_{233}$ . Барицентрическая диаграмма для триминеральных агрегатов – 6-вершинный симплекс в 5-мерном пространстве. Равновесие Харди-Вайнберга в этом случае представляет собой поверхность, и возникает задача ее визуализации, а также нахождения границ между различными типами структур. Дальнейшее увеличение числа минералов ещё больше усложняет визуализацию и нами не рассматривается. В этом разделе с помощью авторских программ впервые получены проекции поверхности равновесия Харди-Вайнберга для триминеральных агрегатов. Полученные проекции сопоставлены с полями структурных типов.

На границе Харди-Вайнберга наблюдается равновесие моно- и полиминеральных контактов в агрегате. В статистическом смысле это «массивная текстура» как идеальное перемешивание минералов в горной породе (с определенным значением доверительной вероятности). Для триминеральных агрегатов граница – 5-мерная поверхность. Она делит симплекс на области с отклонением от равновесия в сторону моно- или полиминеральных контактов, но не разделяет поля структурных типов, что будет показано далее. Построение поверхности равновесия основано на авторском алгоритме (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021612125, 2021).

Поскольку представить пятимерный симплекс целиком невозможно, предложено использовать трехмерные грани этого симплекса – тетраэдры. Для их построения каждый раз исключаются два типа контактов, что позволяет найти проекцию исходной поверхности на трехмерные грани. Число сочетаний из 6 по 2 находится с помощью биномиального коэффициента:  $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ . В таблице 11 показаны все возможные варианты пар контактов. Некоторые типы контактов взаимозаменяемы путем мысленного превращения одного минерала в другой, поэтому желтым цветом выделены 15 сочетаний, которые послужили основой для построения поверхностей.

Таблица 11 – Сводная таблица пар контактов с заменами минералов 1, 2 и 3. Желтым цветом выделены уникальные пары контактов.

	Замена 1↔2	2↔3	1↔3	Круговая замена 1↔2↔3
<b>p<sub>11</sub>–p<sub>12</sub></b>	<b>p<sub>22</sub>–p<sub>12</sub></b>	<b>p<sub>11</sub>–p<sub>13</sub></b>	<b>p<sub>33</sub>–p<sub>23</sub></b>	<b>p<sub>22</sub>–p<sub>23</sub>, p<sub>33</sub>–p<sub>13</sub></b>
<b>p<sub>11</sub>–p<sub>22</sub></b>	p <sub>22</sub> –p <sub>11</sub>	<b>p<sub>11</sub>–p<sub>33</sub></b>	<b>p<sub>33</sub>–p<sub>22</sub></b>	p <sub>22</sub> –p <sub>33</sub> , p <sub>33</sub> –p <sub>11</sub>
<b>p<sub>11</sub>–p<sub>23</sub></b>	<b>p<sub>22</sub>–p<sub>13</sub></b>	p <sub>11</sub> –p <sub>23</sub>	<b>p<sub>33</sub>–p<sub>12</sub></b>	p <sub>22</sub> –p <sub>13</sub> , p <sub>33</sub> –p <sub>12</sub>
<b>p<sub>12</sub>–p<sub>13</sub></b>	<b>p<sub>12</sub>–p<sub>23</sub></b>	p <sub>13</sub> –p <sub>12</sub>	<b>p<sub>23</sub>–p<sub>13</sub></b>	p <sub>23</sub> –p <sub>12</sub> , p <sub>13</sub> –p <sub>23</sub>

На основе заданного алгоритма программа строит поверхности автоматически. Исходные данные – значения на треугольнике вероятностей ( $p_1, p_2, p_3$ ), обозначающие встречаемость минерала в агрегате. Данные по треугольной сетке программа считывает в зависимости от шага, заданного оператором (0,01-0,5). Затем находятся вероятности контактирования минеральных зерен для всех точек:  $p_{11} = p_1^2$ ,  $p_{22} = p_2^2$ ,  $p_{33} = p_3^2$ ,  $p_{12} = p_1 p_2$ ,  $p_{13} = p_1 p_3$ ,  $p_{23} = p_2 p_3$ . Для каждого тетраэдра необходимо найти сумму отсутствующих контактов и вычесть ее из единицы. Для приведения оставшихся четырех вероятностей к единице необходимо рассчитать коэффициент  $K = \frac{1}{1-\Sigma}$ . Далее для каждого случая берутся уже рассчитанные значения вероятностей, умножаются на  $K$  и с помощью векторного умножения соответствующие точки ставятся внутри тетраэдра. Наглядно алгоритм расчетов представлен в таблице 12, полученные поверхности – на рисунке 32.

Таблица 12 – Фрагмент таблицы расчетов поверхностей (шаг сетки 0,1; отсутствуют контакты p<sub>11</sub>-p<sub>22</sub>).

p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	p <sub>3</sub>	p <sub>11</sub>	p <sub>22</sub>	p <sub>33</sub>	p <sub>12</sub>	p <sub>13</sub>	p <sub>23</sub>	Σp <sub>11</sub> +p <sub>22</sub>	1-Σ	коэффициент	p <sub>12</sub>	p <sub>13</sub>	p <sub>23</sub>	p <sub>33</sub>
0,8	0,1	0,1	0,64	0,01	0,01	0,16	0,16	0,02	0,65	0,35	2,86	0,46	0,46	0,06	0,03
0,7	0,1	0,2	0,49	0,01	0,04	0,14	0,28	0,04	0,5	0,5	2,00	0,28	0,56	0,08	0,08
0,6	0,1	0,3	0,36	0,01	0,09	0,12	0,36	0,06	0,37	0,63	1,59	0,19	0,57	0,10	0,14
0,5	0,1	0,4	0,25	0,01	0,16	0,1	0,4	0,08	0,26	0,74	1,35	0,14	0,54	0,11	0,22
0,4	0,1	0,5	0,16	0,01	0,25	0,08	0,4	0,1	0,17	0,83	1,20	0,10	0,48	0,12	0,30
0,3	0,1	0,6	0,09	0,01	0,36	0,06	0,36	0,12	0,1	0,9	1,11	0,07	0,40	0,13	0,40
0,2	0,1	0,7	0,04	0,01	0,49	0,04	0,28	0,14	0,05	0,95	1,05	0,04	0,29	0,15	0,52
0,1	0,1	0,8	0,01	0,01	0,64	0,02	0,16	0,16	0,02	0,98	1,02	0,02	0,16	0,16	0,65
0,7	0,2	0,1	0,49	0,04	0,01	0,28	0,14	0,04	0,53	0,47	2,13	0,60	0,30	0,09	0,02
0,6	0,2	0,2	0,36	0,04	0,04	0,24	0,24	0,08	0,4	0,6	1,67	0,40	0,40	0,13	0,07
0,5	0,2	0,3	0,25	0,04	0,09	0,2	0,3	0,12	0,29	0,71	1,41	0,28	0,42	0,17	0,13
0,4	0,2	0,4	0,16	0,04	0,16	0,16	0,32	0,16	0,2	0,8	1,25	0,20	0,40	0,20	0,20

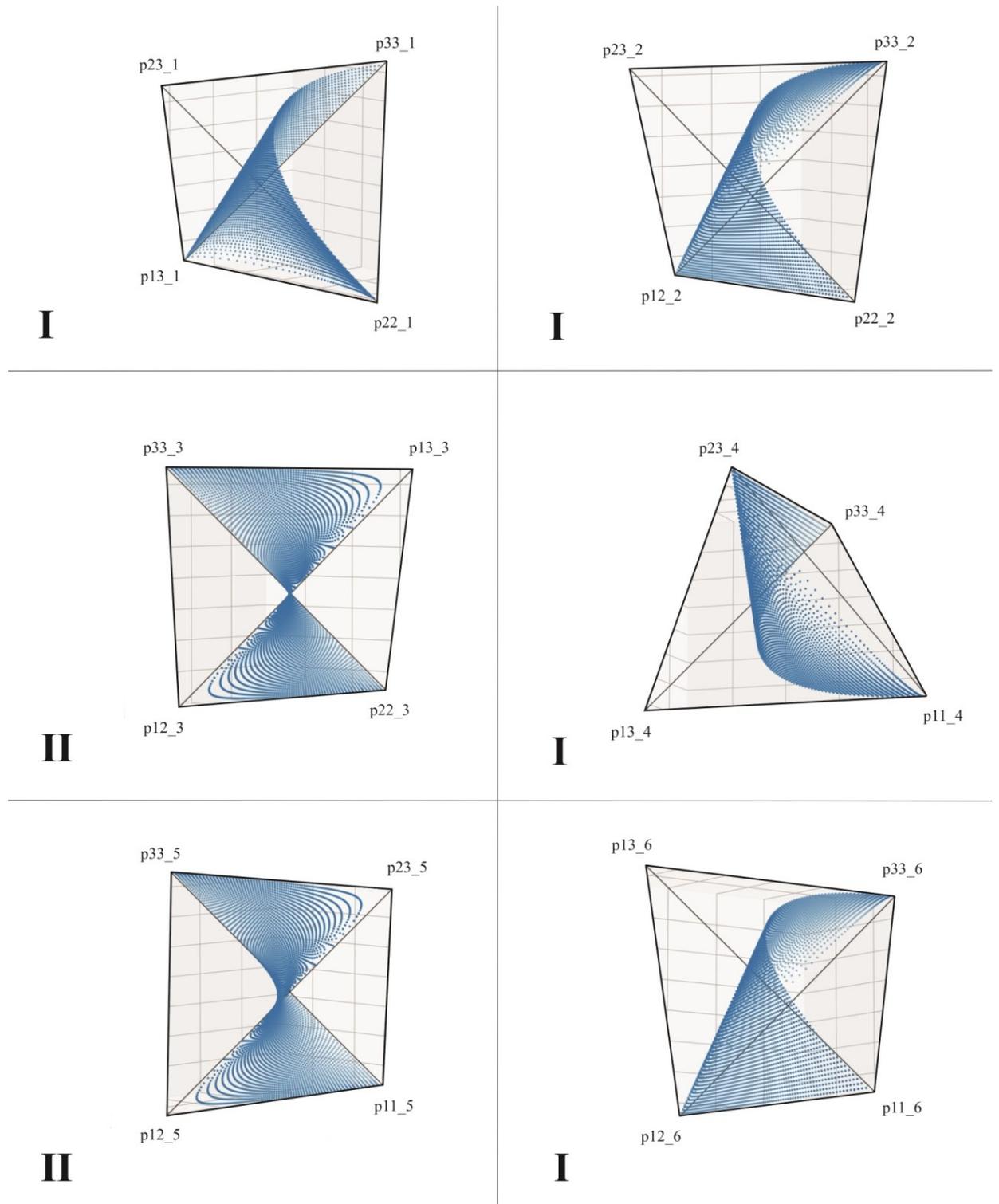


Рисунок 32 – Трехмерные грани (тетраэдры) с проекциями поверхности равновесия. Порядковый номер тетраэдра обозначен цифрой рядом с наименованием вершин. Слева от рисунка римской цифрой отмечен тип поверхности (из четырех уникальных).

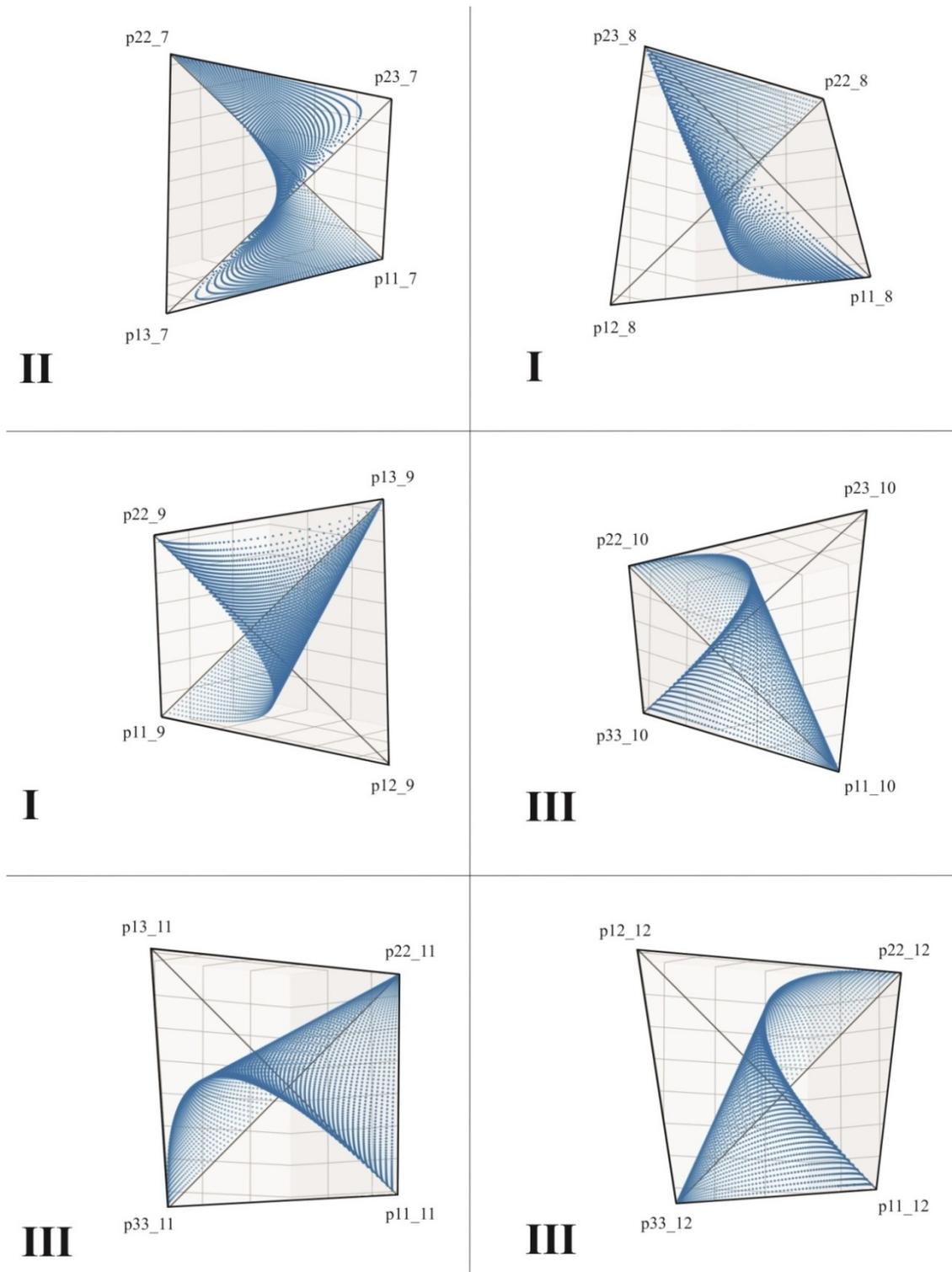


Рисунок 33 – Трехмерные грани (тетраэдры) с проекциями поверхности равновесия. Порядковый номер тетраэдра обозначен цифрой рядом с наименованием вершин. Слева от рисунка римской цифрой отмечен тип поверхности (из четырех уникальных).

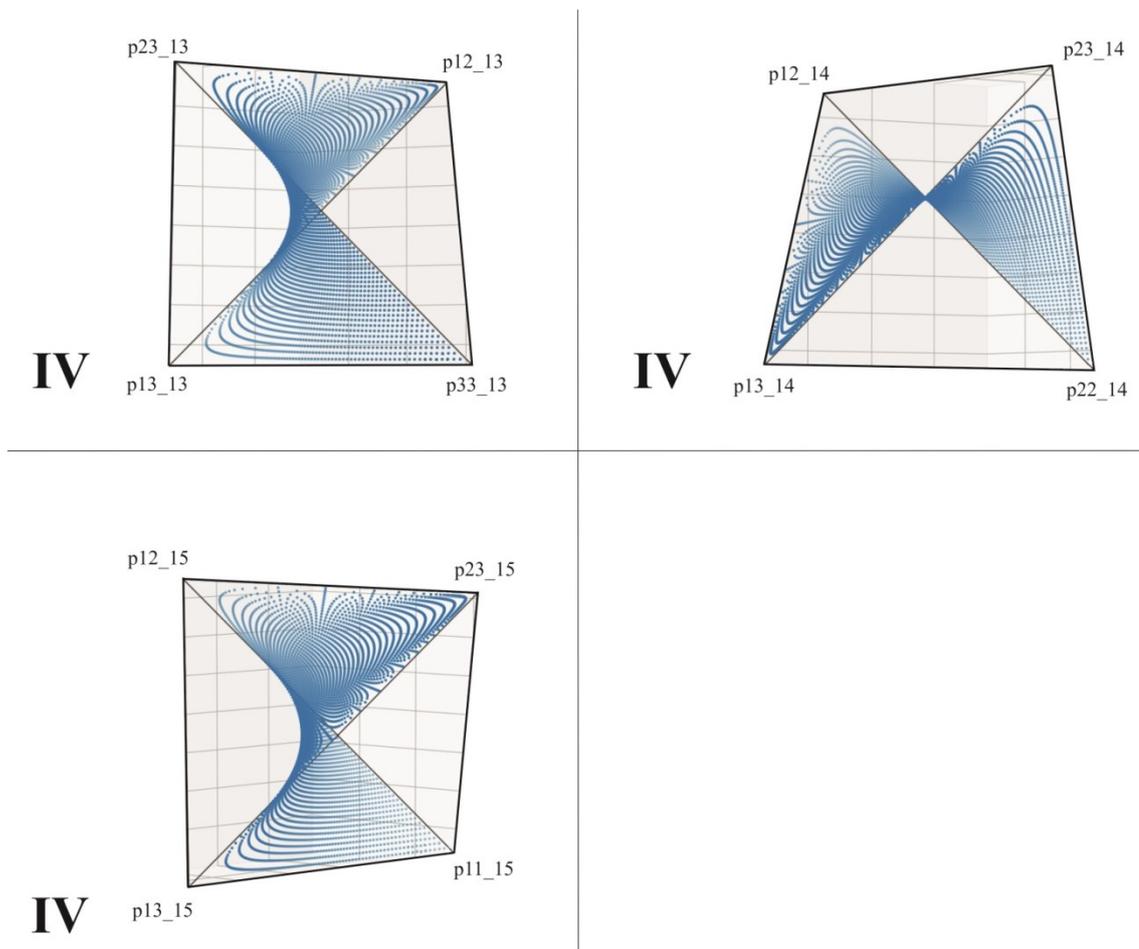


Рисунок 34 – Трехмерные грани (тетраэдры) с проекциями поверхности равновесия. Порядковый номер тетраэдра обозначен цифрой рядом с наименованием вершин. Слева от рисунка римской цифрой отмечен тип поверхности (из четырех уникальных).

Для проверки корректности выбранного алгоритма расчетов и работы программы для визуализации следов поверхности равновесия применен метод сечений, который заключался в фиксировании значений  $r_1$  от 0 до 1 с шагом 0,05 и построении линии пересечения поверхности с плоскостью фиксированного значения  $r_1$ . Алгоритм получения исходных данных следующий: при постоянном значении  $r_1$  сумма двух оставшихся вероятностей будет постоянной, программа автоматически перебирает все возможные варианты сочетаний значений (примеры показаны на рисунке 35).

Дальнейшая работа алгоритма аналогична предыдущим построениям: нахождение вероятностей контактирования минеральных зерен для всех точек, расчет суммы отсутствующих контактов и вычитание ее из единицы, расчет коэффициента и умножение на него каждого значения вероятности. В результате расчетов программа визуализирует 315 (15 исходных тетраэдров \* 21 значение  $r_1$ ) вариантов сечений для всех типов поверхности. Результаты построений, представленные в приложении Б, позволяют убедиться в правильности

выбранного алгоритма и корректности работы программы для визуализации проекций поверхности равновесия.

p1	p2	p3		p1	p2	p3	
0,1	0,01	0,89		0,2	0,01	0,79	
0,1	0,02	0,88		0,2	0,02	0,78	
0,1	0,03	0,87		0,2	0,03	0,77	
0,1	0,04	0,86		0,2	0,04	0,76	
0,1	0,05	0,85		0,2	0,05	0,75	
0,1	0,06	0,84		0,2	0,06	0,74	
0,1	0,07	0,83		0,2	0,07	0,73	
0,1	0,08	0,82		0,2	0,08	0,72	
0,1	0,09	0,81		0,2	0,09	0,71	
0,1	0,1	0,8		0,2	0,1	0,7	
0,1	0,11	0,79		0,2	0,11	0,69	
0,1	0,12	0,78		0,2	0,12	0,68	
0,1	0,13	0,77		0,2	0,13	0,67	
0,1	0,14	0,76		0,2	0,14	0,66	

Рисунок 35 – Исходные данные для построений с помощью метода сечений.

Следующий шаг исследования триминеральных агрегатов – визуализация полей структурных типов для полученных ранее тетраэдров с помощью авторской программы. Исходные данные получены по тому же алгоритму, что и для следов поверхности равновесия: задаются значения 6 типов вероятностей, находится сумма отсутствующих контактов и определяется коэффициент приведения оставшихся вероятностей к единице. Далее для каждого тетраэдра формируются свои исходные данные из четырех типов вероятностей. Полученные значения подставляются в шаблон матрицы из таблицы 10, при этом вероятности, которые отсутствуют в этом тетраэдре, приравниваются к нулю. Матрица автоматически приводится к диагональному виду, и программа считывает количество положительных значений на диагонали. В зависимости от полученного структурного типа задается цвет для конкретной точки (таблица 13).

Таблица 13 – Обозначения для точек с разным структурным типом.

Диагональная форма	Структурный тип	Цвет точек
$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$	красный
$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$	желтый
$\begin{bmatrix} + & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^3$	зеленый

В результате получены 15 тетраэдров, в которых показаны поля с различными структурными типами. Для 9 тетраэдров получен один тип структуры  $S_3^2$ , для трех – переход от типа  $S_3^2$  к  $S_3^1$ , ещё для трех – типы  $S_3^2$  и  $S_3^3$ . Для сравнения на рисунках 36-37 одновременно показаны тетраэдры со следами поверхности равновесия и тетраэдры с полями структурных

типов. Таким образом, установлено, что в случае триминеральных агрегатов граница Харди-Вайнберга не разделяет поля структурных типов.

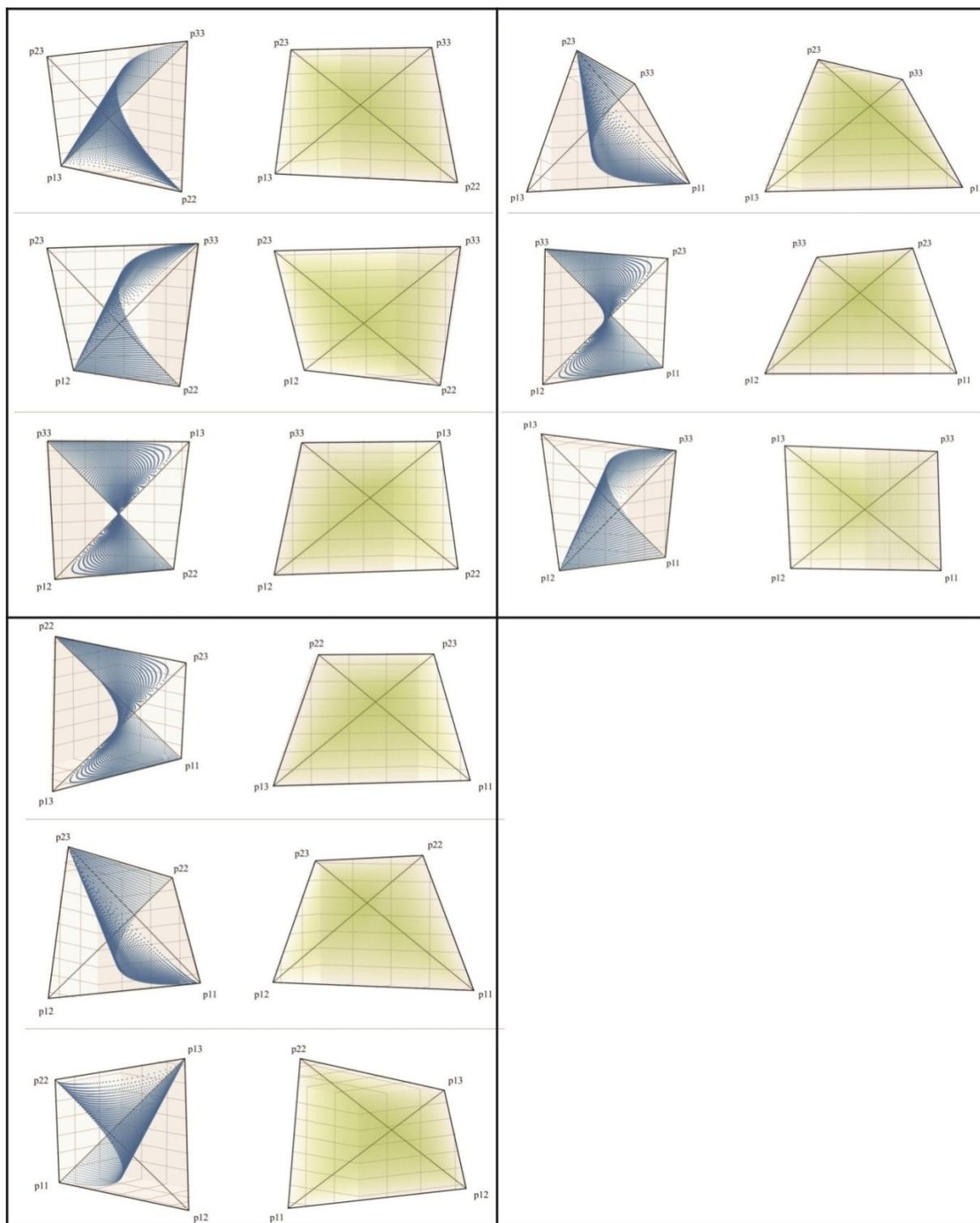


Рисунок 36 – Сравнение тетраэдров со следами поверхности Харди-Вайнберга и полей структурных типов.

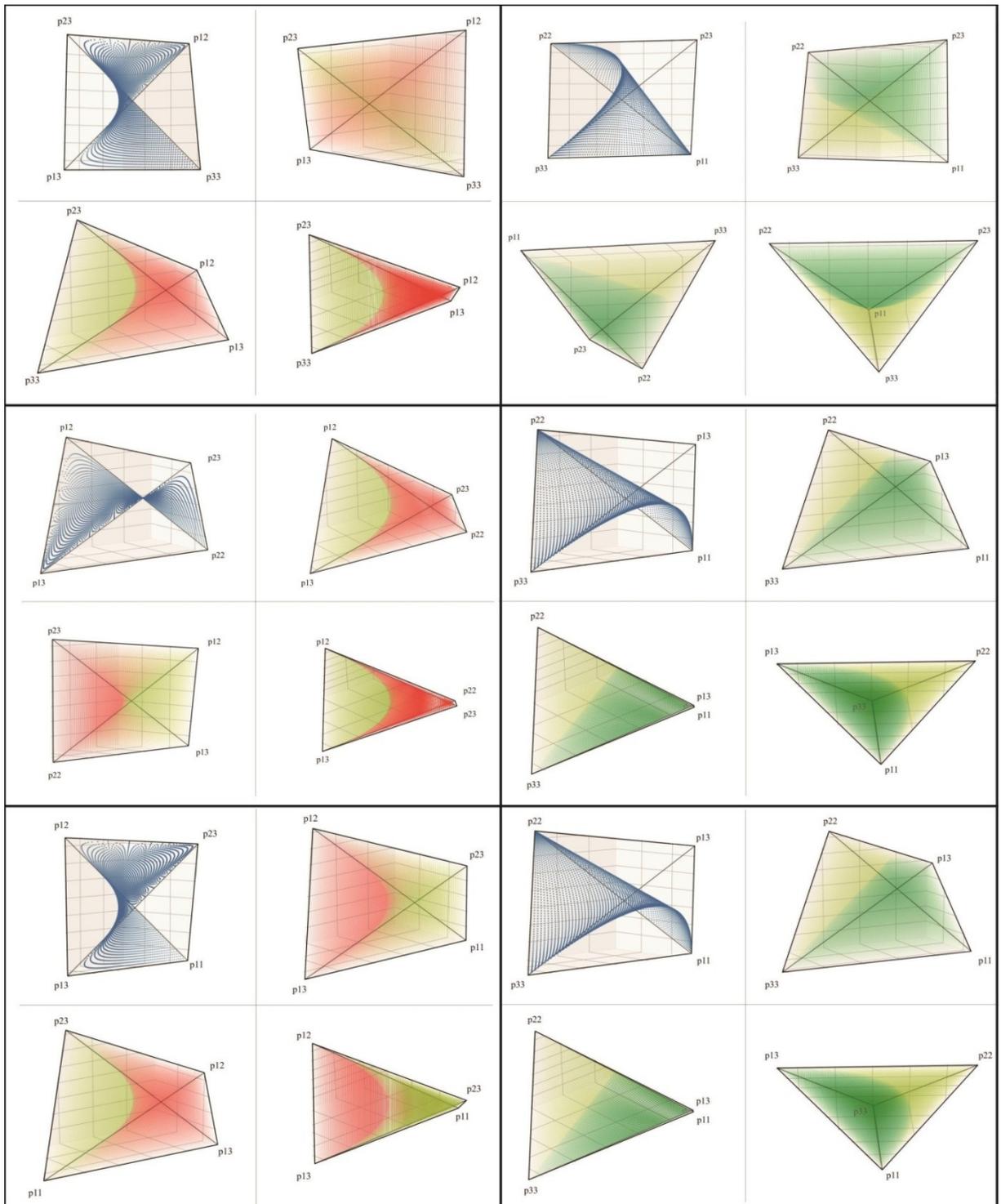


Рисунок 37 – Сравнение тетраэдров со следами поверхности Харди-Вайнберга и полей структурных типов.

## 2.3 Выводы по главе 2

Глава посвящена углублению методологии типизации структур на основе статистик межзерновых контактов. В ходе исследования выполнено моделирование для бинарных и тернарных контактов в биминеральных агрегатах. Для тернарных контактов получена барицентрическая диаграмма в виде тетраэдра, а также построены структурные индикатрисы, представленные 8 типами плоских кривых 3-го порядка.

Построены модельные тренды для классических структур и текстур на основе бинарных и тернарных контактов. Моделирование выполнено на правильной гексагональной сетке, при этом учитывается форма кластера и модальный состав минерального агрегата. Модельные тренды закономерно заполняют барицентрические диаграммы за исключением запрещенных областей. Установлено, что вблизи линии равновесия Харди-Вайнберга тренды разных структур и текстур накладываются, что доказывает необходимость категорий структуры и текстуры, которые взаимно дополняют друг друга.

Впервые построена граница Харди-Вайнберга для триминеральных агрегатов на основе бинарных контактов. В этом случае барицентрическая диаграмма представляет собой 6-вершинный симплекс в 5-мерном пространстве. С помощью авторского алгоритма построены следы поверхности Харди-Вайнберга в тетраэдрических гранях симплекса. Получены 4 уникальных типа поверхностей, для каждой тетраэдрической грани определены поля структурных типов. Установлено, что положение следов поверхности равновесия и полей структурных типов не совпадает. Таким образом, граница Харди-Вайнберга разделяет поля структурных типов только для бинарных контактов в биминеральных агрегатах, во всех остальных случаях сохраняет смысл статистического равновесия контактов.

На основе проведенных теоретических исследований сформулировано первое защищаемое положение:

**1. Моделирование минеральных агрегатов как автоморфизмов минеральных видов позволяет построить классификацию структур на основе статистик бинарных и тернарных межзерновых контактов и предложить для них барицентрические диаграммы нового типа, выявляющие закономерности в расположении классических структур и текстур.**

## ГЛАВА 3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА СТРУКТУР И ТЕКСТУР

Глава посвящена применению методологии типизации структур на разных геологических объектах для демонстрации возможностей подхода на практике

### 3.1 Методика исследований

Методика получения статистики межзерновых контактов одинакова для всех изученных геологических объектов и заключается в проведении подсчетов вручную на основе панорамных снимков шлифов (рисунок 38). Возможности автоматического подсчета межзерновых контактов рассмотрены в следующей главе.

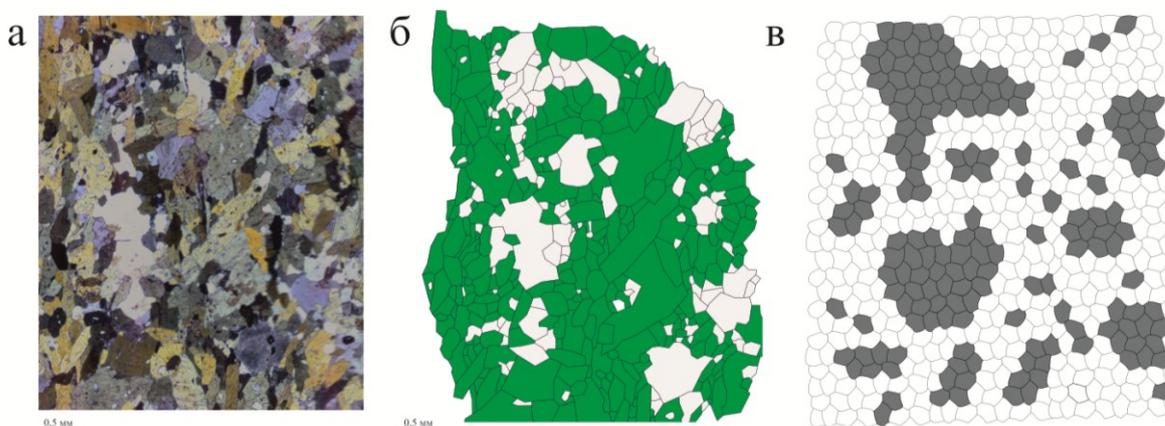


Рисунок 38 – Методика исследований на примере образца амфиболитов (V2): а – панорамный снимок шлифа, б – отрисовка минералов, в – модель шлифа на гексагональной сетке.

