

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«Петербургский государственный университет путей сообщения Императора
Александра I»

На правах рукописи

Шарафутдинова Анжелика Алексеевна



**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ
ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

Специальность 1.6.22. Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Брынь М.Я.

Санкт-Петербург – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.....	12
1.1 Общие сведения о цифровых информационных моделях промышленных объектов и наземном лазерном сканировании как методе сбора информации.....	12
1.2 Анализ требований к точности наземного лазерного сканирования и цифрового информационного моделирования.....	16
1.3 Анализ методики наземного лазерного сканирования промышленных объектов.....	21
1.3.1 Обобщенная методика наземного лазерного сканирования.....	21
1.3.2 Анализ методик проектирования и создания геодезических сетей при выполнении наземного лазерного сканирования.....	25
1.3.3 Анализ взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек.....	27
1.4 Выводы по Главе 1	35
ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ И ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА БЛИЖАЙШИХ ТОЧЕК	38
2.1 Постановка задачи	38
2.2 Обоснование требований к точности цифрового информационного моделирования и наземного лазерного сканирования промышленных объектов .	39
2.2.1 Разработка требований к цифровой информационной модели промышленного объекта	39
2.2.2 Разработка требований к точности наземного лазерного сканирования промышленных объектов при создании цифровых информационных моделей....	45
2.3 Исследование практических результатов взаимного ориентирования с использованием алгоритма ближайших точек.....	58

2.4	Разработка методики проектирования и построения геодезической сети при наземном лазерном сканировании промышленных объектов	68
2.4.1	Разработка методики проектирования опорной геодезической сети	72
2.4.2	Разработка методики проектирования сканерной сети.....	77
2.4.3	Предложения по учету факторов, влияющих на точность измерений при наземном лазерном сканировании промышленных объектов.....	81
2.5	Выводы по Главе 2.....	86
ГЛАВА 3 ВЗАИМНОЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ КВАЗИНЬЮТОНА		90
3.1	Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей методом Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно.....	92
3.2	Условия работы метода Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно.....	96
3.3	Выводы по Главе 3.....	98
ГЛАВА 4 РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННОЙ МЕТОДИКИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ.....		100
4.1	Применение НЛС и ЦИМ для выявления отклонений конструкций от их проектных значений.....	100
4.2	Применение НЛС и ЦИМ в решении задач проектирования, строительства и ввода в эксплуатацию промышленного объекта	106
4.3	Проектирование и создание геодезической сети при НЛС промышленного объекта.....	111
4.4	Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей с применением метода квазиньютона	118
4.5	Выводы по Главе 4.....	122
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		127
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		130
ПРИЛОЖЕНИЕ А Расчет влияния угла падения лазерного луча на ошибку измерения расстояний.....		154
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Результаты проектирования опорной сети по разработанной методике		155

ПРИЛОЖЕНИЕ В Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022616904 от 07.04.2022 г.....	163
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Результаты проектирования сканерной сети по разработанной методике	164
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Результаты уравнивания опорной сети, построенной на промышленном объекте.....	167
ПРИЛОЖЕНИЕ Е Реализация метода BFGS для решения задачи взаимного ориентирования дискретных точечных моделей	170
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж Результаты взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с помощью алгоритма ICP	196
ПРИЛОЖЕНИЕ И Акт внедрения результатов диссертационного исследования	198

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. За последние десятилетия произошел резкий прогресс цифровизации, которая получила свое внедрение во многих отраслях, в том числе и в промышленности. Это привело к тому, что для обеспечения качественной и безопасной эксплуатации промышленных предприятий необходимо переходить от информации, представленной на бумажных носителях, к цифровому представлению производственных активов. Инструментом в решении этой задачи является цифровая информационная модель (ЦИМ), которая может содержать в себе необходимую и актуальную информацию для поддержки процессов на этапах жизненного цикла (инженерные изыскания, проектирование, строительство, эксплуатация и ликвидация) промышленного объекта.

Одним из методов сбора геометрической и пространственной информации о производственных активах для создания ЦИМ является наземное лазерное сканирование (НЛС), которое позволяет получить значительный объем необходимой информации с наименьшими временными затратами.

Несмотря на то, что НЛС и ЦИМ активно применяются на практике уже больше десятилетия, нормативно-техническая база недостаточно охватывает требования к двум этим технологиям. Так, в существующих нормативных документах отсутствуют требования к точности и методике проведения НЛС промышленных объектов. Также отсутствуют требования к точности создания ЦИМ.

При этом применение НЛС для создания ЦИМ промышленных объектов имеет ряд особенностей, среди которых можно выделить: большое количество установок станций лазерного сканирования, короткие расстояния между станциями сканирования и большой массив данных, получаемый на выходе.

Таким образом, разработка методики НЛС промышленных объектов для создания ЦИМ, учитывающая указанные особенности, представляется актуальной.

Тема диссертации соответствует пунктам 7, 12 и 14 паспорта специальности 1.6.22. «Геодезия».

Степень разработанности темы исследования. Значительный вклад в разработку и совершенствование технологии НЛС, в том числе и для создания ЦИМ, внесли отечественные ученые: Е.И. Аврунев, Б.Ф. Азаров, М.А. Алтынцев, В.А. Вальков, А.Б. Велижев, М.Г. Выстрчил, И.Н. Горькавый, Н.В. Канашин, Д.В. Крутиков, А.В. Комиссаров, Е.М. Медведев, Т.М. Медведская, А.В. Середович, В.А. Середович, Т.А. Широкова, В.В. Щербаков, А.А. Шоломицкий, Р.В. Шульц и др. Следует особо отметить труды ученых Канады, Австрии, Германии, Чехии, Франции, таких как: D. Akca, P.J. Besl, A. Gruen, H. Ingensand, D.D. Lichti, N.D. McKay, N. Pfeifer, T. Rabbani, A. Reitdorf, Y. Reshetyuk, D. Schneider, T. Schulz, M.P. Stewart, R. Straiger, M. Tsakiri, G. Vosselman, и др.

Цель работы – разработать методику НЛС, учитывающую особенности геодезической съемки промышленных объектов для повышения точности определения пространственного положения объектов при создании ЦИМ.

Идея работы заключается в построении геодезической сети на основе ее предварительного проектирования и взаимного ориентирования дискретных точечных моделей методом численной оптимизации с использованием ближайших точек.

Задачи исследования:

1. Проанализировать существующие методики НЛС промышленных объектов с выявлением их достоинств и недостатков.

2. Разработать требования к составу и точности ЦИМ промышленного объекта и на их основе обосновать требования к точности НЛС, как методу сбора информации, для создания ЦИМ.

3. Разработать методику проектирования и построения геодезических сетей в ходе выполнения работ на промышленных объектах с учетом взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с использованием ближайших точек и выполнить ее проверку на реальном объекте.

4. Разработать методику взаимного ориентирования данных наземного лазерного сканирования на основе метода численной оптимизации.

5. Создать программный алгоритм, реализующий методику взаимного ориентирования на основе метода численной оптимизации, и проверить корректность его работы в сравнении с традиционными методами.

Объектом исследования являются цифровые информационные модели промышленных объектов.

Предметом исследования выступает методика наземного лазерного сканирования.

Научная новизна работы:

1. Обоснованы требования к точности выполнения НЛС и ЦИМ для решения задач, возникающих в течение жизненного цикла промышленного объекта.

2. Разработана двухуровневая методика проектирования геодезических сетей, состоящая из предрасчета точности положения пунктов опорной сети, координаты которых определяются от исходных пунктов традиционными методами геодезии и предрасчета точности положения пунктов сканерной сети, координаты которых определяются от пунктов опорной сети в ходе лазерного сканирования.

3. Разработана методика построения геодезической сети, предполагающая создание сканерной сети по границам технологических блоков для обеспечения всей территории технологической установки достаточным количеством пунктов с известными координатами и основанная на выполнении взаимного ориентирования точечных моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек и выполнении внешнего ориентирования аналитическим методом с использованием специальных марок.

4. Разработана методика взаимного ориентирования дискретных точечных моделей, основанная на методе Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно с предварительной оптимизацией.

5. Разработана авторизированная программа, позволяющая выполнять проектирование геодезической сети по разработанной методике.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы заключается в разработке теоретических основ методики НЛС, позволяющих учитывать особенности промышленного объекта. Практическая значимость работы состоит в том, что разработанная методика НЛС для создания ЦИМ была реализована на реальных промышленных объектах и в дальнейшем может применяться для решения аналогичных практических задач, а также может быть адаптирована для других видов объектов.

Методология и методы исследования. Применялись теоретические и экспериментальные методы, включающие в себя методы сравнительного анализа, теорию ошибок измерений, методы статистических испытаний, метод наименьших квадратов, численные методы оптимизации.

Положения, выносимые на защиту:

1. Требования к точности наземного лазерного сканирования и трехмерного моделирования, в зависимости от вида геодезических работ, следует определять разработанным расчетом, на основе сформулированных требований к составу и точности элементов цифровой информационной модели, с учетом перехода от допусков, указанных в нормативно-технической документации, к средним квадратическим ошибкам определения пространственного положения точек.

2. Наземное лазерное сканирование промышленных объектов следует выполнять на основе проектирования и дальнейшего построения геодезической сети, включающей опорную и сканерную сети, где сканерная сеть создается по границам технологических блоков и предполагает выполнение взаимного ориентирования точечных моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек и выполнении внешнего ориентирования аналитическим методом с использованием специальных марок.

3. Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей методом Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (*BFGS*) с предварительной оптимизацией

обладает сверхлинейной сходимостью и позволяет вычислять оптимальные значения параметров преобразования, а самокорректирующие свойства метода повышают надежность конечных результатов.

Степень достоверности результатов исследования подтверждается согласованностью результатов проектирования опорной сети по разработанной методике и реализованной в среде *Mathcad*, с результатами натурных геодезических построений, уравненных в программном обеспечении *CredoDAT*; совпадением результатов проектирования сканерной сети в соответствии с разработанной методикой и реализованной в автоматизированной программе, с результатами лазерного сканирования, взаимное ориентирование которых было выполнено в программном обеспечении *Cyclone*; соответствием результатов взаимного ориентирования точечных моделей, полученных с использованием разработанной методики, основанной на методе *BFGS*, и классического алгоритма ближайших точек.

Апробация результатов исследования. Основные положения и результаты работы докладывались на 8 всероссийских и международных научно-практических конференциях, посвященных проблемам геодезии:

– Международная научно-техническая конференция «Транспортное строительство в холодных регионах (TRANSOILCOLD – 2019)», г. Санкт-Петербург, 20–23 мая 2019 г.;

– Международная научно-техническая конференция «Строительство и архитектура: теория и практика инновационного развития» (САТРИД – 2019), г. Кисловодск, 1–5 октября 2019 г.;

– III всероссийская научно-практическая конференция «Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры. Наука и образование» (ГеоКа – 2019), г. Санкт-Петербург, 6–8 ноября 2019 г.;

– Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы инженерной геодезии», г. Санкт-Петербург, 14 ноября 2019 г.;

– III всероссийская научно-практическая конференция «Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной

информации и системы подготовки специалистов» (ВНПК – 2020), г. Санкт-Петербург, 15 мая 2020 г.;

– XIX Всероссийская конференция-конкурс студентов и аспирантов «Актуальные проблемы недропользования» г. Санкт-Петербург, 14–16 апреля 2021 г.;

– XVII Международный форум-конкурс студентов и молодых учёных «Актуальные проблемы недропользования» г. Санкт-Петербург, 31 мая – 6 июня 2021 г.;

– IV Международная научно-практическая конференция «Геодезия, землеустройство и кадастры: проблемы и перспективы развития» г. Омск, 30–31 марта 2022 г.

Практическая реализация. Разработанная методика НЛС внедрена в производственный процесс по выполнению проектов создания ЦИМ промышленных объектов компанией ООО «Промгеодезия» (подтверждается актом внедрения от 3 июня 2022 года).

Личный вклад автора заключается в проведении анализа зарубежной и отечественной научной и нормативно-технической литературы в области применения НЛС, ЦИМ, проектирования и создания геодезических сетей, обработке результатов лазерного сканирования и применении математических методов численной оптимизации; разработке приведенной в диссертации методики НЛС для создания ЦИМ; применении разработанной автоматизированной программы проектирования геодезических сетей при выполнении НЛС в среде программирования C#, *Visual Studio* 2019; разработке методики взаимного ориентирования дискретных точечных моделей методом *BFGS*; проведении экспериментальных исследований, подтверждающих корректность разработанных методик и автоматизированной программы.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 печатных работах (пункты списка литературы № 17, 72, 120, 121, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 163, 164), из них: 4 статья – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы

основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (далее – Перечень ВАК); в 2 статьях – в изданиях, входящих в международную базу данных и систему цитирования Scopus. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (пункт списка литературы № 126).

Структура диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав с выводами по каждой из них, заключения, списка литературы, включающего 186 наименования, и 8 приложений. Диссертационное исследование изложено на 198 страницах машинопечатного текста, содержит 29 рисунков и 26 таблиц.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность и благодарность научному руководителю д.т.н., проф. М.Я. Брынню за неоценимую помощь, переданные знания и идеи на всех этапах написания диссертации. Автор также выражает благодарность к.т.н. Р.А. Шарафутдинову за всестороннюю поддержку и ценные советы в ходе проведения исследований.

ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Общие сведения о цифровых информационных моделях промышленных объектов и наземном лазерном сканировании как методе сбора информации

Промышленное предприятие представляет собой сложный технологический объект с большим количеством процессов и производственных задач. Для эффективного и безопасного управления промышленным объектом все чаще применяются современные информационные технологии, одной из которых является цифровое информационное моделирование (ЦИМ). Как отмечено в работе автора [125], «ЦИМ представляет собой комплекс взаимосвязанной информации в цифровом виде, описывающий физические, функциональные и другие свойства объекта, основанный на его трехмерном представлении и являющийся источником информации для принятия своевременных управленческих и операционных решений».

Изначально технология ЦИМ применялась только для жилых и социальных зданий, причем только для стадий проектирования и строительства [180, 183]. Впоследствии технологию ЦИМ начали применять и для промышленных предприятий [87, 143, 172, 173], а также на всех стадиях жизненного цикла, включая стадию эксплуатации [130, 148, 160, 166, 176].

В связи с активным применением на практике технология ЦИМ постоянно развивается и активно исследуется зарубежными и отечественными учеными [4, 14, 43, 64, 73, 90, 94, 95, 116, 133, 135, 157, 159, 161]. Одними из ключевых вопросов на сегодняшний день остаются задачи, решаемые с применением ЦИМ; определение требований к ЦИМ; разработка регламентирующих документов; внедрение ЦИМ в производственный процесс и др. В настоящей диссертационной работе автор исследует требования к ЦИМ промышленных объектов как с точки

зрения состава, так и с точки зрения наименее изученного вопроса о точности определения положения элементов ЦИМ.

В зависимости от жизненного цикла промышленного объекта выделяют три основных вида ЦИМ: проектная, исполнительная и эксплуатационная. Основываясь на научной [4, 5, 10, 64, 135, 143, 159, 161, 172, 180, 183] и нормативно-технической документации [102], а также практическом опыте автора [72, 124, 125, 130, 162, 163, 164], приведем основные задачи, которые могут решаться с применением вышеуказанных ЦИМ, в том числе и на стадии ликвидации, предложенной автором в работе [131] (рисунок 1.1).

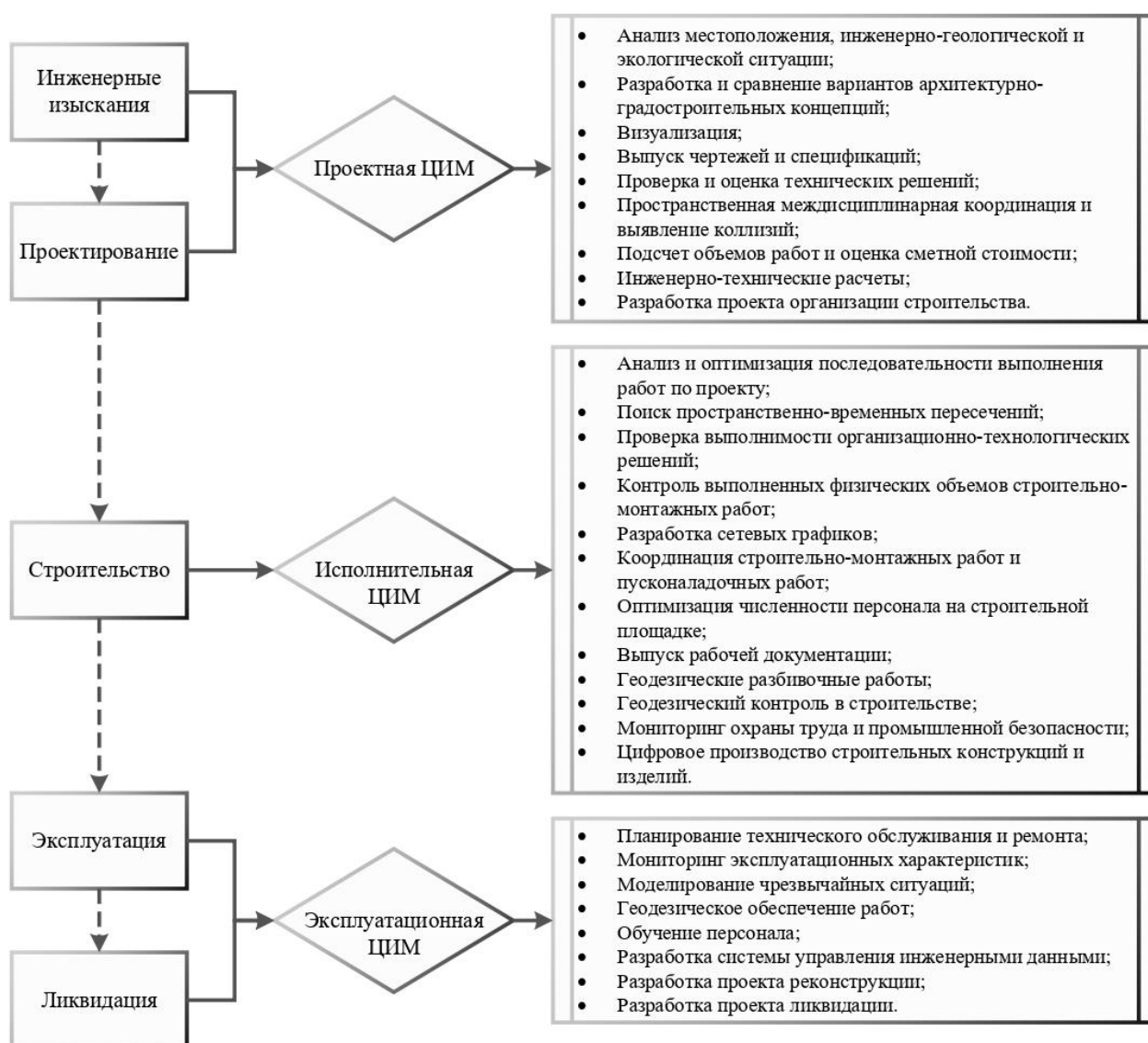


Рисунок 1.1 – Основные задачи, решаемые с применением ЦИМ

Создание и актуализация ЦИМ как правило выполняются постепенно от стадии инженерных изысканий до стадии эксплуатации промышленного объекта

[5, 172]. Для различных стадий жизненного цикла в ЦИМ актуализируется информация о каждом элементе трехмерной модели, включающая: уровень проработки элементов модели (*LOD – level of detail*) [133, 146, 155, 158, 177, 182]; уровень проработки информации (*LOI – level of information*); уровень проработки точности (*LOA – level of accuracy*) [150]. Общепринятые определения для уровней детализации представлены на рисунке 1.2.