Для классического петрографического описания шлифов и получения панорамных снимков автор пользовался оборудованием кафедры Минералогии, кристаллографии и петрографии Горного университета: поляризационным микроскопом Leica DM750 и поляризационным исследовательским микроскопом Leica DM2700P с выводом данных на компьютер. Для определения минералов использована справочная литература (Лодочников, 1974; Марин, 2014) и эталонные коллекции шлифов. Панорамные снимки обработаны в графическом редакторе CorelDRAW X8 и программе ArcGIS. Треугольные диаграммы построены в программе Statistica, а для визуализации барицентрического тетраэдра (в том числе с нанесенными точками) применены авторские программы, написанные на языке Python.

При расчетах вручную погрешность в основном определяется внимательностью оператора при подсчетах (человеческий фактор). Использование дополнительных программ (например, ArcGIS) повышает точность распознавания отдельных зерен, поскольку масштаб увеличения снимка или рисунка ограничен только функциональными возможностями

программы. Автором определено отклонение в количестве посчитанных межзерновых контактов на основе повторного анализа шлифа: от 1 до 5 пропущенных зерен при общем количестве контактов 1500-2500 штук (погрешность составляет от 0,04 до 0,3 %). При использовании программ для подсчета контактов (ArcGIS) погрешность определяется работой оператора. Методика имеет высокую точность при высоком уровне внимательности оператора и может широко применяться для количественного анализа минеральных агрегатов.

### **3.2 Амфиболиты Керетского архипелага**

В главе 2 приведены барицентрические диаграммы с трендами типовых структур и текстур для бинарных и тернарных контактов в биминеральных агрегатах. На примере амфиболитов Керетского архипелага показано применение этих диаграмм на практике для строгой типизации структур горных пород близкого состава (Войтеховский и др., 2021-3; Захарова и др., 2021-1).

Керетский архипелаг относится к Беломорскому подвижному поясу, который расположен между Карельской и Кольской провинциями (рисунок 39). Беломорский пояс представляет собой складчатую структуру, сложенную неоархейскими гранитогнейсами, а также зеленокаменными и парагнейсовыми комплексами (Слабунов, 2008).

Материалы для исследования представлены шлифами 710, 711, V2 (о. Виченная Луда), S2, S4 (о. Сидоров). Острова сложены гнейсами с согласными телами метаморфизованных пород основного состава (чаще всего будинами, реже пластовыми телами и дайками). Максимальный размер будин 300×150 м, в них устанавливаются участки эклогитов. Каймы амфиболизации встречаются на контакте эклогитов и вмещающих гнейсов или на контакте кварц-карбонат-плагиоклазовых жил внутри будин и эклогитов. Каймы имеют переменную мощность: от первых десятков см до 1-2 м. Образцы представлены амфиболитами из кайм амфиболизации на контакте эклогитов и вмещающих гнейсов (возраст 1,9-1,84 млрд лет). Амфиболиты состоят в основном из амфибола, кварца и плагиоклаза. По химическому составу амфибол отвечает ферропаргаситу. Плагиоклаз по составу соответствует олигоклазу ( $An_{10-20}$  до  $An_{28}$ ) (Березин и др., 2020).

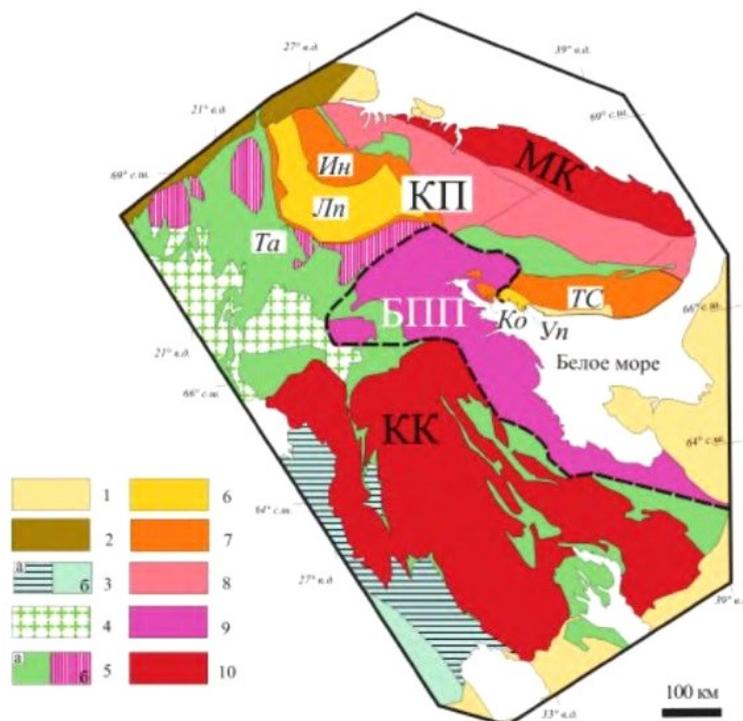


Рисунок 39 – Главные тектонические единицы восточной части Фенноскандинавского щита (Слабунов, 2008). 1 – осадочный чехол из фанерозойских и неопротерозойских образований; 2 – каледонский ороген; 3 – Свекофеннские палеопротерозойские орогенные комплексы (2,0-1,77 млрд лет, а – надвинут на архейский фундамент, б – без признаков архейского фундамента); 4 – позднеорогенные гранитоиды (1,84-1,8 млрд лет); 5 – архейские комплексы в областях палеопротерозойских бассейнов (а – перекрыты осадочно-вулканогенными образованиями, б – выходы архейских комплексов провинции Норрботтен); 6-8 – Кольская провинция (КП): 6 – коллизонная сутура палеопротерозойского (2,3-1,91 млрд лет) Лапландско-Кольского коллизонного орогена (Лапландский (Лп) и Умбинский (Уп) гранулитовые пояса); 7 – коллажи тектонических пластин, сложенных палеопротерозойскими и архейскими комплексами (террейны Инари (Ин) и Терско-Стрельнинский (ТС), коллизонные пояса-меланжи Танаэльв (Та) и Колвицкий (Ко)); 8 – террейны, сложенные архейскими комплексами, неравномерно преобразованными в палеопротерозое; 9 – Беломорский подвижный пояс (БПП), границы показаны пунктиром; 10 – неоархейские Карельский (КК) и Мурманский (МК) кратоны.

Изученные образцы состоят в основном из амфибола (до 90 об. %) и кварца. Второстепенные минералы: плагиоклаз, биотит, акцессорные – рудный минерал и титанит. Структуры гранонематобластовые, текстуры массивные с элементами директивных (цепочечное расположение зерен амфибола и биотита) и шлировых (скопления зерен амфибола). Подробное петрографическое описание шлифов приведено в приложении В (таблица В.1).

При проведении расчетов амфиболиты рассматривались как биминеральные горные породы, поскольку в их минеральном составе преобладает амфибол, а все остальные минералы играют роль второстепенных или акцессорных. В случае биминеральных агрегатов теоретическая основа методологии наиболее развита. На основе панорамных снимков получены рисунки шлифов и рассчитаны вероятности контактирования для бинарных контактов (рисунок 40). На основе метода структурной индикатрисы определены структурные типы изученных амфиболитов (таблица 14). В результате расчетов получены два структурных типа, что свидетельствует о некоторых различиях между амфиболитами, несмотря на близкий минеральный состав и похожие структуры с точки зрения классического описания.

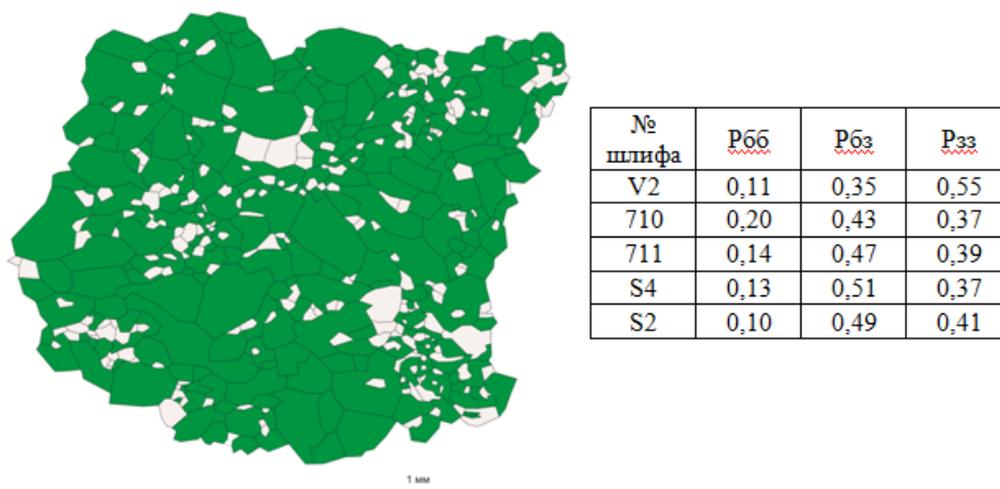


Рисунок 40 – Пример рисунка шлифа (слева): зеленым цветом обозначен амфибол, белым – кварц и плагиоклаз объединенные, акцессорные биотит и титанит в расчетах не учтены; справа показаны значения вероятностей для бинарных контактов (б – белый, з – зеленый).

Поскольку амфиболиты рассматриваются как биминеральные, для них также рассчитаны вероятности тернарных межзерновых контактов, что позволило расширить исследование (таблица 15).

Таблица 14 – Структурные типы амфиболитов.

№ шлифа	Матрица вероятностей и диагональная форма	Тип структуры
710	$\begin{bmatrix} 0,196 & 0,217 \\ 0,217 & 0,370 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$	$S_2^2$
711	$\begin{bmatrix} 0,136 & 0,235 \\ 0,235 & 0,394 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$	$S_2^1$
S2	$\begin{bmatrix} 0,099 & 0,246 \\ 0,246 & 0,409 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$	$S_2^1$

Продолжение таблицы 14

S4	$\begin{bmatrix} 0,127 & 0,254 \\ 0,254 & 0,365 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$	$S_2^1$
V2	$\begin{bmatrix} 0,106 & 0,174 \\ 0,174 & 0,546 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$	$S_2^2$

Таблица 15 – Вероятности тернарных межзерновых контактов (б – белый, з – зеленый).

№ шлифа	$P_{ббб}$	$P_{збб}$	$P_{ззб}$	$P_{ззз}$
710	0,09	0,30	0,37	0,24
711	0,06	0,24	0,47	0,24
S2	0,02	0,22	0,49	0,27
S4	0,04	0,27	0,48	0,21
V2	0,05	0,18	0,36	0,42

Результаты расчетов для амфиболитов наглядно показаны в виде фигуративных точек на барицентрических диаграммах (рисунок 41), для которых ранее построены тренды классических структур и текстур (глава 2).

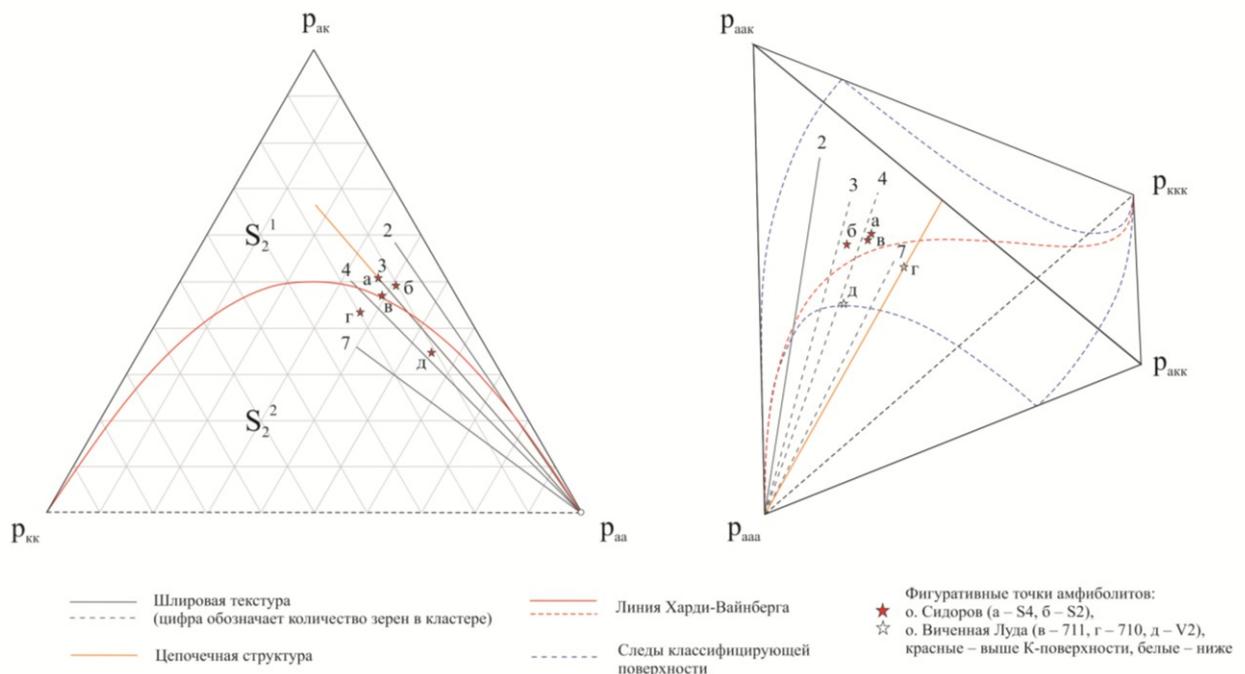


Рисунок 41 – Барицентрические диаграммы для бинарных (слева) и тернарных (справа) контактов с фигуративными точками амфиболитов. Сплошные линии трендов располагаются на грани тетраэдра, штриховые – в теле тетраэдра; индексы: а – амфибол, к – кварц совместно с плагиоклазом.

Положение точек амфиболитов в тетраэдре относительно трендов полностью соответствует их положению в треугольнике (рисунок 41). Согласно классическому описанию, амфиболиты характеризуются наличием небольших шлиров и цепочечным расположением

зерен амфибола и биотита, что соответствует расположению точек на рисунке. Например, структура образца V2 (модель представлена на рисунке 38) представляет собой сочетание шлиров, цепочек и ветвящихся кластеров, что согласуется с промежуточным положением фигуративной точки на диаграмме (рисунок 41).

Поскольку все точки амфиболитов расположены вблизи линии Харди-Вайнберга, образцы проверены на соответствие массивной текстуре в ее статистическом смысле. Математически равновесие Харди-Вайнберга для тернарных контактов выражается следующей формулой:  $(p_1m_1 + \dots + p_nm_n)^3 = \sum p_{ijk}m_jm_k = 1$ , где  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . Ожидаемые значения вероятностей  $p_{ijk}$  рассчитаны по формулам:  $p_{111} = p_1^3$ ,  $p_{112} = 3p_1^2p_2$ ,  $p_{122} = 3p_1p_2^2$ ,  $p_{222} = p_2^3$ . Значения  $p_1$  и  $p_2$  (доля содержания минерала в шлифе) получены на основе подсчета числа зерен в шлифе. Результаты представлены на рисунке 42.

Шлиф	710	711	S2	S4	V2	Шлиф	710	711	S2	S4	V2
N1	353	185	240	262	132	p1	0,485	0,424	0,497	0,533	0,314
N2	375	251	243	230	289	p2	0,515	0,576	0,503	0,467	0,686
Сумма	728	436	483	492	421	Сумма	1	1	1	1	1
N1 - кол-во белых зерен						Расчетные вероятности, соответствующие равновесию Харди-Вайнберга					
N2 - кол-во зеленых зерен											
						710	711	S2	S4	V2	
						p111	0,114	0,076	0,123	0,151	0,031
						p112	0,363	0,311	0,373	0,398	0,202
						p122	0,386	0,422	0,377	0,349	0,443
						p222	0,137	0,191	0,127	0,102	0,323
						Сумма	1	1	1	1	1

Рисунок 42 – Расчет содержаний минералов в шлифах (наверху), внизу показаны теоретические вероятности.

На основе ожидаемых и реальных значений вероятности рассчитан критерий Пирсона по формуле (12). Результаты показаны в таблице 16.

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (12)$$

где  $O_i$  – наблюдаемые значения,  $E_i$  – ожидаемые.

Таблица 16 – Расчетное значение критерия Пирсона.

710	711	S2	S4	V2
130,69	29,73	283,88	245,98	42,01

Пороговое значение критерия Пирсона для числа степеней свободы 3 (поскольку 4 типа тернарных контактов) и доверительной вероятности  $p = 0.99$  равно 11.34. Гипотеза о соответствии изученных текстур равновесию Харди-Вайнберга отвергается, что соответствует классическому описанию (наличие шлиров и сланцеватости, несмотря на общий массивный облик амфиболитов) и указывает на недостижимость линии равновесия (в природе идеальное перемешивание минеральных зерен в объеме агрегата невозможно).

Таким образом, на примере амфиболитов Керетского архипелага показано соответствие классического описания и положения фигуративных точек на барицентрических диаграммах, что свидетельствует о корректности полученных модельных трендов. Предложенные барицентрические диаграммы можно использовать для строгой характеристики горных пород и руд близкого состава: помимо структурного типа и положения фигуративной точки можно сравнить структуры с модельными трендами.

С помощью критерия Пирсона оценено соответствие текстур амфиболитов массивным (в статистическом смысле). Показано, что даже на уровне значимости  $\alpha = 0,01$  расчетное значение критерия сильно отличается от порогового. Таким образом, с математической точки зрения массивная текстура отвечает гомогенному перемешиванию минеральных зерен в объеме агрегата (по сути является структурой). Соответствие структуры «идеальной» должно определяться статистическими критериями согласия.

### **3.3 Апатитовые руды (Хибинский массив)**

Интересное приложение предлагаемой методологии типизации структур – исследование структурных особенностей различных руд с целью выявления связи между типами структур и особенностями извлечения рудного минерала. Далее рассматриваются апатитовые руды Хибинского массива (Кировский рудник) (Zakharova et al., 2022).

#### **3.3.1 Краткая геологическая характеристика месторождений**

Хибинский щелочной массив – один из крупнейших массивов нефелиновых сиенитов в мире, расположенный в западной части Кольского полуострова (Мурманская область). Он относится к массивам центрального типа и сложен в основном нефелиновыми сиенитами фойяитового ряда. В состав комплекса также входят рихториты, породы мельтейгит-уртитовой серии (с которыми пространственно связаны апатитовые месторождения) и многочисленные жильные образования (рисунок 43). Возраст массива составляет около 390-400 млн лет ( $D_{2-3}$ ) (Минералогия Хибинского массива, 1978).

Объединенный Кировский рудник основан в 1929 г. и ведет подземную добычу на Кукисвумчоррском и Юкспорском месторождениях. Кукисвумчоррское открыто в 1926 г. А. Н. Лабунцовым и расположено в юго-западной части Хибинского массива. Вместе с Юкспорским оно составляет единую пластообразную линзу общей длиной более 4 км. Главная рудная линза Кукисвумчоррского месторождения имеет протяженность 1800 м, средняя мощность 80-100 м (рисунок 44). Юкспорское месторождение приурочено к висячему боку ийолит-уртитовой интрузии и представляет собой систему пластообразных залежей. От

соседнего месторождения отличается меньшей мощностью зоны богатых руд и более крутым залеганием (Полканов, 1937; Пеков и др., 2004).

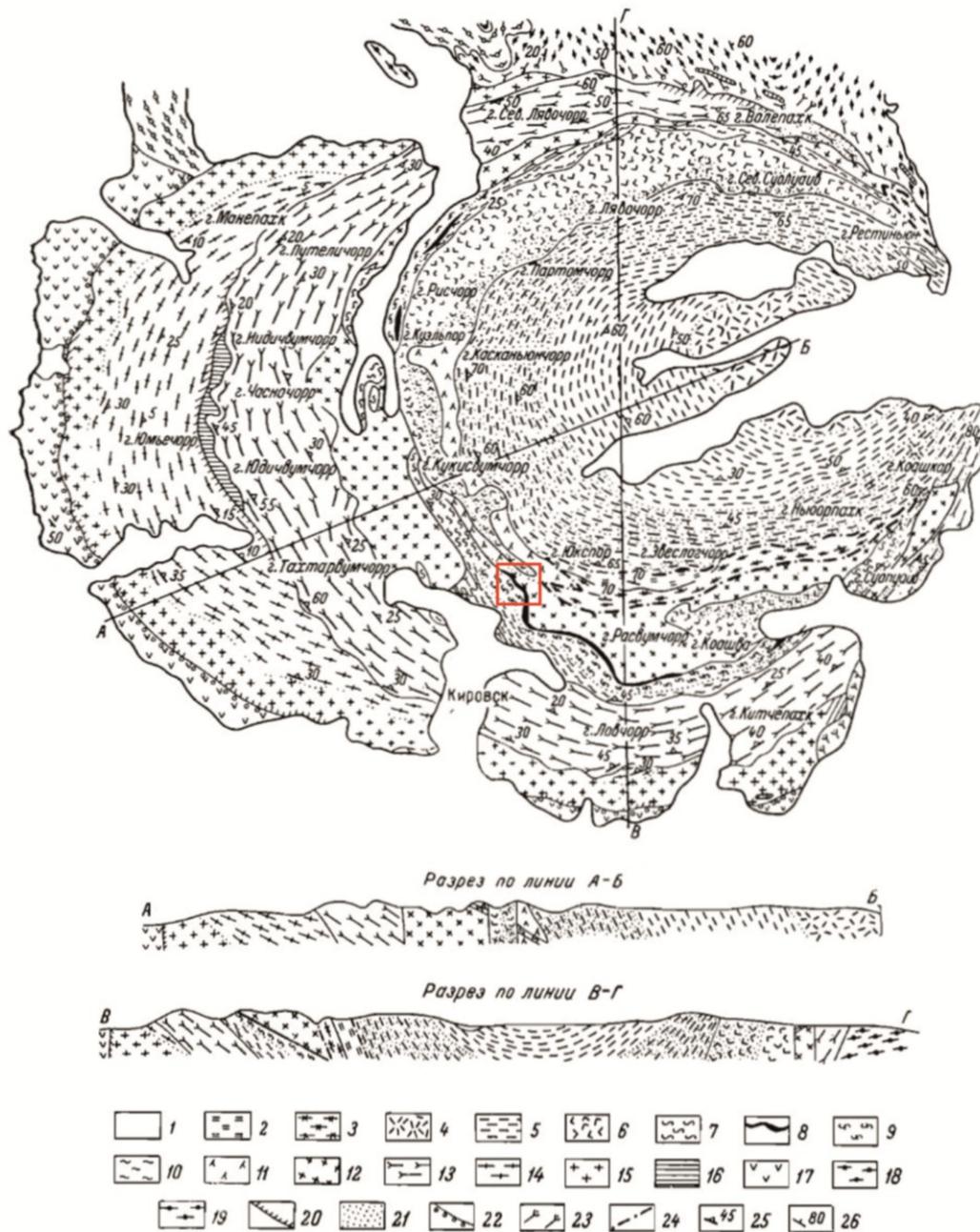


Рисунок 43 – Схематическая геологическая карта Хибинского массива (Иванова и др., 1970).

1 – четвертичные отложения, 2 – метаморфизованные сиениты, 3 – катаклазированные рисчорриты, 4 – пироксеновые массивные фойяиты, 5 – трахитоидные амфибол-пироксеновые фойяиты, 6 – эгириновые нефелиновые сиениты, 7 – трахитоидные ийолиты, 8 – апатит-нефелиновые породы, 9 – массивные ийолитуртиты, 10 – трахитоидные малиниты, ювиты, луявриты, 11 – лявчорриты, 12 – рисчорриты, 13 – трахитоидные среднезернистые хибиниты, 14 – трахитоидные грубозернистые хибиниты, 15 – массивные грубозернистые хибиниты, 16 – ромбенпорфиры (ксенолит), 17 – диабазы, 18 – гнейсо-граниты, 19 – гнейсы, 20 – эндоконтактные сиениты, 21 – зоны альбитизации, 22 – роговики, 23 – фениты, 24 – границы интенсивно метаморфизованных пород, 25 – элементы залегания пород массива, 26 – элементы залегания вмещающих пород. Красным прямоугольником обозначено Кукисвумчоррское месторождение.

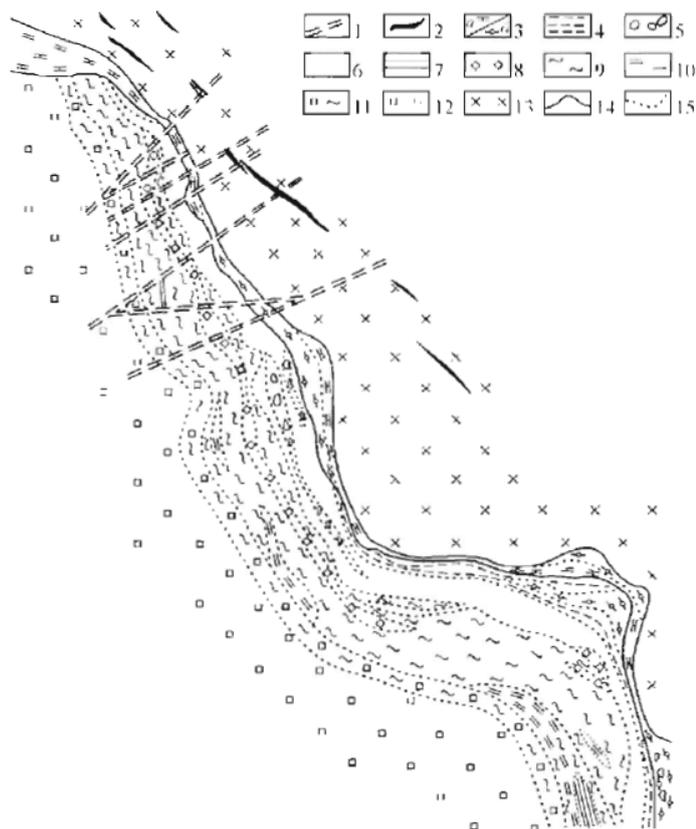


Рисунок 44 – Геологическая схема Кукисвумчоррского месторождения (Зак и др., 1972).

1 – зоны шпреуштейнизации; 2 – дайки мончикитов; 3а – трахитоидный малиньбит; 3б – трахитоидный ийолит; 4 – титанит-апатитовый ийолит; 5 – брекчия апатит-нефелиновых руд; 6-10 – апатит-нефелиновые породы (6 – пятнистые, 7 – полосчатые, 8 – блоковые, 9 – линзовидно-полосчатые, 10 – сетчатые); 11 – полосчатый уртит с апатитом; 12 – массивный уртит; 13 – рискоррит; 14 – интрузивные контакты; 15 – границы между петрографическими и текстурными разновидностями руд.

Материалом для исследований послужили 9 шлифов апатитовых руд с Кировского рудника, представляющих собой как сплошные апатитовые руды, так и срастания апатита с другими минералами (нефелином, титанитом и др.) Породообразующие минералы в рудах представлены апатитом (до 100 % площади шлифа) и эгирин-авгитом. Второстепенные минералы: нефелин, щелочной амфибол, карбонаты, щелочной полевой шпат. Акцессории представлены рудным минералом, эвдиалитом, титанитом и лампрофиллитом. Наблюдаются различные вторичные изменения: цеолиты, канкринит, шпреуштейнизация по нефелину, а также сосюритизация по полевоому шпату. Текстуры в основном массивные с элементами директивных и шпировых, структуры неравномернозернистые, гипидиоморфнозернистые. Подробное петрографическое описание шлифов представлено в приложении В (таблица В.2).

### 3.3.2 Типизация структур

Основной полезный компонент для этих руд – апатит, поэтому сначала типизация структур выполнена для двух условных минералов: апатита и матрицы. Под матрицей в расчетах подразумевается сумма межзерновых контактов остальных минералов. Изучение более тонких различий между рудами выполнено на основании трех условных минералов: апатита, эгирина + амфибола и остальных, объединенных в матрицу. Нефелин не выбран отдельно, поскольку присутствует в образцах в незначительном количестве. Результаты расчетов для двух минералов и структурные типы даны в таблице 17 и вынесены на барицентрическую диаграмму (рисунок 45).

Таблица 17 – Расчеты структурных типов для двух минералов.  $A_p$  – апатит,  $M$  – матрица (все остальные минералы).

№ шлифа	Матрица вероятностей	Диагональная форма	Структурный тип
	$\begin{bmatrix} A_p - A_p & (A_p - M)/2 \\ (A_p - M)/2 & M - M \end{bmatrix}$		
1	$\begin{bmatrix} 0,911 & 0,044 \\ 0,044 & 0,001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
2	$\begin{bmatrix} 0,834 & 0,079 \\ 0,079 & 0,007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
3	$\begin{bmatrix} 0,817 & 0,089 \\ 0,089 & 0,004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
4	$\begin{bmatrix} 0,782 & 0,104 \\ 0,104 & 0,010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
5	$\begin{bmatrix} 0,636 & 0,176 \\ 0,176 & 0,012 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
6	$\begin{bmatrix} 0,554 & 0,193 \\ 0,193 & 0,060 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
7	$\begin{bmatrix} 0,312 & 0,293 \\ 0,293 & 0,102 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
8	$\begin{bmatrix} 0,341 & 0,239 \\ 0,239 & 0,181 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^2$
9	$\begin{bmatrix} 0,380 & 0,201 \\ 0,201 & 0,218 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^2$

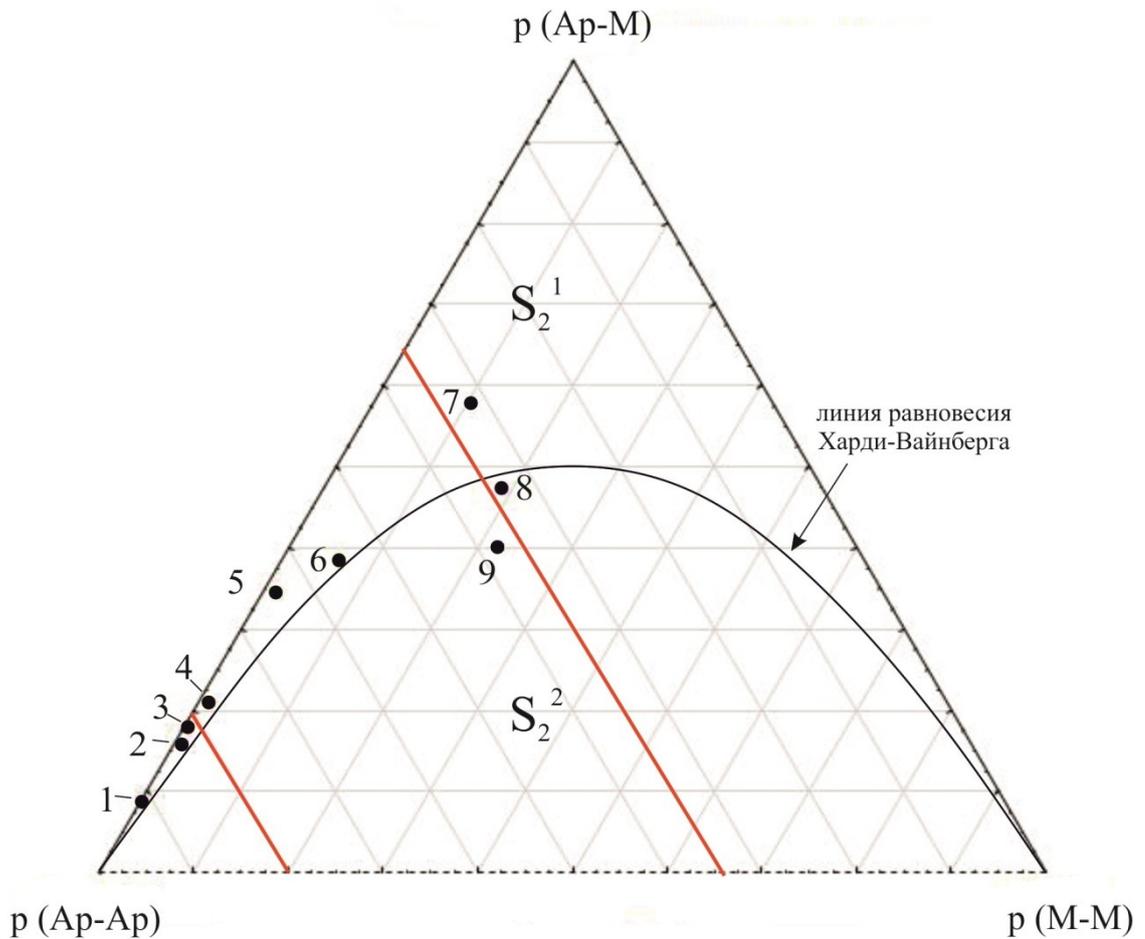


Рисунок 45 – Барицентрическая диаграмма вероятностей для апатитовых руд (Ар – апатит, М – матрица). Красные линии показывают фиксированное значение вероятности  $p$  (Ар-Ар).

На диаграмме (рисунок 45) видно распределение шлифов в зависимости от относительной степени обогатимости. Сплошные апатитовые руды близки к вершине  $p$  (Ар-Ар). Для них извлечение апатита наилучшее из-за отсутствия сростков с другими минералами. Для точек в центре диаграммы увеличивается доля других контактов: апатита с матрицей и матрицы с матрицей, что усложняет раскрытие сростков и извлечение апатита.

Почти все образцы руд имеют тип структуры  $S_2^1$ , только два шлифа находятся в поле  $S_2^2$ . Попадание большинства образцов в поле  $S_2^1$  объясняется большим количеством мономинеральных контактов Ар-Ар. При этом остальные минералы рассеяны среди зерен апатита и при фиксированной вероятности  $p$  (Ар-Ар) фигуративная точка смещается от линии равновесия в сторону вероятности  $p$  (Ар-М), то есть в сторону поля  $S_2^1$ .

Образцы 7, 8 и 9 относятся к бедным рудам по содержанию апатита, но располагаются по обе стороны от линии равновесия. Это связано с минералогическими и структурными различиями. Для образцов 8 и 9 характерна повышенная доля мономинеральных агрегатов нефелина, что увеличивает долю вероятности  $p$  (М-М) и обуславливает переход в сторону поля

$S_2^2$ . В образце 7 наблюдается рассеяние зерен эгирина и амфибола среди апатита, что повышает долю вероятности  $p$  (Ap-M).

На основе расчетов по двум минералам образцы распределились по диаграмме согласно относительной степени обогатимости. Расчеты по трем минералам выполнены для выявления более тонких различий между рудами (таблица 18).

Таблица 18 – Расчеты структурных типов для трех минералов. Ap – апатит, Aeg – эгирин + амфибол, M – матрица (все остальные минералы). Нуль обозначает отсутствие контактов между соответствующими минералами.

№ шлифа	Матрица вероятностей			Диагональная форма	Структурный тип
	$Ap - Ap$	$(Ap - Aeg)/2$	$(Ap - M)/2$		
1	$\begin{bmatrix} 0,911 & 0,044 & 0 \\ 0,044 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	переход от $S_3^1$ к $S_3^2$		
2	$\begin{bmatrix} 0,834 & 0,050 & 0,029 \\ 0,050 & 0 & 0,002 \\ 0,029 & 0,002 & 0,004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$		
3	$\begin{bmatrix} 0,8167 & 0,0024 & 0,0874 \\ 0,0024 & 0 & 0,0003 \\ 0,0874 & 0,0003 & 0,0031 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$		
4	$\begin{bmatrix} 0,782 & 0,104 & 0 \\ 0,104 & 0,010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	переход от $S_3^1$ к $S_3^2$		
5	$\begin{bmatrix} 0,636 & 0,012 & 0,164 \\ 0,012 & 0 & 0,004 \\ 0,164 & 0,004 & 0,004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$		
6	$\begin{bmatrix} 0,554 & 0 & 0,193 \\ 0 & 0 & 0,001 \\ 0,193 & 0,001 & 0,059 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$		
7	$\begin{bmatrix} 0,312 & 0,288 & 0,005 \\ 0,288 & 0,095 & 0,003 \\ 0,005 & 0,003 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$		
8	$\begin{bmatrix} 0,340 & 0,136 & 0,103 \\ 0,136 & 0,005 & 0,031 \\ 0,103 & 0,031 & 0,115 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$		
9	$\begin{bmatrix} 0,380 & 0,030 & 0,171 \\ 0,030 & 0,001 & 0,019 \\ 0,171 & 0,019 & 0,179 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$		

На основании полученных результатов можно выделить образцы сплошных апатитовых руд с переходными структурами (таблица 18, образцы 1 и 4). В них отсутствуют примеси

других минералов, соответственно, среди изученных образцов эти руды имеют самую лучшую обогатимость. Остальные руды разделились на два типа: структура  $S_3^1$  наблюдается у образцов 3, 5 и 7, все остальные руды относятся к типу структуры  $S_3^2$ .

Следует обратить внимание на особенности раскрываемости сростков апатита с различными минералами. Флотуемость основных минералов руд жирнокислотным собирателем (который в основном используется в обогащении) выстраивается в следующий ряд (рисунок 46).

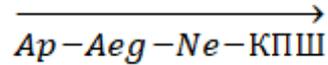


Рисунок 46 – Ряд флотационных свойств основных минералов апатитовых руд (Брыляков, 2004).

Легче всего разделяются сростки с нефелином, сложнее – с эгирином, что отражается в результатах расчетов: в шлифе 7 апатит срастается с эгирином (тип структуры  $S_3^1$ ), а в шлифах 8 и 9 – с нефелином ( $S_3^2$ ). Флотационные свойства апатита также ухудшаются при наличии гипергенных изменений в рудах (Абрамов, 2004; Марчевская и др., 2020). Подобные изменения наблюдаются в шлифах 3 и 5, где апатит находится в тесных сростаниях со шпреухштейном. Это значительно усложняет раскрытие сростков и извлечение апатита.

Таким образом, структура  $S_3^1$  характерна для плохо обогатимых руд (независимо от содержания апатита), а  $S_3^2$  – для хорошо обогатимых. В целом типизация руд по двум минералам отражает относительную степень извлечения апатита, типизация по трем минералам характеризует особенности раскрытия минеральных сростков.

### 3.4 Железистые кварциты (Костомукшское рудное поле)

#### 3.4.1 Краткая геологическая характеристика месторождений

Костомукшское рудное поле расположено в СЗ части Республики Карелия, в 10 км к северу от г. Костомукша. Месторождения железных руд открыты в 1946 г. по магнитным аномалиям, выявленным аэромагнитной съемкой. Детальные геологоразведочные работы проводились с 1947 г. (Кратц, 1960; Shibaeva, 2021). Отработка Костомукшского месторождения открытым способом началась с 1982 г., Корпангского – с 2005 г. Запасов железной руды хватит на 45-50 лет при производительности 10 млн. т окатышей в год (Горьковец и др., 2011).

Костомукшское рудное поле расположено в пределах Карельского кратона Балтийского щита, и большая его часть сложена нижнеархейскими образованиями (Кратц, 1960). Более подробно геологическая позиция Карельского кратона рассмотрена в работе (Slabunov et al., 2006). Залежи железистых кварцитов приурочены к верхнеархейской гимольской серии (возраст 2,7 млрд лет), представленной кварц-амфибол-биотитовыми сланцами, амфиболитами, плагиопорфирами и сильно метаморфизованными интрузиями ультраосновных и основных пород (Кратц, 1960; Горьковец и др., 2015; Shibaeva, 2021).

Структура рудного поля представляет собой синклинальную складку шириной 4-7 км, осложненную дополнительными складками различного масштаба. Разрывные нарушения имеют меридиональное и СВ простирания (Кривцов, 1991). Рудоносная толща образует дугообразную структуру, обращенную выпуклой частью на ЮЗ (рисунок 47). В северной части простирание СВ, угол падения ВЮВ 70-85°. В южной части породы простираются в широтном направлении, угол падения ССВ 65-70° (Кратц, 1960).

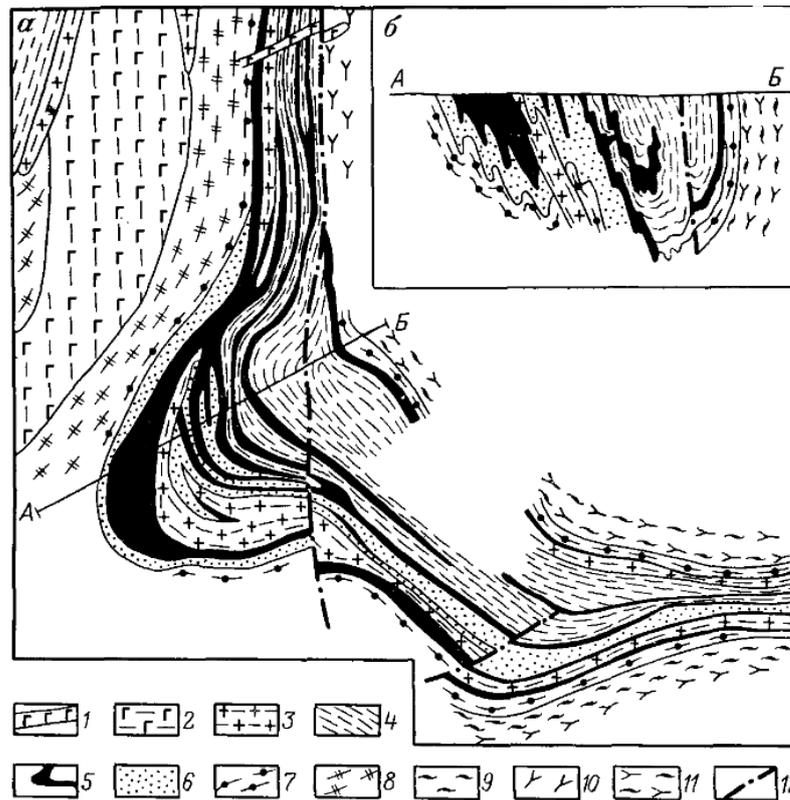


Рисунок 47 – Схематическая геологическая карта (а) и разрез (б) Костомукшского месторождения (Кривцов, 1991). 1 – габбро, габбронориты; 2 – габброамфиболиты; 3 – плагиопорфиры; 4 – кристаллические сланцы; 5 – магнетитовые кварциты; 6 – конгломераты, граувакки, слюдистые сланцы; 7 – кварц-амфиболовые сланцы; 8 – амфиболиты и амфиболовые сланцы; 9 – гранитизированные биотитовые гнейсы; 10 – гранитогнейсы; 11 – гранитизированные биотитовые гнейсы и гранитогнейсы; 12 – разрывные нарушения.

Костомукшское месторождение – крупнейшее на Балтийском щите, запасы железных руд оцениваются в 10 млрд. т. Среднее содержание железа в рудах – 32 %, но может достигать и 60 % в богатых рудах. Железные руды связаны с отложениями флишевой железисто-кремнистой формации, их формирование связывают с выветриванием подстилающих гранулитов, базальтов, коматиитов и железисто-кремнистых образований контоксской серии (Горьковец и др., 2011; 2015).

Корпангское месторождение расположено в 3 км на СЗ от Костомукшского. Его запасы оцениваются в 485,9 млн. т при содержании железа в руде 30 %. Структура рассматривается как опрокинутая синклиналь, качество руд выше костомукшских за счет более крупных зерен магнетита и меньшего числа сростков (Шаров, 2014; Горьковец и др., 2015). Происхождение железистых кварцитов в последние годы связывают с терригенно- и вулканогенно-осадочными процессами, в ходе которых образовались железисто-кремнистые осадки, позднее метаморфизованные в кварциты (Горьковец и др., 2015).

Материал для исследования представлен упорными Костомукшскими рудами (в основном тонкополосчатые образцы с мелкозернистым магнетитом в сростках, здесь и далее условное обозначение ТКШ) и легкообогатимые руды Корпангского месторождения со свободными зернами магнетита среднего размера (здесь и далее ЛКШ-руды). Породообразующие минералы железных руд – кварц и магнетит. Второстепенные минералы: мусковит, амфиболы и биотит. Амфиболы представлены роговой обманкой и щелочными амфиболами ряда рибекит-магнезиорибекит, биотит по составу относится к селадониту (Лазарев, 1971). Встречаются зерна пирита, халькопирита, пирротина и пентландита. Наблюдаются вторичные изменения в виде карбонатизации, хлоритизации и ожелезнения. Структуры руд лепидо- и нематогранобластовые, текстуры полосчатые, массивные, реже шлировые. Подробное петрографическое описание шлифов представлено в приложении В (таблица В.3).

### 3.4.2 Типизация структур

Типизация структур железистые кварциты выполнена аналогично предыдущему случаю по двум (магнетит и матрица) и трем минералам (магнетит, кварц и матрица). Под матрицей здесь также подразумевается сумма межзерновых контактов остальных минералов. Поскольку изучались шлифы, контакты между рудными минералами не учтены. При этом количество сульфидов в образцах незначительное. Матрицы вероятностей для двух минералов представлены в таблице 19, положение фигуративных точек показано на рисунке 48.

Таблица 19 – Расчеты структурных типов для двух минералов. P – рудный минерал (магнетит), M - матрица (все остальные минералы). Контакты P-P не учтены.

№ шлифа	Матрица вероятностей	Диагональная форма	Структурный тип
	$\begin{bmatrix} M - M & (P - M)/2 \\ (P - M)/2 & P - P \end{bmatrix}$		
ТКШ-7	$\begin{bmatrix} 0,842 & 0,079 \\ 0,079 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-8	$\begin{bmatrix} 0,711 & 0,145 \\ 0,145 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-15	$\begin{bmatrix} 0,625 & 0,187 \\ 0,187 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$

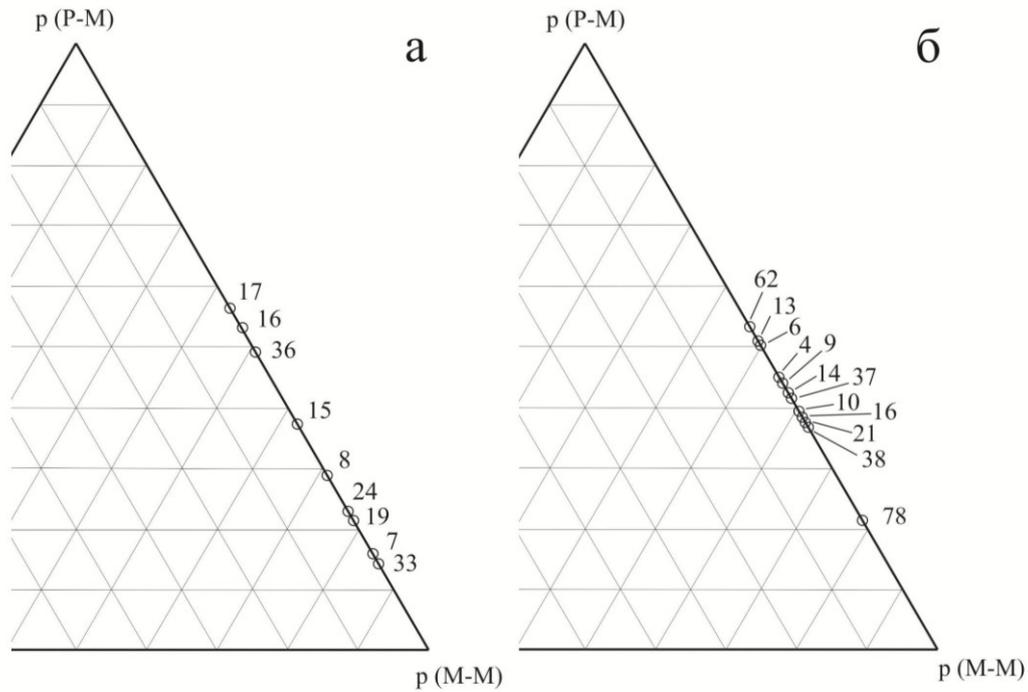
Продолжение таблицы 19

ТКШ-16	$\begin{bmatrix} 0,468 & 0,266 \\ 0,266 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-17	$\begin{bmatrix} 0,435 & 0,282 \\ 0,282 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-19	$\begin{bmatrix} 0,779 & 0,110 \\ 0,110 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-24	$\begin{bmatrix} 0,772 & 0,114 \\ 0,114 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-33	$\begin{bmatrix} 0,855 & 0,072 \\ 0,072 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ТКШ-36	$\begin{bmatrix} 0,507 & 0,246 \\ 0,246 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-4	$\begin{bmatrix} 0,556 & 0,222 \\ 0,222 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-6	$\begin{bmatrix} 0,495 & 0,252 \\ 0,252 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-9	$\begin{bmatrix} 0,562 & 0,219 \\ 0,219 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-10	$\begin{bmatrix} 0,609 & 0,195 \\ 0,195 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-13	$\begin{bmatrix} 0,493 & 0,254 \\ 0,254 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-14	$\begin{bmatrix} 0,581 & 0,209 \\ 0,209 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-16	$\begin{bmatrix} 0,621 & 0,189 \\ 0,189 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-21	$\begin{bmatrix} 0,619 & 0,190 \\ 0,190 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$

Продолжение таблицы 19

ЛКШ-37	$\begin{bmatrix} 0,577 & 0,211 \\ 0,211 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-38	$\begin{bmatrix} 0,624 & 0,188 \\ 0,188 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-62	$\begin{bmatrix} 0,467 & 0,266 \\ 0,266 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$
ЛКШ-78	$\begin{bmatrix} 0,787 & 0,106 \\ 0,106 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$S_2^1$

ТКШ-руды распределены по диаграмме равномерно (рисунок 48, слева) и тяготеют к вершине р (М-М), что связано с большим числом контактов М-М (в частности, сростков амфиболов и биотита). Присутствие значительной доли силикатов усложняет раскрытие сростков при флотации. Расположение фигуративных точек свидетельствует об изменчивости соотношения межзерновых контактов (то есть характеристик руды) в пределах одного типа, что также усложняет извлечение магнетита. Основная часть ЛКШ-руд (рисунок 48, справа) расположена на середине ребра диаграммы близко друг к другу, что указывает на примерно одинаковые характеристики руд. В этом случае увеличивается число контактов Р-М (больше свободных зерен магнетита), что упрощает раскрытие сростков и извлечение магнетита. Таким образом, типизация по двух минералам отражает общие характеристики извлечения магнетита на основе соотношения различных типов контактов, что согласуется с технологическими данными.



а - ТКШ-руды, б - ЛКШ-руды

Рисунок 48 – Фрагменты барицентрических диаграмм для железных руд.

Р – рудный минерал (магнетит), М – матрица. Контакты Р-Р не учтены.

В результате типизации структур по трем минералам (таблица 20) получены два структурных типа из трех возможных. При этом оба типа структур характерны и для ЛКШ-руд, и для ТКШ-руд, что связано с присутствием в обеих рудах двух разновидностей железистых кварцитов I и II, которые упоминаются в литературе и выделены на основе структурно-вещественных особенностей (Shibaeva et al., 2021).

Таблица 20 – Расчеты структурных типов для трех минералов. Кв – кварц, Р – рудный (магнетит), М - матрица (все остальные минералы). Контакты Р-Р не учтены.

№ шлифа	Матрица вероятностей			Диагональная форма	Структурный тип
	$\begin{bmatrix} \text{Кв} - \text{Кв} & (\text{Кв} - \text{Р})/2 & (\text{Кв} - \text{М})/2 \\ (\text{Кв} - \text{Р})/2 & \text{Р} - \text{Р} & (\text{Р} - \text{М})/2 \\ (\text{Кв} - \text{М})/2 & (\text{Р} - \text{М})/2 & \text{М} - \text{М} \end{bmatrix}$				
ТКШ-7	$\begin{bmatrix} 0,750 & 0,075 & 0,045 \\ 0,075 & 0 & 0,004 \\ 0,045 & 0,004 & 0,001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$		
ТКШ-8	$\begin{bmatrix} 0,512 & 0,124 & 0,096 \\ 0,124 & 0 & 0,021 \\ 0,096 & 0,021 & 0,006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$		

Продолжение таблицы 20

ТКШ-15	$\begin{bmatrix} 0,428 & 0,144 & 0,085 \\ 0,144 & 0 & 0,044 \\ 0,085 & 0,044 & 0,026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ТКШ-16	$\begin{bmatrix} 0,399 & 0,253 & 0,030 \\ 0,253 & 0 & 0,014 \\ 0,030 & 0,014 & 0,008 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ТКШ-17	$\begin{bmatrix} 0,324 & 0,245 & 0,054 \\ 0,245 & 0 & 0,037 \\ 0,054 & 0,037 & 0,005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ТКШ-19	$\begin{bmatrix} 0,104 & 0,023 & 0,109 \\ 0,023 & 0 & 0,087 \\ 0,109 & 0,087 & 0,457 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ТКШ-24	$\begin{bmatrix} 0,711 & 0,106 & 0,031 \\ 0,106 & 0 & 0,007 \\ 0,031 & 0,007 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ТКШ-33	$\begin{bmatrix} 0,647 & 0,062 & 0,091 \\ 0,062 & 0 & 0,011 \\ 0,091 & 0,011 & 0,025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ТКШ-36	$\begin{bmatrix} 0,287 & 0,183 & 0,099 \\ 0,183 & 0 & 0,064 \\ 0,099 & 0,064 & 0,022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-4	$\begin{bmatrix} 0,436 & 0,194 & 0,051 \\ 0,194 & 0 & 0,028 \\ 0,051 & 0,028 & 0,018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ЛКШ-6	$\begin{bmatrix} 0,282 & 0,200 & 0,102 \\ 0,200 & 0 & 0,052 \\ 0,102 & 0,052 & 0,010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-9	$\begin{bmatrix} 0,352 & 0,178 & 0,090 \\ 0,178 & 0 & 0,040 \\ 0,090 & 0,040 & 0,030 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ЛКШ-10	$\begin{bmatrix} 0,256 & 0,138 & 0,135 \\ 0,138 & 0 & 0,057 \\ 0,135 & 0,057 & 0,082 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ЛКШ-13	$\begin{bmatrix} 0,275 & 0,196 & 0,102 \\ 0,196 & 0 & 0,057 \\ 0,102 & 0,057 & 0,014 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-14	$\begin{bmatrix} 0,406 & 0,177 & 0,082 \\ 0,177 & 0 & 0,032 \\ 0,082 & 0,032 & 0,011 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$

Продолжение таблицы 20

ЛКШ-16	$\begin{bmatrix} 0,342 & 0,148 & 0,117 \\ 0,148 & 0 & 0,042 \\ 0,117 & 0,042 & 0,045 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ЛКШ-21	$\begin{bmatrix} 0,336 & 0,134 & 0,113 \\ 0,134 & 0 & 0,056 \\ 0,113 & 0,056 & 0,057 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & + & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^2$
ЛКШ-37	$\begin{bmatrix} 0,515 & 0,201 & 0,030 \\ 0,201 & 0 & 0,011 \\ 0,030 & 0,011 & 0,001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-38	$\begin{bmatrix} 0,291 & 0,132 & 0,142 \\ 0,132 & 0 & 0,056 \\ 0,142 & 0,056 & 0,047 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-62	$\begin{bmatrix} 0,318 & 0,236 & 0,069 \\ 0,236 & 0 & 0,031 \\ 0,069 & 0,031 & 0,010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$
ЛКШ-78	$\begin{bmatrix} 0,082 & 0,031 & 0,205 \\ 0,031 & 0 & 0,075 \\ 0,205 & 0,075 & 0,296 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & & \\ & - & \\ & & + \end{bmatrix}$	$S_3^1$

Структура  $S_3^1$  характерна для образцов с мелкозернистым магнетитом в сростках либо для образцов с большим количеством амфиболов и биотита. Магнетит в таких рудах наблюдается также в виде пойкилитовых вростков в амфиболах. Подобные особенности влияют на раскрытие сростков: мелкозернистый магнетит требует дополнительного измельчения, а наличие силикатов усложняет флотацию с точки зрения разделения сростков с магнетитом (Абрамов, 2004; Северов, 2011).

Таким образом, типизация структур по трем минералам характеризует особенности раскрытия минеральных сростков. Структура  $S_3^1$  характерна для руд, структурно-вещественные особенности которых усложняют извлечение магнетита. Структура  $S_3^2$  характерна для руд с крупными и свободными зернами магнетита в сростках преимущественно с кварцем, что положительно влияет на извлечение.

### 3.5 Выводы по главе 3

Глава посвящена практическим приложениям методологии типизации структур минеральных агрегатов на основе статистики межзерновых контактов. Разработанные автором модельные тренды, нанесенные на барицентрические диаграммы (глава 2), опробованы на примере амфиболитов Керетского архипелага. Положение фигуративных точек согласуется для бинарных и тернарных контактов. Образцы характеризуются наличием шлиров, состоящих из зерен амфибола, и цепочечным расположением зерен амфибола и биотита, что соответствует положению фигуративных точек относительно модельных трендов.

Образцы амфиболитов также проверены на соответствие «идеальной» структуре в ее статистическом смысле с помощью критерия Пирсона на основе вероятностей тернарных контактов. Расчетные значения значительно отличаются от порогового, следовательно, гипотеза о соответствии структуры «идеальной» отвергается. Таким образом, показано, что линия равновесия Харди-Вайнберга недостижима, идеальное перемешивание минеральных зерен в агрегате в природе не наблюдается. Соответствие структуры минерального агрегата «идеальной» должно оцениваться на основе статистических критериев согласия. На основе исследования амфиболитов сформулировано второе защищаемое положение:

**2. Статистическое равновесие Харди-Вайнберга отвечает гомогенному перемешиванию минеральных зерен при любом модалном составе агрегата, а его соответствие статистически равновесному агрегату проверяется критериями согласия.**

Предложенные автором барицентрические диаграммы с модельными трендами можно использовать для количественной характеристики похожих структур (на диаграмме это будут разные фигуративные точки) и выявления тонких различий между минеральными агрегатами.

В следующей части главы методология типизации структур на основе статистики вероятностей межзерновых контактов впервые применена автором для характеристики рудных объектов: апатитовых руд Хибинского массива и железистых кварцитов Костомукшского рудного поля. В обоих случаях получены похожие результаты. При расчетах по двум минералам фигуративные точки руд располагаются на барицентрическом треугольнике согласно соотношению межзерновых контактов, что отражает относительную степень обогатимости (извлечение рудного минерала). Например, для апатитовых руд наблюдается тренд, в котором от сплошных апатитовых руд с наилучшим извлечением происходит переход к более бедным рудам. Типизация по трем минералам отражает особенности раскрытия сростков рудного минерала с остальными.

На основе исследования апатитовых и железных руд сформулировано третье защищаемое положение:

### **3. Установленные на основе построенной модели структурные типы апатитовых (Хибины) и железных (Костомукша) руд коррелируют со степенью извлечения полезного минерала.**

Дальнейшее увеличение числа минералов позволяет выявить более тонкие различия между образцами на уровне минеральных сростаний и сопоставить с известными характеристиками извлечения. В принципе методологию типизации структур можно применять для любого числа минералов в агрегате (глава 1), но при увеличении числа минералов возникают сложности, связанные с качественным и оперативным получением исходных данных. Возможности автоматизации процесса подсчета межзерновых контактов рассмотрены в следующей главе.

Проведенные исследования показали возможность применения методологии типизации структур для изучения руд. Выявлена связь между типом структуры и особенностями извлечения рудного минерала. В перспективе планируется использовать подход для разделения руд на технологические типы и сопоставления структур руд с их физико-механическими свойствами, что может быть полезно при отсутствии явных различий между рудами по химическому или минеральному составу.

## ГЛАВА 4 СПОСОБЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОДСЧЕТА МЕЖЗЕРНОВЫХ КОНТАКТОВ

### 4.1 Обзор методик и программного обеспечения

Получение количественной информации о структуре и текстуре затруднено с технической точки зрения, поскольку необходимо получать корректные данные на большом объеме фактического материала за небольшой промежуток времени (Бродская, Марин, 1979). Для проведения расчетов в рамках рассматриваемой методологии необходимо получить статистику вероятностей межзерновых контактов. Ручные подсчеты наиболее точны, но это рутинная операция, занимающая много времени, что не позволяет широко внедрять подход на практике. В этой главе рассмотрены различные способы автоматизации минералогических исследований, возможности их применения для наших целей, а также изучено применение анализатора структур МИУ-5М для полуавтоматического подсчета межзерновых контактов.

Сегодня существует множество подходов для распознавания структур и текстур минеральных агрегатов, в том числе на основе анализа изображения (Lepisto, 2005; Kachanubal, 2008; Ładniak et al., 2015; Lobos, 2016). Для распознавания рудных минералов и определения их различных морфометрических характеристик хорошо подходят программные пакеты ImageJ и Thixomet (Рудашевский и др, 2018; Толкунова и др., 2020), однако в случае порообразующих минералов возникают сложности, так как эти программы не позволяют определять зерна разного сечения, отличающиеся цветами интерференции, как один минерал. Использование подобных программ для нашей методики требует написания специальных надстроек.

В Германии разработана программа QMA (Porov et al., 2020), которая позволяет получать различные количественные параметры горных пород на основе шлифов, сделанных по 3-м взаимно перпендикулярным направлениям (рисунок 48). Однако QMA не позволяет корректно считать границы зерен, здесь также необходима специальная надстройка.

В современной геологии активно используется компьютерная томография (СТ), которая позволяет работать не с плоскими срезами горных пород, а с объемным образцом за счет просвечивания его рентгеновскими лучами (рисунок 49). Основная проблема компьютерной томографии – хорошее разделение сульфидов и силикатных минералов, а также определение порового пространства, но различить минеральные фазы с помощью этого метода для силикатов (например, кварц и полевые шпаты) не представляется возможным (Porov et al., 2020).

Одни из самых современных методов исследования вещества – технологии QEMSCAN и Tescan TИМА, основанные на сканировании образца в обратно рассеянных электронах с целью различения минеральных зерен и рентгеноспектральном анализе для количественной

характеристики их состава (Hrstka et al., 2018; Guanira et al., 2020). По результатам сканирования строится карта минерала или шлифа, где указаны различные фазы (рисунок 50). Эти технологии позволяют получать карту без распознавания минералов оператором и отрисовки шлифа вручную. Основной недостаток QEMSCAN и Tescan TIMA – высокая стоимость и отсутствие подобных приборов в широком доступе. К тому же, для нашего подхода все равно необходима дальнейшая обработка карты, поскольку нет программ, которые корректно считали бы количество границ зерен согласно методике.

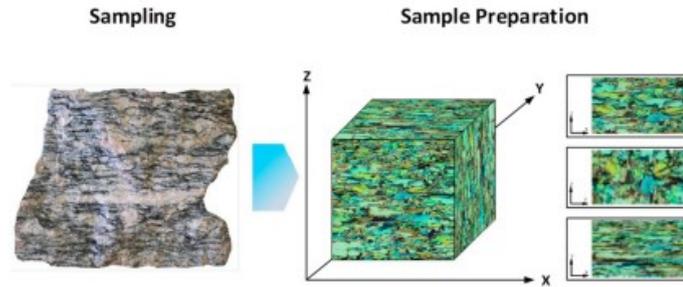


Рисунок 48 – Подготовка образца для QMA-анализа (Popov et al., 2020)

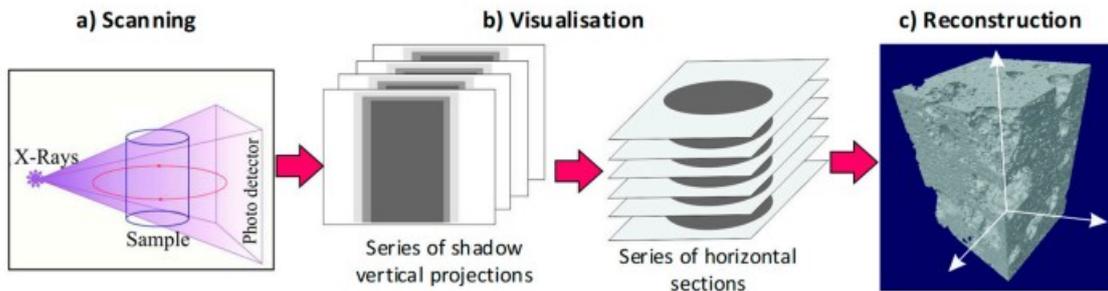


Рисунок 49 – Процесс получения модели образца с помощью СТ (Popov et al., 2020)

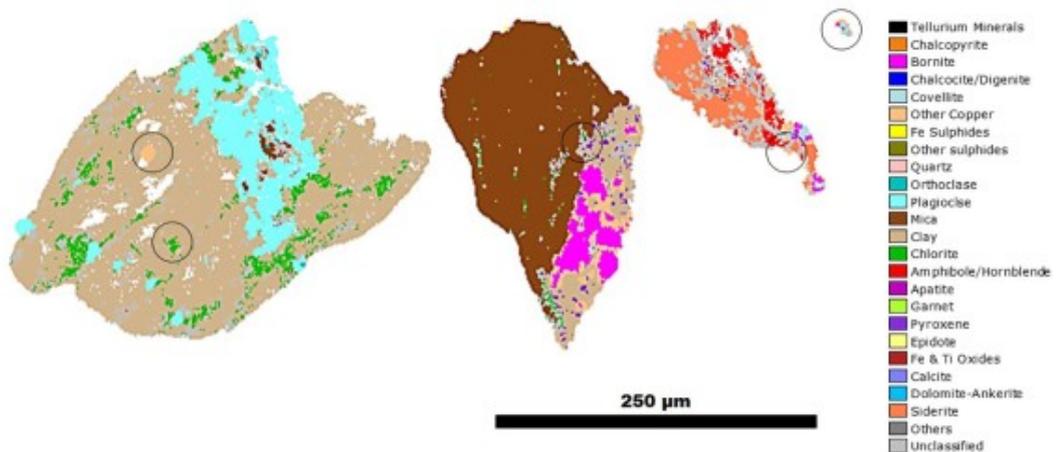


Рисунок 50 – Примеры минеральных карт для частиц из хвостов, полученных с помощью QEMSCAN (Guanira et al., 2020)

Автором разработана методика применения аналитического аппарата программы ArcGIS для автоматического подсчета количества межзерновых контактов (Захарова и др., 2020-2, 2020-3). В программу загружается рисунок шлифа или панорамный снимок хорошего качества, затем границы фиксируются построением линий с занесением ее цвета в таблицу атрибутов, где потом типы контактов автоматически суммируются (рисунок 51). Преимущества использования ArcGIS заключаются в упрощении процесса подсчета, а также исключении ошибок, связанных с малым размером зерен. Недостатки: нанесение линий занимает достаточно много времени и не позволяет быстро обработать большое количество шлифов.