Рисунок 1.2 – Уровни детализации элементов модели

Важно отметить, что *LOD*, *LOI* и *LOA* описывают уровень проработки не для всей трехмерной модели, а только отдельных ее элементов в зависимости от решаемых задач. Соответственно, при создании ЦИМ нужен баланс *LOD*, *LOI*, *LOA* в связи с тем, что для разных задач требуется оптимальное соотношение этих параметров. Процесс создания вышеуказанных ЦИМ для существующих промышленных объектов можно разделить на два этапа. Первым этапом является создание трехмерной модели, содержащей в себе информацию о габаритах и расположении конструкций и оборудования. Источником данных для создания трехмерной модели могут являться как техническая документация, так и геодезические измерения. Вторым этапом является формирование атрибутивной информации, основанной на технической документации или натурных обследованиях.

Так как промышленный объект является сложным техническим объектом, для которого характерна высокая плотность строительных конструкций, оборудования и трубопроводов, для сбора геодезических данных об объекте

целесообразно применять наземное лазерное сканирование (НЛС). По сравнению с традиционными методами измерений технология НЛС позволяет получить исходные данные с высокой степенью детализации при наименьших временных затратах, что подтверждается большим количеством исследований в мировой практике [7, 9, 11, 17, 18, 22, 63, 71, 89, 115, 125, 147, 151]. В работе [138] отмечено, что преимущество НЛС также заключается в том, что получаемые данные в результате измерений представлены непосредственно в трехмерном виде объекта и таким образом оперативно могут быть использованы проектными, строительными и эксплуатационными службами для решения различного рода задач.

Проанализировав возможности НЛС [5, 8, 12, 13, 16, 23, 24, 51, 54, 57, 70, 72, 80, 91, 96, 137, 139, 140, 142] применительно к задачам, решаемым с помощью ЦИМ на различных стадиях жизненного цикла промышленного объекта (рисунок 1.1), выделим основные виды инженерно-геодезических задач, которые возможно решить с помощью совместного применения НЛС и ЦИМ (рисунок 1.3).

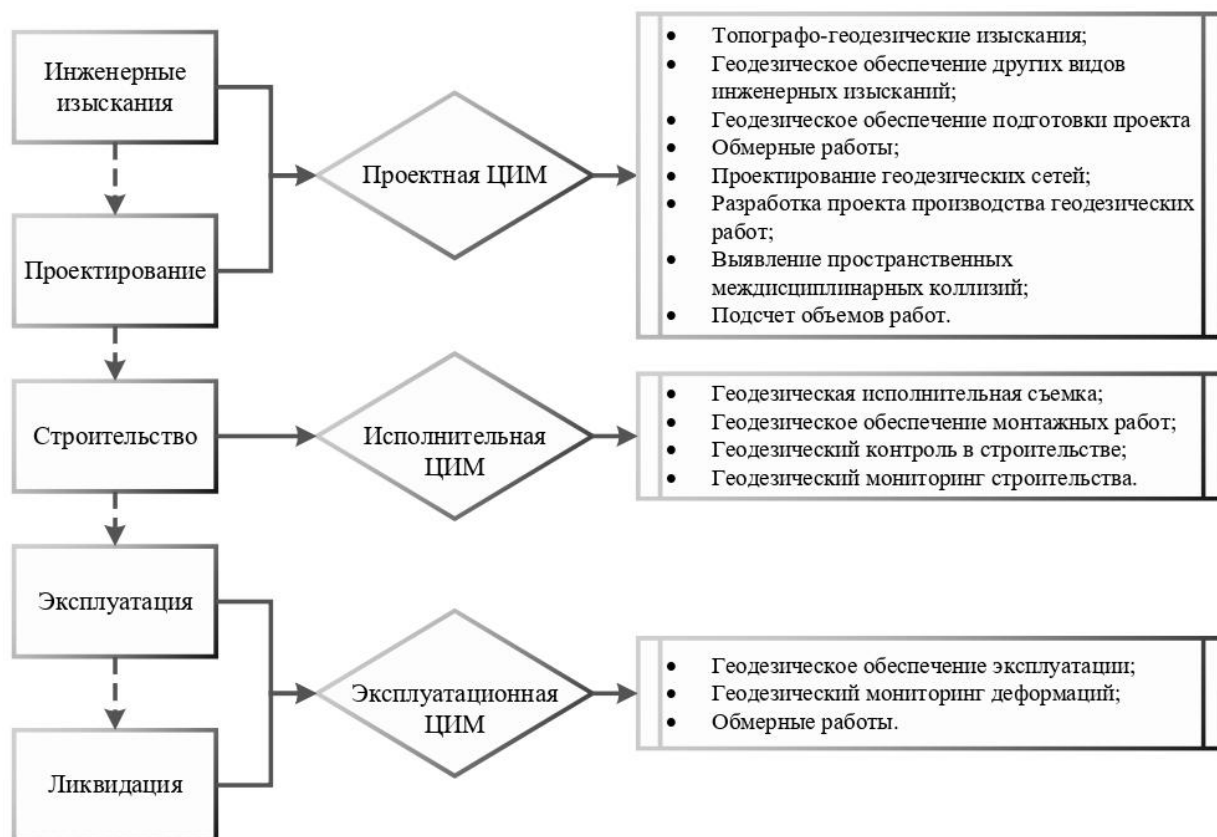


Рисунок 1.3 – Основные инженерно-геодезические задачи, решаемые с применением НЛС и ЦИМ

1.2 Анализ требований к точности наземного лазерного сканирования и цифрового информационного моделирования

В Российской Федерации нормативно-техническая документация, регулирующая требования к созданию и применению ЦИМ [39, 40, 103, 104] в настоящий момент активно развивается [34, 109]. Однако выполнив анализ основных утвержденных стандартов (рисунок 1.4), можно сделать вывод, что существующие требования содержат общие сведения. В мировой практике технология ЦИМ начала развиваться раньше, чем в Российской Федерации, и соответственно нормативно-техническая документация (рисунок 1.4) проработана более детально [108].

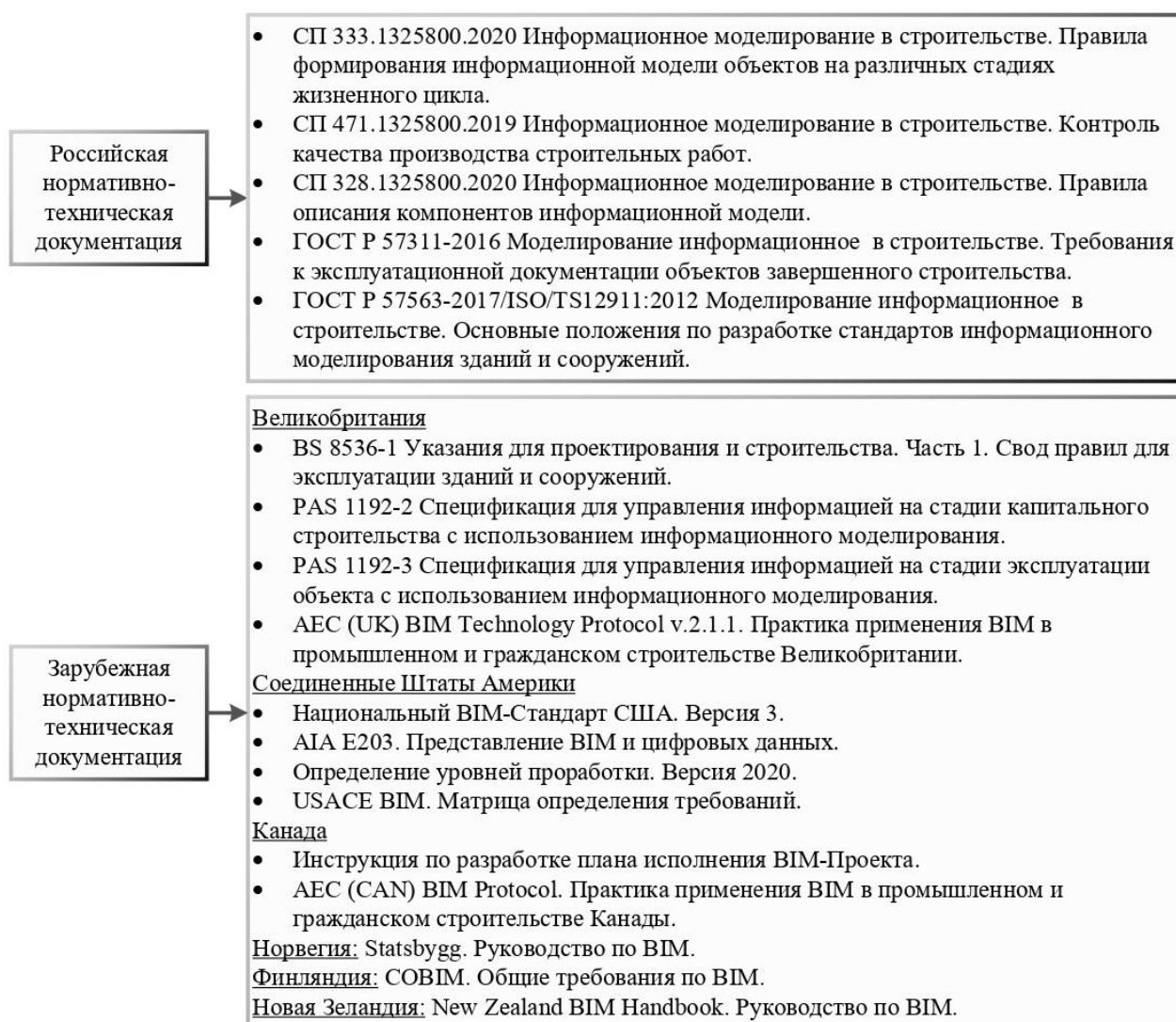


Рисунок 1.4 – Нормативно-техническая документация, регламентирующая создание ЦИМ

На основе проведенного анализа приведем общепринятую классификацию уровней проработки и их описание (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Спецификация уровней проработки элементов трехмерной модели

Уровень проработки	Требования к отображению элементов трехмерной модели
100	Модель выполнена с низким уровнем проработки и условным представлением элементов. Элементы модели не содержат информацию о формах, размерах или точном положении
200	Модель выполнена с низким уровнем проработки, с графическим представлением элементов в виде общей системы объектов с приблизительными размерами, формами, положением и ориентацией. К элементам модели также может быть приложена дополнительная информация
300	Модель выполнена с низким уровнем проработки с графическим представлением элементов модели в виде конкретной системы объектов или сборки. Элементы в модели представлены с проектными размерами, формами, положением и основными атрибутами. К элементам модели также может быть приложена дополнительная информация
350	Модель выполнена со средним уровнем проработки, с графическим представлением элементов модели в виде конкретной проектируемой системы, объекта или сборки, содержащей информацию о количестве, размерах, формах, положения, ориентации и взаимодействия с другими системами. Модель также содержит элементы, необходимые для междисциплинарного взаимодействия с соседними или присоединенными элементами, такими как опоры и соединения. К элементам модели также может быть приложена дополнительная информация
400	Модель выполнена с высоким уровнем проработки, с максимально детальным графическим представлением и наполнением атрибутивной информацией. Элементы модели графически представлены в виде конкретной проектируемой системы, объекта или сборки, содержащих информацию о размерах, формах, местоположении, количестве и ориентации, с подробной информацией о деталях, изготовлении, сборке и установке. К элементам модели также может быть приложена дополнительная информация
500	Модель выполнена с высоким уровнем проработки, с максимально детальным графическим представлением и наполнением атрибутивной информацией. Элементы модели графически представлены на основе исполнительной документации в виде конкретной смонтированной системы, объекта или сборки, содержащих информацию о точных размерах, формах, местоположении, количестве и ориентации с подробной информацией об эксплуатационных характеристиках. К элементам модели также может быть приложена дополнительная информация

Однако, как в российских, так и зарубежных стандартах практически нет требований к ЦИМ промышленного объекта. Анализ нормативно-технической документации показывает, что детальная проработка требований выполнена только для *LOD*. Также стоит отметить, что существующие стандарты описывают требования, в большей степени, к строительным конструкциям. Это может быть

вызвано тем, что технология ЦИМ изначально получила распространение в гражданском строительстве. При этом требования к таким важным составляющим ЦИМ, как *LOI*, содержат только общие сведения, а к *LOA* отсутствуют какие-либо требования. Кроме того, основным активом промышленного объекта является технологическое оборудование, требования к которому отсутствуют в проанализированной нормативно-технической документации. Также вышеуказанная нормативно-техническая документация не регламентирует стадию эксплуатации промышленного объекта, которая, в свою очередь, характеризуется сложностью и насыщенностью процессов. В связи с этим для эффективного применения ЦИМ на стадии эксплуатации необходима проработка требований, включающих три основных параметра: *LOD*, *LOI* и *LOA* элементов модели.

Также в текущей нормативно-технической документации отсутствует взаимосвязь с НЛС как методом проведения геодезических работ для создания ЦИМ и соответственно отсутствуют требования к точности проведения НЛС. При этом, как отмечено в работе автора [131], не существует типовых промышленных объектов. При проектировании и строительстве двух подобных промышленных объектов к ним могут быть предъявлены различные проектные и строительные допуски, которые необходимо соблюдать при проведении геодезических работ. Например, в зависимости от планируемой мощности выпуска продукции промышленных установок будут использованы различное оборудование и коммуникации, нагрузки от которых напрямую влияют на различные контролируемые допуски к возведению строительных конструкций. В связи с этим требования к точности проведения геодезических работ, указанные в настоящий момент в нормативно-технической документации, не освещают все вопросы, возникающие в современной практике.

Следовательно, чтобы разработать требования к точности НЛС и ЦИМ для решения задач в течение жизненного цикла промышленного объекта, прежде всего необходимо изучить требования к составу объектов измерений и характеристикам точности измерений при инженерно-геодезических изысканиях, проектировании, строительстве, эксплуатации и ликвидации объекта. Для того

чтобы сформировать требования к точности НЛС, проанализированы виды геодезических работ, которые проводятся на различных стадиях жизненного цикла объекта, и нормативно-техническая документация [41, 97, 99, 100], регламентирующая выполнение данных работ (рисунок 1.5).

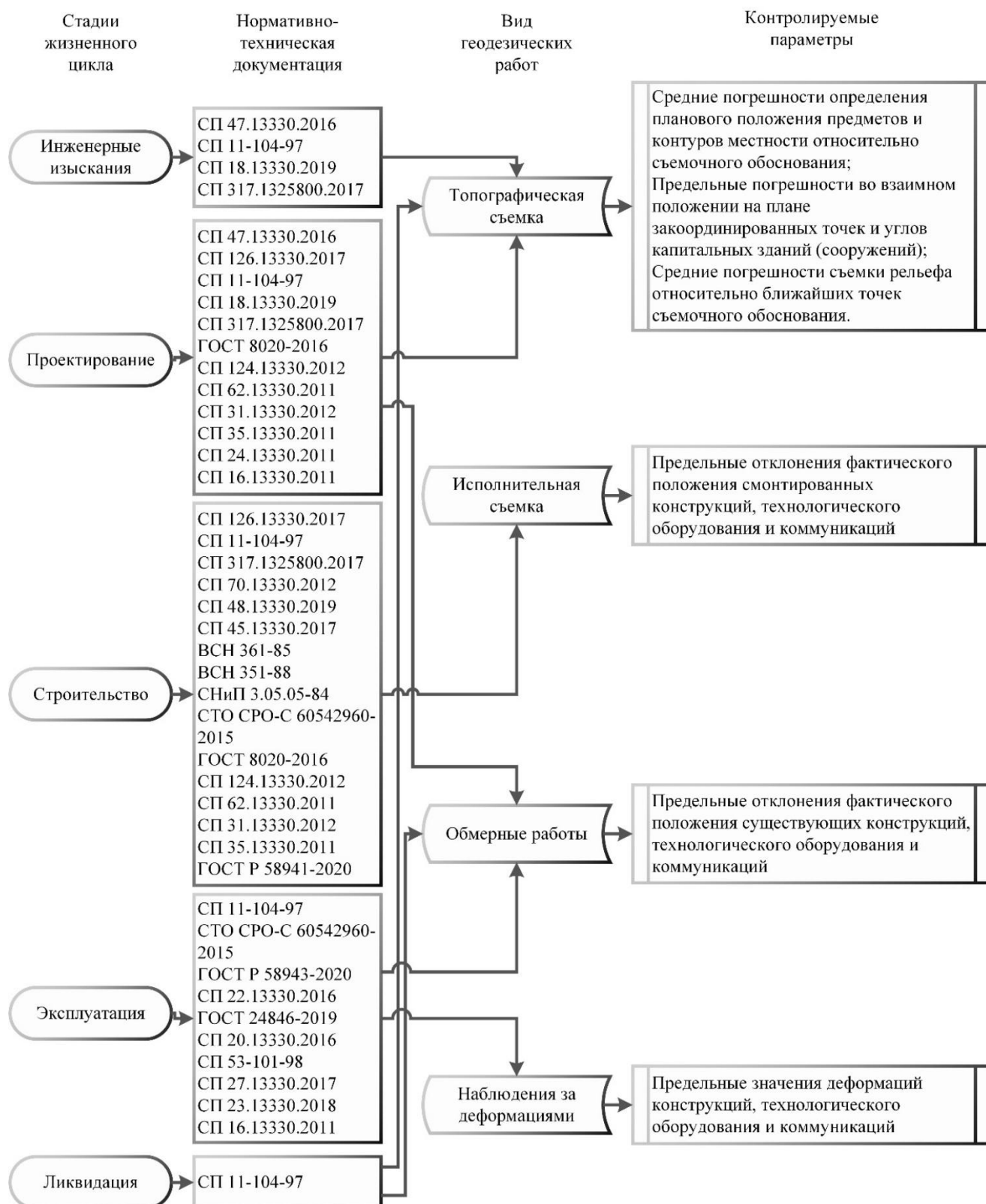


Рисунок 1.5 – Виды геодезических работ и контролируемые параметры

Исходя из проведенного анализа следует, что на сегодняшний день существуют четыре основных вида геодезических работ, которые возможно выполнить методом НЛС: топографическая съемка, исполнительная съемка, обмерные работы, наблюдения за деформациями. При этом важно отметить, что согласно нормативно-технической документации результатами приведенных геодезических работ являются: топографические планы, исполнительная документация, обмерные чертежи и технические отчеты о наблюдениях за деформациями соответственно. С применением технологий НЛС и ЦИМ все вышеуказанные результаты геодезических работ могут быть представлены в виде трехмерного отображения объектов измерений.

При этом, несмотря на наличие нормативно-технической документации, регламентирующей проведение геодезических работ, практический опыт показывает, что требования к точности их выполнения необходимо дополнять, обосновывая их в проекте производства геодезических работ с учетом специфики того или иного объекта. Также в процессе анализа нормативно-технической документации было выявлено отсутствие единой идентификации контролируемых параметров и их значений в рамках выполнения геодезических работ. В связи с этим для формирования требований к точности геодезических работ посредством НЛС необходимо перейти от характеристик точности измерений, указанных в нормативно-технической документации (проектной, строительной и эксплуатационной), к предельным средним квадратическим ошибкам (СКО) определения положения точек и далее – к СКО определения положения точек. Имея требования к СКО определения положения точек, можно сформировать требования к точности выполнения измерений [131].

1.3 Анализ методики наземного лазерного сканирования промышленных объектов

1.3.1 Обобщенная методика наземного лазерного сканирования

Технологическая схема наземного лазерного сканирования, как правило, зависит от требований к составу и точности результатов измерений, которые должны быть определены в техническом задании или проекте производства геодезических работ. Обобщенная технологическая схема представляет собой комплекс работ, состоящий из этапов, представленных на рисунке 1.6 [7, 16, 26, 35, 57, 60, 106].



Рисунок 1.6 – Обобщенная технологическая схема наземного лазерного сканирования

Рассмотрим более детально некоторые из этапов технологической схемы при выполнении измерений на промышленных объектах.

Определение мест установки станций лазерного сканирования зависит от требуемого состава и детализации объектов измерений, угла падения лазерного луча на поверхность объекта и типа поверхности объекта [28, 35, 83, 111]. Угол падения лазерного луча на поверхность объекта зависит от расстояния сканера до объекта и угла расхождения лазерного луча (рисунок 1.7). Ошибка измерения ΔD расстояния, возникающая из-за угла падения лазерного луча и зависящая от расстояния до объекта и угла расхождения лазерного луча, имеет систематический характер и, согласно [169, 170], может быть вычислена по формуле 1.1:

$$\Delta D = \frac{D\psi}{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad (1.1)$$

где D – расстояние до объекта,

ψ – угол расхождения лазерного луча,

γ – угол падения лазерного луча.

Угол падения лазерного луча на поверхность колеблется от 0° до 90° . Соответственно ошибка измерений возрастает в зависимости от увеличения угла падения лазерного луча.

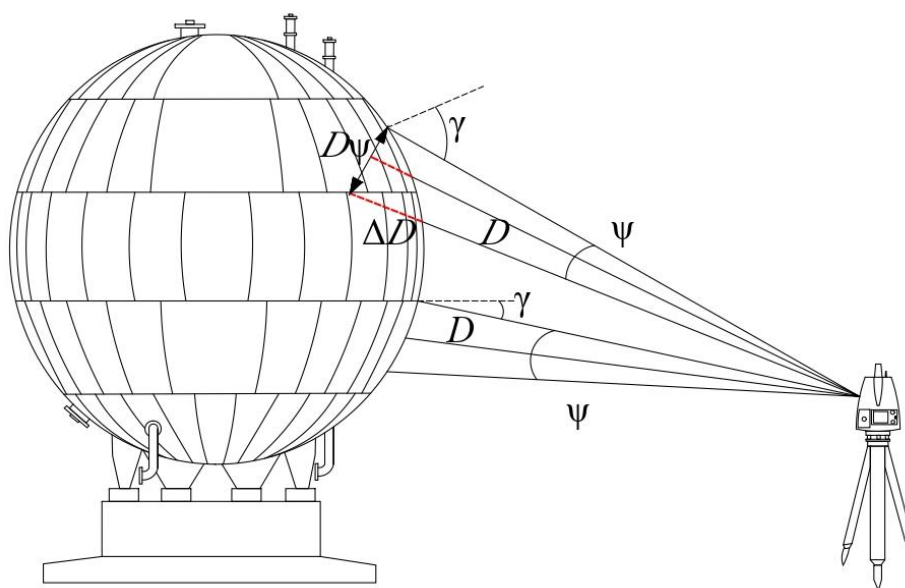


Рисунок 1.7 – Графическое представление ошибки угла падения лазерного луча на поверхность объекта

Тип поверхности объекта влияет на интенсивность отраженного сигнала, что, в свою очередь, влияет на качество результатов лазерного сканирования. Взаимосвязь между интенсивностью отраженного сигнала и коэффициентом отражающей поверхности в геометрической оптике определяется выражением Ламберта (1.2) [156]:

$$I \approx \frac{r \cos \gamma}{D^2}, \quad (1.2)$$

где I – интенсивность отраженного сигнала,

r – коэффициент отражения поверхности измеряемого объекта.

Известно, что измерения на тип поверхности с высоким коэффициентом отражения в результате дают более надежные и точные результаты [175]. Однако отметим, что в условиях НЛС промышленного объекта при выполнении измерений с одной станции лазерного сканера объекты измерений будут иметь различный тип поверхности и соответственно различную интенсивность отраженного сигнала. На промышленных объектах преобладают такие материалы, как: металл, бетон и кирпич. При этом различия в отражающей способности этих материалов имеют большой диапазон. Следовательно, для вычисления возможной ошибки, связанной с интенсивностью отраженного сигнала, необходимы дополнительные исследования.

Выбор метода взаимного и внешнего ориентирования. В практике лазерного сканирования можно выделить два основных метода взаимного ориентирования моделей:

- с использованием специальных марок, которые устанавливаются на объекте до начала измерений с учетом обеспечения их видимости с различных станций лазерного сканирования [6, 7, 8, 12, 31, 32, 107];

- использованием точек сканирования, при котором взаимное ориентирование двух моделей выполняется с помощью итерационного алгоритма ближайших точек [12, 25, 30, 119, 121, 138].

Для внешнего ориентирования в практике лазерного сканирования наибольшее распространение получили два метода [7, 8, 12, 31, 32, 107, 138]:

– прямой: линейные и угловые элементы внешнего ориентирования определяются в результате центрирования, горизонтирования лазерного сканера над точкой с известными координатами и ориентирования прибора по заданному направлению;

– аналитический: линейные и угловые элементы внешнего ориентирования вычисляются математически после сканирования специальных марок, координаты которых известны.

На практике, при лазерном сканировании промышленных объектов, все полевые измерения выполняются в условной системе координат и дальнейшее внешнее ориентирование происходит в процессе камеральной обработки через стандартную процедуру преобразования координат. При этом можно выделить следующие методы внешнего ориентирования [138]: каждая модель обрабатывается отдельно и затем трансформируется в заданную систему координат; выполняется взаимное ориентирование всех моделей, и полученная единая модель трансформируется в заданную систему координат.

Установка параметров сканирования. Одним из основных параметров лазерного сканирования является разрешение, которое определяется в зависимости от технических характеристик прибора, сложности объекта, необходимой детальности и точности измерения объекта. В соответствии с этим, разрешение сканирования устанавливается таким образом, чтобы измерений поверхности было достаточно для идентификации минимально требуемого размера конструктивного элемента. Согласно [138], необходимое разрешение сканирования можно определить по формуле 1.3:

$$\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}} = \frac{d \cos \gamma}{D\sqrt{2}} r, \quad (1.3)$$

где $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}$ – угловое разрешение сканирования по горизонтали и вертикали,

d – размер наименьшего конструктивного элемента,

r – коэффициент отражения поверхности измеряемого объекта.

Оценка точности результатов лазерного сканирования. В зависимости от методов взаимного и внешнего ориентирования, а также используемого

программного обеспечения, оценка точности результатов измерений может быть определена по следующим параметрам [58, 59]:

- СКО единицы веса, вычисляемой при взаимном и внешнем ориентировании точечных моделей;
- СКО взаимного положения пространственных координат специальных марок или характерных точек относительно заданной системы координат;
- СКО определения элементов взаимного и внешнего ориентирования точечных моделей.

1.3.2 Анализ методик проектирования и создания геодезических сетей при выполнении наземного лазерного сканирования

Как отмечено в работе автора [123], для реализации проектов геодезической съемки крупных промышленных объектов методом НЛС необходимо уделять особое внимание проектированию и построению геодезической сети. Это обусловлено тем, что геодезической съемке подлежат большие площади технологических установок, представляющих собой комплекс зданий и сооружений, в состав которых входит большое количество технологического оборудования, строительных конструкций и инженерных коммуникаций. Главная особенность такой съемки – высокая детализация и соответственно большое количество установок станций лазерного сканера для выполнения требуемых измерений. Лазерному сканированию подлежат все блоки технологических установок, при этом измерения выполняются как внутри, так и снаружи зданий и сооружений, а также на каждом уровне многоуровневых конструкций. В результате объем измерений представляет собой огромный массив данных, который требуется объединить в заданной системе координат. Результатом измерений с одной станции лазерного сканирования является дискретная точечная модель (далее – точечная модель), в которой каждая измеренная точка описана пространственными координатами X , Y , Z . При объединении массива измерений со всех станций лазерного сканирования возникает задача взаимного

ориентирования точечных моделей в единую модель с ее последующим внешним ориентированием в заданную систему координат. Для решения указанной задачи необходимо выполнить проектирование и построение геодезической сети, учитывающей особенности объекта измерений.

Основные требования для проектирования и построения геодезических сетей – это требования к точности положения пунктов, которая зависит от состава измерений и их точности, геометрии сети и метода обработки результатов измерений. В ходе оценки проекта геодезической сети для целей наземного лазерного сканирования промышленного объекта должна быть поставлена задача определения СКО определения пространственного положения наиболее слабого пункта сети при условии, что известны значения СКО измерений.

Традиционно проектирование геодезической сети и ее последующее уравнивание выполняются на основе параметрического способа метода наименьших квадратов [33, 45, 112].

В научной литературе также известны и другие способы оценки проекта геодезических сетей. Так, например, в работах [75, 110, 141] отмечена эффективность применения методов статистических испытаний, основанных на методе Монте-Карло для проектирования геодезических сетей.

Исследованиями проектирования и создания геодезических сетей при наземном лазерном сканировании занимались такие отечественные ученые, как: А.В. Середович, А.В. Комиссаров, Н.В. Канашин, П.И. Дуда и др. В работах [61, 62, 107] в качестве геодезической сети для внешнего ориентирования точечных моделей в заданную систему координат предлагается технология построения скантриангуляции. Для уравнивания скантриангуляции автор исследования [61] применяет метод связок, используемый в теории фотограмметрии.

В работах [55, 56, 66] предлагается технология построения сканерной сети, которая заключается в сгущении съемочной сети проложением сканерных ходов. При этом уравнивание сканерной сети выполняется градиентным методом.

Еще одно исследование [44] направлено на разработку технологии построения пространственной скантриангуляции, которая включает как станции

лазерного сканирования, так и станции установки тахеометра. Уравнивание построенной сети выполняется авторами подобно сети блочной фототриангуляции методом связок.

Вышеприведённые методики объединяет то, что при ориентировании двух точечных моделей используются специальные сканерные марки (далее – марки). Авторы приведенных исследований заключают, что количество и размещение марок выбирают в зависимости от специфики объекта измерений и требуемой точности. Так в исследованиях [61, 107] при работе с приборами, не снабженными устройствами центрирования и горизонтирования, для повышения точности ориентирования двух точечных моделей рекомендуется использовать не менее восьми марок, расположенных парами по окружности относительно станции лазерного сканирования через каждые 90° .

Однако при наземном лазерном сканировании промышленных объектов применение вышеприведенных методик становится труднореализуемым, а в некоторых случаях – невозможным. Это связано в большей степени с большой плотностью застройки и большим количеством станций лазерного сканирования для выполнения необходимых измерений.

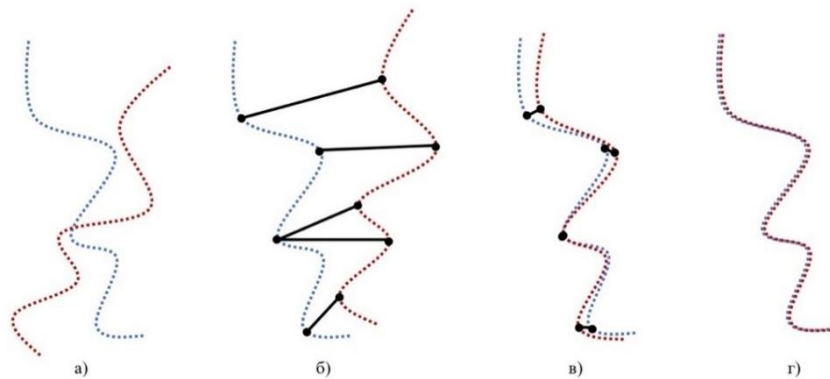
В научной литературе и на практике выполнения НЛС активно ведутся исследования метода взаимного ориентирования точечных моделей с использованием точек сканирования, основанного на итерационном алгоритме ближайших точек (*Iterative Closest Points*, далее – *ICP*) [25, 30, 144, 154]. В силу перспективности применения указанного алгоритма автор считает целесообразным его исследование и развитие.

1.3.3 Анализ взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек

Основные сведения об итерационном алгоритме ближайших точек

Алгоритм *ICP* был предложен авторами исследования [144] в 1992 г. В основе вычислительного алгоритма лежит итеративный процесс поиска

ближайших точек в двух точечных моделях, который может быть основан на одном из методов поиска (точка-точка, точка-плоскость, точка-проекция) и вычисления для них наилучших параметров преобразования с последующим уточнением общих элементов преобразования для всей модели. При этом одна модель принимается истинной и не меняет своего положения, а вторая является подвижной и стремится занять положение, наиболее близкое к истинной модели [138, 144, 154] (рисунок 1.8).



а) две точечные модели; б) поиск соответствующих точек; в) вычисление ближайших точек; г) итерационное вычисление параметров преобразования

Рисунок 1.8 – Графическое представление итерационного алгоритма ближайших точек

Взаимное ориентирование представляет собой последовательный процесс, при котором ориентирование последующей точечной модели и предыдущей происходит до тех пор, пока все модели не будут объединены в единую модель. На основании проведенного анализа работ [78, 144, 154, 186] общее описание работы алгоритма можно представить следующим образом:

1. Поиск соответствующих точек N (количество пар) в двух моделях $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ и $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. При этом каждому q_i и p_i принадлежит набор координат (q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}) и (p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}) соответственно.

2. Вычисление параметров преобразования для точек подвижной модели: \mathbf{R} , \mathbf{t} – матрицы поворота и смещения между двумя системами координат, с учетом минимизации целевой функции (1.4):

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| (\mathbf{R}p_i + \mathbf{t}) - q_i \right\|^2, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad p_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{pmatrix}, \quad q_i = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \end{pmatrix}.$$

Тогда функция (1.4) примет следующий вид (1.5):

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_{11}p_{1i} + r_{12}p_{2i} + r_{13}p_{3i} + t_1 - q_{1i})^2 + \quad (1.5)$$

$$+ (r_{21}p_{1i} + r_{22}p_{2i} + r_{23}p_{3i} + t_2 - q_{2i})^2 + (r_{31}p_{1i} + r_{32}p_{2i} + r_{33}p_{3i} + t_3 - q_{3i})^2.$$

Следовательно, ошибка $f(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ есть СКО взаимного ориентирования.

Применяя итерационный алгоритм ближайших точек к результатам наземного лазерного сканирования, блок-схему вычислений можно представить следующим образом (см. рисунок 1.9).

Рассмотрим более детально последовательность вычислений параметров преобразования в классическом алгоритме *ICP* [144, 154, 186].

Шаг 1. Вычисление центра масс μ_Q , μ_P для каждой точечной модели (1.6, 1.7)

$$\mu_Q = \frac{1}{|N|} \sum_{(i,j) \in N} q_i, \quad (1.6)$$

$$\mu_P = \frac{1}{|N|} \sum_{(i,j) \in N} p_i. \quad (1.7)$$

Шаг 2. Вычисление центрированных векторов для каждой точечной модели (1.8, 1.9)

$$\mathbf{Q}' = \{q_i - \mu_q\} = \{q_i'\}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{P}' = \{p_i - \mu_p\} = \{p_i'\}. \quad (1.9)$$

Шаг 3. Вычисление ковариационной матрицы центрированных векторов (1.10)

$$\mathbf{W} = \sum_{(i,j) \in N} q_i' p_i'^T. \quad (1.10)$$

Шаг 4. Вычисление сингулярного разложения матрицы \mathbf{W} (1.11)

$$\mathbf{W} = \mathbf{UDV}^T. \quad (1.11)$$

В выражении 1.11 каждая из матриц имеет различные свойства. Матрица \mathbf{D} – диагональная и содержит все сингулярные числа. Матрицы \mathbf{U} и \mathbf{V} – матрицы поворота размера 3×3 .

Шаг 5. Вычисление матрицы поворота \mathbf{R} (1.12)

$$\mathbf{R} = \mathbf{UV}^T. \quad (1.12)$$

Шаг 6. Вычисление вектора смещения \mathbf{t} (1.13)

$$\mathbf{t} = \mu_Q - \mathbf{R}\mu_P \quad (1.13)$$



Рисунок 1.9 – Блок-схема итерационного алгоритма ближайших точек

Анализ [29, 167, 168], а также практический опыт показывает, что классический метод имеет ряд недостатков, таких как: низкая вычислительная эффективность, необходимость высокого коэффициента перекрытия двух точечных моделей, узкая область сходимости и частое попадание в локальный минимум. Также известно, что точность и сходимость метода зависят от выбора

начальных значений параметров геометрического преобразования, таких как: поворот, смещение и изменение масштаба [29]. В некоторых случаях при больших углах поворота точечных моделей друг относительно друга и при симметричных объектах в двух точечных моделях критерий может не сойтись к минимуму.

В настоящее время ведутся исследования по совершенствованию алгоритма *ICP*, в том числе повышению эффективности алгоритма *ICP*, повышению точности алгоритма и решению проблемы локальных оптимальных решений [153, 161, 178, 179, 181, 184].