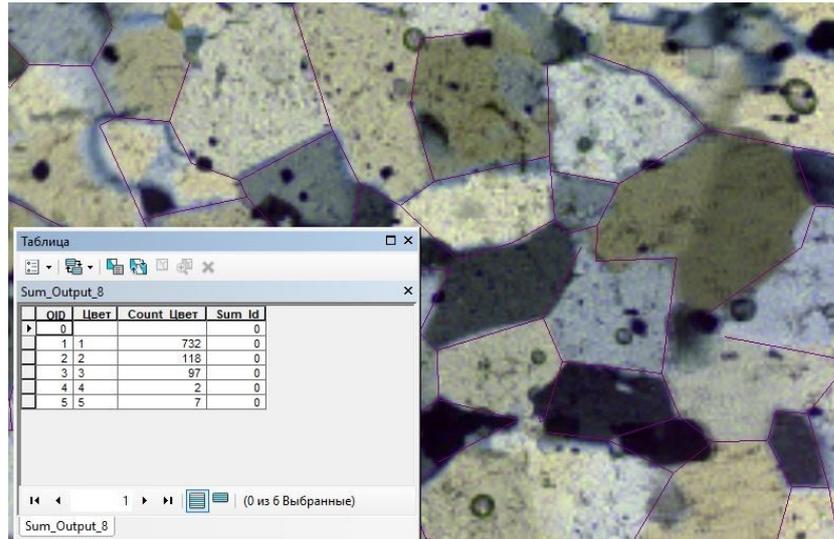


Рисунок 51 – Пример расчетов в программе ArcGIS. Показан фрагмент шлифа с нанесенными линиями (розового цвета) и таблица атрибутов (цифрами в столбце «Цвет» обозначены типы границ в данном шлифе, в столбце «Count\_Цвет» просуммировано количество границ).

## 4.2 Методика полуавтоматической обработки шлифов на МИУ-5М

### 4.2.1 Краткое описание анализатора структур МИУ-5М

Различные приборы для получения количественной информации появились ещё в начале XX века. К полуавтоматическим устройствам, где выбор предмета производит оператор, а нужный параметр измеряется автоматически, относятся телевизионные микроскопы (Квантимет-720, Омникон, Микровидиомат и др.), а также серия анализаторов МИУ (Бродская, Марин, 1979).

Позднее появились приборы «с прямой и обратной связью» (MOP/AMO1, ASM), где изображение структуры из микроскопа выводится на экран, а оператор с помощью специального пера обводит границы нужных минеральных зерен или агрегатов для получения различных геометрических характеристик (Бродская, Марин, 1979). Такой подход в дальнейшем развивался в программах для распознавания минералов на изображении, где границы обводятся автоматически (например, в ImageJ).

Минералогическое интеграционное устройство (МИУ-5М) появилось в конце XX века. Анализатор задумывался как продолжение и развитие линейно-дискретного метода геометрического анализа, основы которого в нашей стране заложены А.А. Глаголевым (Глаголев, 1941; Бродская, Марин, 2001).

МИУ-5М предназначен для количественного анализа структуры минеральных агрегатов под микроскопом. Анализ структуры производится оптико-геометрическим методом в проходящем и отраженном свете при сканировании объекта в плоскости предмета (с помощью сканирующего стола) или в плоскости изображения (с помощью окулярного сканирующего устройства). Геометрический анализ проводится на площади 40×60 мм. В результате сканирования и синхронной математической обработки первичных данных возможно получение 22 параметров строения минерального агрегата. Например, определение модального и гранулометрический состава; получение информации о размерах, площади и др. характеристиках отдельных зерен; измерение коэффициента агрегативности, удельных поверхностей минеральных индивидов и поверхностей раздела фаз (Анализатор структуры полуавтоматический МИУ-5М, 1989; Бродская, Марин, 2001).

В основу действия МИУ-5М заложены линейно-дискретный и точечный методы оптико-геометрического анализа агрегатов под микроскопом, сущность которых сводится к измерению в плоскости сечения горной породы длин отрезков (или точек), приходящихся на каждый минерал в отдельности. Измерения проводятся при наблюдении анализируемого объекта в микроскоп и сканировании объекта в плоскости предмета в полуавтоматическом режиме. Измерение длин отрезков (или числа точек), приходящихся на каждый минерал, происходит

при движении сканирующего стола от электродвигателя при нажатии одной из клавиш на пульте управления, закрепленной за соответствующим минералом. Измеренные величины в виде импульсов (шагов) поступают в компьютер, где обрабатываются для получения необходимых параметров количественного анализа (Анализатор структуры полуавтоматический МИУ-5М, 1989).

Анализатор структур МИУ-5М состоит из крупных функциональных блоков (рисунок 52): а) микроскопа со сканирующим столиком, б) вычислительного устройства с электродвигателем, управляющего столиком, в) блоков питания осветителей микроскопа и г) персонального компьютера, с помощью которого осуществляется управление устройством.

Использование МИУ-5М имеет следующее преимущество: получение данных непосредственно со шлифа, обработка которого занимает 1-2 часа. Недостатки: необходимость пересчета данных и присутствия оператора, влияние на результаты минеральных и структурных особенностей горной породы или руды (Захарова и др., 2022).



Рисунок 52 – Общий вид анализатора МИУ-5М. Буквами показано расположение координатных осей. Цифрами обозначены: 1 – микроскоп, 2 – сканирующий столик, 3 – электродвигатель, 4 – монитор рабочего компьютера. Блоки питания расположены справа под рабочим столом.

## 4.2.2 Методика работы

МИУ-5М имеет несколько режимов работы, позволяющих решать различные задачи. Данные с устройства выводятся на экран при помощи специальной программы Miu, где указываются параметры сканирования, число минералов и результаты, которые по окончании работы записываются в файл (рисунок 53).

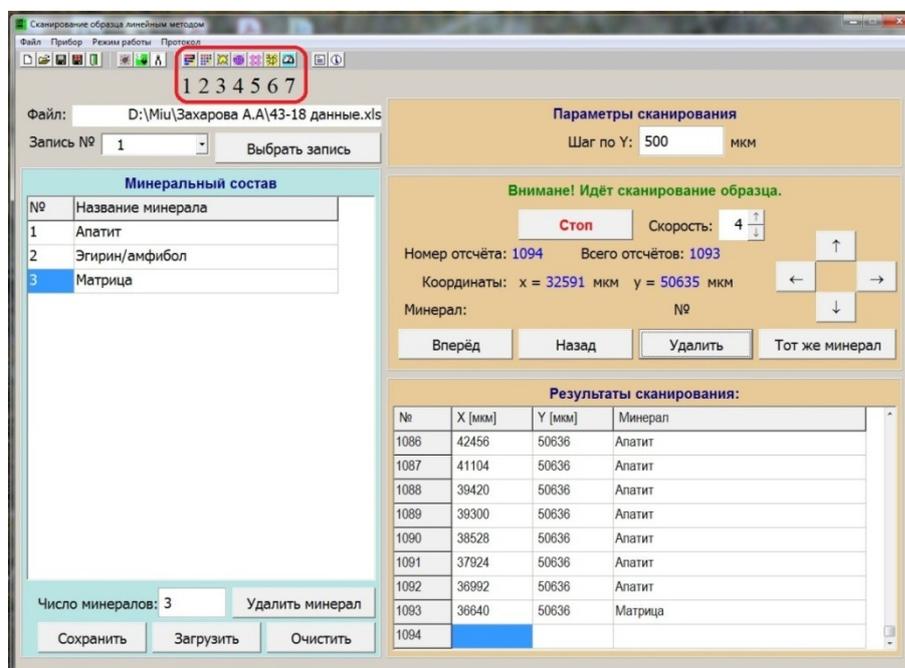


Рисунок 53 – Интерфейс программы Miu (версия 2007 г.). В красном прямоугольнике располагаются кнопки режимов сканирования: 1 – сканирование образца линейным методом, 2 – сканирование образца точечным методом, 3 – снятие координат зерен и их обработка по методу Фурье, 4 – определение фрактальной размерности методом FAENA, 5 – определение фрактальной размерности агрегата методом подсчета клеток, 6 – анализ разбиений Делоне, 7 – тестирование работы анализатора.

Шлифы изучены в режиме сканирования образца линейным методом, который заключается в перемещении столика по прямым линиям. Входные параметры для этого режима (Методические указания по работе на МИУ-5М, 2005):

1.  $a$  – длина шага сканирования по оси  $X$ , мкм (определяется устройством анализатора); в этом устройстве  $a = 4$  мкм;
2.  $b$  – величина шага сканирования по оси  $Y$ , мкм (вводится оператором перед началом работы);
3.  $n$  – количество минералов (количество и названия вводятся оператором, число минералов не ограничено)
4. скорость движения столика (от 1 до 6, задается оператором).

Алгоритм действий при работе со шлифами:

1. Включить компьютер, блок питания, электродвигатель, открыть программу Miu и подключиться к прибору.
2. Закрепить шлиф на сканирующем столике, настроить свет и резкость.
3. Задать начальные координаты столика, выбрать шаг сканирования по Y, скорость движения столика, добавить минеральный состав горной породы.
4. Начать сканирование, нажав кнопку «Старт» в окне программы. Управление столиком осуществляется с помощью стрелок на клавиатуре, минералы обозначаются цифрами. Оператору необходимо смотреть в микроскоп, одновременно перемещая столик, и фиксировать границы минералов.
5. По окончании сканирования нажать кнопку «Стоп» и сохранить данные в файл Excel, удобный для дальнейшей обработки. При необходимости можно нажать кнопку «Расчет» для получения дополнительных параметров. Их также можно сохранить в отдельный файл (рисунок 54).

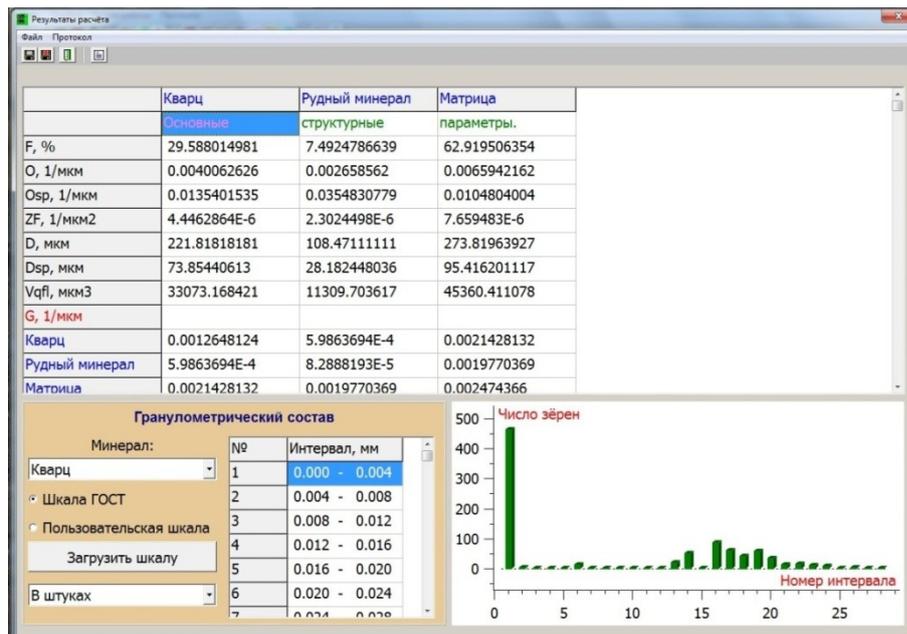


Рисунок 54 – Пример расчета различных количественных параметров.

По результатам сканирования формируется файл, в котором указаны минеральный состав породы, условия сканирования, количество и тип границ. На отдельной вкладке расположен протокол, в который можно добавить необходимую информацию по шлифу (рисунок 55).

	A	B	C		A	B
1	Линейное сканирование			1	Дата:	25.03.2022
2	Минеральный состав:			2	Начало работы:	14:40
3	Число минералов: 3			3	Окончание работы:	16:00
4	№	Минерал		4	Оператор:	
5	1	Кварц		5	Увеличение объектива:	10x
6	2	Рудный минерал		6	Номер шлифа:	ЛКШ-6
7	3	Матрица		7	Привязка:	Корпангское месторождение
8	Условия сканирования:			8	Горная порода:	Железистый кварцит
9	Шаг по Y (мкм): 200			9	Минеральный состав:	
10				10	Структура:	
11	Результаты сканирования:			11	Текстура:	
12	X (мкм)	Y (мкм)	Минерал	12	Регион:	
13	29308	26800	Кварц	13	Владелец:	
14	29632	26800	Кварц	14	Задачи исследования:	
15	30128	26800	Матрица			
16	30340	26800	Кварц			
17	30340	26800	Кварц			
18	30636	26800	Матрица			
19	30636	26800	Рудный минерал			

Рисунок 55 – Фрагмент таблицы с результатами сканирования (слева), пример заполнения протокола (справа).

#### 4.2.3 Обработка исходных данных

По результатам сканирования шлифа создается файл Excel, данные в котором необходимо пересчитывать для получения статистики вероятностей. Для этого необходимо определить возможные типы контактов для изучаемых горных пород и руд и подсчитать количество контактов каждого типа. Затем нужно внести данные в матрицу, получить ее диагональную форму и определить структурный тип для образца (согласно принципу номенклатуры, структура  $S_n^m$  соответствует диагональной матрице  $D$ , в которой на  $n$  позициях стоят  $m$  положительных значений).

Для пересчета исходных данных разработан следующий алгоритм:

1. Обработка массива данных: удаление лишних ячеек, которые появляются при перемещении вдоль оси Y, выделение цветом различных типов контактов, создание столбцов для подсчета каждого типа контактов (рисунок 56).

2. Подсчет контактов вручную, в ходе которого количество границ фиксируется в нужном столбце (рисунок 56). Использовать различные встроенные функции для подсчета («СЧЕТ, СЧЕТЗ») не рекомендуется, так как для корректного подсчета границ нужно фиксировать отдельно соседние ячейки, которые обозначают контакт (просто подсчитать число заполненных ячеек нельзя) и в случае большого массива данных проще обрабатывать данные вручную.

3. По окончании обработки данных необходимо найти сумму всех чисел в столбцах. Для дальнейших подсчетов можно использовать либо непосредственно число контактов, либо пересчет на вероятности контактирования, оба варианта дают корректный результат.

7	3 Матрица			Число границ						
8	Условия сканирования:									
9	Шаг по Y (мкм): 500			Ап-Ап	Ап-Э	Ап-М	Э-Э	Э-М	М-М	
10										
11	Результаты сканирования:									
12	X (мкм)	Y (мкм)	Минерал							
13	20000	20240	Апатит							
14	20344	20240	Апатит							
15	20608	20240	Апатит							
16	21036	20240	Апатит	3						
17	21300	20240	Эгирин/амфибол							
18	21568	20240	Апатит							
19	21920	20240	Эгирин/амфибол		4					
20	22936	20240	Апатит							
21	23292	20240	Апатит							
22	23480	20240	Апатит							
23	23480	20240	Апатит							
24	23916	20240	Апатит	4						
25	24272	20240	Эгирин/амфибол		2					
26	25376	20240	Апатит							
27	25644	20240	Апатит							
28	25832	20240	Апатит	2						
29	26432	20240	Эгирин/амфибол							
30	27764	20240	Апатит							
31	27496	20740	Эгирин/амфибол							
32	25212	20740	Апатит							
33	24608	20740	Эгирин/амфибол		6					
34	23752	20740	Апатит							
35	23400	20740	Матрица							
36	23128	20740	Апатит				2			

Рисунок 56 – Пример обработки исходных данных.

Разные типы границ выделены цветом, справа расположены столбцы для подсчета.

#### 4.2.4 Результаты сканирования

Автором на МИУ-5М отснято 35 шлифов, представленных амфиболитами Керетского архипелага, апатитовыми рудами Хибинского массива и железистыми кварцитами Костомукшского рудного поля. Их структурные типы определены с помощью ручных подсчетов в главе 3.

Сравнение положения фигуративных точек при разных способах расчета для амфиболитов и апатитовых руд показано на рисунке 57 (Захарова и др., 2022). Структурные типы совпали для 10 из 14 образцов. Шлифы, в которых при расчетах на МИУ-5М произошел переход к другому типу, изучены дополнительно. Для амфиболитов это образцы 10 и 14 (шаг сканирования 300 мкм). В первом случае влияние оказали кварц-плагиоклазовые шпирсы, в которых зерна различить трудно из-за близких оптических свойств (в процессе съемки невозможно поворачивать шлиф). В шлифе 14 средний размер зерна почти в два раза меньше, чем у остальных образцов, что исказило статистику из-за пропуска мелких зерен кварца и плагиоклаза. В обоих образцах занижено число именно таких контактов.

Для апатитовых руд структурный тип поменялся у шлифов 2 и 8, в которых присутствуют хадаккристаллы апатита в эгирине (шаг сканирования 500 мкм). Установлено, что элементы пойкилитовой структуры вносят изменение в статистику контактов, поскольку большое число мелких хадаккристаллов сложно точно зафиксировать при сканировании при стандартном увеличении.

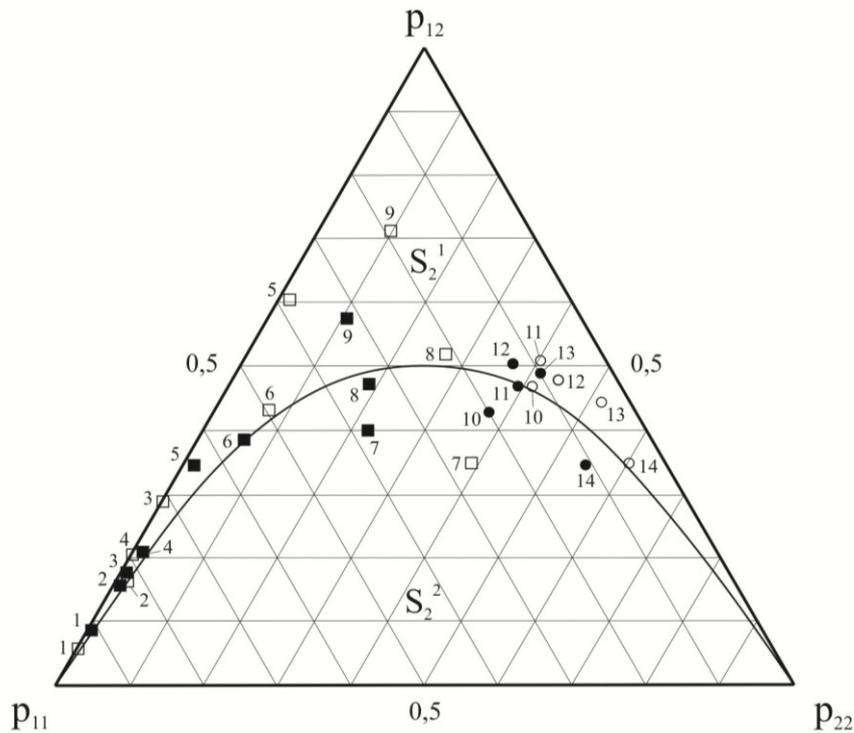


Рисунок 57 – Барицентрическая диаграмма вероятностей  $p_{ij}$ . Квадратами показаны апатитовые руды: номера точек соответствуют номерам образцов, за исключением точек 7 (образец 9) и 9 (образец 7). Кругами обозначены амфиболиты: 10 – образец 710, 11 – 711, 12 – S4, 13 – S2, 14 – V2. Залитые символы – расчеты вручную, пустые – расчеты на МИУ-5М.

Сравнение положения фигуративных точек для железистых кварцитов при расчетах по двум минералам показано на рисунках 58 и 59. Руды в этом случае располагаются на ребре диаграммы (контакты между рудными минералами не учтены), поэтому структурный тип у всех образцов одинаковый, но при этом можно оценить положение фигуративных точек при разных способах расчета. Дополнительно проанализированы расчеты по трем минералам (кварц, магнетит и матрица) для выявления переходов к другому типу структуры при расчетах на МИУ-5М (таблица 21).

Анализ результатов (таблица 21) показал, что в шлифах 14, 36 и 38 наблюдаются пойкилитовые вроски магнетита в амфиболах, что искажает статистику. Остальные шлифы мелкозернистые и в них занижено количество кварц-кварцевых контактов по сравнению с ручными подсчетами, что связано с шагом сканирования (пропуском мелких зерен).

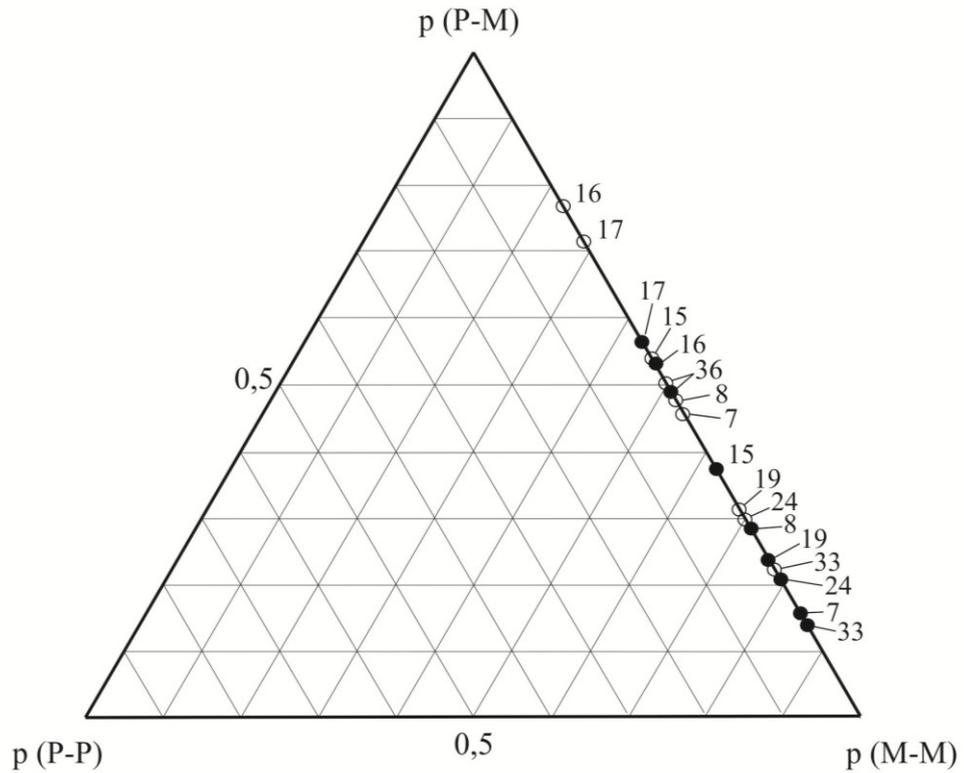


Рисунок 58 – Бариецентрическая диаграмма вероятностей  $p_{ij}$  для ТКШ-руд (Костомукшское м-е).

P – рудный минерал (магнетит), M – матрица. Залитые символы – расчеты вручную, пустые – расчеты на МИУ-5М. Номера точек соответствуют номерам образцов.

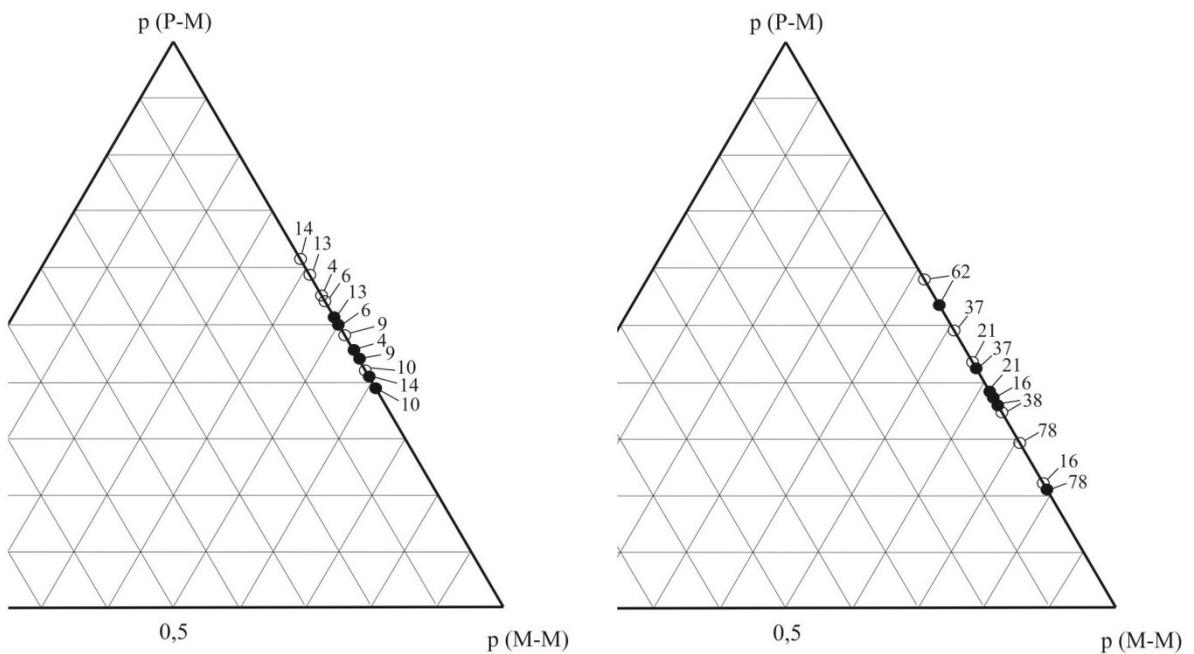


Рисунок 59 – Фрагменты бариецентрических диаграмма вероятностей  $p_{ij}$  для ЛКШ-руд (Корпангское м-е). P – рудный минерал (магнетит), M – матрица. Залитые символы – расчеты вручную, пустые – расчеты на МИУ-5М. Номера точек соответствуют номерам образцов.



Апатитовые руды											
Значение критерия Пирсона											
1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1096,58	57,96	1925,44	2414,83	2808,53	92,60	2268,54	383,22	161,72			
Железные руды (расчеты по двум минералам)											
Значение критерия Пирсона											
ТКШ-7	ТКШ-8	ТКШ-15	ТКШ-16	ТКШ-17	ТКШ-19	ТКШ-24	ТКШ-33	ТКШ-36			
2535,74	817,50	292,43	429,32	456,23	574,33	63,41	76,26	0,70			
ЛКШ-4	ЛКШ-6	ЛКШ-9	ЛКШ-10	ЛКШ-13	ЛКШ-14	ЛКШ-16	ЛКШ-21	ЛКШ-37	ЛКШ-38	ЛКШ-62	ЛКШ-78
111,42	20,99	175,88	8,65	88,45	335,42	374,36	24,86	76,38	11,87	16,25	94,51
Железные руды (расчеты по трем минералам)											
Значение критерия Пирсона											
ТКШ-7	ТКШ-8	ТКШ-15	ТКШ-16	ТКШ-17	ТКШ-19	ТКШ-24	ТКШ-33	ТКШ-36			
6697,58	1295,68	998,90	429,85	2227,00	882,38	1194,68	289,50	66,21			
ЛКШ-4	ЛКШ-6	ЛКШ-9	ЛКШ-10	ЛКШ-13	ЛКШ-14	ЛКШ-16	ЛКШ-21	ЛКШ-37	ЛКШ-38	ЛКШ-62	ЛКШ-78
428,98	50,41	607,52	23,46	142,41	366,93	660,48	75,34	138,18	73,90	178,72	210,90

Рисунок 61 – Результаты расчетов критерия Пирсона для апатитовых и железных руд.

Желтым цветом выделено значение критерия ниже порогового.

В результате оценки расхождения данных при расчетах вручную и на МИУ-5М с помощью критерия Пирсона установлено, что оно значимо на уровне  $\alpha = 0,05$  (для двух минералов пороговое значение критерия – 5,99, для трех – 11,07). Из всех образцов отличия не значимы только для образца ТКШ-36 (рисунок 61). При этом переход к другому структурному типу при разных способах расчета не связан с величиной критерия Пирсона и наблюдается как для малых отклонений, так и для более значимых (образцы 2 и 8, рисунок 59). Такое расхождение связано с особенностями работы на МИУ-5М, а именно присутствием метрической составляющей: при сканировании вдоль линий крупное зерно пересекается несколько раз, а мелкие могут быть пропущены при выбранном шаге сканирования. Ранее было показано, что крупные зерна не оказывают влияние на статистику контактов, но при этом мелкие ее искажают. Если фигуративная точка образца расположена далеко от линии равновесия Харди-Вайнберга (рисунок 57), то отличия в расчетах не влияют на тип структуры: точка смещается, но остается в том же поле (например, точка 9). Принципиальными отличия становятся для точек, расположенных вблизи линии равновесия, где даже малое отклонение может привести к переходу.

Следующим этапом исследования было сравнение матриц вероятностей и структурных типов для расчетов при разном шаге и направлении сканирования, поскольку предыдущие данные приведены только для одних параметров по каждому образцу. На этом этапе изучены образцы амфиболитов, так как они располагаются близко к линии равновесия (рисунок 57) и для них переход к другому структурному типу при небольших изменениях статистики наиболее вероятен. Для сравнения также проанализирован образец 7 из апатитовых руд, фигуративная точка которого расположена далеко от линии равновесия (рисунок 57). Результаты исследования приведены в таблице 22.

При изменении шага сканирования количество контактов увеличивается пропорционально уменьшению шага (например, в 2 раза при переходе от шага 1000 мкм к шагу 500 мкм), но при этом значения вероятностей изменяются незначительно, поскольку пропорции между разными типами контактов сохраняются. Изменение направления сканирования также не оказывает особого влияния на матрицу вероятностей. Основную роль при расчетах на МИУ-5М играет расположение фигуративной точки на барицентрической диаграмме. Небольшие изменения значений вероятностей не влияют на тип структуры в случае образца 7, но при этом для образцов амфиболитов наблюдаются переходы к другому структурному типу (таблица 22).

Таблица 22 – Сравнение структурных типов образцов для разных шагов и направлений сканирования.

Образец	Расчеты вручную	Направление и шаг сканирования			
		Вдоль удлинения			Поперек удлинения
		1000 мкм	500 мкм	300 мкм	1000 мкм
710	$\begin{bmatrix} 0,20 & 0,21 \\ 0,21 & 0,38 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,13 & 0,20 \\ 0,20 & 0,47 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,15 & 0,19 \\ 0,19 & 0,47 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 & 0,23 \\ 0,23 & 0,42 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,20 & 0,19 \\ 0,19 & 0,42 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$
711	$\begin{bmatrix} 0,14 & 0,24 \\ 0,24 & 0,38 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,08 & 0,20 \\ 0,20 & 0,52 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,23 \\ 0,23 & 0,44 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,09 & 0,25 \\ 0,25 & 0,40 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,23 \\ 0,23 & 0,45 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$
S2	$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,24 \\ 0,24 & 0,42 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,08 & 0,23 \\ 0,23 & 0,46 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,08 & 0,21 \\ 0,21 & 0,50 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,04 & 0,22 \\ 0,22 & 0,52 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,07 & 0,18 \\ 0,18 & 0,57 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$
S4	$\begin{bmatrix} 0,13 & 0,25 \\ 0,25 & 0,37 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,07 & 0,24 \\ 0,24 & 0,45 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 & 0,22 \\ 0,22 & 0,43 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,08 & 0,24 \\ 0,24 & 0,44 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,13 & 0,21 \\ 0,21 & 0,45 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$

Продолжение таблицы 22

V2	$\begin{bmatrix} 0,11 & 0,17 \\ 0,17 & 0,55 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,09 & 0,18 \\ 0,18 & 0,54 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,09 & 0,17 \\ 0,17 & 0,57 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,05 & 0,18 \\ 0,18 & 0,59 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,16 & 0,17 \\ 0,17 & 0,50 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} + & \\ & + \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 0,32 & 0,29 \\ 0,29 & 0,10 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,31 & 0,29 \\ 0,29 & 0,11 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,28 & 0,31 \\ 0,31 & 0,11 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,28 & 0,30 \\ 0,30 & 0,12 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,29 & 0,30 \\ 0,30 & 0,10 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} - & \\ & + \end{bmatrix}$

Таким образом, шаг и направление сканирования не оказывают значимого влияния на значения вероятностей, но если фигуративная точка расположена вблизи линии равновесия, даже малые искажения статистики могут приводить к неправильной типизации структуры. При использовании МИУ-5М следует выбирать одно направление сканирования для всех образцов, а шаг сканирования подбирать минимально возможный, чтобы учесть мелкие зерна минералов и повысить точность сканирования. При этом анализатор МИУ-5М нельзя считать идеально подходящим для подсчета межзерновых контактов. Анализатор основан на принципе линейного сканирования, который из-за наличия метрической составляющей (не зависящей от шага сканирования) не позволяет строго посчитать статистику контактов согласно методике.

### 4.3 Выводы по главе 4

Глава посвящена исследованию способов автоматического подсчета межзерновых контактов, поскольку это основная проблема развиваемой автором методологии типизации структур. В первой части главы рассмотрены различные методики, программы и оборудование, которые упрощают и ускоряют изучение минеральных агрегатов, но ни один из способов не подходит для топологического подсчета контактов. Во второй части подробно описан анализатор структуры МИУ-5М и приведены результаты сканирования. Принцип его работы основан на линейном сканировании шлифа, в ходе которого оператор фиксирует границы между минералами. Его преимущество заключается в быстром получении данных непосредственно со шлифа, но при этом требуются присутствие оператора и обработка результатов сканирования. Установлено, что искажение статистики наблюдается при наличии пойкилитовых вростков в минералах. Для таких случаев предлагается снимать шлиф при большем увеличении.

Для оценки расхождения данных при расчетах вручную и на МИУ-5М применен критерий Пирсона. Расхождения значимы на уровне  $\alpha = 0,05$ , но если фигуративная точка расположена далеко от линии равновесия, структурный тип не меняется. Подобное расхождение данных становится значимым в случае, когда нам важен не только тип структуры, но и положение точки на барицентрической диаграмме (например, для сравнения положения точки с модельными трендами из главы 2).