Одной из задач настоящей диссертационной работы является поиск оптимального значения параметров преобразования для ориентирования двух точечных моделей. Анализируя выражение 1.5, можно сделать вывод, что основная задача преобразования трехмерных данных состоит в том, чтобы оценить семь параметров преобразования: три угловых параметра поворота, три параметра смещения и коэффициент масштабирования. Тогда применительно к поставленной задаче, оптимизацией будет являться процесс нахождения вектора параметров преобразования, значения которых, подставляя в выражение 1.5, будет достигаться экстремумом целевой функции. Известно, что математическая модель трехмерного преобразования данных может быть упрощена до линейной системы, если углы поворота двух ориентируемых точечных моделей имеют небольшие величины [165, 185]. В противном случае требуется решение нелинейной системы.

Задачами оптимизации нелинейных функций при линейных и (или) нелинейных ограничениях параметров занимается нелинейное программирование. В геодезии методы нелинейного программирования (в большей степени – методы Ньютона и сопряжённых градиентов) исследовались и получили широкое распространение при уравнивании геодезических сетей [1, 15, 19, 21, 49, 50, 67, 68, 69, 76, 82, 83, 84, 85, 86, 113, 114, 136].

Для решения задачи поиска оптимального значения вектора параметров преобразования при ориентировании двух дискретных точечных моделей

проведен анализ численных методов оптимизации нелинейного программирования [46, 53, 92, 145, 152, 174].

Методы численной оптимизации являются итеративными. Они начинаются с первоначального предположения о переменной x и генерируют последовательность улучшенных оценок (называемых «итерациями») до тех пор, пока не достигается оптимальное решение. Стратегия, используемая для перехода от одной итерации к следующей, отличает один метод от другого. Большинство стратегий использует значения целевой функции $f(x)$, функции ограничений c_i и, возможно, первые и вторые производные этих функций.

Некоторые методы подразумевают накопление информации, полученной на предыдущих итерациях, в то время как другие используют только информацию, полученную в текущей итерации. Независимо от этих особенностей выбор метода для решения конкретной задачи должен основываться на следующих факторах [92, 145, 174]:

- надежность – метод должен справляться с широким кругом задач в своем классе, для всех разумных значений начальных параметров;
- эффективность – метод не должен требовать чрезмерного компьютерного времени или памяти;
- точность – метод должен быть в состоянии определить решение с точностью, не будучи чрезмерно чувствительным к ошибкам в данных или к возникающим ошибкам округления.

Эти факторы могут конфликтовать, например, быстро сходящийся алгоритм для большой нелинейной задачи без ограничений может потребовать слишком много памяти на компьютере. С другой стороны, надежный метод также может быть самым медленным. Компромиссы между скоростью сходимости и требованиями к памяти, а также – между надежностью и скоростью являются центральными вопросами численной оптимизации [174].

Проанализировав существующие методы для исследования задачи преобразования координат при ориентировании двух точечных моделей, был изучен итерационный метод численной оптимизации Бройдена-Флетчера-

Гольдфарба-Шанно (*BFGS*), относящийся к методам квазиньютона [20, 81, 93, 127, 152, 173]. Основным преимуществом настоящего метода является высокая скорость сходимости, при этом избегая необходимость прямого вычисления матрицы Гессе, содержащей производные второго порядка. Также к преимуществам метода можно отнести самокорректирующие свойства, которые заключаются в том, что, если матрица Гессе неверно оценивает кривизну функции, в ходе чего замедляется скорость сходимости, то аппроксимация гессиана стремится исправить ситуацию за несколько итераций.

Для нахождения экстремума целевой функции $f(x_k)$ метод *BFGS* на каждом шаге k аппроксимирует настоящий гессиан $\nabla^2 f(x_k)$ с помощью некоторой матрицы \mathbf{B}_k и вычисляет направление спуска d_k как решение следующей системы (1.14):

$$\mathbf{B}_k d_k = -\nabla f(x_k) \Leftrightarrow d_k = -\mathbf{H}_k \nabla f(x_k), \quad (1.14)$$

где $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k^{-1}$.

При этом \mathbf{B}_k – симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$, которая будет обновляться на каждой итерации. Далее из текущей точки x_k выполняется шаг соответственно вычисленному d_k (1.15):

$$x_{k+1} = x_k + k_k d_k, \quad (1.15)$$

где k_k – длина шага, настраиваемая с помощью линейного поиска, который удовлетворяет условиям Вольфе (*Wolfe conditions*), включающим в себя «условия убывания» (1.16, 1.18) и «условия кривизны» (1.17, 1.19).

$$f(x_k + k_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 k_k \nabla f_k^T d_k, \quad (1.16)$$

$$\nabla f(x_k + k_k d_k) \geq c_2 \nabla f_k^T d_k, \quad (1.17)$$

где c_1 и c_2 – константы, удовлетворяющие условию $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$.

Длина шага α_k может удовлетворять условиям Вольфе, не приближаясь к глобальному минимуму одномерной функции $\phi(\alpha)$. В таком случае возможно изменить условие кривизны, чтобы заставить α_k лежать, по крайней мере, в

широкой окрестности локального минимума или стационарной точки $\phi(\alpha)$. Такие условия называют «сильными условиями Вольфе» (1.18, 1.19) [174]:

$$f(x_k + k_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 a_k \nabla f_k^T d_k, \quad (1.18)$$

$$|\nabla f(x_k + k_k d_k)| \leq c_2 |\nabla f_k^T d_k|. \quad (1.19)$$

Построение обратной матрицы Гессе в соответствии с алгоритмом *BFGS* сохраняет симметрию и положительную определенность матрицы при условии соблюдения условий Вольфе на каждой итерации. В отличие от классического метода Ньютона, метод *BFGS* не предполагает вычисление гессиана функции напрямую, т. е. нет необходимости находить частные производные второго порядка. Вместо этого гессиан вычисляется на основе информации о градиенте функции на предыдущей и текущей итерации.

Для обновления приближенной обратной матрицы Гессе должно соблюдаться требование «уравнения секущих» (1.20):

$$\mathbf{B}_{k+1} s_k = y_k, \quad (1.20)$$

где s_k – шаг алгоритма на итерации, вычисляемый из выражения 1.21,

y_k – изменение градиента на итерации, определяемое по формуле 1.22.

$$s_k = x_{k+1} - x_k = k_k d_k, \quad (1.21)$$

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k). \quad (1.22)$$

Учитывая смещение s_k и изменение y_k , уравнение секущей требует, чтобы симметричная положительно определенная матрица \mathbf{B}_{k+1} отображала s_k в y_k . Для соблюдения условия необходимо, чтобы s_k и y_k удовлетворяли «условию кривизны» (1.23):

$$s_k^T y_k > 0. \quad (1.23)$$

С учетом приведенных условий формула обновления приближенной обратной матрицы Гессе в соответствии с методом *BFGS* имеет вид (1.24):

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k s_k s_k^T \mathbf{B}_k}{s_k^T \mathbf{B}_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = (\mathbf{I} - r_k s_k y_k^T) \mathbf{H}_k (\mathbf{I} - r_k y_k s_k^T) + r_k s_k s_k^T.$$

где $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$,

\mathbf{I} – единичная матрица.

Алгоритм метода продолжается до тех пор, пока не достигается условие $\|\nabla f_k\| < \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ – Норма Фробениуса; ε – заданная точность.

1.4 Выводы по Главе 1

Основываясь на проведённом анализе, представленном в главе 1, можно заключить, что для решения производственных задач на различных стадиях жизненного цикла промышленного объекта активно применяются технологии НЛС и ЦИМ. С целью изучения современного состояния методики НЛС для создания ЦИМ промышленного объекта в диссертационной работе выполнен анализ научной литературы и нормативно-технической документации, а также производственного опыта в реализации подобных проектов, в результате которого можно отметить следующее:

1. ЦИМ представляет собой комплекс взаимосвязанной информации в цифровом виде, описывающий физические, функциональные и другие свойства объекта, основанный на его трехмерном представлении и являющийся источником информации для принятия своевременных управленческих и операционных решений.

2. В зависимости от стадии жизненного цикла промышленного объекта различают виды ЦИМ, которые могут решать производственные задачи, в том числе и инженерно-геодезические. При этом для решения производственных задач необходима проработка требований, включающих три основных параметра детализации элементов трехмерной модели: уровень проработки (*LOD*), уровень информации (*LOI*) и уровень точности (*LOA*).

3. В ходе анализа нормативно-технической документации, в том числе и зарубежной, регламентирующей требования к созданию ЦИМ, установлено, что:

- существующие требования к ЦИМ промышленного объекта регламентируют только общие сведения;
- детальная проработка требований выполнена только для *LOD*, однако не учитывает требований к проработке технологического оборудования;
- требования к таким важным составляющим ЦИМ, как *LOI*, содержат только общие сведения;
- требования к *LOA* отсутствуют;
- существующие требования не регламентирует стадию эксплуатации промышленного объекта.

4. Выполненный анализ нормативно-технической документации, регламентирующей проведение геодезических работ, показал отсутствие взаимосвязи НЛС, как методом проведения геодезических работ, с ЦИМ и, соответственно, отсутствие требований к точности проведения НЛС.

5. Определено, что для формирования требований к точности проведения НЛС необходимо обеспечить единство требований к точности в зависимости от вида геодезических задач и осуществить переход от характеристик точности, указанных в проектной, строительной и эксплуатационной документации, к предельным СКО определения положения точек и далее – к СКО определения положения точек.

6. Существующая обобщенная технологическая схема выполнения НЛС, состоящая из последовательных этапов выполнения работ (рекогносцировка, проектирование и построение геодезической сети, лазерное сканирование объекта, обработка результатов измерений), требует дополнений, учитывающих условия съемки промышленных объектов, для последующего формирования ЦИМ.

7. Существующие методики проектирования и построения геодезических сетей, как правило, основаны на применении специальных сканерных марок для взаимного ориентирования точечных моделей. Однако при НЛС промышленных

объектов применение существующих методик становится труднореализуемым, а в некоторых случаях – невозможным. В силу того, что в научной литературе и на практике широко применяется итерационный алгоритм ближайших точек целесообразны его исследование и развитие.

8. Выполнив исследование метода взаимного ориентирования, основанного на алгоритме ближайших точек, можно заключить, что классический алгоритм имеет ряд недостатков, таких как: низкая вычислительная эффективность, необходимость высокого коэффициента перекрытия двух точечных моделей, узкая область сходимости и частое попадание в локальный минимум. В связи с этим целесообразно исследование методов нелинейного программирования, а именно методов численной оптимизации для совершенствования классического алгоритма ближайших точек.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ И ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА БЛИЖАЙШИХ ТОЧЕК

2.1 Постановка задачи

Для достижения цели по разработке методики наземного лазерного сканирования, учитывающей особенности геодезической съемки промышленных объектов и повышающей точность определения пространственного положения объектов при создании цифровых информационных моделей, необходимо решить следующие задачи:

1. Обосновать требования к составу элементов ЦИМ и требования к точности их пространственного положения в зависимости от решаемой производственной задачи.

2. Обосновать требования к точности НЛС в зависимости от вида геодезических работ.

3. Исследовать точность взаимного ориентирования точечных моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек.

4. Разработать методику проектирования и построения геодезических сетей, учитывающую особенности съемки промышленного объекта и метода НЛС.

5. Разработать предложения по проведению съёмки промышленных объектов с учетом факторов, влияющих на точность измерений.

6. Разработать предложения по взаимному и внешнему ориентированию результатов НЛС промышленных объектов.

2.2 Обоснование требований к точности цифрового информационного моделирования и наземного лазерного сканирования промышленных объектов

2.2.1 Разработка требований к цифровой информационной модели промышленного объекта

Как было отмечено в главе 1, пункте 1.1, требования к составу ЦИМ в зависимости от стадии жизненного цикла промышленного объекта обусловлены поставленными задачами, которые должна решать ЦИМ. Выполнив анализ нормативно-технической документации, отметим, что для стадий инженерных изысканий, проектирования и строительства имеются общие рекомендации, в то время как для стадии эксплуатации требуются дополнительные исследования. В связи с этим дальнейшее исследование направлено на разработку требований к эксплуатационной ЦИМ промышленного объекта.

Разработка требований к уровню детализации (LOD)

Как было отмечено ранее, детальная проработка требований к *LOD* с точки зрения нормативной документации выполнена только для строительных конструкций. В связи с тем, что для решения комплекса производственных задач к ЦИМ должны применяться достаточно высокие требования *LOD*, можно сделать вывод о том, что ключевые компоненты ЦИМ должны соответствовать *LOD* 500 (таблица 1.1) согласно общей спецификации. На наш взгляд ключевыми объектами в процессе эксплуатации являются оборудование и коммуникации, для которых требуется уточнение существующей спецификации *LOD*. Кроме того, критичными с точки зрения эксплуатации объекта являются пути эвакуации, пути прохода персонала и передвижения техники, для которых требования к отображению в ЦИМ необходимо проработать. Стоит также отметить, что для решения ряда важных производственных задач, таких как: мониторинг технического состояния объектов, разработка проекта реконструкции, планирование ремонтов и др. требуется геодезическое обеспечение. В связи с этим считаем, что в спецификацию *LOD* необходимо включить информацию о

пунктах геодезических сетей, развиваемых на территории промышленного объекта. На основании практического опыта в создании ЦИМ были разработаны дополнения к *LOD*, которые удовлетворяют решению различных производственных задач (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Дополнительные требования к *LOD 500* элементов ЦИМ

Тип элемента модели	Требования к отображению элементов трехмерной модели
Оборудование	<p>В ЦИМ детально моделируются следующие типы оборудования: технологическое оборудование, оборудование пожаротушения, оборудование противоаварийной защиты, оборудование связи, оборудование аварийной и пожарной сигнализации, оборудование контроля загазованности.</p> <p>Габаритные размеры и технические параметры оборудования, а также отдельных частей оборудования (штуцеры), должны соответствовать реальному объекту, смонтированному на производственной площадке, и эксплуатационной документации.</p> <p>В составе оборудования должны моделироваться электрические порты (точки присоединения электрических кабелей, кабельных лотков и трасс).</p> <p>В составе оборудования должны моделироваться резервные объемы для обслуживания оборудования и проведения ремонтных работ.</p> <p>Элементы, отображающие составные части оборудования (электродвигатель, насосный агрегат и т.д.), должны быть объединены в группы в составе оборудования.</p> <p>В составе оборудования должны моделироваться: ответственные сварные швы, подлежащие контролю в процессе эксплуатации; точки контроля толщин стенок; точки вибромониторинга</p>
Трубопроводы	<p>Габаритные размеры и технические параметры трубопроводов и элементов, входящих в их состав, должны соответствовать реальному объекту, смонтированному на производственной площадке, и эксплуатационной документации.</p> <p>В составе трубопроводов должны моделироваться все необходимые точки присоединения (штуцеры дренажей и воздушников, штуцеры и бобышки для контрольно-измерительных приборов и автоматики).</p> <p>Изоляция должна моделироваться на прямых участках трубопроводов и фитингах.</p> <p>Направление потока среды при моделировании трубопроводов должно соответствовать направлению потока среды по технологическим схемам.</p> <p>Все сегменты трубопровода должны быть взаимосвязаны между собой посредством общих точек присоединения. Все трубопроводы, относящиеся к одной линии, должны быть взаимосвязаны между собой посредством общих точек присоединения.</p> <p>В составе трубопроводов должны моделироваться резервные объемы для обслуживания запорно-регулирующей арматуры.</p> <p>В составе трубопроводов должны моделироваться: ответственные сварные швы, подлежащие контролю в процессе эксплуатации; точки отбора проб; точки контроля толщин стенок трубопроводов</p>

Продолжение таблицы 2.1

Тип элемента модели	Требования к отображению элементов трехмерной модели
Воздуховоды	Габаритные размеры и технические параметры воздуховодов и элементов, входящих в их состав, должны соответствовать реальному объекту, смонтированному на производственной площадке, и эксплуатационной документации
Кабельные короба и лотки	Габаритные размеры и технические параметры коробов и лотков должны соответствовать реальному объекту, смонтированному на производственной площадке, и эксплуатационной документации
Промышленная безопасность	В модели должны быть отображены пути эвакуации, места хранения средств индивидуальной защиты, убежища и места укрытий, места потенциальных аварий и радиусы поражения, пути подхода техники и персонала, рабочие зоны техники и персонала. Элементы модели должны быть представлены зарезервированным пространством с габаритными размерами согласно действующим на объекте нормам обеспечения промышленной безопасности
Геодезическое обеспечение	В ЦИМ моделируются опорные пункты геодезической сети и деформационные марки с указанием их точного пространственного положения. Пункты геодезической сети должны отображать положение их центров. Точность определения пространственного положения центров геодезических пунктов в трехмерной модели должна удовлетворять требованиям к точности построения геодезических сетей, указанных в нормативно-технической документации

На рисунке 2.1 приведен пример отображения оборудования и трубопроводов в ЦИМ.

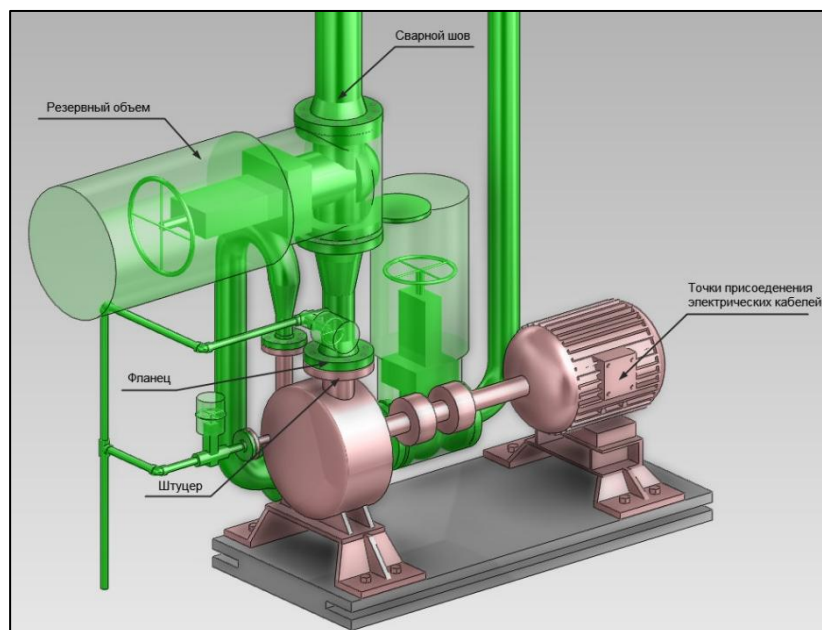


Рисунок 2.1 – Пример отображения оборудования и трубопроводов в ЦИМ

Стоит отметить, что каждое промышленное предприятие имеет свою специфику в части состава оборудования, коммуникаций и архитектурных решений. В связи с этим предложенные дополнения носят информативный характер и требуют уточнения в зависимости от специфики промышленного объекта и назначения использования ЦИМ.