Сравнение данных для разного шага и направления сканирования показало, что значимых различий в результатах не наблюдается, так как уменьшение шага пропорционально увеличивает число контактов, и вероятности для разных случаев имеют близкие значения. Принципиально важен не сам шаг сканирования, а положение фигуративной точки. Для точек, близких к линии равновесия, даже незначительное искажение статистики при расчетах на МИУ-5М может привести к неправильной типизации структуры.

На сегодняшний день широкое внедрение предлагаемой методологии типизации структур ограничено техническими возможностями. Наличие метрической составляющей у МИУ-5М и особенности линейного сканирования не позволяют считать анализатор подходящим для подсчета межзерновых контактов. Разработка алгоритма, анализирующего образец с точки зрения топологии – задача для дальнейших исследований.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация представляет собой завершённую научно-квалификационную работу, в рамках которой предложена математическая модель минерального агрегата на основе вероятностей бинарных и тернарных межзерновых контактов. Смещение акцента с морфометрических характеристик минеральных зерен на фундаментальное отношение контактирования позволило строго определить категорию структуры и показать возможности создания новой классификации структур.

В результате исследования разработана математическая модель структур минеральных агрегатов на основе статистик вероятностей бинарных и тернарных контактов. Предложены новые классификационные диаграммы, которые можно использовать для количественной характеристики структур минеральных агрегатов.

Предложенная модель впервые применена для типизации структур руд. Установлена зависимость между структурными типами руд и степенью извлечения полезного компонента, что можно использовать для решения минералого-технологических задач, связанных с разделением руд на технологические типы.

Результаты исследования можно использовать для решения различных минералого-технологических задач, включая выделение технологических типов руд и установление связи между структурными типами и физико-механическими свойствами руд. Авторские программы позволяют наглядно представлять положение фигуративных точек образцов для тернарных контактов, а также визуализировать структурные индикатрисы по заданным значениям вероятностей. Барицентрические диаграммы с модельными трендами можно использовать для строгой количественной характеристики структур минеральных агрегатов.

В качестве будущих исследований предлагается расширение модели на полиминеральные агрегаты, изучение технологий автоматического анализа минеральных агрегатов для получения статистики вероятностей межзерновых контактов, разработка программного обеспечения, в том числе с использованием нейросетевых технологий, углубленные исследования по типизации структур руд для выявления закономерностей между структурными типами руд, их физико-механическими свойствами и извлечением полезного компонента.

## СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

1. **автоморфизм:** Отображение множества (минерального агрегата) элементов (минеральных зерен) в себя.
2. **барицентрическая диаграмма:** Диаграмма, положение точки в которой определяется как центр тяжести компонентов (вероятностей межзерновых контактов), заданных в вершинах диаграммы.
3. **контакты бинарные:** Контакты двух зерен по поверхности, в петрографическом шлифе представляют собой ребро.
4. **контакты тернарные:** Контакты трех зерен по ребру, в петрографическом шлифе представляют собой точку.
5. **контакты куотернарные:** Контакты четырех зерен в точке, в петрографический шлиф не попадают.
6. **равновесие Харди-Вайнберга:** Статистическое равновесие разных межзерновых контактов в минеральном агрегате, отвечающее идеальному перемешиванию минеральных зерен при его любом модальном составе.
7. **симплекс:** Простейший многогранник в  $n$ -мерном пространстве (на плоскости – треугольник, в 3D – тетраэдр).
8. **структурная индикатриса:** Геометрический образ структуры, задаваемый уравнением (4).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Абрамов, А. А. Переработка, обогащение и комплексное использование твердых полезных ископаемых: учебник для вузов / А. А. Абрамов. – М.: Изд-во МГГУ, 2004. – Т. II, 510 с.
2. Анализатор структуры полуавтоматический МИУ-5М. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. – Л.: ЛОМО, 1989. – 56 с.
3. Беленький, В. З. Геометрико-вероятностные модели кристаллизации. Феноменологический подход / В. З. Беленький. – М.: Наука, 1980. – 88 с.
4. Белоусов, А. Ф. К общей концепции горной породы / А. Ф. Белоусов. – Н.: ИГГ СО АН СССР, 1987. – 52 с.
5. Березин, А. В. Эволюция состава минералов при эклогитовом метаморфизме в Беломорском подвижном поясе (на примере о-ва Виченная Луда) / А. В. Березин, Л. И. Салимгараева, С. Г. Скублов // Петрология. – 2020. – Т. 28, № 1. – С. 85–107.
6. Берталанфи, Л. Общая теория систем – обзор проблем и результатов / Л. Берталанфи // Системные исследования. Ежегодник. – М.: Наука, 1969. – С. 30-54.
7. Бескин, С. М. Редкометалльные гранитовые формации / С. М. Бескин, В. Н. Ларин, Ю. Б. Марин. – Л.: Недра, 1979. – 280 с.
8. Бокштейн, Б. С. Термодинамика и кинетика границ зерен в металлах / Б. С. Бокштейн, Ч. В. Копецкий, Л. С. Швидлерман – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.
9. Борович, З. И. Определители и матрицы / З. И. Борович. – М.: Наука, 1988. – 184 с.
10. Бродская, Р. Л. К вопросу о метризации структур горных пород / Р. Л. Бродская // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1972. – Т. 101, № 5. – С. 297-300.
11. Бродская, Р. Л. Термодинамические (кинетические) критерии формирования и эволюции структуры минеральных агрегатов / Р. Л. Бродская // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1988. – Т. 117. № 5. – С. 623—633.
12. Бродская, Р. Л. Теория и практика исследования структуры магматических пород: автореф. дис. докт. геол.-мин. наук в форме научного доклада: 04.00.20, 04.00.08 / Бродская Римма Львовна. – Л., 1991. – 48 с.
13. Бродская, Р. Л. Морфология минеральных индивидов в магматических горных породах и соотношение взаимности Онзагера / Р. Л. Бродская // Записки Российского минералогического общества. – 2018. – Ч. 147, № 5. – С. 96-109.
14. Бродская, Р. Л. Использование стереометрических методов в онтогеническом анализе горных пород / Р. Л. Бродская, Ю. Б.Марин // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1979. – Т. 108, № 2. – С. 141-153.

15. Бродская, Р. Л. Структурирование минерального вещества – наследуемый механизм его самоорганизации / Р. Л. Бродская, Ю. Б. Марин // Доклады Академии Наук. – 2000. – Т. 273, №2. – С. 232-234.
16. Бродская, Р. Л. Проблема моделирования внутреннего строения упорядоченных и равновесных минералого-петрографических систем / Р. Л. Бродская, Ю. Б. Марин // Записки Всероссийского минералогического общества. – 2001. – Ч. 130, № 6. – С. 1-14.
17. Бродская, Р. Л. Границы срастания минеральных индивидов - зона вторичного минералогенезиса в агрегате / Р. Л. Бродская, И. В. Бильская, В. Д. Ляхницкая, Б. А. Марковский, Е. Г. Сидоров // Записки Российского минералогического общества. – 2007. – Ч.136, № 3. – С. 1-18.
18. Брыляков, Ю. Е. Развитие теории и практики комплексного обогащения апатит-нефелиновых руд Хибинских месторождений: автореф. дис. докт. техн. наук: 25.00.13 / Брыляков Юрий Евгеньевич. – М., 2004. – 44 с.
19. Вернадский, В. И. Химическое строение биосферы Земли и ее окружения / В. И. Вернадский. – М.: Наука, 1987. – 340 с.
20. Вистелиус, А. Б. Идеальный гранит и его свойства: вероятностная модель, статистическая идентификация, естественные породы / А. Б. Вистелиус // Международный геологический конгресс, XXIV сессия, симпозиум 104. – 1972. – С. 26-37.
21. Вистелиус, А. Б. Основы математической геологии (определение предмета, изложение аппарата) / А. Б. Вистелиус. – Л.: Наука, 1980. – 389 с.
22. Войтеховский, Ю. Л. Проблема Науманна-Харкера (отношение порядка в минеральных многообразиях): дис. ... д-ра г.-м. наук: 04.00.20 / Войтеховский Юрий Леонидович. – Сыктывкар, 1998. – 303 с.
23. Войтеховский, Ю. Л. Количественный анализ петрографических структур: метод структурной индикатрисы и метод вычитания аксессуариев / Ю. Л. Войтеховский // Известия вузов. Серия Геология и разведка. – 2000. – № 1. – С. 50–54.
24. Войтеховский, Ю. Л. Модальный анализ горных пород по Делессу-Розивалю-Глаголеву: исторический аспект / Ю. Л. Войтеховский // Тигта. – 2009. – №3. – С. 8-12.
25. Войтеховский, Ю. Л. Петрографические структуры: определение, классификация и преобразования / Ю. Л. Войтеховский // Математические исследования в естественных науках. – 2014. – № 10. – С. 59-68.
26. Войтеховский, Ю. Л. Алгебраическое описание петрографических структур и их преобразований / Ю. Л. Войтеховский // Труды Ферсмановской научной сессии ГИ КНЦ РАН. – 2016. – № 13. – С. 23-32.

27. Войтеховский, Ю. Л. Моделирование петрографических структур / Ю. Л. Войтеховский, **А. А. Захарова** // Вестник геонаук. – 2020-1. – №10 (310). – С. 38-42. – DOI: 10.19110/geov.2020.10.5.
28. Войтеховский, Ю. Л. Моделирование петрографических структур. Статья 2 / Ю. Л. Войтеховский, **А. А. Захарова**, М. Д. Климоchenков // Вестник геонаук. – 2020-2. – № 12 (312). – С. 32-35. – DOI: 10.19110/geov.2020.12.3.
29. Войтеховский, Ю. Л. Аналитическая геометрия кристаллической горной породы / Ю. Л. Войтеховский, **А. А. Захарова** // Труды Ферсмановской научной сессии ГИ КНЦ РАН. – 2021-1. – № 18. – С. 96-101. – DOI: 10.31241/FNS.2021.18.017.
30. Войтеховский, Ю. Л. Петрографические структуры: ийолиты и уртиты Хибин / Ю. Л. Войтеховский, **А. А. Захарова** // Вестник МГТУ. – 2021-2. – Т. 24, № 2. – С. 160-167. – DOI: 10.21443/1560-9278-2021-24-2-160-167.
31. Войтеховский, Ю. Л. Статистическое описание структур и текстур амфиболитов островов Керетского архипелага (Белое море) / Ю. Л. Войтеховский, **А. А. Захарова** // Труды Карельского научного центра РАН. – 2021-3. – № 2. – С. 44-50. – DOI: 10.17076/geo1355.
32. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
33. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
34. Геология СССР. Карельская АССР / ред. К.О. Кратц. – М.: Госгеолтехиздат, 1960. – Т. XXXVII. Ч. I, II.
35. Глаголев, А. А. Геометрические методы количественного анализа агрегатов под микроскопом / А. А. Глаголев. – М.-Л.: Госгеолиздат, 1941. – 263 с.
36. Гликин, А. Э. Перекристаллизация полиминеральных агрегатов / А. Э. Гликин, С. В. Петров // Записки Всероссийского минералогического общества. – 1998. – Ч. 127, № 4. – С. 79-88.
37. Горная порода: опыты постижения / сост. и ред. Ю. Л. Войтеховский. – Апатиты: Изд-во «К&М», 2005. – 167 с.
38. Горьковец, В. Я. Костомукша – крупнейший комплексный рудный объект Республики Карелия / В. Я. Горьковец, Л. А. Максимович, М. Б. Раевская // Геология Карелии от архея до наших дней. – 2011. – С. 188-196.
39. Григорьев, Д. П. Онтогенез минералов (индивиды) / Д. П. Григорьев, А. Г. Жабин. – М.: Наука, 1975. – 277 с.
40. Григорьев, Д. П. Рассуждения о минералогии / Д. П. Григорьев // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1990. – № 1. – С. 3-12.

41. Григорьев, Д. П. Уточнение понятия «минеральный агрегат» / Д. П. Григорьев // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1985. – Ч. 114, № 4. – С. 506-509.
42. Гульбин, Ю. Л. Методы количественного анализа и моделирование структуры минеральных агрегатов / Ю. Л. Гульбин. – СПб: СПГГИ (ТУ), 2004. – 146 с.
43. Гульбин, Ю. Л. Моделирование кинетики нуклеации и роста граната в среднетемпературных метapelитах: дис. д-ра г.-м. наук: 25.00.05 / Гульбин Юрий Леонидович. – Санкт-Петербург, 2016. – 464 с.
44. Дудкин, О. Б. Минералогия апатито-нефелиновых месторождений хибинских тундр / О. Б. Дудкин, Л. В. Козырева, Н. Г. Померанцева. – Л.: Наука, 1964. – 238 с.
45. Жабин, А. Г. Онтогенез минералов. Агрегаты / А.Г. Жабин. – М.: Наука, 1979. – 275 с.
46. Жабин, А. Г. Равновесная структура минерального агрегата / А. Г. Жабин, А. Г. Харченков // Кристаллография и минералогия. – 1972. – С. 61-71.
47. Жданов, В. В. К методике составления цветного компьютерного атласа «Кристаллические горные породы (физиография)» / В. В. Жданов // Записки Всероссийского минералогического общества. – 1998. – Ч. 127, № 5. – С. 105-108.
48. Заварицкий, А. Н. Изверженные горные породы / А. Н. Заварицкий. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 480 с.
49. **Захарова, А. А.** Горная порода: к определению петрографической структуры / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский // Материалы IX Международной научной конференции молодых ученых «Молодые – Наукам о Земле». – 2020-1. – Т. 2. – С. 181-183.
50. **Захарова, А. А.** Математическое моделирование петрографических структур на примере ийолит-уртитов Хибинского массива / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский // Сборник тезисов докладов всероссийской молодежной геологической конференции памяти В.А. Глебовицкого. – 2020-2. – С. 39-41.
51. **Захарова, А. А.** Математическое моделирование петрографических структур с применением современных информационных технологий / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский // Геология, геоэкология, эволюционная география: Коллективная монография / ред. Е.М. Нестерова, В.А. Снытко. – 2020-3. – Том XIX. – С. 48-51.
52. **Захарова, А. А.** Моделирование структур горных пород на основе статистических методов: амфиболиты Керетского архипелага / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский // Стрoение литосферы и геодинамика: материалы XXIX Всероссийской молодежной конференции. – 2021-1. – С. 109-111.
53. **Захарова, А. А.** Моделирование структур и текстур горных пород на основе статистик тернарных межзерновых контактов / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский // Сборник

тезисов докладов Геологического Международного Студенческого Саммита. – 2021-2. – С. 26-29.

54. **Захарова, А. А.** Методика определения петрографических структур с использованием прибора МИУ-5М / **А. А. Захарова**, Ю. Л. Войтеховский, А. А. Компанченко, Ю. Н. Нерадовский // Вестник МГТУ. – 2022. – Т. 25, № 1. – С. 5-11. – DOI: 10.21443/1560-9278-2022-5-11.

55. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. – М.: Наука, 1987. – 383 с.

56. Изойтко, В. М. Технологическая минералогия и оценка руд / В. М. Изойтко. – СПб.: Наука, 1997. – 582 с.

57. Иванова, Т. Н. Ийолит-уртиты Хибинского массива / Т. Н. Иванова, О. Б. Дудкин, Л. В. Козырева, К. И. Поляков. – Л.: Наука, 1970. – 183 с.

58. Исаенко, М. П. Определитель структур и текстур руд / М. П. Исаенко. – М.: Недра, 1964. – 156 с.

59. Кобзева, Ю. В. Количественное изучение строения минеральных агрегатов на основе анализа их комбинаторно-топологического подобия / Ю. В. Кобзева // Записки Всероссийского минералогического общества. – 2002. – Ч. 131, № 6. – С. 96-110.

60. Коренева, Л. Г. Генетика и математика / Л. Г. Коренева // Математика и естествознание. – 1969. – С. 326-383.

61. Горьковец, В. Я. Костомукшский рудный район (геология, глубинное строение и минерогения) / В. Я. Горьковец, Н. В. Шаров. – Петрозаводск: КНЦ РАН, 2015. – 322 с.

62. Косыгин, Ю. А. Понятие структуры в геологических исследованиях / Ю. А. Косыгин // Геология и геофизика. – 1970. – № 4. – С. 76-86.

63. Косыгин, Ю. А. Статические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях / Ю. А. Косыгин, В. А. Соловьев // Известия АН СССР. Серия геологическая. – 1969. – № 6. – С. 9-17.

64. Кривцов, А. И. Структуры рудных полей и месторождений, металлогения и прогноз рудоносности: учебник для вузов / А. И. Кривцов, П. Д. Яковлев. – М.: Недра, 1991. – 383 с.

65. Лазарев, Ю. И. Структурная и метаморфическая петрология железистых кварцитов Костамукшского месторождения Карельской АССР / Ю. И. Лазарев. – Л.: Наука, 1971. – 192 с.

66. Лазаренко, Е. К. О минералогической номенклатуре и терминологии / Е. К. Лазаренко, И. С. Квитко // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1972. – Ч. 101, № 4. – С. 438-450.

67. Лайтхилл, Дж. Новые области применения математики / Дж. Лайтхилл, Р. У. Хиорнс, С. Х. Холлингдейл. – Минск: Высшая школа. – 1981. – С. 126-128.
68. Левинсон-Лессинг, Ф. Ю. Введение в историю петрографии / Ф.Ю. Левинсон-Лессинг. – Л.-М.: ОНТИ, 1936. – 139 с.
69. Левинсон-Лессинг, Ф. Ю. Петрографический словарь / Ф. Ю. Левинсон-Лессинг, Э. А. Струве. – М.: Госгеолтехиздат, 1963. – 448 с.
70. Лодочников, В. Н. Главнейшие породообразующие минералы / В. Н. Лодочников; под ред. В. С. Соболева. – М.: Недра, 1974. – 248 с.
71. Макагонов, Е. П. Симметрия сростков. Препринт / Е. П. Макагонов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. – 52 с.
72. Маликов, А. В. О моделировании закономерностей соприкосновения зерен в минеральных сростаниях / А. В. Маликов // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 280, № 4. – С. 878-880.
73. Манин, Ю. И. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. / Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
74. Марин, Ю. Б. Петрография: учебник / Ю. Б. Марин. – СПб.: НМСУ «Горный», 2014. – 408 с.
75. Марчевская, В. В. Корреляционные связи между компонентами вещественного состава в апатит-нефелиновых рудах Хибинского массива (Кольский полуостров) / В. В. Марчевская, У. В. Корнеева // Вестник МГТУ. – 2020. – Т. 23, № 2. – С. 173–181. – DOI: 10.21443/1560-9278-2020-23-2-173-181.
76. Методические указания по работе на МИУ-5М. – СПб: ВСЕГЕИ, 2005. – С. 1-4.
77. Минералогия Хибинского массива: в 2 т. / под ред. Ф. В. Чухрова. – М.: Наука, 1978.
78. Миронов, Ю. П. Теоретико-множественные модели гранитоидов / Ю. П. Миронов. – М.: Наука, 1975. – 227 с.
79. Пеков, И. В. Минералогия Кукисвумчоррского месторождения (щелочные пегматиты и гидротермалиты). Минералогический альманах / И. В. Пеков, А. С. Подлесный. – М.: Ассоциация Экоств, 2004. – 176 с.
80. Петров, Д. А. Количественная характеристика и петрогенетическая интерпретация структуры гранитов Салминского массива (Карелия): дис. канд. г.-м. наук: 25.00.04 / Петров Дмитрий Анатольевич. – СПб, 2008. – 132 с.
81. Петрографический словарь / ред. В. П. Петров. – М.: Недра, 1981. – 496 с.
82. Половинкина, Ю. И. Структуры и текстуры изверженных и метаморфических горных пород: в 2 ч., в 2 т. / Ю. И. Половинкина. – М.: Недра, 1966.

83. Попов, Г. М. Кристаллография. Учебник для студентов геологических специальностей вузов / Г. М. Попов, И. И. Шафрановский. – М.: Высшая школа, 1972. – 352 с.
84. Розенбуш, Г. Описательная петрография / Г. Розенбуш. – Л., М., Грозный, Новосибирск: Горгеонефтеиздат, 1934. – 720 с.
85. Рудашевский, Н. С. Универсальная минералогическая технология исследования пород, руд и технологических продуктов / Н. С. Рудашевский, В. Н. Рудашевский, А. В. Антонов // Региональная геология и металлогения. – 2018. – № 73. – С. 88-102.
86. Савелов, А. А. Классификация Ньютона. Плоские кривые: систематика, свойства, применения / А. А. Савелов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – С. 44–53.
87. Салтыков, С. А. Стереометрическая металлография / С. А. Салтыков. – М.: Металлургия, 1958. – 446 с.
88. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021612125 Российская Федерация. Визуализация границы Харди-Вайнберга для триминеральных агрегатов в трехмерных сечениях методом проекций: №2021611327 заявл. 09.02.2021; опублик. 11.02.2021 / А. А. Захарова, Ю. Л. Войтеховский; заявитель федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет».
89. Полканов, А. А. Северная экскурсия. Кольский полуостров / А. А. Полканов. – Л.-М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 125 с.
90. Северов, В. В. Разработка процесса обратной флотации железистых кварцитов с использованием катионных и неионогенных собирателей: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 25.00.13 / Северов Вячеслав Вячеславович. – М., 2011. – 27 с.
91. Слабунов, А. И. Геология и геодинамика архейских подвижных поясов (на примере Беломорской провинции Фенноскандинавского щита) / А. И. Слабунов. – Петрозаводск: Кар. НЦ РАН, 2008. – 296 с.
92. Старицкий, Ю. Г. Определение понятий «структура» и «текстура» / Ю. Г. Старицкий // Записки Всесоюзного минералогического общества. – 1954. – Ч. 83, № 3. – С. 275-278.
93. Талдыкин, С. И. Атлас структур и текстур руд / С. И. Талдыкин, Н. Ф. Гончарик, Г. Н. Еникеева, Б. Б. Розина. – М.: Госгеолтехиздат, 1954. – 268 с.
94. Текстуры и структуры руд / под ред. А.Г. Бетехтина. – М.: Госгеолтехиздат, 1958. – 436 с.
95. Толкунова, А. В. Применение ПО Thixomet и компьютерной рентгеновской микротомографии при изучении сульфидных медно-никелевых руд / А. В. Толкунова,

А. М. Дурягина, И. В. Таловина // *Металлогения древних и современных океанов.* – 2020. – № 1. – С. 257-260.

96. Трейвус, Е. Б. Анализ теоретических представлений и экспериментальных данных о распределении зерен по размерам в магматогенных горных породах / Е. Б. Трейвус // *Записки Всероссийского минералогического общества.* – 1998. – Ч. 127, № 1. – С. 110-117.

97. Усманов, Ф. А. Основы математического анализа геологических структур / Ф. А. Усманов. – Ташкент: изд-во «Фан» УзССР, 1977. – 207 с.

98. Хибинский щелочной массив. Материалы по геологии и полезным ископаемым северо-запада РСФСР / С. И. Зак, Е. А. Каменев, Ф. В. Минаков, А. Л. Арманд, А. С. Михеичев, И. А. Петерсилье. – Л.: Недра, 1972. – 176 с.

99. Чейз, Ф. Количественно-минералогический анализ шлифов под микроскопом. Опыт элементарной статистической оценки / Ф. Чейз. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 156 с.

100. Чупрунов, Е. В. Основы кристаллографии: учебник для вузов / Е. В. Чупрунов, А. Ф. Хохлов, М.А. Фаддеев. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2004. – 500 с.

101. Шаров, Н. В. Открытие и разведка Костомукшского железорудного месторождения: учебное пособие для студентов горно-геологического факультета / Н. В. Шаров. – Петрозаводск: изд-во ПетрГУ, 2014. – 103 с.

102. Шафрановский, И. И. История кристаллографии. XIX век / И. И. Шафрановский. – Л.: Наука, 1980. – 324 с.

103. Шахов, Ф. Н. Текстуры руд / Ф. Н. Шахов. – М.: АН СССР, 1961. – 180 с.

104. Шевченко, С. С. Роль и значение внутренних границ в магматической горной породе / С. С. Шевченко, Р. Л. Бродская, И. В. Бильская, Ю. В. Кобзева, В. Д. Ляхницкая // *Вестник ИГ Коми НЦ УрО РАН.* – 2019. – № 6. – С. 34-38. – DOI: 10.19110/2221-1381-2019-6-34-38.

105. Amstutz, G. C. Metric and topological properties of rock and ore textures / G. C. Amstutz, H. Giger // *Experimental and natural rock deformation.* – 1970. – PP. 496–516.

106. Blaschke, R. Spezifische Oberflächen und Grenzflächen der Mineralphasen als Gefügeparameter / R. Blaschke // *Fortschr. Miner.* – 1970. – Bd 47. N 2. – S. 197-241.

107. Coxeter, H. S. M. Close packing and froth / H. S. M. Coxeter // *Illinois Journal of Mathematics.* – 1958. – 2 (4B). – PP. 746-758. – DOI: 10.1215/ijm/1255448337.

108. Delesse, M. Procédé mécanique pour déterminer la composition des roches / M. Delesse // *Annales des mines. De mémoires sur l'exploitation des mines. Quatrième série.* – 1848. – T. XIII. – PP. 379-388.

109. Gilman, J. J. Direct measurements of the surface energies of crystals / J. J. Gilman // *Journal of Applied Physics*. – 1960. – Vol. 31, No 12. – PP. 2208-2218.
110. Guanira, K. Methodological approach for mineralogical characterization of tailings from a Cu (Au, Ag) skarn type deposit using QEMSCAN (Quantitative Evaluation of Minerals by Scanning Electron Microscopy) / K. Guanira, T. M. Valente, C. A. Ríos, O. M. Castellanos, L. Salazar, D. Lattanzi, P. Jaime // *Journal of Geochemical Exploration*. – 2020. – Vol. 209. – P. 106439. – DOI: 10.1016/j.gexplo.2019.106439.
111. Hrstka, T. Automated mineralogy and petrology – applications of TESCAN Integrated Mineral Analyzer (TIMA) / T. Hrstka, P. Gottlieb, R. Skála, K. Breiter, D. Motl // *Journal of Geosciences*. – 2018. – Vol. 63. – PP. 47-63. – DOI: 10.3190/jgeosci.250.
112. Harker, A. *Petrology for students* / A. Harker. – Cambridge: University Press, 1908. – 336 p.
113. Hartman, P. On the relation between structure and morphology of crystal. I / P. Hartman, W.G. Perdok // *Acta Crystallographica*. – 1955. – Vol. 8. – PP. 49-52.
114. Kachanubal, T. Rock textures classification based on textural and spectral features / T. Kachanubal, S. Udomhunsakul // *Engineering and Technology*. – 2008. – Vol. 39. – PP. 110-116.
115. Kretz, R. On the spatial distribution of crystal in rocks / R. Kretz // *Lithos*. – 1969. – 2. – PP. 39-66.
116. Ładniak, M. Search of visually similar microscopic rock images / M. Ładniak, M. Młynarczyk // *Computational Geosciences*. – 2015. – Vol. 1. – PP. 127–136. – DOI: 10.1007/s10596-014-9459-2.
117. Lafeber, D. On the spatial distribution of fabric elements in rock and soil fabrics / D. Lafeber // *Proc. Austr. N.Z. Conf. Soil Mech. Found. Eng., 4<sup>th</sup>, Adelaide 11*. – 1963. – PP. 185-199.
118. Lepisto, L. Rock image classification using color features in Gabor space / L. Lepisto, I. Kunttu, A. Visa // *Journal of Electronic Imaging*. – 2005. – Vol. 14, No 4. – PP. 1-3.
119. Lobos, R. Analysis and classification of natural rock textures based on new transform-based features / R. Lobos, J. F. Silva, J. M. Ortiz, G. Diaz, A. Egana // *Mathematical Geosciences*. – 2016. – Vol. 48. – PP. 835-870.
120. Popov, O. Quantitative microstructural analysis and X-Ray computed tomography of ores and rocks – comparison of results / O. Popov, I. Talovina, H. Lieberwirth, A. Duryagina // *Minerals*. – 2020. – 10, 129. – DOI: 10.3390/min10020129.
121. Rogers, J. W. A study of grain contacts in granitic rocks / J. W. Rogers, D. B. Bogy // *Science*. – 1958. – 28, 2, vol. 127. – PP. 470-471.

122. Rosiwal, A. Über geometrische Gesteinanalysen. Ein einfacher Weg zur ziffermässigen Feststellung des Quantitätsverhältnisses der Mineralbestandtheile gemengter Gesteine / A. Rosiwal // Verhandlungen der keiserlich-königlichen Geologischen Reichsanstalt. – 1898. – S. 143-175.

123. Shibaeva, D. N. Analysis of the Effect of Dry Magnetic Separation on the Process of Ferruginous Quartzites Disintegration / D. N. Shibaeva, A. A. Kompanchenko, S. V. Tereschenko // Minerals. – 2021. – 11, 797. – DOI: 10.3390/min11080797.

124. Slabunov, A. I. The Archean of the Baltic Shield: Geology, Geochronology, and Geodynamic Settings / A. I. Slabunov, S. B. Lobach-Zhuchenko, E. V. Bibikova, V. V. Balagansky, P. Sorjonen-Ward, O. I. Volodichev, A. A. Shchipansky, S. A. Svetov, V. P. Chekulaev, N. A. Arestova, V. S. Stepanov // Geotectonics. – 2006. – Vol. 40, No 6. – PP. 409-433. – DOI: 10.1134/S001685210606001X.

125. Vernon, R. H. A practical guide to rock microstructure / R. H. Vernon. – Cambridge, UK. 2004. – 594 c.

126. Vernon, R. H. Metamorphic processes / R. H. Vernon. – London: George Allen & Unwin, 1976. – 243 p.

127. Vernon, R. H. Microstructures of High-grade Metamorphic Rocks at Broken Hill, Australia / R. H. Vernon // Journal of Petrology. – 1968. – V. 9. Pt. 1. – PP. 1-22.

128. Voytekhovskiy, Yu. L. Petrographic structures and Hardy-Weinberg equilibrium / Yu. L. Voytekhovskiy, **A. A. Zakharova** // Journal of Mining Institute. – 2020. – V. 242. – PP. 133-138. – DOI: 10.31897/PMI.2020.2.133.

129. Whitney, D. Abbreviations for names of rock-forming minerals / D. Whitney, B. Evans // American Mineralogist. – 2010. – V. 95. – PP. 185-187.

130. **Zakharova, A.A.** Methodology for predicting the washability of apatite ores (Kirovsky mine, Kola Peninsula) / A. A. Zakharova, Yu. L. Voytekhovskiy // Obogashchenie Rud. – 2022. – No 1. – PP. 27-30. – DOI: 10.17580/or.2022.01.05.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Атлас петрографических структур

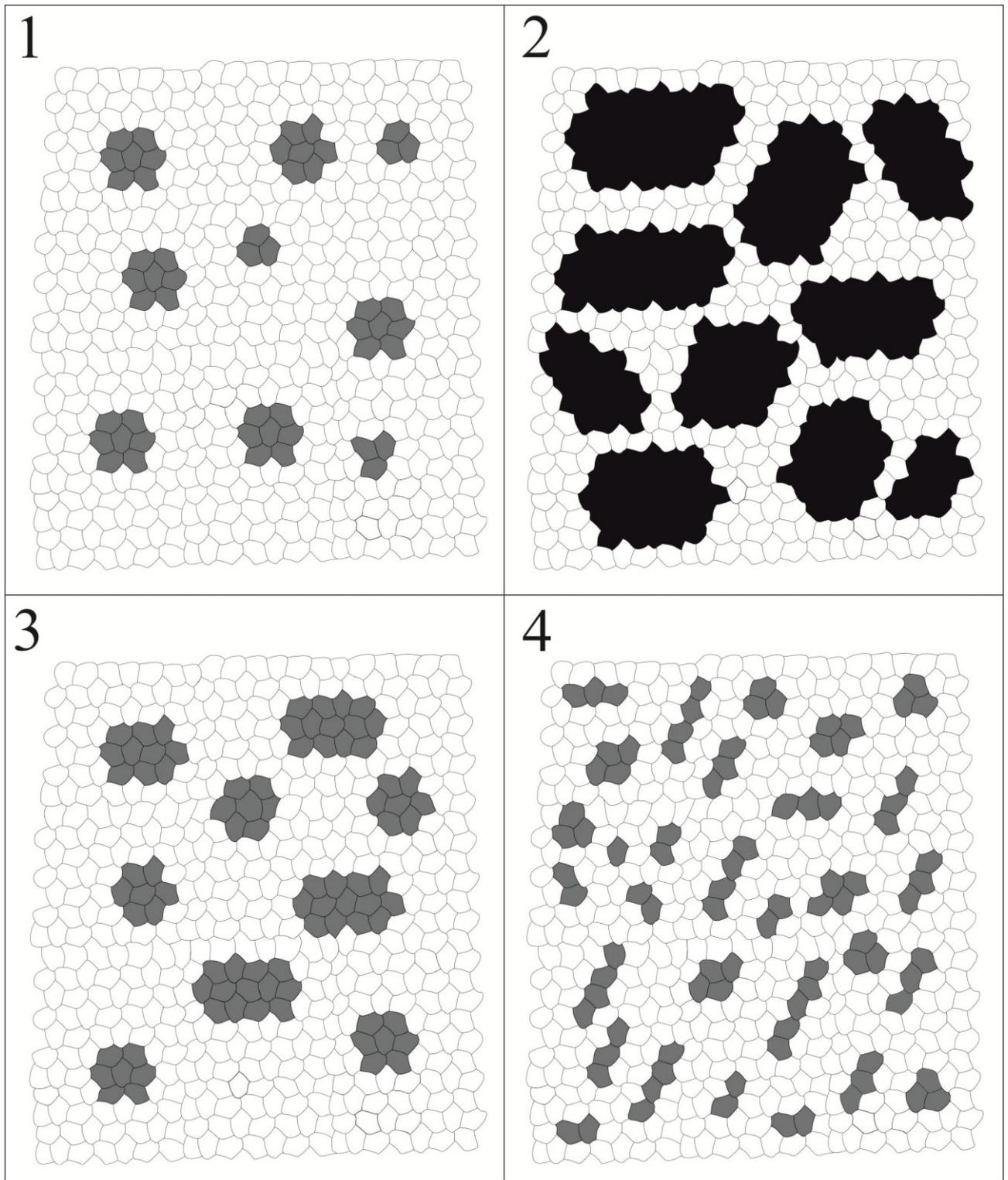


Рисунок А. 1 – Модели искусственных шлифов. Белым цветом на всех моделях обозначен минерал 1, темно-серым – минерал 2, черным – порфиоровые включения минерала 2.