Стоит также отметить, что для решения такой задачи как геодезический мониторинг объектов, описанных в стандартной спецификации *LOD*, требований к проработке элементов модели недостаточно. Для анализа развития деформаций в ЦИМ должны содержаться сведения о результатах мониторинга, в том числе их графическое отображение. В связи с этим предлагается ввести следующий уровень: *LOD 550*, в котором объекты геодезического мониторинга отражаются с их реальными деформациями и дефектами. Предложения к требованиям отображения элементов модели, соответствующим *LOD 550*, представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Требования к *LOD 550* элементов ЦИМ

Уровень проработки	Требования к отображению элементов трехмерной модели
550	Элементы контроля в трехмерной модели выполнены с высоким уровнем проработки, с максимально детальным графическим представлением и наполнением атрибутивной информацией. Элементы контроля графически представлены на основе результатов геодезического мониторинга, содержащих информацию о точных размерах, формах, местоположении, деформациях, ориентации и дефектах с подробной информацией об эксплуатационных характеристиках. К элементам контроля также может быть приложена дополнительная информация. Конструкции, не подлежащие геодезическому мониторингу, должны быть смоделированы на уровне <i>LOD 500</i>

Разработка дополнительных требований к уровню информации (LOI) элементов ЦИМ

Как упоминалось ранее, требования к *LOI* в существующей нормативной документации описаны не детально. Однако в решении эксплуатационных задач *LOI* играет ключевую роль. Также следует отметить, что требования к *LOD* и *LOI* элементов ЦИМ могут быть разного уровня для решения конкретной

эксплуатационной задачи. В связи с этим предлагается сформировать отдельную спецификацию *LOI*, не зависящую от *LOD*.

Всю атрибутивную информацию, характеризующую конкретный объект, можно разделить на четыре основные группы: основная, техническая, технологическая и эксплуатационная. Сформируем пояснения для каждой группы атрибутивной информации (рисунок 2.2).



Рисунок 2.2 – Группы атрибутивной информации для элементов ЦИМ

Исходя из анализа эксплуатационных задач, приведенных в разделе 1.1, и сформированных групп атрибутивной информации, предлагается следующая спецификация *LOI* (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Спецификация *LOI* элементов ЦИМ

Уровень проработки	Требования к отображению информации об элементе трехмерной модели
100	Элементы модели содержат общие параметры, включающие: технологическую позицию, тип объекта, назначение и месторасположение
200	Элементы модели содержат общие параметры в соответствии с <i>LOI</i> 100, а также технические и технологические параметры. С точки зрения технической информации элементы модели должны содержать следующие параметры: марку, массу, завод-изготовитель, год выпуска, год ввода в эксплуатацию, материал компонентов, основные габаритные размеры и так далее. С точки зрения технологической информации элементы модели должны содержать следующие параметры: рабочее давление, рабочую температуру, наименование среды, агрессивность среды и тому подобное.
300	Элементы модели содержат общие параметры в соответствии с <i>LOI</i> 100, технические и технологические параметры в соответствии с <i>LOI</i> 200 и эксплуатационную информацию. С точки зрения эксплуатационной информации элементы модели должны содержать следующие параметры: сведения о ремонте, сведения о мониторинге технического состояния и так далее.

Разработка требований к уровню точности (LOA) элементов ЦИМ

Для решения ряда эксплуатационных задач ЦИМ должна содержать актуальные данные о пространственном положении элементов, т. к. это впоследствии влияет на качество принятия операционных решений. Как было отмечено ранее, требования к *LOA* в существующей нормативной документации не отражены. В связи с этим предлагается сформировать спецификацию *LOA* и требования к каждому из уровней.

Требования к *LOA* должны описывать точность пространственного положения элементов ЦИМ. При этом следует учитывать, что требования предъявляются не ко всему элементу, а к определенным характерным точкам на поверхности элемента. Характерные точки, ответственные за поведение конструкции во время эксплуатации, могут быть определены во время разработки проекта или определены изготовителем. Тогда точность определяется как ошибка во взаимном пространственном положении конструкций на реальном объекте и элементов ЦИМ. При этом требования к точности зависят от вида решаемой задачи. На основании выполненного анализа производственных задач предлагается выделить следующие уровни требований к точности (таблица 2.4) [128].

Таблица 2.4 – Спецификация *LOA* элементов трехмерной модели

Уровень проработки	Требования к отображению информации об элементе трехмерной модели
100	Элементы ЦИМ расположены в пространстве в соответствии с проектной документацией, с отображением проектных размеров. Пространственное положение элементов не учитывает отклонения от проекта
200	Элементы ЦИМ расположены в пространстве в соответствии с исполнительной документацией или обмерной документацией и отражают реальное пространственное положение и размеры с точностью, установленной к исполнительной съемке или обмерным работам
300	Элементы модели расположены в пространстве в соответствии с результатами наблюдений за деформациями и отражают изменение формы объекта за определенный период времени с точностью, установленной к выполнению наблюдений за деформациями

2.2.2 Разработка требований к точности наземного лазерного сканирования промышленных объектов при создании цифровых информационных моделей

Для формирования требований к точности выполнения лазерного сканирования и трехмерного моделирования объектов предлагается осуществить следующий переход:

1) от характеристик точности определения пространственного положения точек, указанных в нормативно-технической документации (проектных, строительных и эксплуатационных), к предельным СКО определения положения точек;

2) от предельных СКО определения положения точек к СКО определения положения точек.

В случае если характеристики точности измерений заданы значениями допусков Δ , то для перехода к СКО m_p определения положения точек необходимо предварительно вычислить предельное СКО δ . Учитывая, что допуском является разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами конструкции, половина допуска и есть δ [2]. Следовательно, переход от Δ к δ можно осуществить по формуле 2.1:

$$\delta = \frac{\Delta}{2}. \quad (2.1)$$

Далее, переход от δ к m_p выполняется по формуле 2.2 [131]:

$$m_p = \frac{\delta}{2,5}. \quad (2.2)$$

При этом следует учитывать, что m_p включает в себя ошибки измерений и ошибки трехмерного моделирования объектов и может быть выражена формулой 2.3:

$$m_p = \sqrt{m_{\text{НЛС}}^2 + m_{3d}^2}, \quad (2.3)$$

где $m_{\text{НЛС}}$ – СКО лазерного сканирования,

m_{3d} – СКО трехмерного моделирования.

Будем считать, что $m_{\text{НЛС}}$ и m_{3d} независимые величины, тогда, применив принцип равных влияний, согласно которому влияние каждого источника ошибок на общую ошибку функции одинаково [74], окончательно получим (2.4):

$$m_{\text{НЛС}} = m_{3d} = \frac{m_p}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Как было отмечено в главе 1, пункте 1.1, согласно нормативно-технической документации выделяют четыре вида геодезических работ, которые можно выполнить посредством метода НЛС для решения различных производственных задач в течение жизненного цикла промышленного объекта. Выполним обоснование требований к точности для каждого из видов геодезических работ.

Топографическая съемка

На стадии инженерных изысканий для проектирования промышленного объекта в рамках нового строительства необходимо получение исходных данных в виде инженерно-топографических планов либо на бумажном носителе, либо в цифровом виде. При этом инженерно-топографические планы создают в масштабе 1:500 или 1:200 и высоте сечения рельефа 0,5 или 0,25 м, если иное не предусмотрено в проекте производства геодезических работ [101]. Для формирования требований к точности НЛС будем руководствоваться минимально допустимыми значениями ошибок (масштаб 1:200 при высоте сечения рельефа 0,25 м). Точность инженерно-топографических планов определяется следующими характеристиками точности измерений [101]:

1) средние ошибки определения планового положения предметов и контуров местности с четкими, легко распознаваемыми очертаниями относительно ближайших пунктов геодезической основы не должны превышать в масштабе плана на незастроенных территориях 0,5 мм (для масштаба 1:200 – 10 см);

2) предельные ошибки во взаимном положении на плане закоординированных точек и углов капитальных сооружений, расположенных один от другого на расстоянии до 50 м, не должны превышать в масштабе плана 0,4 мм (для масштаба 1:200 – 8 см);

3) средние ошибки съемки рельефа и его изображения на инженерно-топографических планах относительно ближайших точек съемочного обоснования не должны превышать $1/4$ высоты сечения рельефа при углах наклона местности до 2° (для высоты сечения рельефа 0,25 м – 6 см).

Основываясь на исследовании [131] автора настоящей диссертации, выполним обоснование требований к точности проведения топографической съемки. Отметим, что топографическая съемка предполагает определение положения подземных коммуникаций, однако метод НЛС не предназначен для решения этой задачи. В связи с этим далее приведено обоснование требований к точности топографической съемки надземных объектов, конструкций и коммуникаций.

Рассмотрим последовательность перехода для **первой характеристики** точности измерений. Для перехода от средних ошибок $\vartheta_{p(\text{план})}$ определения планового положения предметов и контуров к СКО $m_{p(\text{план})}$ определения положения предметов и контуров применяется коэффициент 1,25. Следовательно, $m_{p(\text{план})}$ вычислим по формуле 2.5 [2, 74]:

$$m_{p(\text{план})} = 1,25\vartheta_{p(\text{план})}. \quad (2.5)$$

Будим учитывать, что $m_{p(\text{план})}$ содержит в себе ошибки определения координат и выражается формулой 2.6:

$$m_{p(\text{план})} = m_{xy}\sqrt{2}, \quad (2.6)$$

где m_{xy} – СКО определения координат.

Для **третьей характеристики** точности измерений последовательность перехода от средних ошибок ϑ_H определения высоты к СКО m_H определения высоты аналогична и вычисляется из выражения 2.7:

$$m_H = 1,25\vartheta_H. \quad (2.7)$$

Для **второй характеристики** переход от предельной ошибки $\vartheta_{\Delta\text{пред}}$ определения взаимного положения точек и контуров к СКО m_{Δ} определения взаимного положения точек и контуров осуществляется по формуле 2.8 [101]:

$$m_{\Delta} = 1,25 \frac{g_{\Delta\text{пред}}}{2,5}. \quad (2.8)$$

Взаимное плановое положение Δ контуров выражается следующей формулой 2.9:

$$\Delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2.9)$$

где x, y – координаты определяемых точек и контуров.

В общем виде величину СКО взаимного положения точек для независимых аргументов можно выразить известной формулой 2.10:

$$m_{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y_1}\right)^2 m_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial y_2}\right)^2 m_{y_2}^2}. \quad (2.10)$$

Найдем частные производные по каждому аргументу функции (2.11):

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{\Delta}; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta}; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{\Delta}; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta}. \quad (2.11)$$

Подставив значения частных производных в формулу 2.10 и считая, что $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{y_1} = m_{y_2} = m_{xy}$, получим СКО взаимного положения точек и контуров (2.12):

$$m_{\Delta} = m_{xy} \sqrt{2}. \quad (2.12)$$

С учетом формулы 2.6 получим $m_{p(\text{план})} = m_{\Delta}$.

При проведении топографической съемки измерения выполняют относительно исходных пунктов. Тогда, учитывая выражение 2.4, вычисление СКО $m_{\text{НЛС}}$ метода НЛС с учетом СКО $m_{\text{исх}}$ положения исходных пунктов и СКО $m_{\text{изм}}$ измерений можно найти из выражений 2.13 и 2.14:

$$\frac{m_{p(\text{план})}}{\sqrt{2}} = \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{2}} = m_{\text{НЛС}} = \sqrt{m_{\text{исх}}^2 + m_{\text{изм}}^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{m_{\text{Н}}}{\sqrt{2}} = m_{\text{НЛС}} = \sqrt{m_{\text{исх}}^2 + m_{\text{изм}}^2}. \quad (2.14)$$

Принято считать, что ошибками, доля которых от общей ошибки не превышает 5–10 %, можно пренебречь [65]. Поэтому ошибками исходных

пунктов можно пренебречь, если разность $m_{\text{НЛС}} - m_{\text{ИЗМ}}$ будет меньше или равна $\varepsilon m_{\text{НЛС}}$, где $\varepsilon = 0,05-0,1$, т. е. (2.15):

$$m_{\text{НЛС}} - m_{\text{ИЗМ}} \leq \varepsilon m_{\text{НЛС}}. \quad (2.15)$$

Преобразуем формулу 2.15 и найдем (2.16) [65]:

$$m_{\text{ИСХ}}^2 \leq \varepsilon(2 - \varepsilon)m_{\text{НЛС}}^2. \quad (2.16)$$

При $\varepsilon = 0,1$ получим $m_{\text{ИСХ}} \leq 0,43m_{\text{НЛС}}$, что пренебрегаемо мало по сравнению с ошибками измерений. Тогда будем считать, что (2.17)

$$m_{\text{ИЗМ}} = m_{\text{НЛС}}. \quad (2.17)$$

Подставив значения характеристик точности измерений в формулы 2.5, 2.7, 2.8, 2.13 и 2.14, получим требования к точности проведения НЛС при выполнении топографической съемки для создания и обновления инженерно-топографических планов (таблица 2.5).

Таблица 2.5 – Переход от характеристик точности измерений, заданных в нормативно-технической документации, к СКО определения положения точек и контуров

Характеристики точности измерений согласно нормативно-технической документации	Значение характеристик точности измерений, мм	СКО определения планового и высотного положения координат точек и контуров, мм	СКО наземного лазерного сканирования, мм
Средние ошибки определения планового положения предметов и контуров местности (при съемке в масштабе 1 : 200), ϑ_p	100	$m_{p(\text{план})} = 125$	88
Предельные ошибки во взаимном положении на плане (при съемке в масштабе 1 : 200), $\vartheta_{\text{Дпред}}$	80	$m_{p(\text{план})} = 40$	28
Средние ошибки съемки рельефа (при съемке в масштабе 1 : 200 и высоте сечения рельефа 0,25 м), ϑ_H	60	$m_H = 75$	53

В период ликвидации зданий и сооружений также выполняют топографическую съемку контуров застройки, подлежащей сносу. Масштаб и точность выполнения топографической съемки устанавливаются в техническом

задании. При этом требования к точности проведения НЛС можно определить по формулам 2.5, 2.7, 2.8, 2.13 и 2.14.

Отметим, что $m_{\text{изм}}$ при выполнении наземного лазерного сканирования содержит в себе ошибки определения пунктов геодезической сети $m_{\text{ГС}}$, ошибки сканирования $m_{\text{скан}}$, а также ошибки взаимного $m_{\text{ВЗО}}$ и внешнего $m_{\text{ВНО}}$ ориентирования результатов лазерного сканирования. Таким образом $m_{\text{изм}}$ следует выразить формулой 2.18:

$$m_{\text{изм}} = \sqrt{m_{\text{ГС}}^2 + m_{\text{скан}}^2 + m_{\text{ВЗО}}^2 + m_{\text{ВНО}}^2}. \quad (2.18)$$

Исполнительная съемка

На стадии строительства основной вид геодезических работ – исполнительная съемка [101], которую возможно выполнить методом НЛС. Требования к точности исполнительной съемки зависят от характеристик точности измерений при приемочном контроле по завершении строительно-монтажных работ, которые выражены предельными отклонениями смонтированных конструкций от их проектных положений (рисунок 1.5). Следует отметить, что указанные характеристики точности измерений могут быть применены не только на стадии строительства, но и на стадии разработки проекта реконструкции и стадии проекта ликвидации объекта, если иное не указано в техническом задании на выполнение работ.

Как отмечено в статье [131] автора настоящего диссертационного исследования, возможно выделить три группы контролируемых элементов при строительстве промышленного объекта:

- несущие конструкции (сваи, фундаменты, колонны металлические и железобетонные, балки, опоры, плиты перекрытия, фермы, ригели, связи и прочее);
- технологическое оборудование (насосы, аппараты колонного типа, емкости горизонтальные, технологические печи, резервуары и тому подобное);
- технологические трубопроводы.

На основании проведенного анализа нормативно-технической документации, регламентирующей стадию строительства (рисунок 1.5) для каждой из указанных групп элементов, приведем основные значения предельных отклонений от их проектных положений (таблица 2.6).

Отметим, что с учетом специфики промышленных объектов на каждой из стадий жизненного цикла типы контролируемых элементов и значения характеристик точности определения положения могут дополнительно регламентироваться в проекте производства геодезических работ.

Как было отмечено ранее, значение СКО m_p определения положения конструкций относительно предельного отклонения δ положения конструкций или значения Δ допуска можно вычислить по формулам 2.1 и 2.2 [131]. Отметим, что выражения 2.1 и 2.2 соответствуют требованиям к проведению исполнительной съемки, указанным в нормативно-технической документации. На основании вышеуказанного приведем требования к точности НЛС с учетом формул 2.1, 2.2 и 2.4 в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Переход от предельных отклонений смонтированных конструкций, от их проектных положений к СКО НЛС

Контролируемый элемент	Предельные отклонения, мм	СКО НЛС, мм
<u>Вертикальные железобетонные конструкции:</u>		
Отклонение от вертикальности	±15	4,2
Соосность вертикальных конструкций	±15	4,2
<u>Горизонтальные железобетонные конструкции:</u>		
Отклонение горизонтальных плоскостей	±20	5,6
Отклонение длин, пролетов, размеров в свету	±20	5,6
<u>Расположение анкерных болтов:</u>		
В плане внутри контура опоры	±5	1,4
В плане вне контура опоры	±10	2,8
По высоте	+20	5,6
Основания траншей и оснований по высоте	±50	14,1
<u>Вертикальные металлоконструкции</u>		
Отклонение от вертикальности:		
Ниже 4 000 мм	4	1,13
4 000–8 000 мм	10	2,8
8 000–16 000 мм	12	3,3
16 000–25 000 мм	16	4,5
25 000–40 000 мм	20	5,6
Отклонение по низу колонн	±5	1,4

Продолжение таблицы 2.6

Контролируемый элемент	Предельные отклонения, мм	СКО НЛС, мм
<u>Горизонтальные металлоконструкции:</u>		
Отметки опорных узлов	±10	2,8
Плановое смещение	±15	4,2
<u>Вертикальные сборные железобетонные конструкции</u>		
Отклонение от вертикальности:		
Ниже 4 000 мм	20	5,6
4 000–8 000 мм	25	7
8 000–16 000 мм	30	8,4
16 000–25 000 мм	40	11,3
Отклонение по низу колонн	8	2,2
<u>Рельс и крановые пути:</u>		
Расстояние между осями рельс одного пролета	±10	2,8
<u>Трубопроводы:</u>		
Отклонение линейных размеров на всю длину сборочной единицы	±10	2,8
Отклонения угловых размеров и перекося осей на весь прямой участок трубопровода	±8	2,2
<u>Опоры трубопроводные:</u>		
Отклонение в плане (для трубопроводов внутри помещения)	±5	1,4
Отклонение в плане (для наружных трубопроводов)	±10	2,8
<u>Аппараты колонного типа</u>		
Отклонение от вертикали для аппаратов высотой не более 50 м	15	4,2
Отклонение от вертикали для аппаратов высотой не более 80 м	24	6,7
Отклонение от вертикали для аппаратов высотой не более 100 м	30	8,4
<u>Технологическое оборудование:</u>		
Отклонение основания оборудования по горизонтали и вертикали	±10	2,8
<u>Фундаменты</u>		
Отклонение фактических размеров и положения	+20/ -5	5,6
Отклонение по высоте	±20	5,6

Исполнительная съемка строящегося или реконструируемого объекта предполагает выборочный контроль смонтированных конструкций, например, съемка обособленного технологического блока, технологического узла или сплошной контроль, например, съемка технологической установки или комплекса установок. В случае сплошного контроля требование к точности НЛС

вычисляется по формуле 2.4 и далее из выражения 2.18 определяются требования к каждому из этапов технологической схемы проведения работ.

В случае выборочного контроля технологическая схема может быть упрощена за ненадобностью построения геодезической сети. В таком случае исполнительную съемку ведут от закрепленных пунктов разбивочной сети и $m_{\text{изм}}$ может быть вычислена по формуле 2.19:

$$m_{\text{НЛС}} = m_{\text{изм}} = \sqrt{m_{\text{скан}}^2 + m_{\text{ВЗО}}^2 + m_{\text{ВНО}}^2}. \quad (2.19)$$

Обмерные работы

На стадиях проектирования (для разработки проектов реконструкции) и ликвидации объекта основной вид геодезических работ – обмерные работы [98]. Обмерные работы выполняют также на стадии эксплуатации для решения различных производственных задач (рисунок 1.1). Основная задача выполнения обмерных работ – получение информации о геометрии и пространственном положении зданий, сооружений, конструкций, коммуникаций и оборудования. Назначение требуемой точности определения положения объектов зависит от задач, для которых проводят обмерные работы. В нормативно-технической документации требования к точности выполнения обмерных работ определены расхождением длин объектов, полученных в ходе таких работ и вычисленных по координатам, и не должны превышать 10 см. Следует отметить, что указанное значение допуска не охватывает всего многообразия типов конструкций, поэтому дополнительные требования могут быть указаны в проекте производства геодезических работ в зависимости от требований проектных и эксплуатационных служб.

Как было указано в работе [131] автора настоящей диссертации, для перехода от значений допусков Δ измеряемых объектов к СКО определения положения объектов m_p вводят коэффициент k , который в зависимости от цели измерений и характера объекта принимает значения 0,2 или 0,4 (2.20).

$$m_p = k\Delta. \quad (2.20)$$

Переход от m_p к $m_{\text{изм}}$ выполняется по формуле 2.4. Основываясь на значении Δ , приведенном в нормативно-технической документации, вычислим $m_{\text{изм}}$ при различных значениях k :

- при $k = 0,2$ получим $m_p = 20$ мм и $m_{\text{изм}} = 14$ мм;
- $k = 0,4$ получим $m_p = 40$ мм и $m_{\text{изм}} = 28$ мм.

Обмерные работы также могут выполняться как для выборочных конструкций или обособленных технологических блоков, так и для всей территории технологических установок. Следовательно, формулы 2.18 и 2.19 справедливы для определения точности каждого из этапов технологической схемы проведения работ.

Наблюдение за деформациями

В последние годы для наблюдения за деформациями все шире стали использовать технологию НЛС. При этом относительно традиционных методов измерений применение НЛС расширяет возможности исследования состояния конструкций. Лазерное сканирование позволяет одновременно определить не только поведение конструкций, но и исследовать изменение их геометрии за счет детального описания поверхности объекта. В процессе наблюдения за деформациями с помощью НЛС решают задачи определения [138]:

- пространственного смещения деформационных марок;
- пространственной деформации объекта;
- пространственного изменения формы объекта и характеристика трещин.

Под деформациями понимается изменение формы и размеров объекта вследствие конструктивных особенностей, действия нагрузок и температурно-климатических воздействий [47]. В зависимости от вида деформации определяют контролируемые параметры деформации, которые в нормативно-технической документации выражены значениями технических или эксплуатационных допусков Δ или предельными отклонениями δ контролируемых параметров. Требования к точности измерений контролируемых параметров устанавливаются теми задачами, которые должны быть выполнены в ходе изучения

деформационного процесса [2, 47, 48, 74]. Основанием для установки требований к точности измерений служат требования [47]:

- к качеству проектных решений, определяющих надежность конструкций на стадии эксплуатации промышленного объекта;
- по учету деформаций зданий и сооружений при монтажных и выверочных работах на стадии строительства;
- службы эксплуатации по определению технического состояния зданий, сооружений и оборудования для регулирования технологических процессов и ремонтных работ.

Промышленное предприятие включает в себя десятки зданий и сооружений и сотни единиц оборудования и типов строительных конструкций. В связи с этим многочисленны виды контролируемых параметров каждого объекта, характеризующие их техническое состояние. Следовательно, для каждого вида конструктивных элементов необходимую точность измерений надлежит выполнять специальным расчетом. Также стоит учитывать выбор метода контроля [47]:

- пассивный – контроль состояния конструкций зданий, сооружений, конструкций и оборудования, для которых деформационный процесс не имеет выраженных закономерностей во времени;
- активный – контроль состояния конструкций зданий, сооружений, конструкций и оборудования, для которых характер развития деформации во времени имеет выраженную закономерность.

От выбора того или иного метода контроля зависит его точность и периодичность. Сформируем две цепочки расчетов отдельно для случаев проведения пассивного или активного контроля.

Точность измерений определяется величинами СКО m_p определения пространственного положения контролируемых параметров. При пассивном контроле зависимость m_p от значений допусков Δ и предельных отклонений δ контролируемых параметров определяется формулами 2.1 и 2.2 [2, 47].

В случае необходимости повышения требований к точности измерений при пассивном контроле для Δ и δ вводят коэффициент точности c_{Π} . Коэффициент c_{Π} устанавливают из взаимосвязи ошибок измерений, вероятности неправильного принятия бракованных деталей, вероятностью забракованных годных деталей и вероятностной величиной выхода размера за границу поля допуска у неправильно принятых деталей [47]. Коэффициент c_{Π} принимают равным от 0,2 до 0,7 в зависимости от требуемой точности получения результатов контроля и назначают в техническом задании. Тогда СКО определения положения объектов можно вычислить по формуле 2.21:

$$m_p = \frac{\delta c_{\Pi}}{2,5} = \frac{\Delta c_{\Pi}}{5}. \quad (2.21)$$

При активном контроле главная задача наблюдения за деформациями – изучение развития деформации от статических и динамических нагрузок во времени. В ходе решения такой задачи важно изучить характер изменения контролируемых параметров через определенные промежутки времени и сравнить полученные результаты с заданными проектными или эксплуатационными допусками. Соответственно, чтобы наиболее подробно описать процесс развития деформации, необходимы более жесткие требования к точности их измерения. Повышение требований к точности геодезических измерений возможно путем введения коэффициента точности (2.22) [47]:

$$c_a = \frac{c_{\Pi}^2}{1 + c_{\Pi}}. \quad (2.22)$$

При активном контроле зависимость m_p от δ контролируемых параметров с учетом доверительной вероятности 0,98 определяется по формуле 2.23:

$$m_p = \frac{\delta c_a}{2,5}. \quad (2.23)$$

Учитывая, что наблюдения за деформациями при активном и пассивном контроле проводят относительно исходных пунктов, которые располагаются вне зоны возникновения деформаций, и их положение в пространстве и во времени принимается как стабильное, будем считать, что ошибки $m_{исх}$ опорных пунктов

пренебрегаемо малы. Также отметим, что при трехмерном моделировании объекта, подверженного деформациям, используется полигональное моделирование, основанное на построении граней, плоскостей и поверхностей путем аппроксимации точек лазерного сканирования. Тогда можно считать, что СКО измерений контролируемых параметров $m_{изм} = m_p$. Для определения требований к точности каждого из этапов технологической схемы проведения работ справедлива формула 2.19.

Выполним расчет требуемой точности $m_{изм}$, основываясь на основных значениях предельных деформаций, указанных в нормативно-технической документации [52, 105] (таблица 2.7).

Таблица 2.7 – Переход от предельных величин деформаций к требуемой точности НЛС

Контролируемый элемент	Предельная величина осадки, см	СКО НЛС, мм					
		Пассивный контроль при $c_{п}$ равном			Активный контроль при $c_{п}$ равном		
		0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
<u>Фундаменты производственных зданий с полным каркасом:</u>							
Железобетонным	10	8	20	28	1,3	6,7	11,5
Стальным	15	12	30	42	2	10	17,3
<u>Фундаменты дымовых труб высотой H, м:</u>							
$H \leq 100$	40	32	80	112	5,3	26,7	46,1
$100 < H \leq 200$	30	24	60	84	4	20	34,6
$200 < H \leq 300$	20	16	40	56	2,7	13,3	23,1
$H > 100$	10	8	20	28	1,3	6,7	11,5
Жесткие сооружения высотой до 100 м,	20	16	40	56	2,7	13,3	23,1
<u>Стальные резервуары</u>							
Осадка по контуру	15	12	30	42	2	10	17,3
Неравномерность по контуру							
Объем резервуара до 10 тыс. м ³	5	4	10	14	0,7	3,3	5,8
Объем резервуара 10–20 тыс. м ³	6	4,8	12	16,8	0,8	4	6,9
Объем резервуара 20–60 тыс. м ³	6	4,8	12	16,8	0,8	4	6,9

Из таблицы 2.6 и 2.7 видно, что требования к точности определения пространственного положения некоторых типов конструкций высокие. В связи с

этим для таких конструкций необходимо разрабатывать дополнительные методики измерений, в рамках которых также определять прибор измерений, обеспечивающий требуемую точность.

2.3 Исследование практических результатов взаимного ориентирования с использованием алгоритма ближайших точек

Для разработки методики проектирования и построения геодезической сети, учитывающей особенности метода НЛС, необходимо исследовать в том числе и метод взаимного ориентирования точечных моделей. Как уже было отмечено в главе 1, пункте 1.3.3, одной из идей автора настоящей диссертации является применение алгоритма ближайших точек для взаимного ориентирования точечных моделей.

Для оценки возможности применения алгоритма ближайших точек при взаимном ориентировании точечных моделей было проведено экспериментальное исследование, ранее опубликованное в работе автора [120], в котором сравнивались координаты контрольных марок, полученных с помощью следующих приборов:

- электронный тахеометр *Leica TS15* (СКО измерения углов – 1", СКО измерения расстояний (без отражателя) – 2 мм + 2 ppm до 500 м);
- наземный лазерный сканер *Leica P20* (СКО измерения углов – 8", СКО измерения расстояний 1,5 мм при альбедо 90 % до 100 м).

Методика проведения работ включала в себя комплекс последовательных действий. На площадке объекта съемки были закреплены 16 контрольных марок, представляющих собой черно-белую пластину с четко выраженным центром. Далее с помощью электронного тахеометра по периметру объекта съемки был проложен замкнутый ход полигонометрии, состоящий из 8 станций. Измерения углов и расстояний при проложении хода были выполнены одним приемом в прямом и обратном направлении. По сторонам хода тригонометрическим

нивелированием в прямом и обратном направлении были определены превышения. Схема хода представлена на рисунке 2.3.

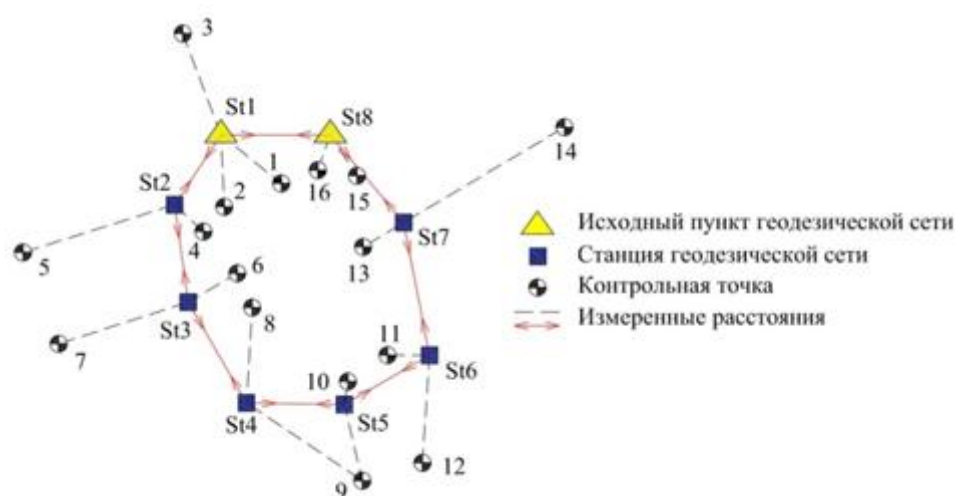


Рисунок 2.3 – Схема хода полигонометрии

Далее с каждой станции одним приемом полярным способом были выполнены измерения вертикальных, горизонтальных углов и расстояний на закрепленные контрольные марки. С этих же станций было произведено НЛС площадки объекта и определение центров закрепленных контрольных марок.

Уравнивание хода и, в дальнейшем, определение координат контрольных марок производились в программном обеспечении (ПО) *CredoDAT* 4.0. По результатам уравнивания СКО положения станций составила 2,6 мм. Результаты уравнивания хода представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Результаты уравнивания хода полигонометрии

Параметр		Min, м	Max, м	Средняя, м
Измеренные расстояния		7,155	57,464	29,199
Длины сторон хода		25,726	41,510	32,776
Периметр замкнутого хода, м			262,212	
СКО направлений			2,1 (сек)	
СКО линий, м	<i>a</i>	- 0,0002		
	<i>b</i>	0,0743		
	<i>m</i>	0,0021		
СКО определения высот, м			0,010	
Поправки по результатам уравнивания в измеренные направления, с		0°00'0"	0°00'02"	0°00'02"

Продолжение таблицы 2.8

Параметр	Min, м	Max, м	Средняя, м
Поправки по результатам уравнивания в измеренные расстояния, м	0,000	0,002	0,001
Оценка точности положения пунктов хода полигонометрии			
СКО расстояния, м	0,0003	0,0029	0,0025
СКО угла, с	2,9	3,6	3,6
СКО положения, м	0,0005	0,0030	0,0026

Взаимное ориентирование точечных моделей производилось в программном продукте «Cyclone» методом «*Visual Registration (2D Scan Thumbnails)*», который основан на итерационном алгоритме ближайших точек. Для внешнего ориентирования результатов НЛС в качестве исходных были приняты координаты исходных пунктов и дирекционный угол между ними. Результаты взаимного ориентирования точечных моделей представлены в таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Результаты взаимного ориентирования точечных моделей с применением алгоритма ближайших точек

№ п/п	Взаимосвязь	Количество соответствующих точек в двух точечных моделях	Абсолютная ошибка, м	СКО взаимного ориентирования, м
1.	$St1 - St2$	383 066	0,006	0,010
2.	$St2 - St3$	423 766	0,006	0,009
3.	$St3 - St4$	592 233	0,006	0,009
4.	$St4 - St5$	302 733	0,006	0,009
5.	$St5 - St6$	393 733	0,006	0,009
6.	$St6 - St7$	446 866	0,007	0,011
7.	$St7 - St0$	273 000	0,008	0,012
8.	$St0 - St1$	526 166	0,007	0,011
СКО взаимного ориентирования, м				0,010

В итоге было выполнено сравнение координат центров марок, определённых с помощью лазерного сканера и с помощью тахеометра, последние из которых были приняты за безошибочные (2.24):

$$\Delta x = x_{TS} - x_{LS}, \Delta y = y_{TS} - y_{LS}, \Delta z = z_{TS} - z_{LS}, \quad (2.24)$$

где x_{TS} , y_{TS} , z_{TS} – координаты контрольных марок, полученных в ходе уравнивания хода полигонометрии;

x_{LS}, y_{LS}, z_{LS} – координаты контрольных марок, полученных в ходе взаимного ориентирования точечных моделей в единую модель;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – разница координат.

Далее по формуле Гаусса была вычислена СКО контрольных марок по осям координат и далее – СКО положений контрольных марок. Результаты исследования представлены в таблицах 2.10 и 2.11. Анализ результатов показал, что максимальное расхождение в значениях координат составило 4 мм, а среднее по всем пунктам – 1,9 мм. Также СКО положения марки составила 3,9 мм. Следует отметить, что СКО положения марки в 2 раза точнее, чем СКО взаимного ориентирования точечных моделей.

Таблица 2.10 – Результаты исследования точности определения положения контрольных марок лазерным сканером

Имя контрольной марки	Координаты, определенные с помощью тахеометра, м			Координаты, определенные с помощью лазерного сканера, м		
	x_{TS}	y_{TS}	z_{TS}	x_{LS}	y_{LS}	z_{LS}
1	-14,855	18,514	12,228	-14,856	18,513	12,226
2	-22,036	0,986	12,275	-22,036	0,984	12,273
3	31,119	-11,798	11,602	31,121	-11,797	11,599
4	-29,64	-5,432	12,269	-29,638	-5,428	12,268
5	-36,032	-60,925	11,809	-36,036	-60,921	11,808
6	-42,43	4,990	12,222	-42,429	4,992	12,223
7	-64,075	-49,972	11,815	-64,071	-49,971	11,817
8	-52,948	9,587	12,074	-52,946	9,589	12,077
9	-106,044	43,445	12,091	-106,046	43,441	12,093
10	-75,616	39,015	12,574	-75,617	39,014	12,573
11	-67,561	51,208	12,045	-67,563	51,206	12,044
12	-100,584	61,949	11,983	-100,586	61,945	11,984
13	-34,365	43,707	11,961	-34,367	43,704	11,963
14	2,385	105,641	12,678	2,381	105,637	12,68
15	-12,514	41,802	12,287	-12,515	41,799	12,286
16	-10,797	29,764	12,194	-10,797	29,761	12,193
St 0	0	33,613	10,272	-0,002	33,612	10,272
St 1	0	0	10	-0,004	0,003	10
St 2	-21,391	-14,295	10,317	-21,39	-14,293	10,318
St 3	-51,277	-10,13	10,272	-51,273	-10,126	10,273
St 4	-82,195	7,796	10,519	-82,193	7,795	10,52
St 5	-82,692	37,952	10,28	-82,692	37,949	10,28
St 6	-67,585	64,131	10,315	-67,589	64,128	10,317
St 7	-26,848	56,168	10,432	-26,849	56,166	10,433

Таблица 2.11 – Результаты исследования точности определения положения контрольных марок лазерным сканером

№ марки	Δx , м	Δy , м	Δz , м	СКО координат по оси			СКО положения марки, м
				m_x , М	m_y , М	m_z , М	m_p , М
1	0,001	0,001	0,002	0,0024	0,0027	0,0015	0,0039
2	0	0,002	0,002				
3	-0,002	-0,001	0,003				
4	-0,002	-0,004	0,001				
5	0,004	-0,004	0,001				
6	-0,001	-0,002	-0,001				
7	-0,004	-0,001	-0,002				
8	-0,002	-0,002	-0,003				
9	0,002	0,004	-0,002				
10	0,001	0,001	0,001				
11	0,002	0,002	0,001				
12	0,002	0,004	-0,001				
13	0,002	0,003	-0,002				
14	0,004	0,004	-0,002				
15	0,001	0,003	0,001				
16	0	0,003	0,001				
<i>St</i> 0	0,002	0,001	0				
<i>St</i> 1	0,004	-0,003	0				
<i>St</i> 2	-0,001	-0,002	-0,001				
<i>St</i> 3	-0,004	-0,004	-0,001				
<i>St</i> 4	-0,002	0,001	-0,001				
<i>St</i> 5	0	0,003	0				
<i>St</i> 6	0,004	0,003	-0,002				
<i>St</i> 7	0,001	0,002	-0,001				

Еще одно исследование алгоритма ближайших точек, опубликованное в работе автора [123], выполнено на основе анализа результатов взаимного ориентирования точечных моделей, полученных при выполнении НЛС различных промышленных объектов. В качестве тестируемых было выбрано семь групп станций лазерного сканирования, установленных между пунктами с известными координатами (рисунок 2.4). Каждая группа включала 10–12 станций лазерного сканирования, среднее расстояние между которыми составляло 20 м. Места установки лазерного сканера определялись с учетом конфигурации объекта измерений и видимости между предыдущей и последующей станциями лазерного сканирования.