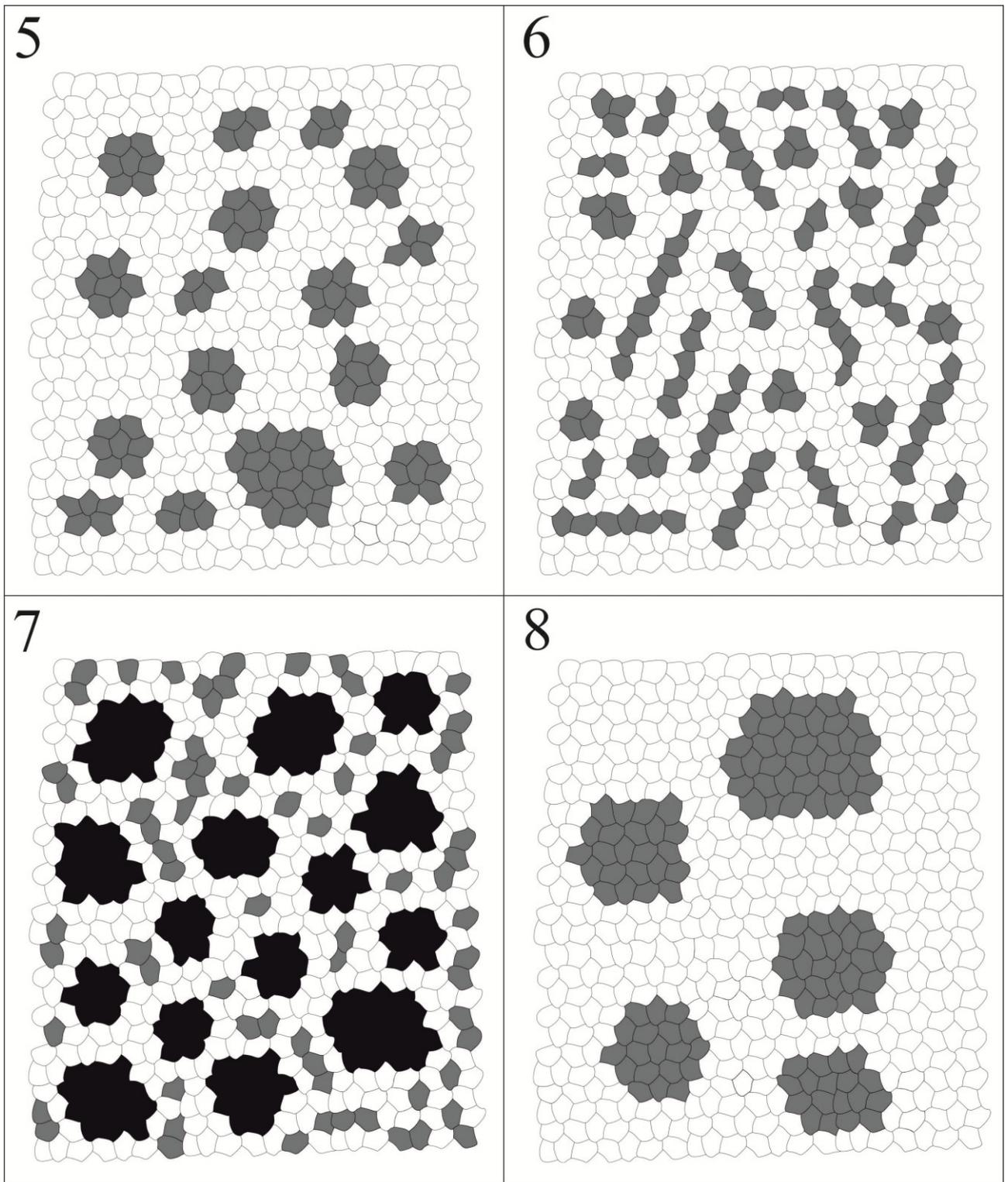


Рисунок А. 2 – Модели искусственных шлифов.

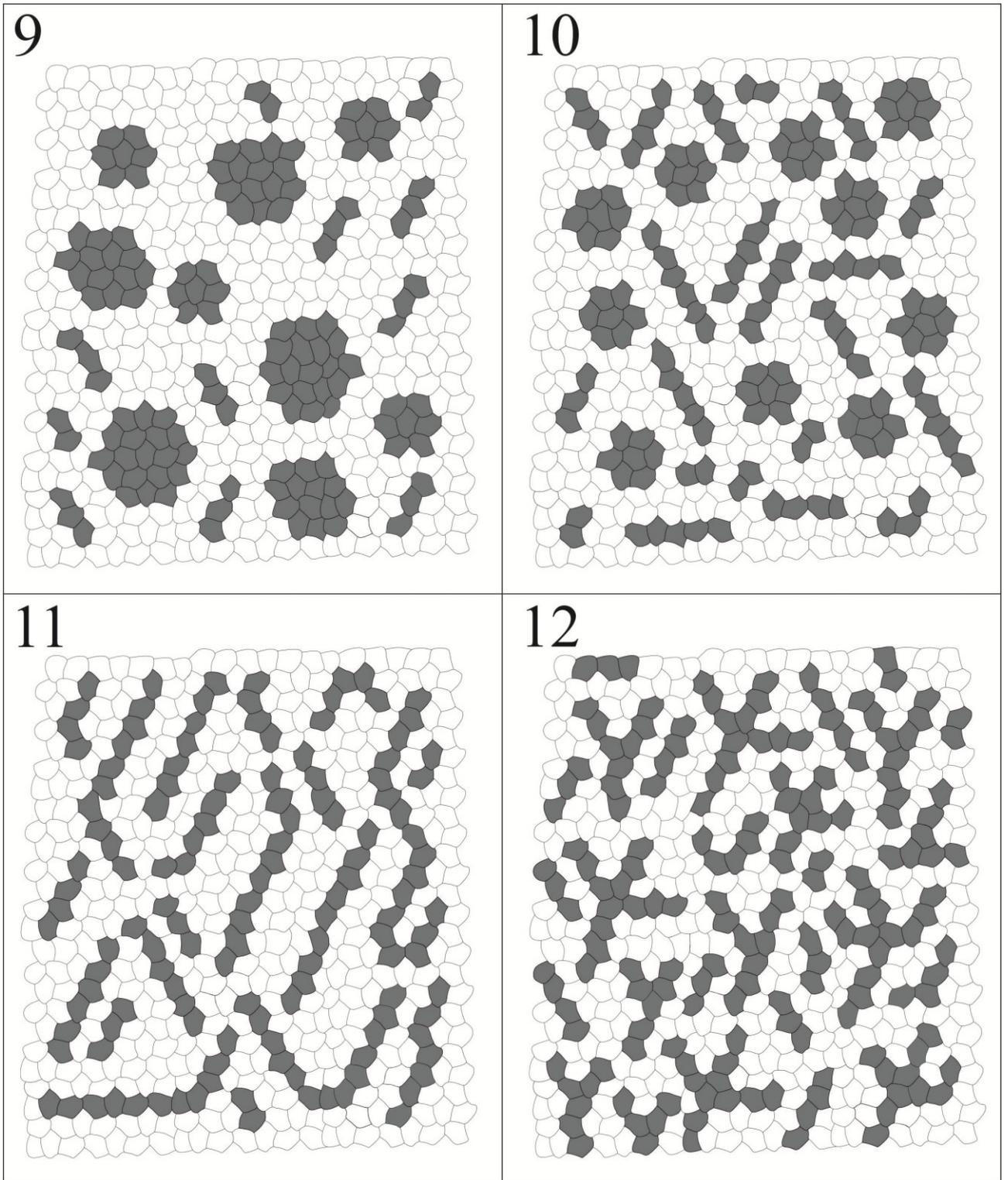


Рисунок А. 3 – Модели искусственных шлифов.

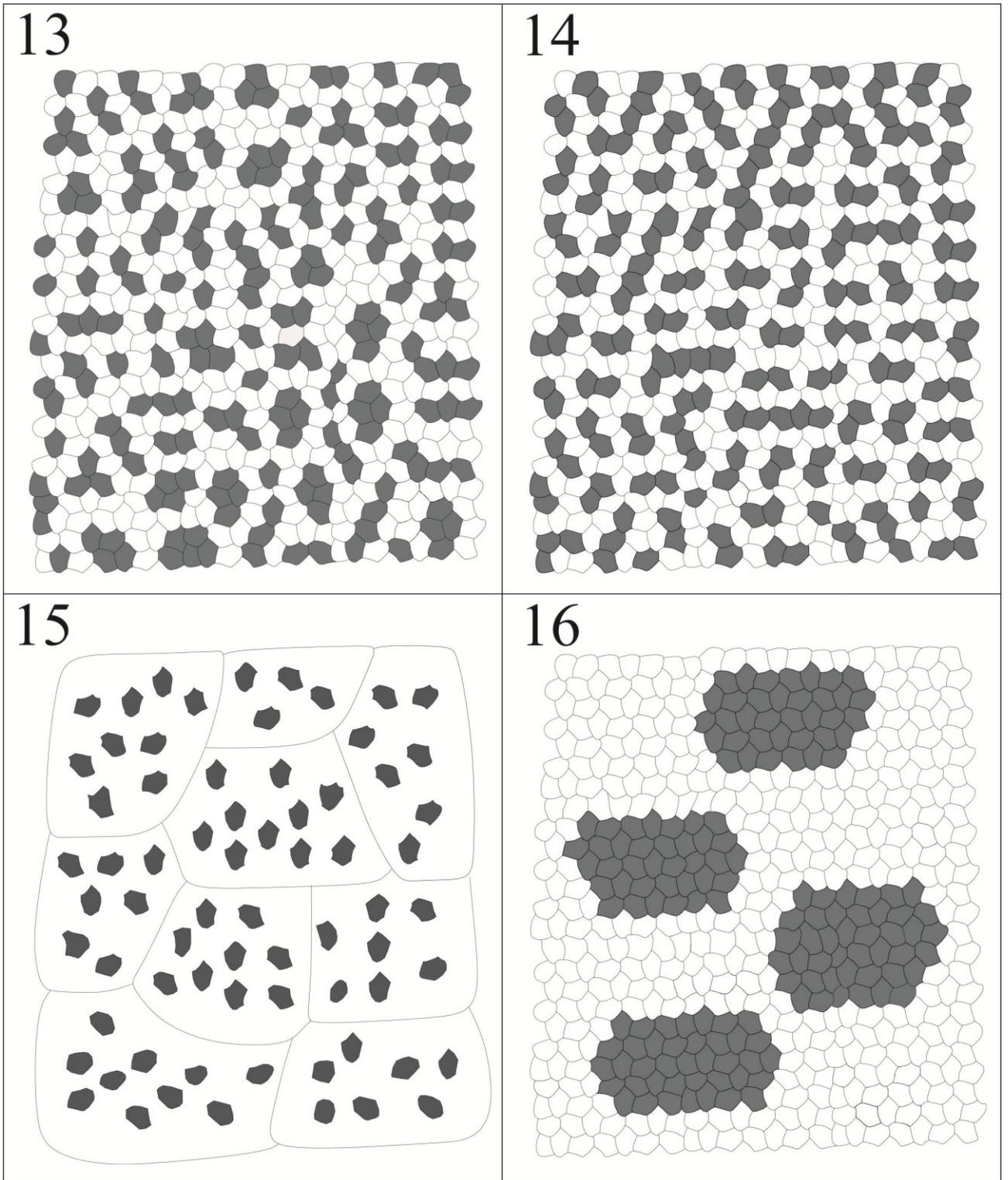


Рисунок А. 4 – Модели искусственных шлифов.

Цифрой 15 обозначена модель пойкилитовой структуры.

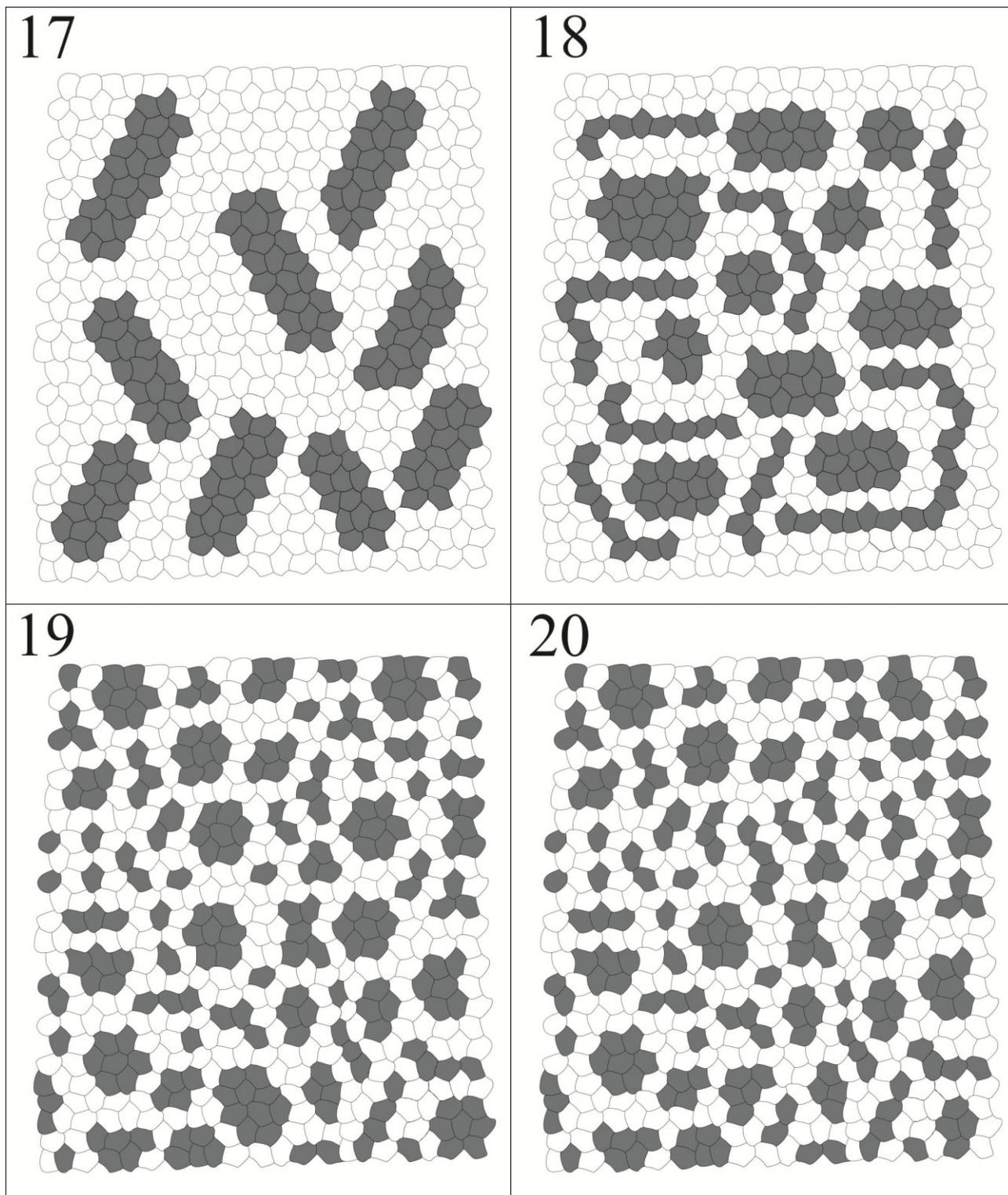


Рисунок А. 5 – Модели искусственных шлифов.

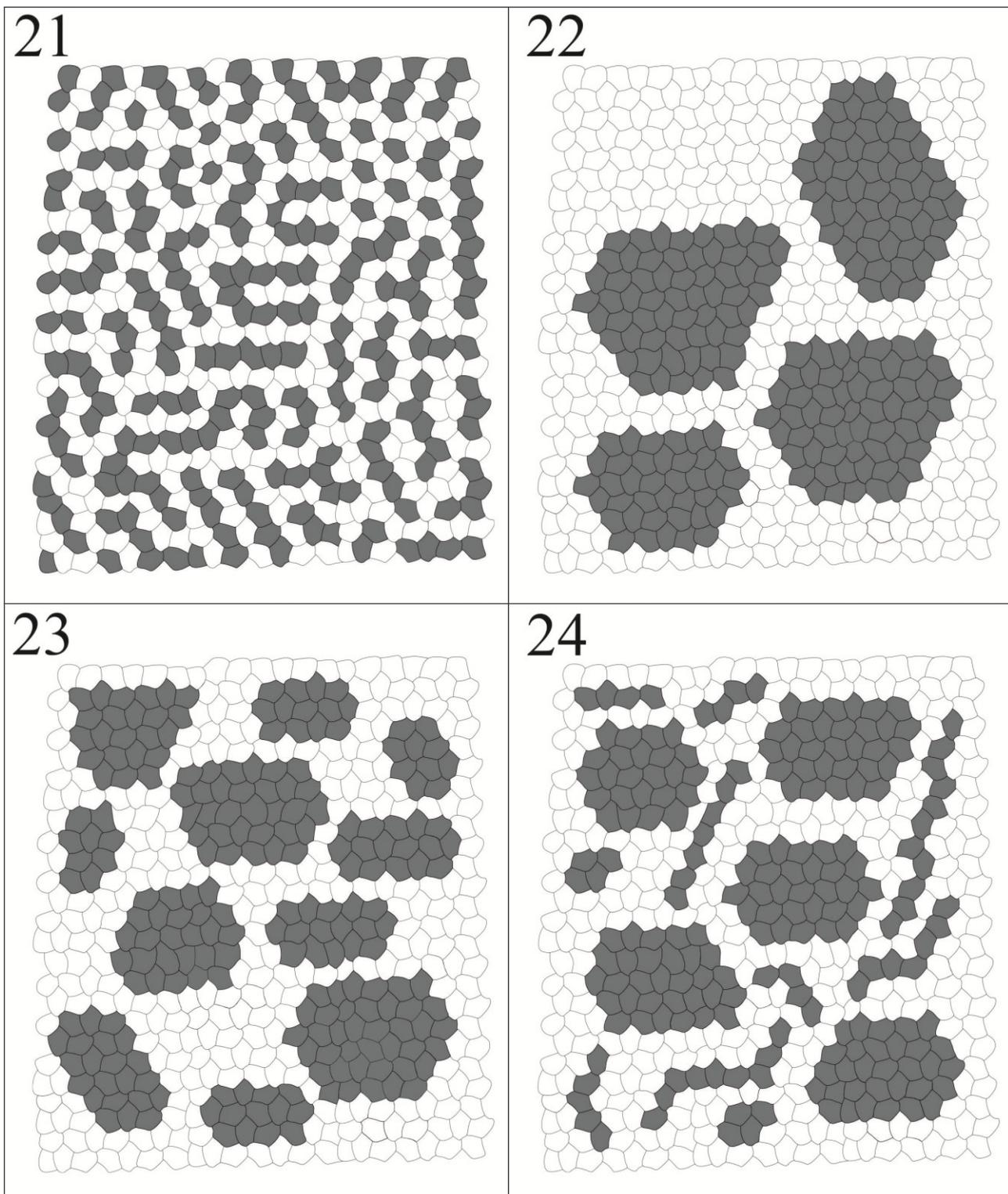


Рисунок А. 6 – Модели искусственных шлифов.

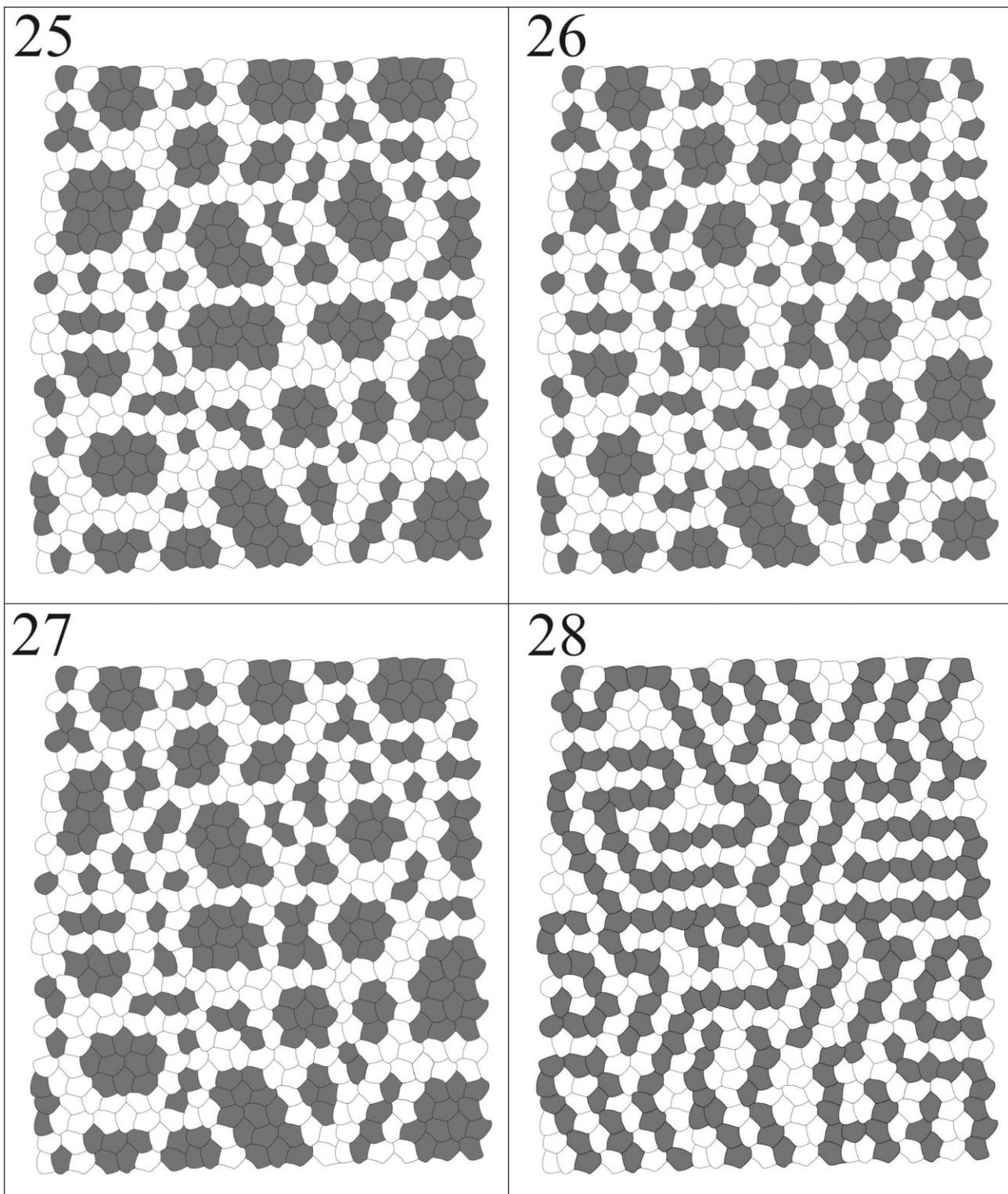


Рисунок А. 7 – Модели искусственных шрифтов.

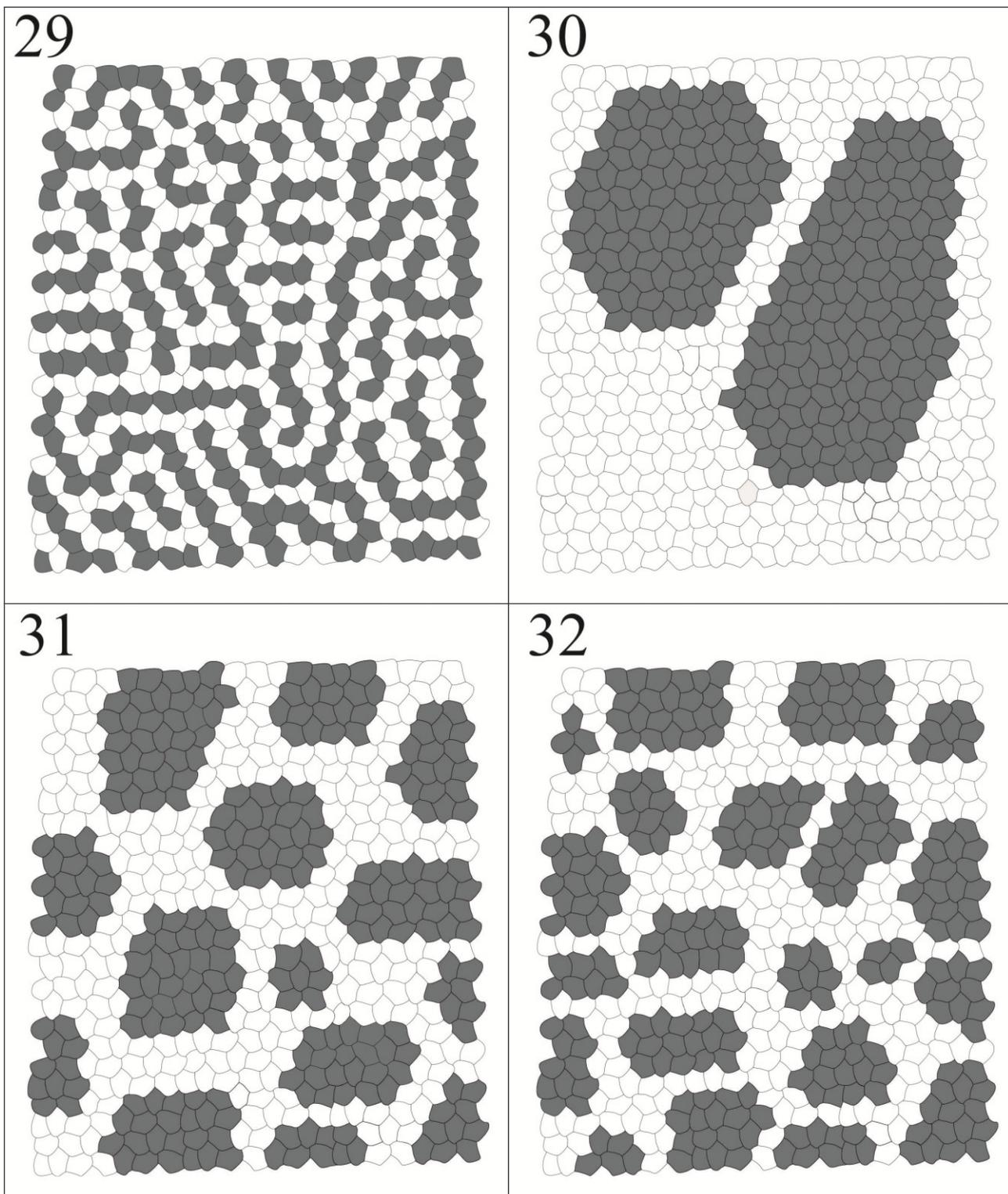


Рисунок А. 8 – Модели искусственных шлифов.

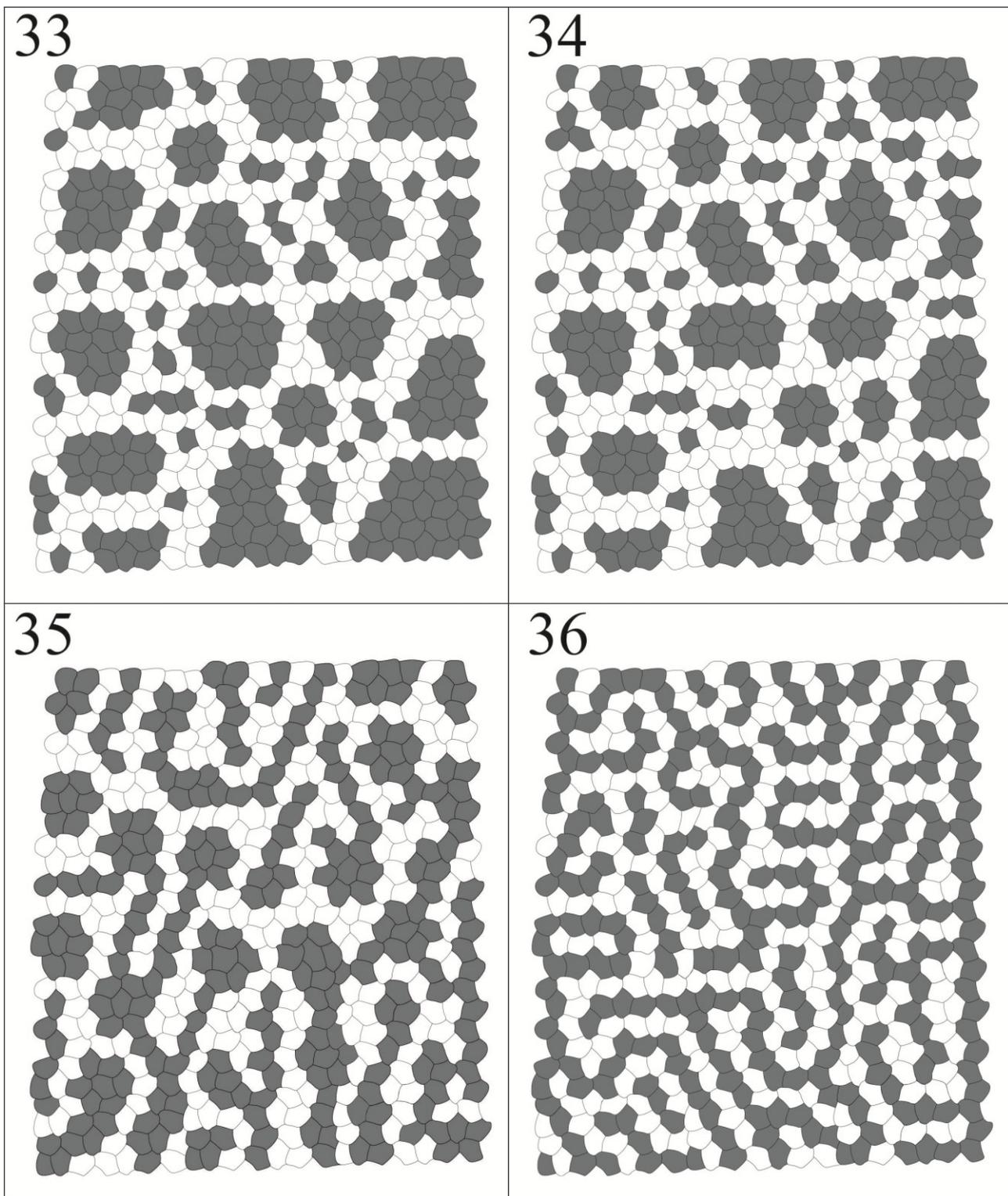


Рисунок А. 9 – Модели искусственных шлифов.

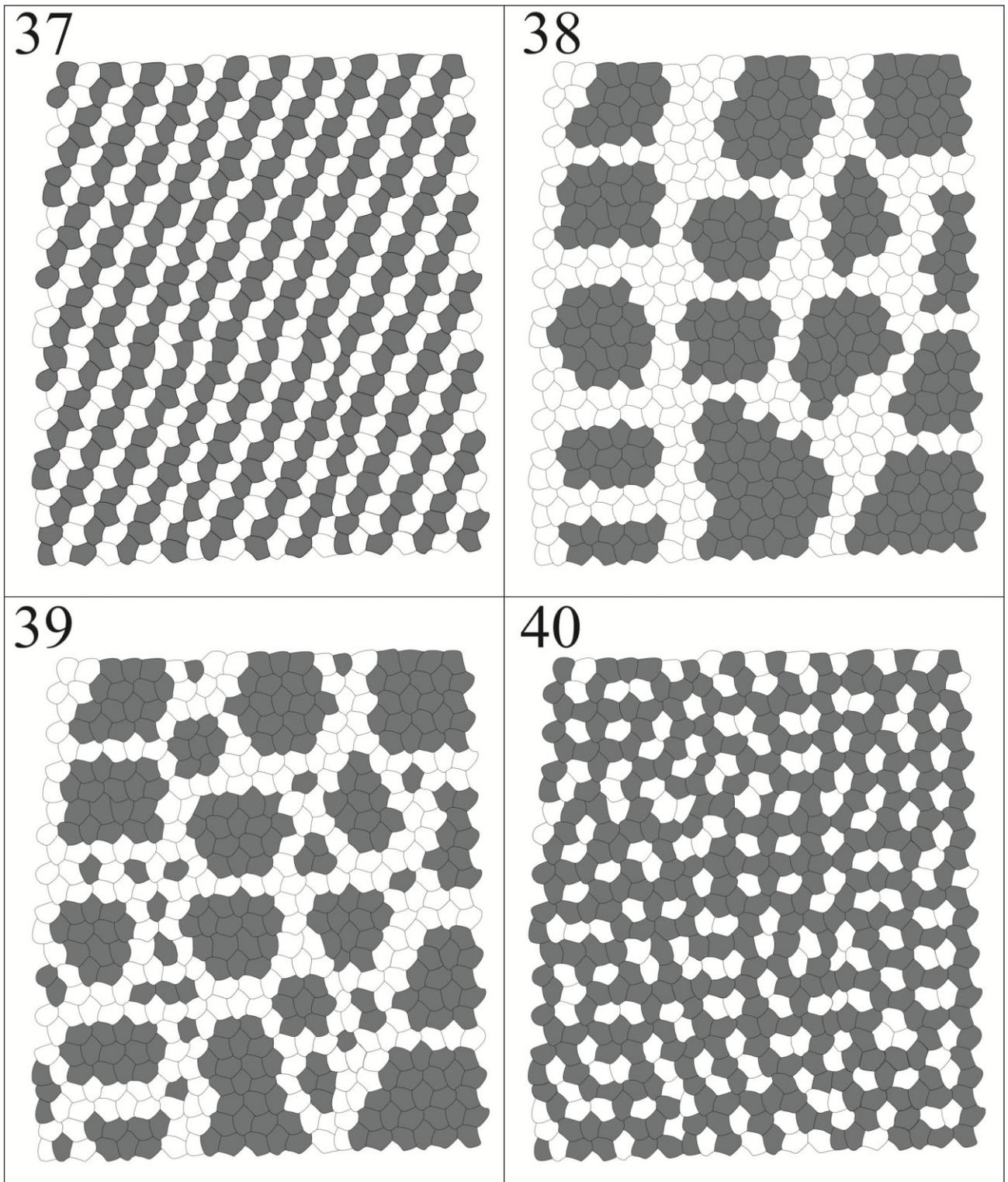


Рисунок А. 10 – Модели искусственных шлифов.