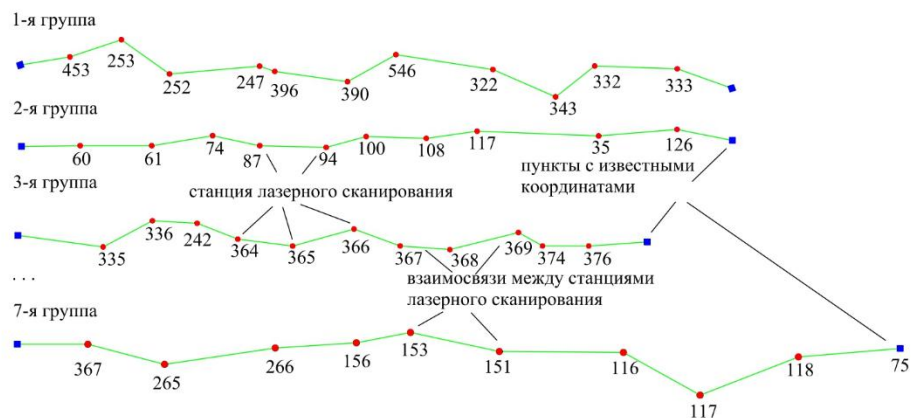


Рисунок 2.4 – Схема расположения исходных пунктов и станций лазерного сканирования

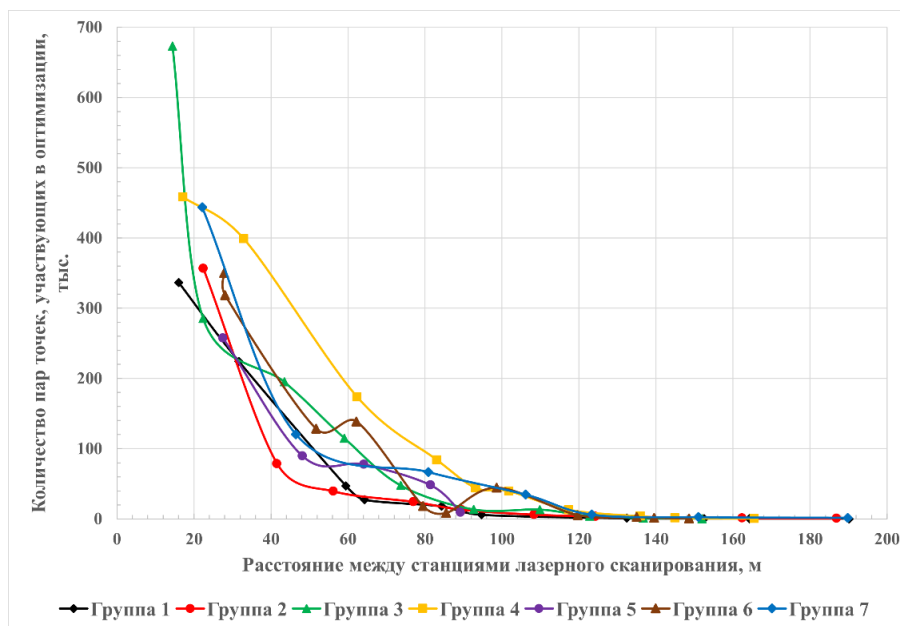
Измерения выполнялись прибором с СКО измерения горизонтальных и вертикальных углов 8", СКО измерения расстояний – 1,2 мм на всем расстоянии до 270 м и линейным разрешением сканирования $6,3 \times 6,3$ мм на 10 м.

На основе анализа итерационного алгоритма ближайших точек, представленного в главе 1, пункте 1.3.3, можно сделать вывод о том, что факторами минимизации целевой функции являются количество соответствующих пар точек, найденных в двух моделях, и расстояние между ними. В этом случае можно предположить, что чем больше область перекрытия содержит четких контуров с двух соседних станций, тем меньше будет значение целевой функции после выполнения оптимизации. При лазерном сканировании в условиях плотной застройки обеспечение достаточного перекрытия возможно при соблюдении определенного расстояния между станциями лазерного сканирования. Для исследования вышеуказанной зависимости был проведен анализ результатов взаимного ориентирования при увеличении расстояния между смежными станциями лазерного сканирования, участвующими в оптимизации. Взаимное ориентирование было выполнено двумя способами:

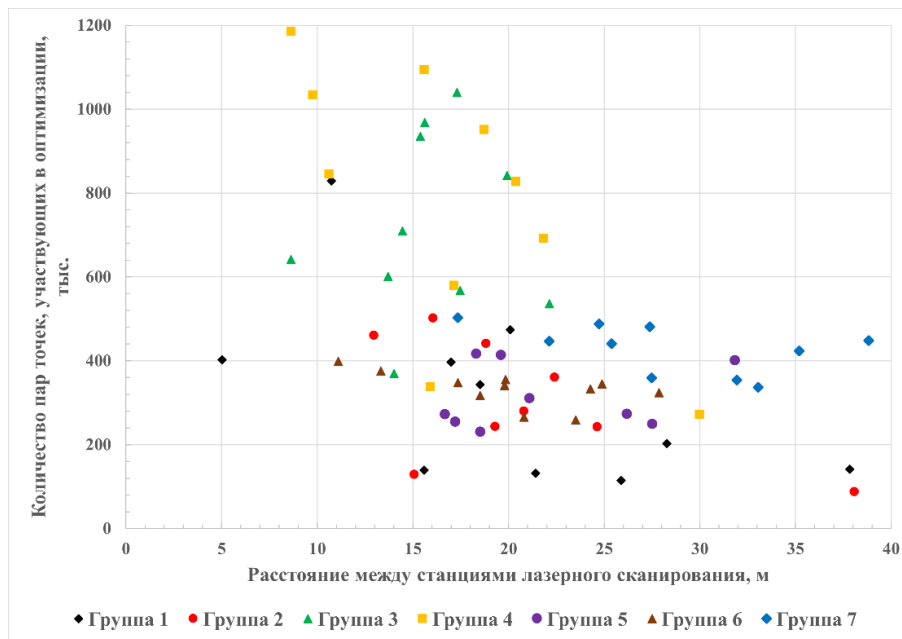
- при последовательном ориентировании последующей станции лазерного сканирования с предыдущей;
- ориентировании относительно первой станции лазерного сканирования всех последующих.

В первом случае среднее расстояние между станциями лазерного сканирования составило 20 м, во втором – расстояние между станциями лазерного сканирования увеличивалось и максимальное значение для различных групп станций составило 90–130 м.

Из графика на рисунке 2.5, *a* видно, что при увеличении расстояния между станциями лазерного сканирования уменьшается количество соответствующих пар точек, участвующих в оптимизации. Так, на расстоянии 20 м алгоритм определяет более 300 тыс. пар точек, на расстоянии 70 м количество точек уменьшается до 20–70 тыс. пар, а на расстоянии 130 м количество найденных соответствующих пар точек не превышает 1 тыс. При последовательном взаимном ориентировании, в случае если расстояние между станциями не превышает 30 м, алгоритм определяет в среднем около 400 тыс. пар соответствующих точек (рисунок 2.5, *b*). Однако стоит отметить, что эта зависимость не применима в случае, если не обеспечивается достаточная область перекрытия между станциями лазерного сканирования.



a) при ориентировании относительно первой станции всех последующих



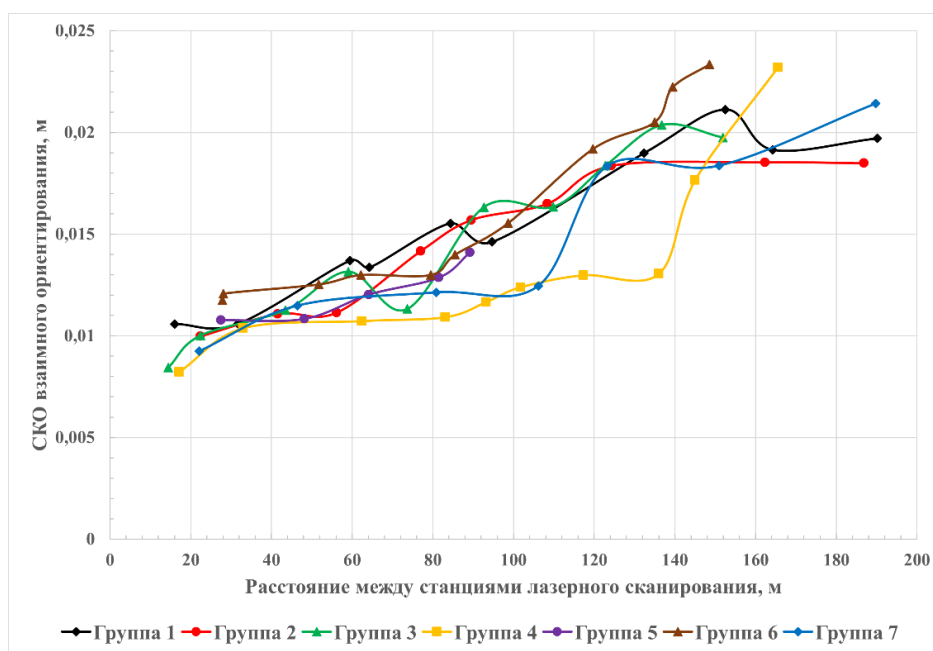
b) при последовательном ориентировании последующей станции с предыдущей

Рисунок 2.5 – Зависимость количества пар точек, участвующих в оптимизации, от расстояния между станциями лазерного сканирования

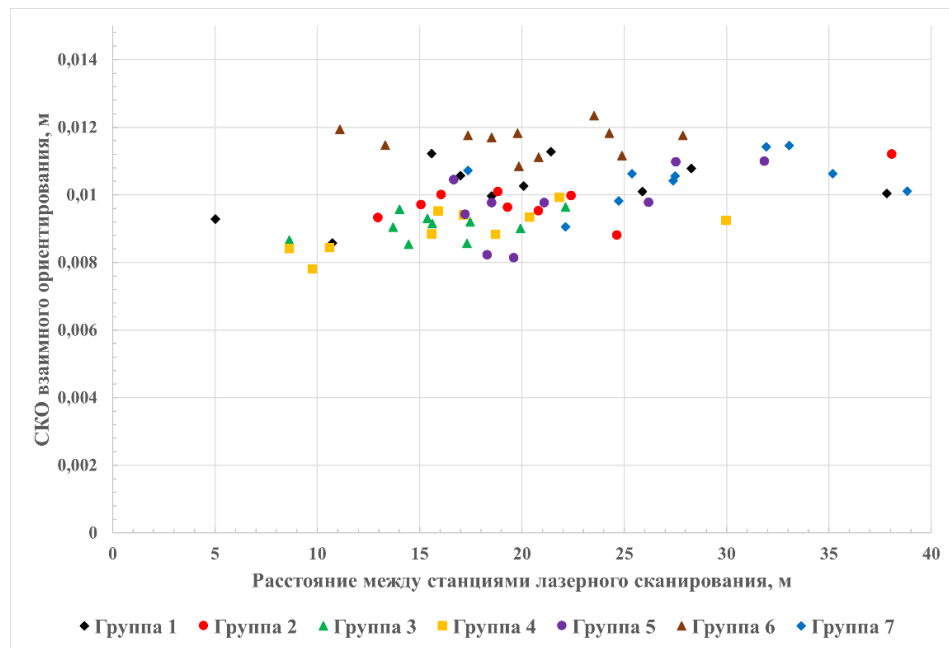
На рисунке 2.6, *a* видно, что увеличение расстояния между станциями лазерного сканирования, участвующими в оптимизации, также влияет на значение СКО взаимного ориентирования. Это связано с тем, что при увеличении расстояния от сканера до объекта сканирования увеличиваются горизонтальное и вертикальное разрешения сканирования. Соответственно при взаимном ориентировании плотность контуров на большем расстоянии от сканера до объекта будет уменьшаться. Также при увеличении расстояния между станциями лазерного сканирования уменьшается область перекрытия двух моделей. Эти два фактора приводят к тому, что расстояние между парой соответствующих точек увеличивается, и соответственно, увеличивается значение СКО взаимного ориентирования. Следует отметить, что с увеличением расстояния между станциями лазерного сканирования до 70 м, значение СКО взаимного ориентирования плавно увеличивается и линия тренда четко прослеживается. Однако с увеличением расстояния между станциями более 70 м, значения СКО взаимного ориентирования не укладываются в отмеченную выше закономерность, как видно на рисунке 2.6, *a* для групп 4 и 7. Анализируя

результаты последовательного ориентирования станций лазерного сканирования, расстояние между которыми не превышает 25 м, можно сделать вывод, что значение СКО взаимного ориентирования находится примерно в одинаковом диапазоне и в большинстве случаев не превышает 10 мм (рисунок 2.6, *b*).

По результатам взаимного ориентирования двумя способами были определены новые координаты станций лазерного сканирования и произведено сравнение их значений. Из графика на рисунке 2.7 видно, что увеличение расстояния между станциями лазерного сканирования приводит к увеличению значения СКО определения положения станций. Так, на расстоянии до 40 м СКО определения положения станций лазерного сканирования составляет до 2 мм, на расстоянии до 70 м – до 10 мм, а на расстоянии более 70 м возрастает для большинства групп до 40 мм, а для групп 3, 6 и 7 – до 14 см. Отметим также, что значения СКО определения положения станций лазерного сканирования плавно возрастают с увеличением расстояния между станциями ЛС до 70 м и линия тренда также четко прослеживается. С увеличением расстояния между станциями более 70 м, значения СКО определения положения станций лазерного сканирования не укладываются в отмеченную выше закономерность, как видно на рисунке 2.7.



a) при ориентировании относительно первой станции всех последующих



b) при последовательном ориентировании последующей станции лазерного сканирования с предыдущей

Рисунок 2.6 – Зависимость значения СКО взаимного ориентирования от расстояния между двумя станциями

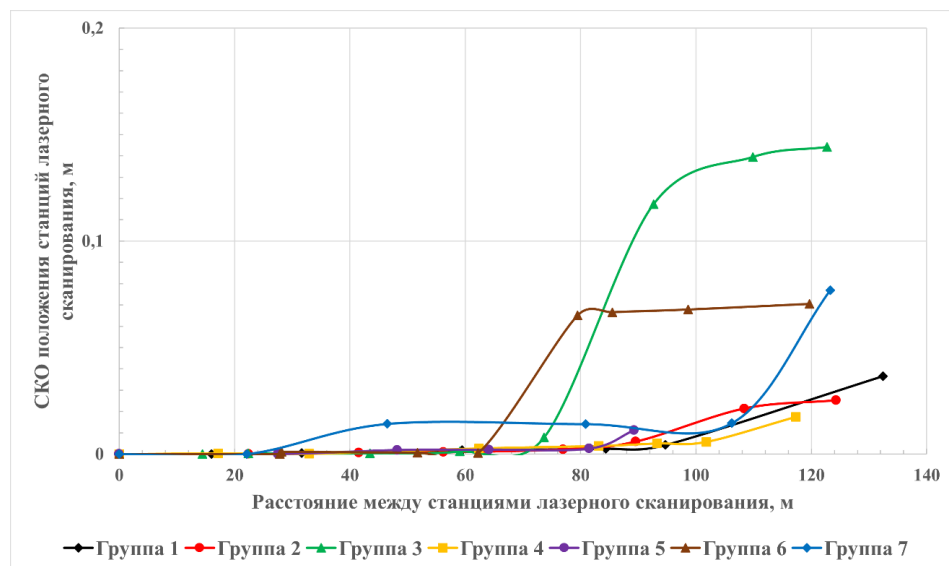


Рисунок 2.7 – Зависимость значения СКО определения положения станции лазерного сканирования от расстояния между двумя станциями при взаимном ориентировании

Отметим, что полученные в ходе исследования зависимости следует учитывать при проектировании и построении геодезической сети. Предложения

по выполнению поиска оптимального значения параметров преобразования для взаимного ориентирования двух точечных моделей будут представлены в главе 3.

2.4 Разработка методики проектирования и построения геодезической сети при наземном лазерном сканировании промышленных объектов

Как было отмечено в главе 1, пункте 1.3.2, результатом измерений с одной станции лазерного сканирования является дискретная точечная модель (далее – модель), в которой каждая измеренная точка описана пространственными координатами X, Y, Z . При объединении массива измерений со всех станций лазерного сканирования возникает задача взаимного ориентирования моделей в единую модель с ее последующим внешним ориентированием в заданную систему координат. Следует отметить, что НЛС промышленного объекта предполагает съемку больших площадей технологических установок, представляющих собой комплекс технологических блоков, в состав которых входят здания и сооружения с большим количеством технологического оборудования, строительных конструкций и инженерных коммуникаций. Главная особенность такой съемки – высокая детализация и соответственно большое количество установок станций лазерного сканера для выполнения требуемых измерений. Для примера приведем статистические данные, полученные при НЛС на различных технологических установках (таблица 2.12).