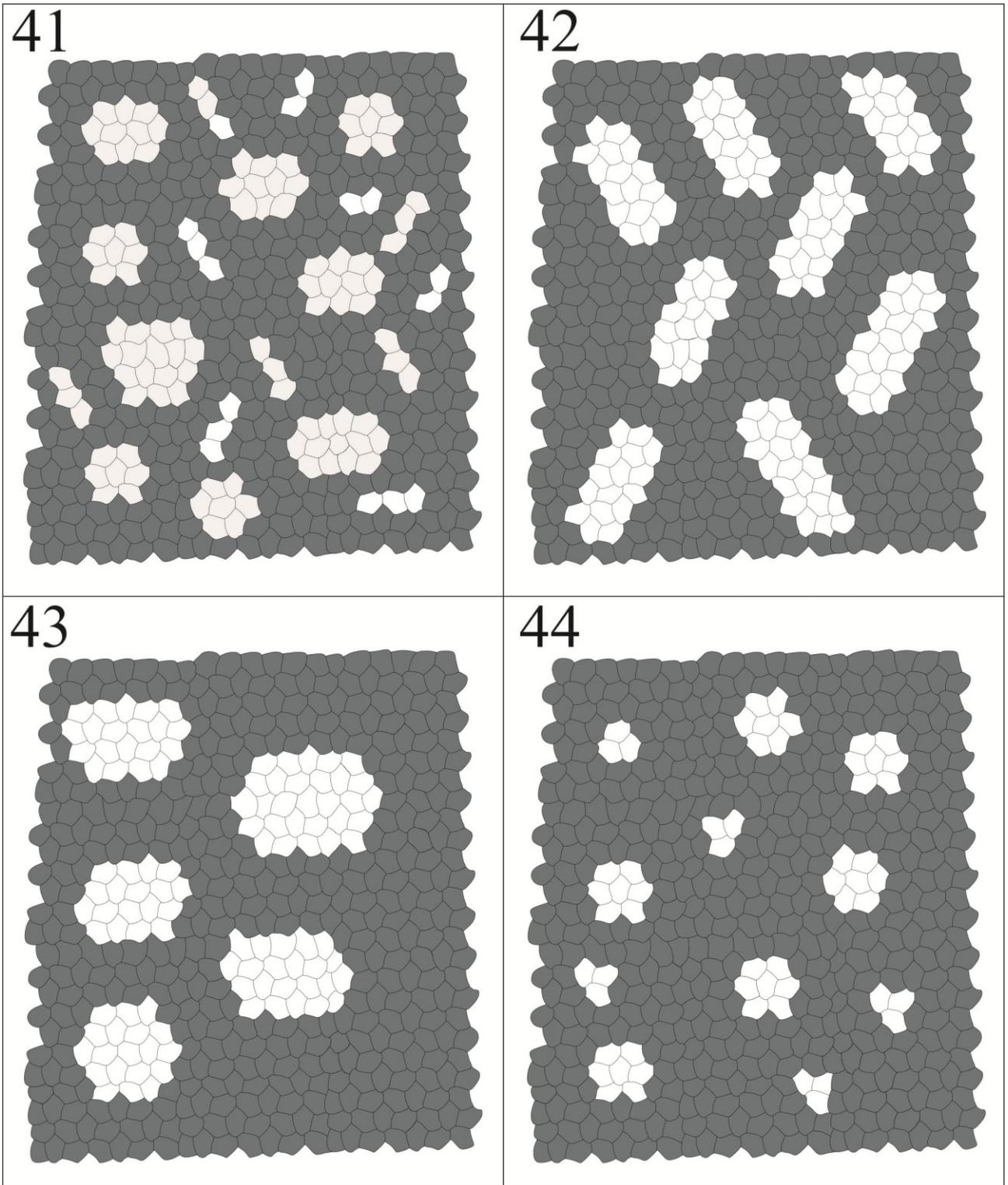


Рисунок А. 11 – Модели искусственных шлифов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Проверка корректности построений следов поверхности Харди-Вайнберга методом сечений

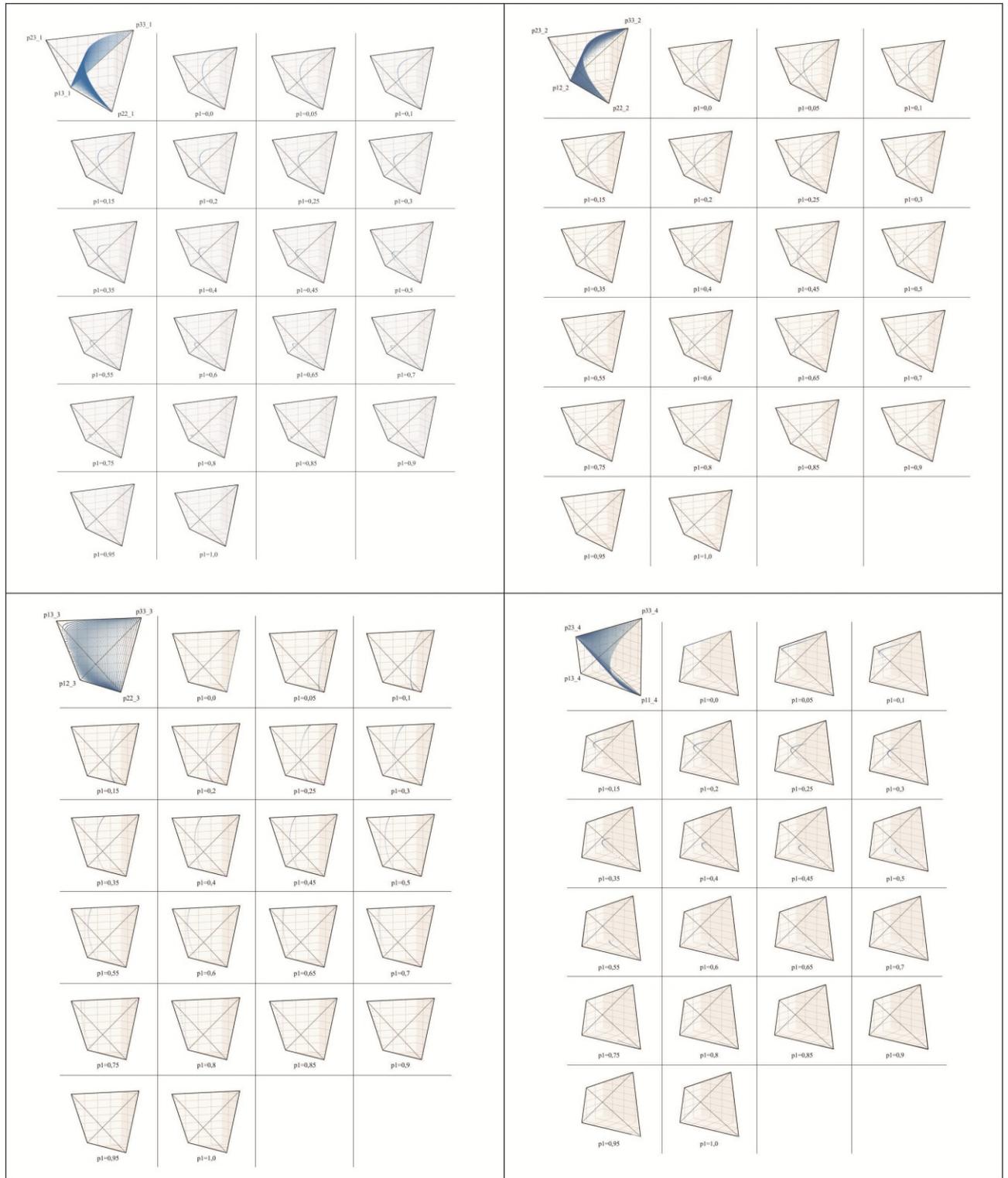


Рисунок Б. 1 – Сечения следов поверхности Харди-Вайнберга для тетраэдров 1-4.

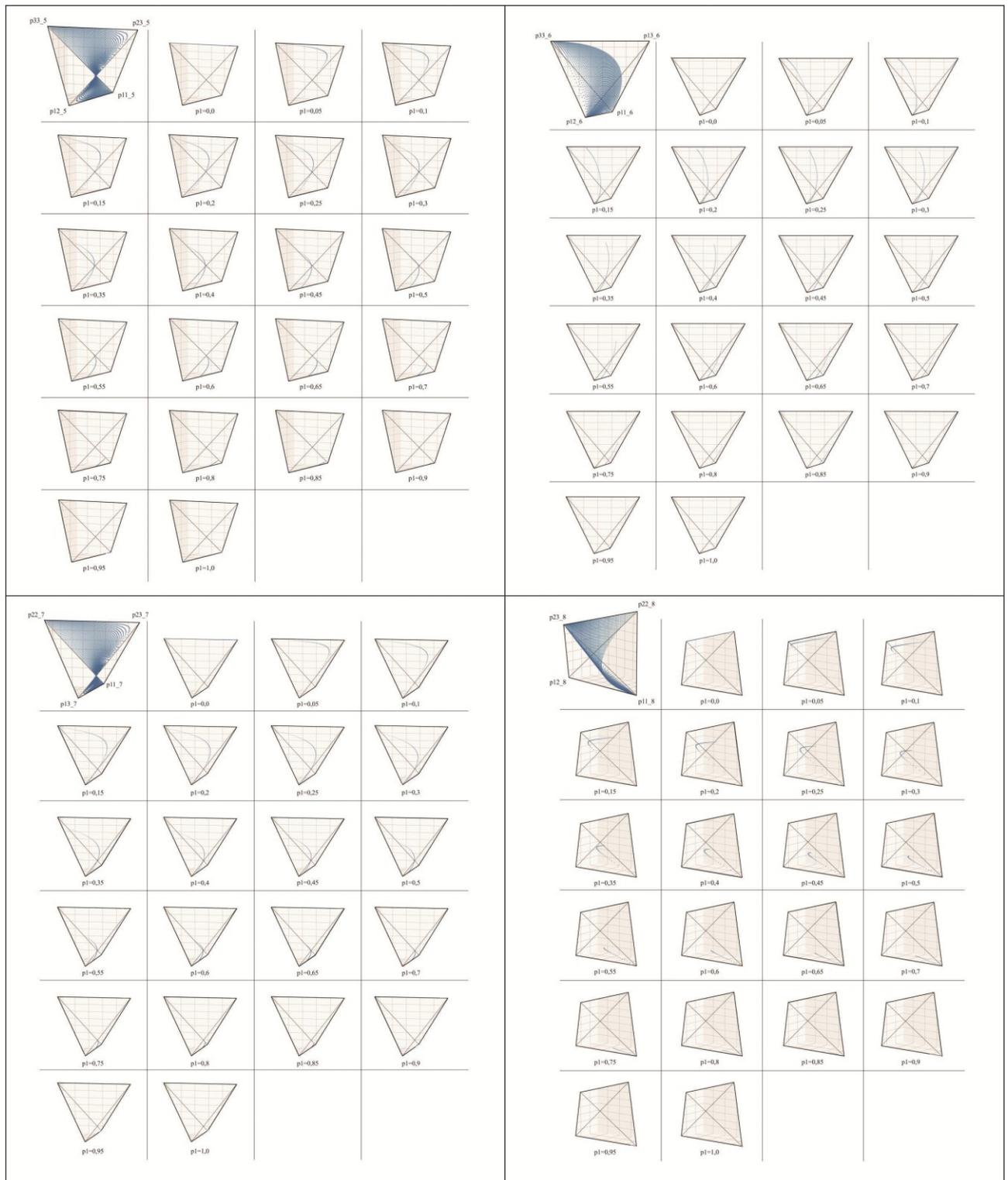


Рисунок Б. 2 – Сечения следов поверхности Харди-Вайнберга для тетраэдров 5-8.

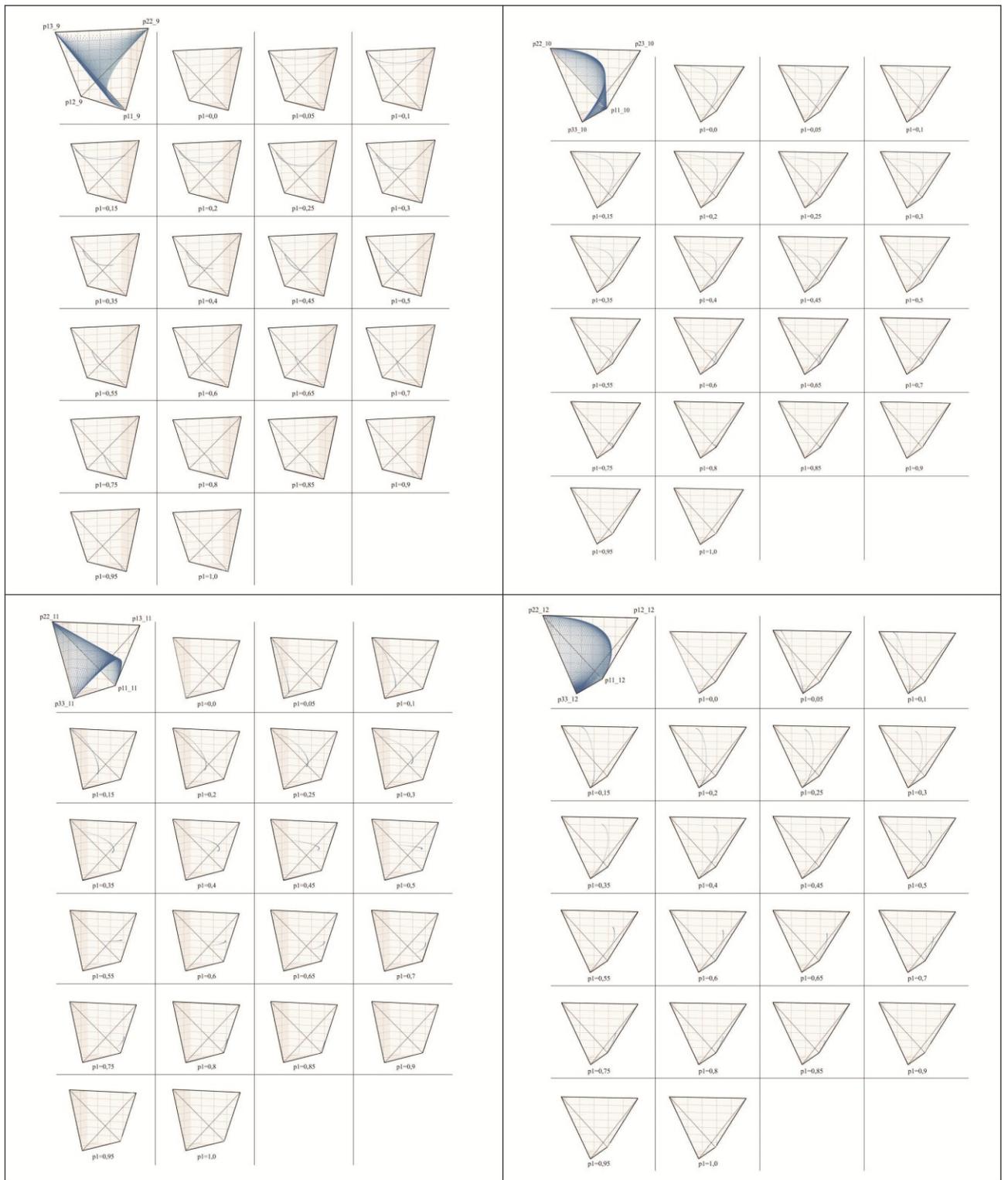


Рисунок Б. 3 – Сечения следов поверхности Харди-Вайнберга для тетраэдров 9-12.

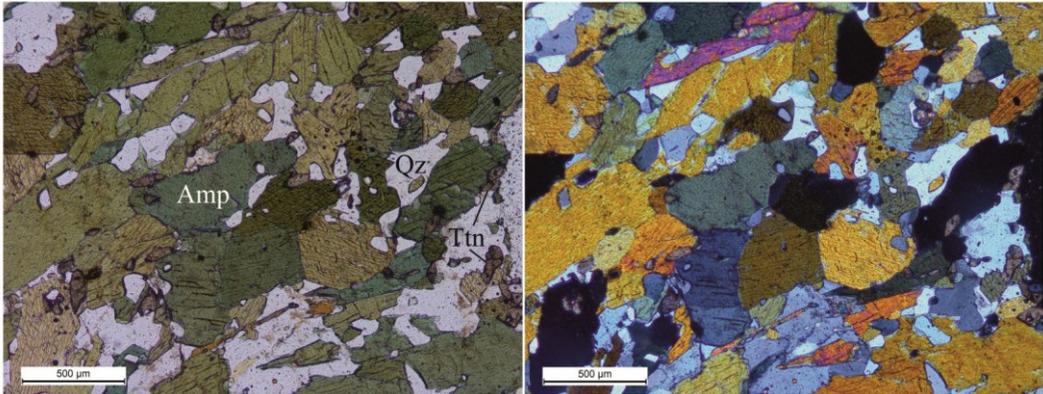


Рисунок Б. 4 – Сечения следов поверхности Харди-Вайнберга для тетраэдров 13-15.

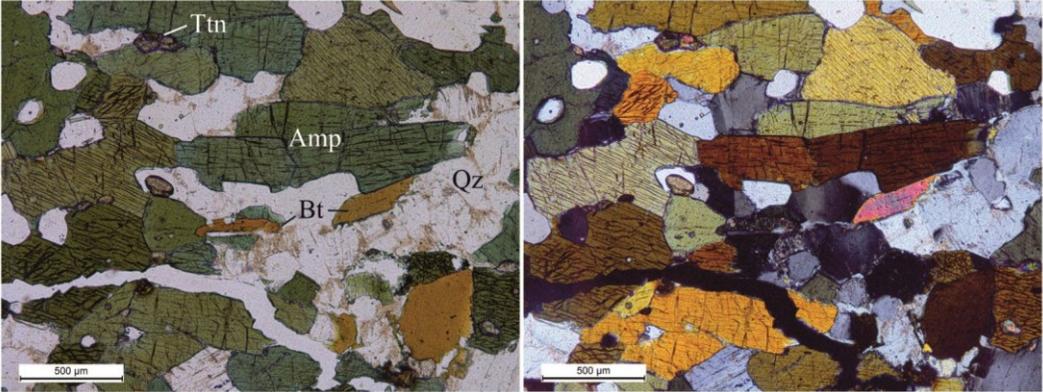
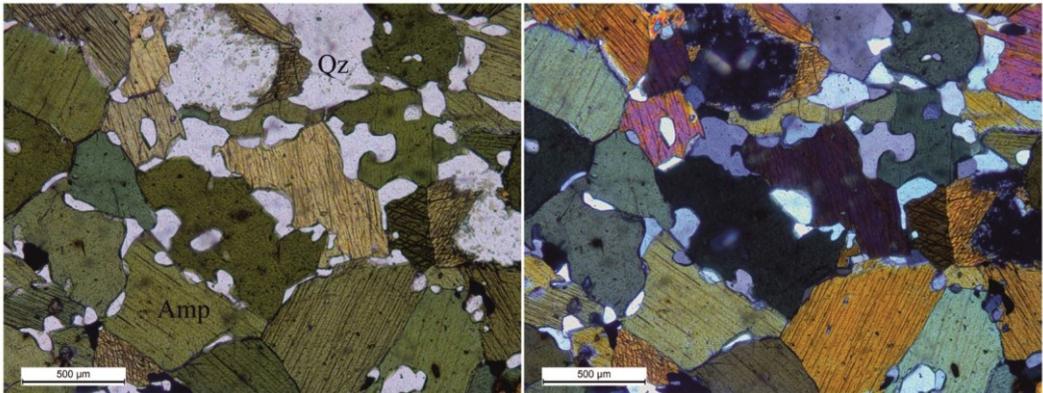
## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Петрографическое описание шлифов

Таблица В. 1 – Петрографическое описание амфиболитов

№ шлифа	Породообразующие минералы	Второстепенные минералы	Акцессорные минералы	Структура	Текстура	Размер зерен, мм
710	Амфибол (65 %), плаггиоклаз (20 %)	Кварц (10 %), биотит (5 %)	—	Гранонематобластовая	Массивная с элементами шлировой	0,04-2
						
711	Амфибол (65 %), кварц (15 %)	Плаггиоклаз (10 %), биотит (10 %)	Титанит (1 %), эпидот (единичные зерна)	Лепидогранонематобластовая	Массивная	0,1-2

Продолжение таблицы В.1

						
S2	Амфибол (90 %)	Кварц (5 %), плаггиоклаз (4 %)	Рудный минерал, биотит, титанит (всего 1 %)	Гранонемато- бластовая	Массивная	0,03-1,5
						

Продолжение таблицы В.1

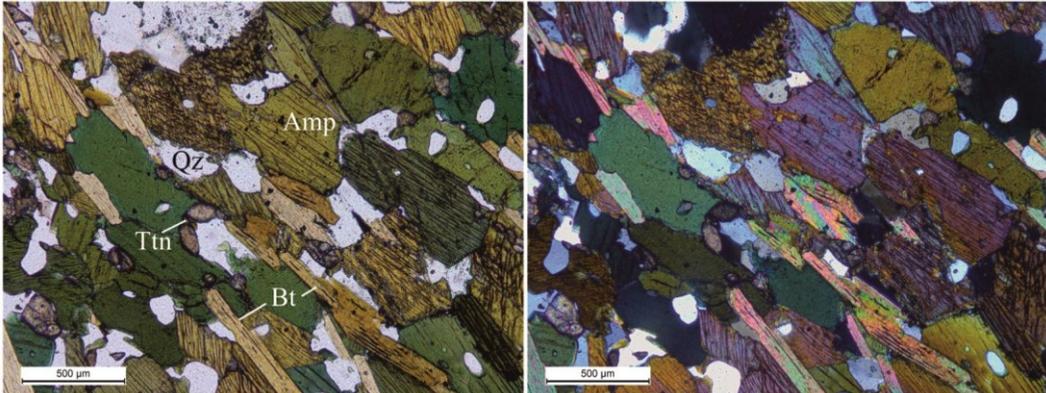
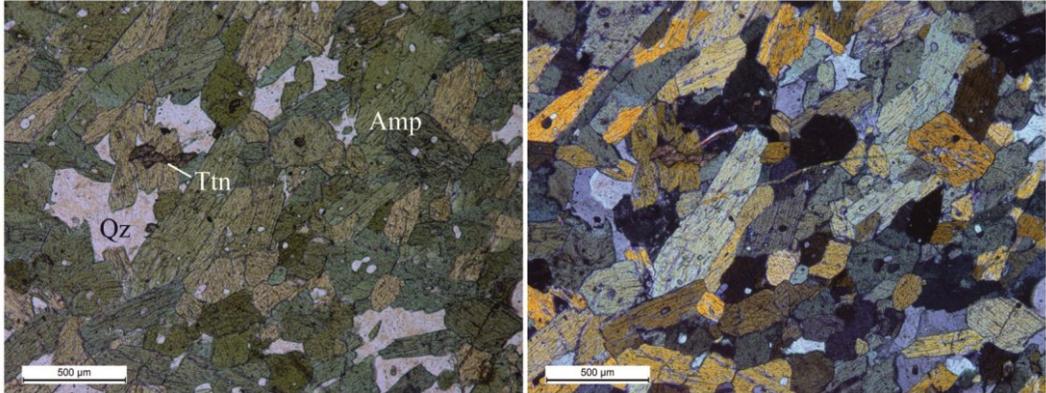
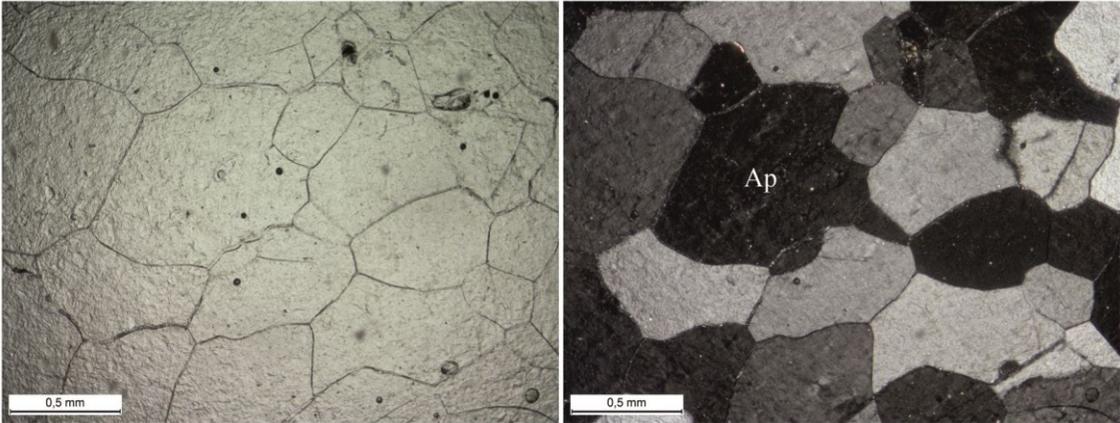
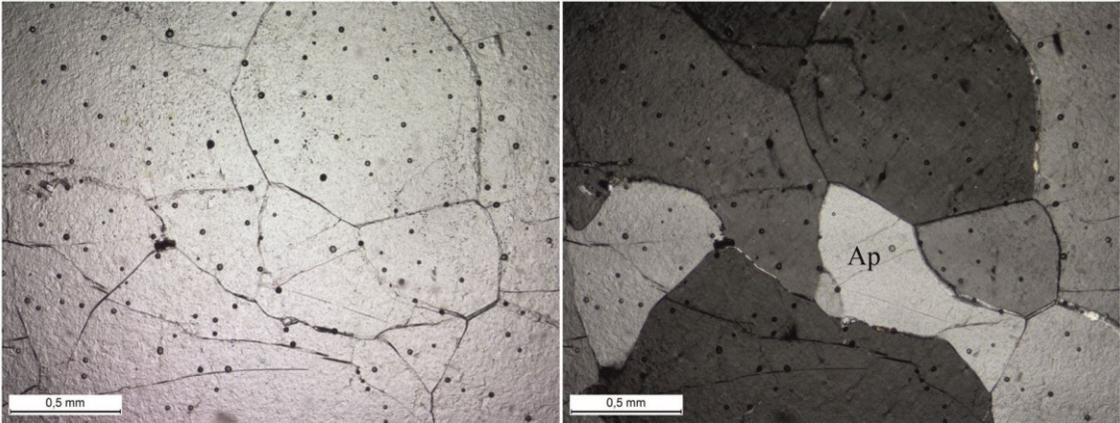
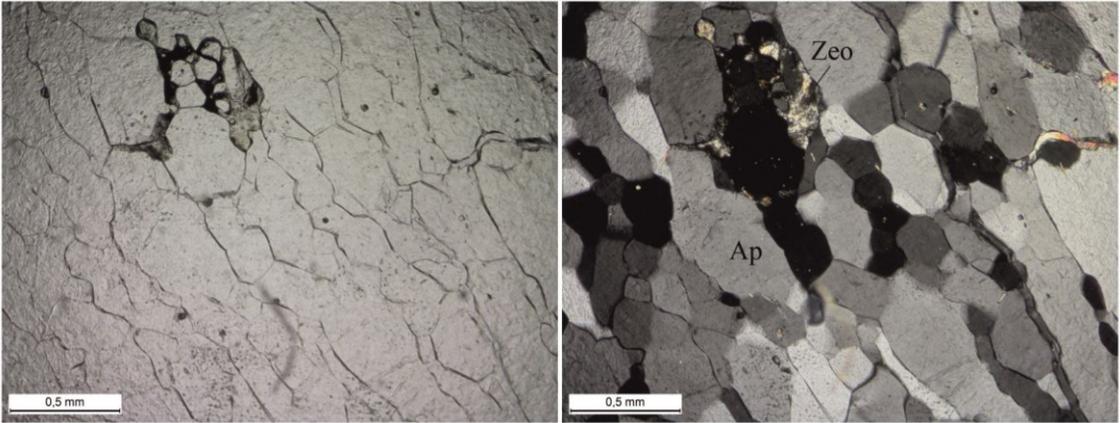
S4	Амфибол (80 %)	Биотит (9 %), кварц (7 %), плагиоклаз (3 %)	Титанит (1 %)	Лепидограно-нематобластовая	Массивная с элементами сланцеватой	0,08-2
						
V2	Амфибол (80 %)	Кварц (7 %), плагиоклаз (3 %), биотит (3 %), титанит (2 %)	—	Гранонематобластовая	Массивная	0,01-1,25
						

Таблица В. 2 – Петрографическое описание апатитовых руд.

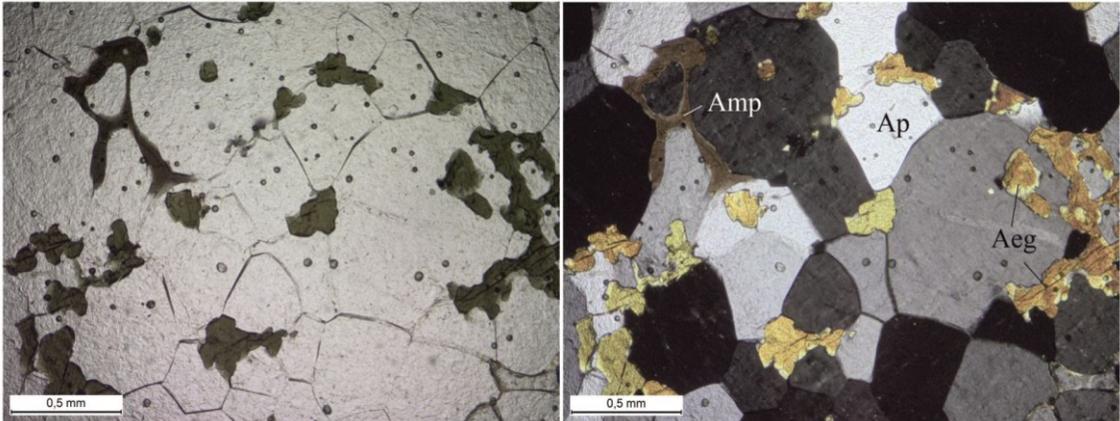
Обозначения минералов даны по (Whitney, Evans, 2010). Фото слева – николи II, справа – николи X.

№ шлифа	Породообразующие минералы	Второстепенные минералы	Акцессорные минералы	Вторичные минералы	Структура	Текстура	Размер зерен, мм
1	Апатит (100 %)	–	Эгирин-авгит, щелочной амфибол (единичные зерна)	–	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая	Массивная	0,1- 4
							
2	Апатит (90 %)	Нефелин (5 %), эгирин-авгит (3 %), щелочной амфибол (2 %)	–	Цеолиты	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая	Массивная с элементами шпировой	0,1-5

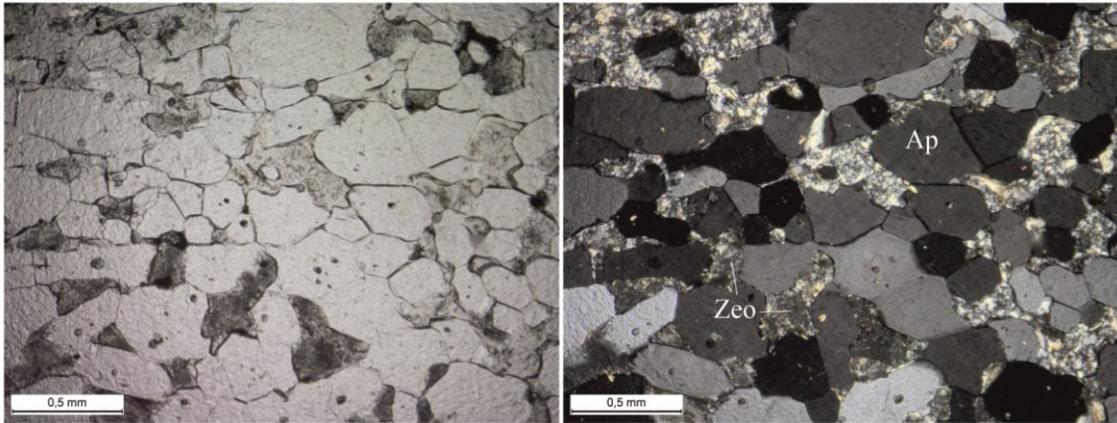
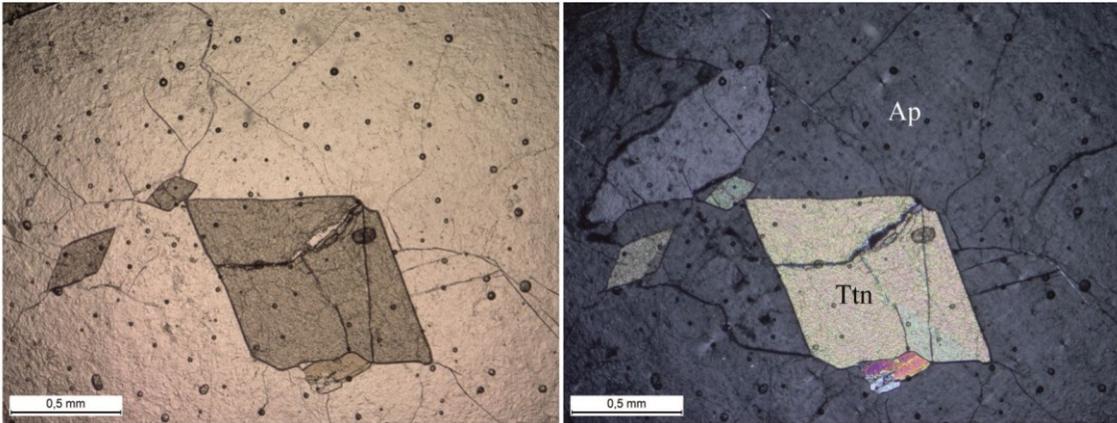
Продолжение таблицы В.2

									
3	Апатит (90 %)	Нефелин (нацело замещен, 10 %)	Эгирин-авгит, рудный минерал (единичные зерна)	Шпреух- штейнизация	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая	Массивная с элементами директивной	0,1- 4		
									

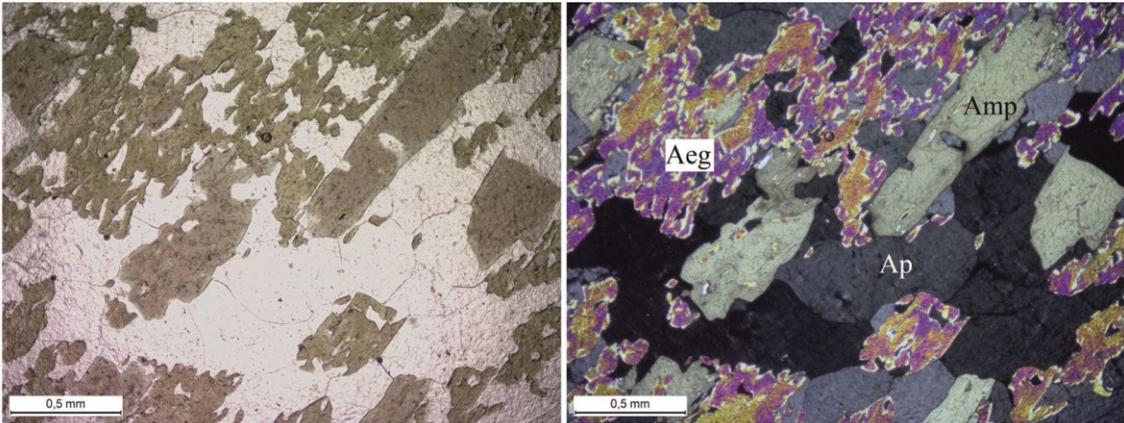
Продолжение таблицы В.2

4	Апатит (90 %)	Эгирин-авгит (7 %), щелочной амфибол (3 %)	Рудный минерал (единичные зерна)	—	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая с элементами пойкилитовой	Массивная с элементами полосчатой	0,1-2,5
							
5	Апатит (55 %), нефелин (местами нацело замещен, 40 %)	Эгирин-авгит (5 %)	Лампрофиллит (единичные зерна)	Цеолиты, канкринит, шпреухштейнизация	Гипидиоморфнозернистая пойкилитовая	Массивная с элементами директивной	0,1-3

Продолжение таблицы В.2

							
6	Апатит (75 %)	Титанит (10 %), эвдиалит (10 %), нефелин (5 %)	Лампрофиллит (единичные зерна)	Цеолиты (единичные зерна)	Неравнозернистая, пан- гипидиоморфнозернистая с элементами пойкилитовой	Массивная с элементами шлировой	0,1-больше 5
							

Продолжение таблицы В.2

7	Апатит (60 %), эгирин-авгит (30 %)	Щелочной амфибол (7 %), К-На полевой шпат (3 %)	Титанит, рудный минерал, мелилит (единичные зерна)	—	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая	Массивная с элементами директивной	0,1-5
							
8	Нефелин (43 %), апатит (30 %)	Эгирин-авгит (15 %), щелочной амфибол (5 %), титанит (5 %)	Рудный минерал (единичные зерна)	Цеолиты (2 %)	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая с элементами пойкилитовой	Массивная	0,1-больше 5

Продолжение таблицы В.2

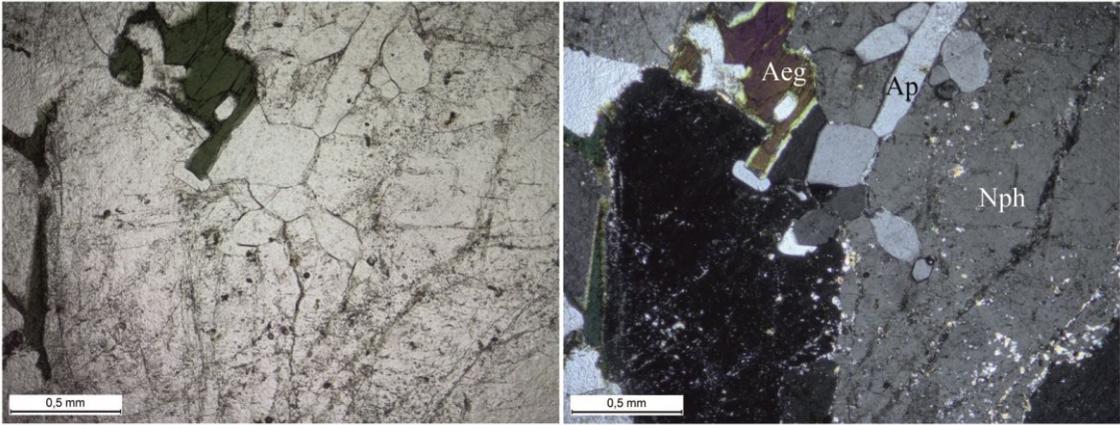
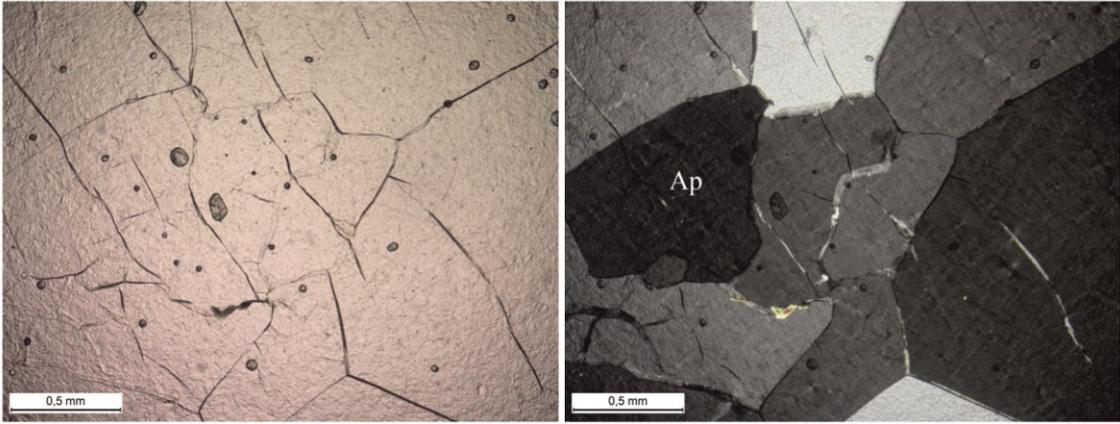
							
9	Нефелин (68 %), апатит (25 %)	Эгирин-авгит, щелочной амфибол, карбонаты (всего 2 %), К-На полевой шпат (2 %)	Титанит, рудный минерал, мелилит (единичные зерна)	Цеолиты, канкринит (3 %)	Неравнозернистая, гипидиоморфнозернистая с элементами пойкилитовой	Массивная	0,1-больше 5
							

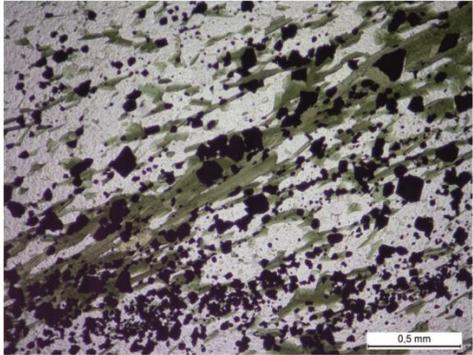
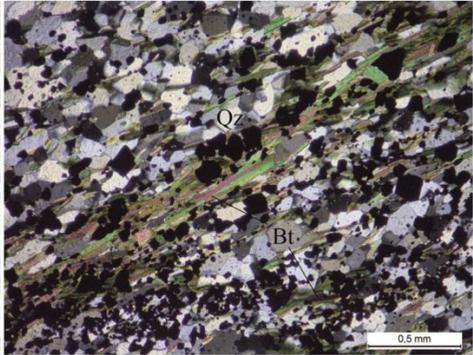
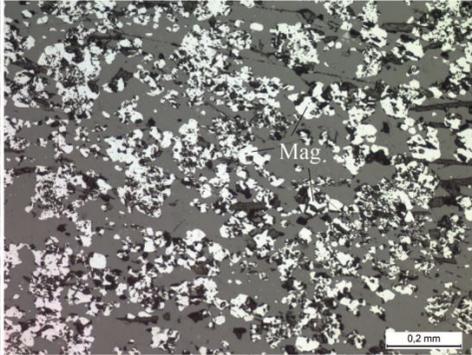
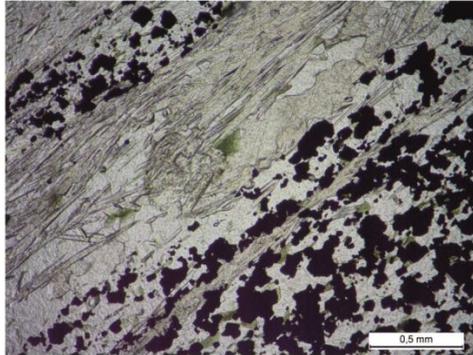
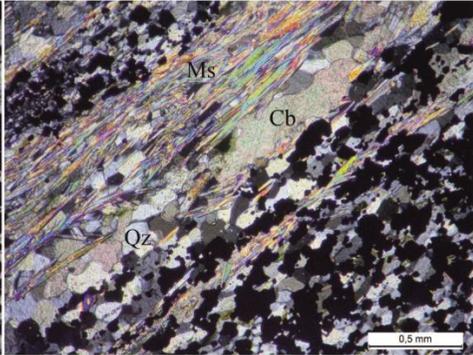
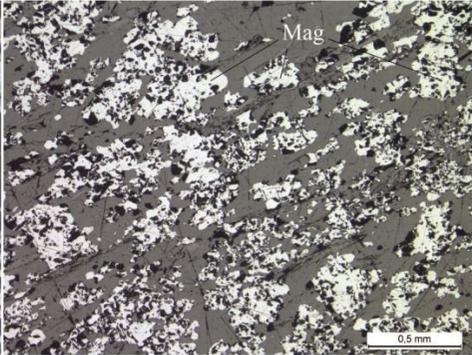
Таблица В. 3 – Петрографическое описание железистых кварцитов.

Обозначения минералов даны по (Whitney, Evans, 2010).

Фото слева направо: в проходящем свете (николи II, николи X), в отраженном свете.

№ шлифа	Породообразующие минералы	Второстепенные минералы	Вторичные минералы	Структура	Текстура	Размер зерен, мм
ТКШ-7	Кварц (60 %), рудный минерал (30 %)	Биотит (9 %)	Карбонаты (1 %), хлоритизация	Лепидогранобластовая	Полосчатая	0,02-0,8
ТКШ-8	Кварц (70 %),	Рудный минерал (19 %), биотит (10 %)	Карбонаты (1 %), хлоритизация	Лепидогранобластовая	Полосчатая	0,02-0,8

Продолжение таблицы В.3

						
<p>ТКШ-15</p>	<p>Рудный минерал (45 %), кварц (35 %)</p>	<p>Мусковит (15 %), биотит (3 %)</p>	<p>Карбонаты (2 %), хлоритизация</p>	<p>Лепидогранобластовая</p>	<p>Полосчатая</p>	<p>0,02-0,7</p>
						

Продолжение таблицы В.3

<p>ТКШ-16</p>	<p>Рудный минерал (45 %), кварц (35 %)</p>	<p>Щелочной амфибол (13 %), К-На полевой шпат (5 %), эпидот (1 %), альбит (1 %), биотит (единичные зерна)</p>	<p>—</p>	<p>Нематогранобластовая</p>	<p>Массивная</p>	<p>0,02-1,5</p>
<p>ТКШ-17</p>	<p>Рудный минерал (65 %)</p>	<p>Кварц (20 %), щелочной амфибол (14 %), биотит (единичные зерна)</p>	<p>Карбонаты (1 %), ожелезнение</p>	<p>Нематогранобластовая</p>	<p>Полосчатая</p>	<p>0,02-1,5</p>

Продолжение таблицы В.3

<p>ТКШ-19</p>	<p>Кварц (50 %), роговая обманка (25 %)</p>	<p>Рудный минерал (10 %), биотит (14 %)</p>	<p>Карбонаты (1 %), ожелезнение</p>	<p>Кварцевой части – гранобластовая, амфиболовой части - лепидонематобластовая</p>	<p>Шлировая</p>	<p>0,04-1,5</p>
<p>ТКШ-23</p>	<p>Эпидот (70 %),</p>	<p>Рудный минерал (9 %), кварц (10 %), биотит (5 %), мусковит (5 %), щелочной амфибол (единичные зерна)</p>	<p>Карбонаты (1 %), ожелезнение</p>	<p>Гранонематобластовая</p>	<p>Полосчатая</p>	<p>0,02-1,5</p>

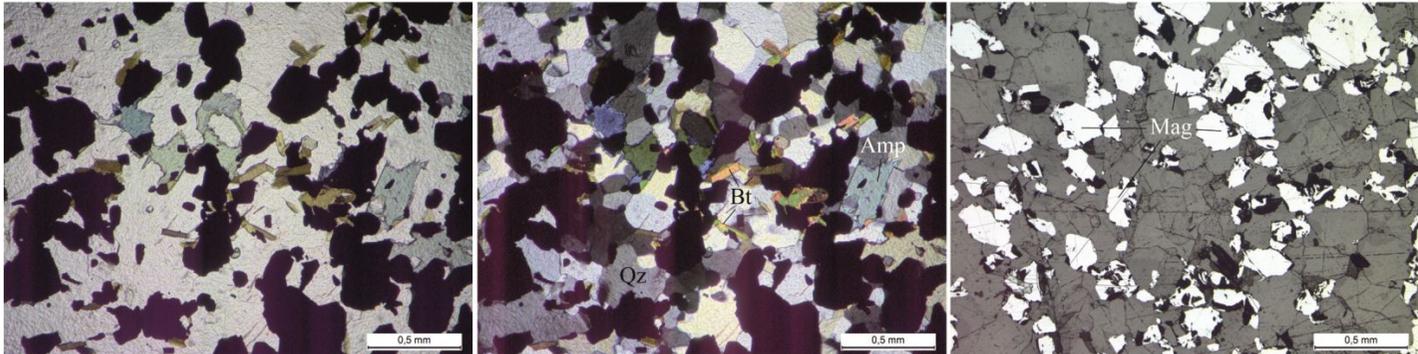
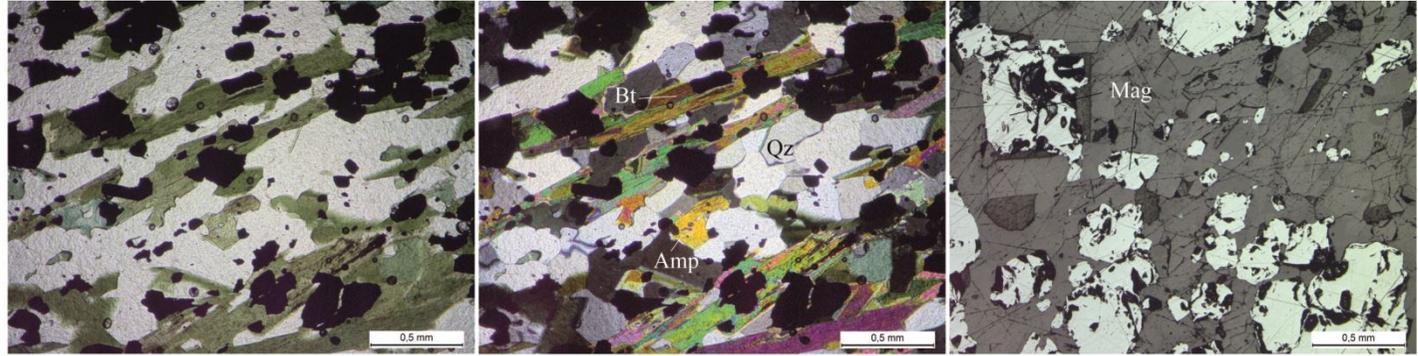
Продолжение таблицы В.3

<p>ТКШ-24</p>	<p>Кварц (60 %),</p>	<p>Рудный минерал (14 %), мусковит (15 %), биотит (10 %)</p>	<p>Карбонаты (1 %)</p>	<p>Лепидогранобластовая</p>	<p>Полосчатая</p>	<p>0,02-0,7</p>
<p>ТКШ-33</p>	<p>Кварц (40 %), рудный минерал (25 %)</p>	<p>Биотит (10 %), мусковит (3 %), тремолит, актинолит (15 %), эпидот (5 %)</p>	<p>Карбонаты (1 %), хлорит (1 %)</p>	<p>Нематогранобластовая</p>	<p>Массивная</p>	<p>0,02-0,3</p>

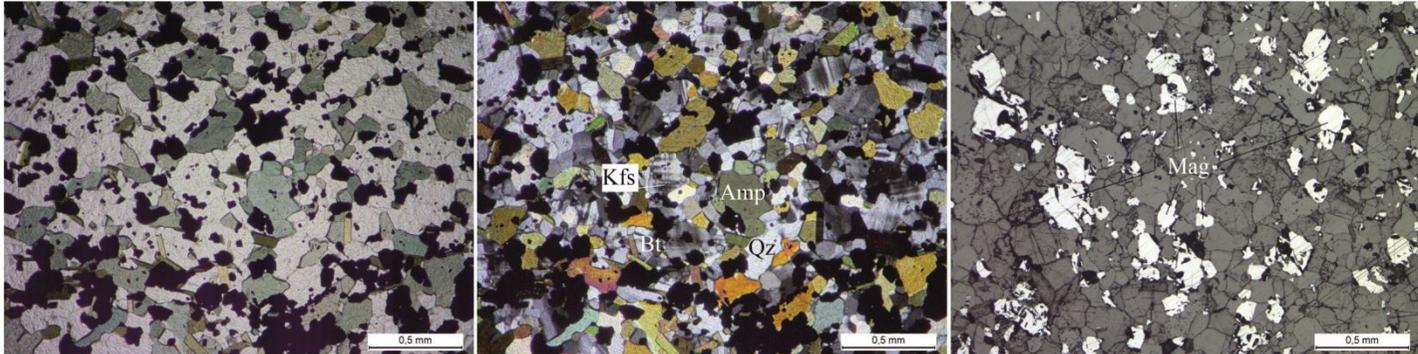
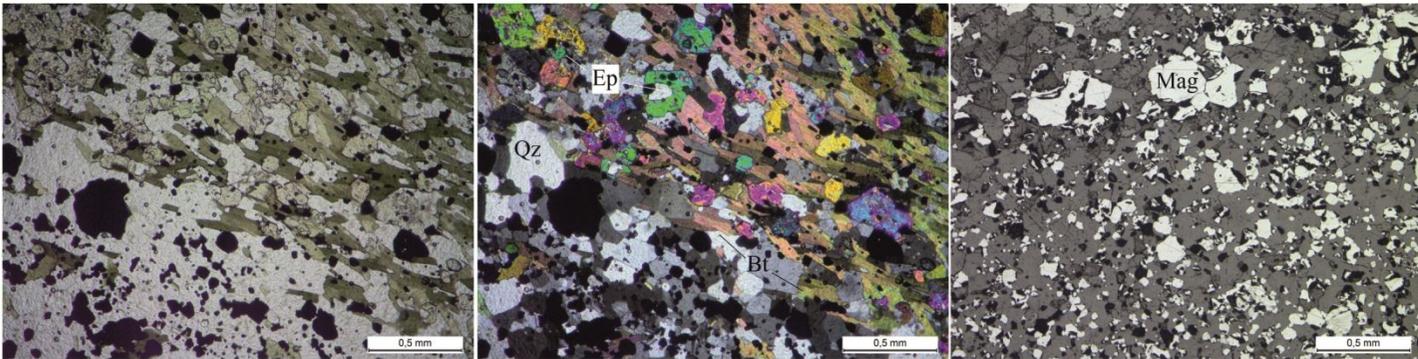
Продолжение таблицы В.3

<p>ТКШ-36</p>	<p>Кварц (40 %), роговая обманка (25 %)</p>	<p>Рудный минерал (20 %), биотит (15 %)</p>	<p>—</p>	<p>Нематогранобластовая</p>	<p>Полосчатая</p>	<p>0,02-1,5</p>
<p>ЛКШ-1</p>	<p>Эпидот (40 %), рудный минерал (25 %), кварц (30 %)</p>	<p>Биотит (2 %), щелочной амфибол (3 %)</p>	<p>—</p>	<p>Нематогранобластовая</p>	<p>Массивная</p>	<p>0,02-2,5</p>

Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-4	Рудный минерал (45 %), кварц (30 %)	Биотит (9 %), щелочной амфибол (15 %), К-На полевой шпат (1 %)	—	Нематогранобластовая	Массивная	0,02-1,2
						
ЛКШ-6	Кварц (70 %)	Рудный минерал (15 %), биотит (10 %), роговая обманка (5 %)	—	Лепидогранобластовая	Полосчатая	0,02-2
						

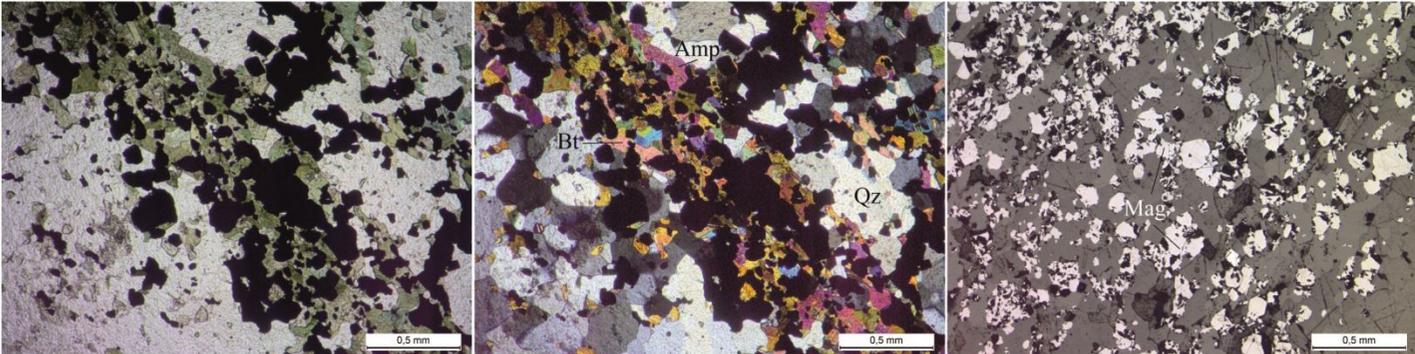
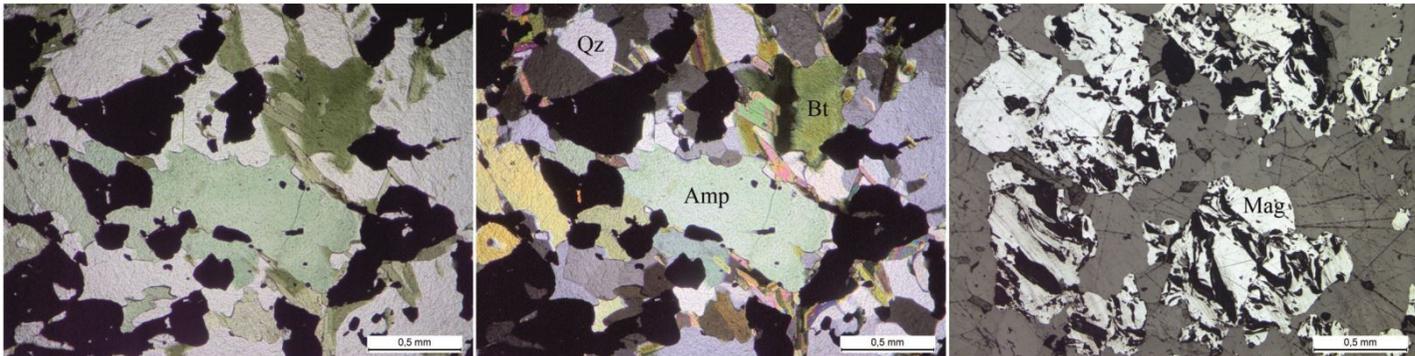
Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-9	Рудный минерал (38 %), кварц (30 %)	Роговая обманка (15 %), биотит (10 %), К-На полевой шпат (7 %)	Ожелезнение	Нематогранобластовая	Полосчатая	0,02-2
						
ЛКШ-10	Рудный минерал (40 %), кварц (33 %)	Биотит (20 %), эпидот (5 %), щелочной амфибол (1 %), К-На полевой шпат (1 %)	—	Лепидогранобластовая	Полосчатая	0,02-0,8
						

Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-13	Рудный минерал (60 %)	Кварц (20 %), биотит (10 %), эпидот (5 %), щелочной амфибол (5 %), К-На полевой шпат (единичные зерна)	—	Лепидогранобластовая	Массивная	0,02-0,7
ЛКШ-14	Рудный минерал (45 %), кварц (30 %)	Биотит (10 %), тремолит-актинолит (15 %), К-На полевой шпат (единичные зерна)	Ожелезнение	Нематогранобластовая	Полосчатая	0,02-1,5

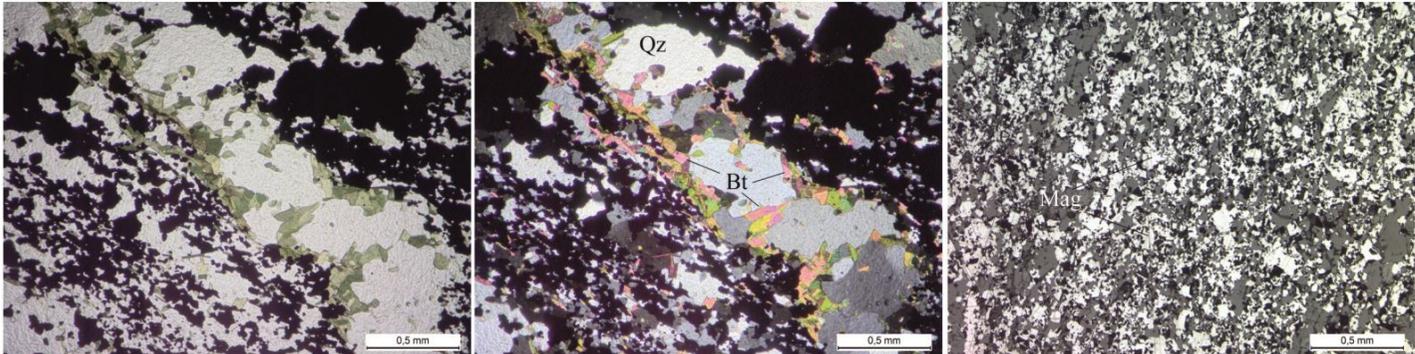
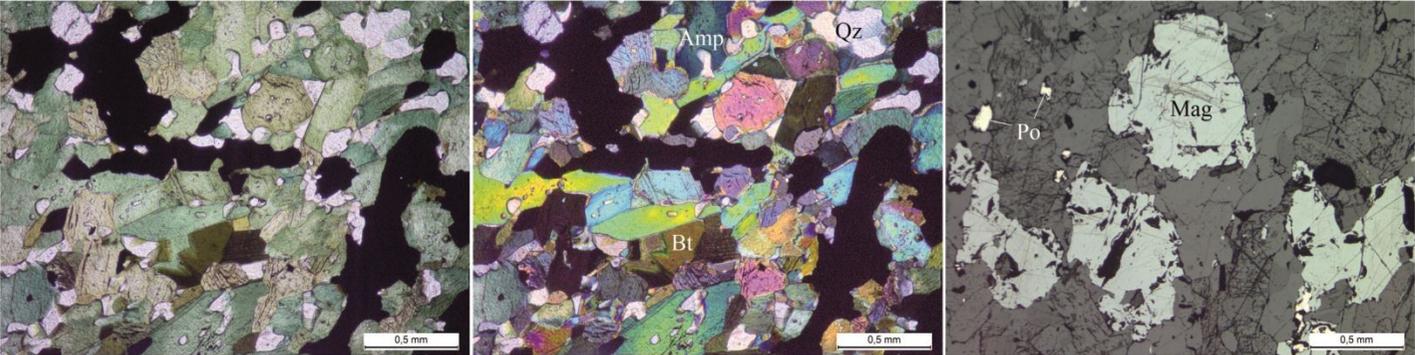
Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-16	Кварц (45 %), рудный минерал (25 %)	Биотит (20 %), роговая обманка (10 %)	Хлорит (единичные зерна)	Лепидогранобластовая	Шлировая	0,02-2
						
ЛКШ-21	Кварц (45 %), рудный минерал (25 %)	Роговая обманка (15 %), биотит (10 %), К- Na полевой шпат (5 %)	—	Нематогранобластовая	Массивная	0,02-1,5
						

Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-37	Кварц (70 %)	Рудный минерал (15 %), щелочной амфибол (10 %), биотит (5 %), К-На полевой шпат (единичные зерна)	—	Нематогранобластовая	Массивная	0,02-1,2
ЛКШ-38	Кварц (45 %)	Рудный минерал (15 %), роговая обманка (20 %), биотит (15 %), эпидот (5 %), К-На полевой шпат (единичные зерна)	Карбонаты (единичные зерна)	Лепидонемато-гранобластовая	Массивная	0,02-1,5

Продолжение таблицы В.3

ЛКШ-62	Рудный минерал (65 %)	Кварц (20 %), биотит (5 %), эпидот (5 %)	Карбонаты (5 %)	Гранобластовая	Массивная	0,01-0,6
						
ЛКШ-78	Роговая обманка (45 %), рудный минерал (25 %)	Кварц (20 %), биотит (10 %)	—	Нематогранобластовая	Массивная	0,04-2
						

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### Акт о внедрении результатов

**Утверждаю**

Генеральный директор  
ООО «ЦНТ Инструментс»  
к.г.-м.н. В. Н. Рудашевский



*[Handwritten signature]*

«26» апреля 2022 г.

АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертации  
Захаровой Алены Александровны  
по научной специальности 25.00.05 Минералогия, кристаллография

Специальная комиссия в составе:

Председатель: к.г.-м.н. В. Н. Рудашевский;

Члены комиссии: О. В. Аликин, А.В. Чумаков, Г.В. Богданов.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертации на тему «Математическое моделирование минеральных агрегатов: теория и геологическое приложение», представленной на соискание ученой степени кандидата геолого-минералогических наук, использованы в производственной деятельности ООО «ЦНТ Инструментс».

Развиваемая автором в диссертационной работе методика типизации структур применяется в качестве дополнительной количественной характеристики для разделения руд по степени обогатимости при их изучении с помощью 3D-технологии минералого-геохимических исследований. Использование методики позволяет повысить качество предоставляемых компанией услуг по комплексному изучению руд для решения минералого-технологических задач.

**Председатель комиссии**

Генеральный директор, к.г.-м.н.

*[Handwritten signature]*

/Рудашевский В.Н./

**Члены комиссии:**

Зав. лаб. технологической минералогии

*[Handwritten signature]*

Аликин О.В.

Инженер-минералог

*[Handwritten signature]*

Чумаков А.В.

Лаборант-минералог

*[Handwritten signature]*

Богданов Г.В.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

## Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021612125

**Визуализация границы Харди-Вайнберга для  
триминеральных агрегатов в трехмерных сечениях  
методом проекций**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский горный университет» (RU)*

Авторы: *Захарова Алена Александровна (RU),  
Войтеховский Юрий Леонидович (RU)*

Заявка № 2021611327

Дата поступления 09 февраля 2021 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 11 февраля 2021 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Изшев*  
Г.П. Изшев