Для решения задачи объединения массива измерений предлагается осуществлять проектирование и построение геодезической сети с учетом особенностей и конфигурации технологической установки.

Таблица 2.12 – Статистические данные НЛС технологических установок промышленных объектов

Тип технологической установки	Площадь установки, га	Количество технологических блоков	Количество станций ЛС
Установка подготовки нефти	16	95	1493
Установка каталитического крекинга	4,3	32	1652
Установка производства водорода	10,6	24	3919
Установка производства аммиака	3,6	6	1805

В настоящей работе разработку методики проектирования и построения геодезической сети предлагается основывать на выполнении взаимного ориентирования моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек и выполнении внешнего ориентирования аналитическим методом с использованием специальных марок.

Условия проектирования геодезической сети

Рассмотрим условия проектирования геодезической сети с учетом схемы ее построения, предложенной в работе автора [123] на основании практического опыта и состоящей из последовательных этапов выполнения работ (рисунок 2.8). Предлагается проектирование сети выполнять в два этапа: первый – проектирование и предрасчет точности положения пунктов опорной сети, координаты которых определяются от исходных пунктов традиционными методами геодезии; второй – проектирование и предрасчет точности положения пунктов сканерной сети, координаты которых определяются от пунктов опорной сети. Под сканерной сетью будем понимать сеть, созданную между пунктами опорной сети и представляющую собой станции лазерного сканирования, между которыми выполнено взаимное ориентирование. В настоящей диссертационной работе взаимное ориентирование станций лазерного сканирования выполняется итерационным алгоритмом ближайших точек последовательно от предыдущей к последующей станции.

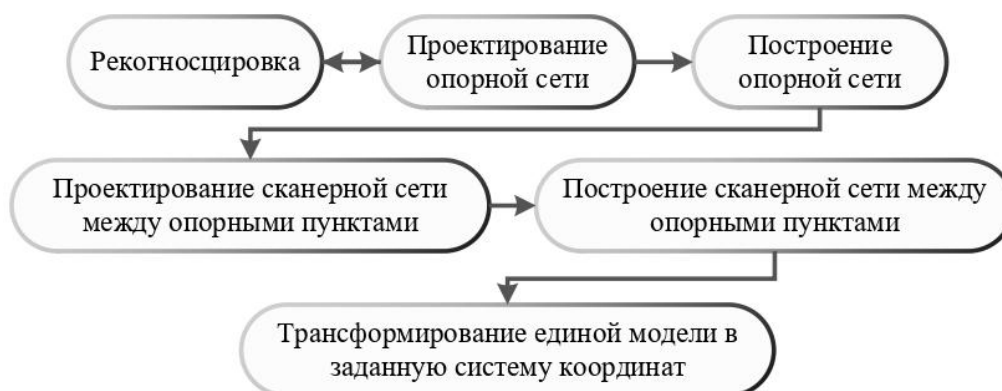


Рисунок 2.8 – Технологическая схема построения геодезической сети

Для определения наилучшего расположения пунктов опорной сети и станций лазерного сканирования необходимо выполнять рекогносцировку территории объекта. В условиях съемки промышленных объектов всю территорию технологической установки предлагается разбивать на зоны, границы которых совпадают с границами технологических блоков (рисунок 2.9). Это необходимо для того, чтобы выполнять взаимное ориентирование моделей отдельно для каждого технологического блока или нескольких взаимосвязанных блоков. Выполнение взаимного ориентирования отдельно для каждой выделенной зоны позволит минимизировать ошибки взаимного ориентирования за счет уменьшения количества станций лазерного сканирования, участвующих в оптимизации, и исключения станций, у которых расстояние до объекта сканирования превышает рекомендуемую дальность измерений.

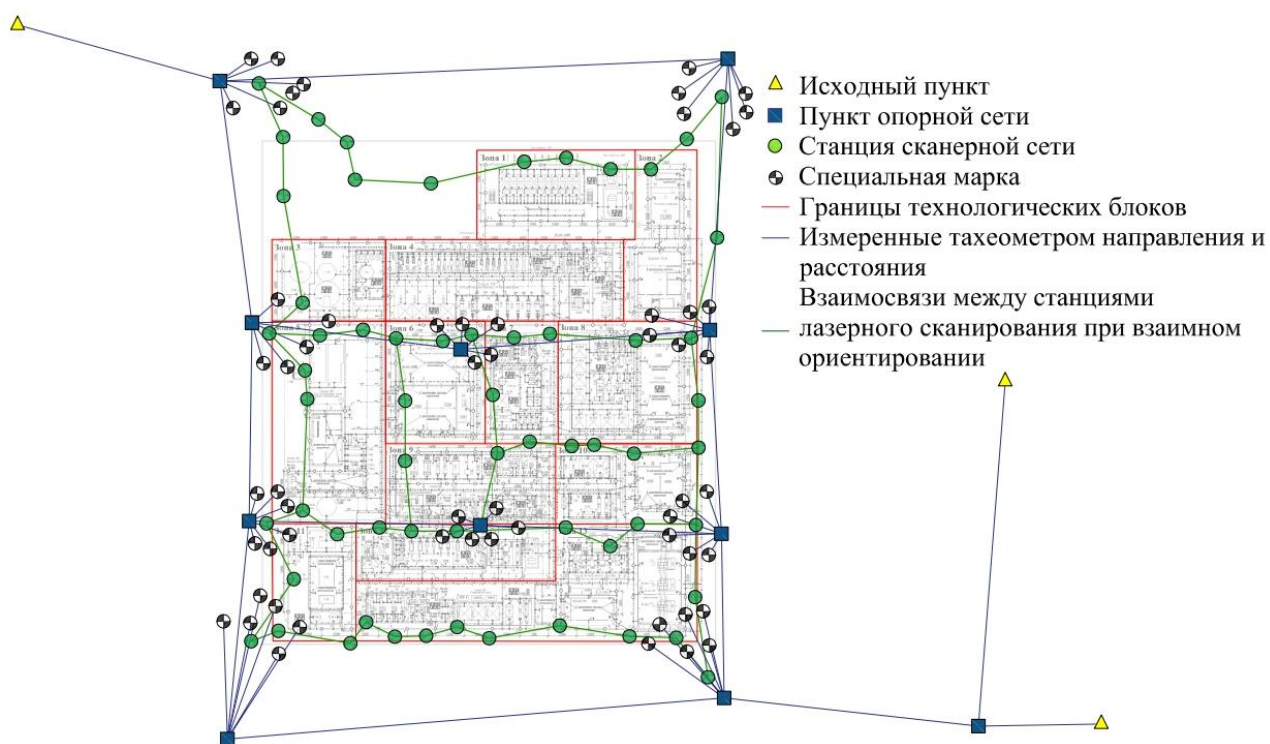


Рисунок 2.9 – Пример схемы геодезической сети при НЛС промышленного объекта

Условия проектирования опорной сети

Как правило, для внешнего ориентирования единой модели в заданную систему координат на промышленных объектах необходимо заново создавать геодезическую сеть, так как исходные пункты часто не удовлетворяют требованиям съемки ни по плотности, ни по точности и, зачастую, утрачиваются в процессе эксплуатации объекта. Точность и методы создания геодезической сети зависят от целей и задач, для решения которых проводится геодезическая съемка, и должны быть установлены на основании специальных расчётов относительно требований к точности конечного результата. В настоящее время при создании геодезических сетей широкое распространение получил метод, основанный на использовании аппаратуры, работающей по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [88]. Однако в условиях проведения съемки на территории промышленного объекта применение ГНСС-метода может быть осложнено плотной застройкой, которая заслоняет видимость спутников. В связи с этим разработка методики проектирования опорной сети выполнена с учетом использования наземных методов путем построения линейно-угловых сетей с одновременным определением высот пунктов в прямом и обратном направлении тригонометрическим нивелированием (рисунок 2.9). Расположение пунктов опорной сети предлагается определять исходя из необходимости обеспечения взаимной видимости на смежные пункты опорной сети и равномерного покрытия пунктами всей территории объекта съемки. В связи с тем, что длины сторон опорной сети (как правило) превышают рекомендованное полезное расстояние лазерного сканирования, для ориентирования лазерного сканера предлагается закреплять специальные марки в радиусе до 20 м вокруг пунктов опорной сети. Такое расстояние обусловлено тем, что при увеличении расстояния от лазерного сканера до объекта измерений увеличивается разрешение сканирования. Таким образом, при сканировании марки на большом расстоянии будет получена разряженная точечная модель, в которой возможна ошибка определения положения центра марки, превышающая требуемую точность. Предлагается в качестве специальных марок использовать плоские черно-белые марки с четко

определенным центром. Использование указанных марок обусловлено удобством наведения и выполнения измерений электронным тахеометром и далее сканирования марки лазерным сканером. В разработанной методике предлагается с каждого пункта опорной сети электронным тахеометром определять пространственные координаты 5–7 марок.

Условия проектирования сканерной сети

Как было отмечено ранее при НЛС технологической установки предлагается выполнять измерения и их дальнейшее взаимное ориентирование отдельно для каждого технологического блока. Тогда в ходе выполнения внешнего ориентирования отдельных блоков внутри технологической установки в требуемую систему координат необходимо соблюдать условие отсутствия коллизий двух моделей отдельных блоков. Для этого необходимо выполнить предварительное взаимное ориентирование моделей всех блоков в единую модель. Одним из способов решения этой задачи является построение сканерной сети между пунктами опорной сети, проходящей по границам технологических блоков (рисунок 2.9). Преимущества построения сканерной сети заключаются в том, что в последующей оптимизации участвует небольшое количество точечных моделей относительно всего объема лазерного сканирования, тем самым не «утяжеляя» и не накапливая ошибки при выполнении взаимного ориентирования.

2.4.1 Разработка методики проектирования опорной геодезической сети

Как было отмечено в работе автора [123], проектирование опорной сети предлагается выполнять методом наименьших квадратов параметрическим способом [77, 79, 118]. При этом предлагается выполнить проектирование, основываясь на следующих принципах:

- выполнять проектирование для пространственной сети с учетом того, что измерения производятся электронным тахеометром;
- моделирование опорной сети выполнять относительно исходных

пунктов, имеющих на промышленном объекте;

– моделировать «результаты измерений» с учетом «ошибок измерений» методом Монте-Карло, описанным в работах [27, 132, 149];

– СКО положения пунктов вычислять на основе многократного уравнивания параметрическим способом.

С учетом вышесказанного приведем последовательность проектирования опорной сети, ранее опубликованную в работе автора [123].

Шаг 1. По цифровому генеральному плану предприятия необходимо определить приближенные пространственные координаты X, Y, H всех запроектированных пунктов опорной сети (рисунок 2.9).

Шаг 2. По известным формулам 2.25–2.27 осуществляется вычисление «приближенных результатов измерений» n_i (направления N_i , наклонные расстояния D_i и зенитные расстояния z_i):

$$N_i = \arctg\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) - A_0, \quad (2.25)$$

$$D_i = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (H_j - H_i)^2}, \quad (2.26)$$

$$z_i = \arccos\left(\frac{H_j - H_i}{D_i}\right), \quad (2.27)$$

где X_i, Y_i, H_i и X_j, Y_j, H_j – координаты левого и правого пункта соответственно, A_0 – дирекционный угол нулевого направления на каждой станции сети.

Шаг 3. Определение СКО «измеряемых» наклонных и зенитных расстояний m_D и m_z по заданным в техническом паспорте прибора параметрам, а СКО «измеряемых направлений» определяется из выражения $m_N = m_\beta / \sqrt{2}$, где m_β – СКО измерения горизонтальных углов.

Шаг 4. Вычисление веса p_i каждого «значения измерений» из выражения 2.28:

$$p = \mu^2 / m^2, \quad (2.28)$$

где μ – априорная ошибка единицы веса, которая принимается как СКО измерения направления [36].

Далее выполняется составление матрицы \mathbf{P} , диагональными элементами которой будут являться веса запланированных к измерению в проектируемой сети величин (2.29):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

При этом следует использовать те значения СКО, которые характеризуют точность измерения вертикальных и горизонтальных углов и расстояний (2.30) [36]:

$$p_N = \mu^2 / m_N^2, \quad p_D = \mu^2 / m_D^2, \quad p_z = \mu^2 / m_z^2. \quad (2.30)$$

Шаг 5. Выполнение моделирования «ошибок измерений» методом Монте-Карло. Для каждого «приближенного результата измерений» n_i , вычисленного по формулам 2.25–2.27 моделируется «ошибка измерения» ξ_i при условии, что математическое ожидание «ошибки измерения» $M(\xi) = n_i$, а дисперсия «ошибки измерения» определяется из технического паспорта прибора $D(\xi) = m^2$. Тогда значения ξ_i генерируются в интервале $-3m \leq \xi_i \leq 3m$ для каждого n_i [132, 149].

Шаг 6. Вычисление «результатов измерений» n'_i , содержащих ошибки измерений путем введения в «приближенные результаты измерений» n_i значений «ошибок измерений» ξ_i (2.31) [3, 27, 132]:

$$N'_i = N_i + \xi_{N_i}, \quad D'_i = D_i + \xi_{D_i}, \quad z'_i = z_i + \xi_{z_i}. \quad (2.31)$$

Шаг 7. Составление уравнения поправок для всех подлежащих измерению величин и формирование матрицы коэффициентов \mathbf{B} параметрических уравнений поправок и вектора \mathbf{L} свободных членов параметрических уравнений поправок. При этом уравнения поправок ν имеют следующий вид (2.32–2.34) [3, 27, 36]:

– уравнение поправок для направлений ν_N :

$$v_N = \left(\rho \frac{\sin \alpha_{ij}}{S_{ij}} \right) \tau_{X_i} - \left(\rho \frac{\cos \alpha_{ij}}{S_{ij}} \right) \tau_{Y_i} - \left(\rho \frac{\sin \alpha_{ij}}{S_{ij}} \right) \tau_{X_j} + \left(\rho \frac{\cos \alpha_{ij}}{S_{ij}} \right) \tau_{Y_j} - \tau_p + (N_{ij} - N'_{ij}), \quad (2.32)$$

где τ – поправки к приближенным значениям координат,

τ_p – поправка к приближенному значению ориентирного угла,

α_{ij} – дирекционный угол,

ρ – число секунд в радиане,

S_{ij} – горизонтальное проложение, вычисляемое по формуле $S_{ij} = D_{ij} \sin(z_{ij})$.

– уравнение поправок для наклонных расстояний v_D :

$$v_D = -\frac{X_j - X_i}{D_{ij}} \tau_{X_i} - \frac{Y_j - Y_i}{D_{ij}} \tau_{Y_i} - \frac{H_j - H_i}{D_{ij}} \tau_{H_i} + \frac{X_j - X_i}{D_{ij}} \tau_{X_j} + \frac{Y_j - Y_i}{D_{ij}} \tau_{Y_j} + \frac{H_j - H_i}{D_{ij}} \tau_{H_j} + (D_{ij} - D'_{ij}) \quad (2.33)$$

– уравнение поправок для зенитных расстояний v_z [27]:

$$v_z = \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{X_i} + \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{Y_i} + \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{H_i} - \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{X_j} - \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{Y_j} - \left(\rho \frac{1}{S_{ij}} \right) \tau_{H_j} + (z_{ij} - z'_{ij}). \quad (2.34)$$

Шаг 8. Вычисление матрицы \mathbf{N} коэффициентов нормальных уравнений (2.35):

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (2.35)$$

Шаг 9. Моделирование еще одной совокупности «ошибок измерений» ξ_i . Согласно [27] для надежного определения СКО «результатов измерений» n'_i целесообразно совершать минимум 100 циклов моделирования «ошибок измерений» для каждого «приближенного результата измерений» n_i . Следовательно, в результате вычислений получим 100 векторов \mathbf{L} .

Шаг 10. Вычисление для матрицы \mathbf{N} обратной ей матрицы \mathbf{N}^{-1} .

Шаг 11. Многократное вычисление вектора свободных членов $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$,

вектора поправок к координатам определяемых пунктов $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\lambda}$ и вектора поправок к результатам измерений $\mathbf{V} = \mathbf{B}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{L}$.

Шаг 12. Вычисление СКО единицы веса $\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)}$, где $[pv^2] = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$, а $(n-k)$ – количество избыточных измерений.

Шаг 13. Используя диагональные элементы матрицы $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$, выполняется оценка ошибки по всем координатам пунктов опорной сети $m_{t_i} = \mu \sqrt{Q_{t_i}}$, где m_{t_i} – СКО определения координат, Q_{t_i} – обратный вес оцениваемой координаты. Далее вычисляется СКО положения пунктов опорной сети $m_p = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_H^2}$.

Шаг 14. Повторение расчетов, аналогичных шагам 11–13, для каждого полученного вектора \mathbf{L}_i и нахождение среднего из полученных значений m_p .

Как было описано ранее, с каждого пункта опорной сети выполняется определение координат центров специальных марок, относительно которых производится внешнее ориентирование единой точечной модели в заданную систему координат. Тогда СКО определения пространственного положения центра марки электронным тахеометром m_c (рисунок 2.9) можно вычислить из выражения 2.36:

$$m_c = \sqrt{m_p^2 + m_{\text{ИЗМ}}^2}, \quad (2.36)$$

где $m_{\text{ИЗМ}}$ – СКО измерений полярным способом горизонтальных углов, наклонных и зенитных расстояний. Учитывая, что в технических паспортах современных электронных тахеометров указана точность измерения углов, примем, что m_β и

$$m_z \text{ одинаковы, тогда } m_{\text{ИЗМ}} = \sqrt{m_D^2 + 2\left(D^2 m_\beta^2 (1/\rho^2)\right)}.$$

При выполнении измерений прибором с точностью $m_\beta = 5''$, $m_D = 2$ мм и D не превышающим 20 м (как упоминалось ранее), $m_{\text{ИЗМ}}$ не превысит 2 мм.

2.4.2 Разработка методики проектирования сканерной сети

Для предрасчета точности пунктов сканерной сети, в первую очередь, предложим технологическую схему выполнения НЛС и обработки результатов измерений, опубликованную в работе автора [123].

Первую станцию лазерного сканирования предлагается устанавливать вблизи начального пункта опорной сети таким образом, чтобы обеспечивалась видимость на специальные марки, центры которых определены при построении опорной сети. Выполняется круговое лазерное сканирование, в том числе и сканирование специальных марок. Далее устанавливается следующая станция лазерного сканирования таким образом, чтобы между предыдущей и последующей станцией образовывалась область перекрытия, и выполняется круговое сканирование. При этом ориентирование на начальную станцию лазерного сканирования, как правило, не выполняется. До конечного пункта опорной сети станции лазерного сканирования устанавливаются последовательно, аналогично второй станции. Вблизи конечного пункта опорной сети измерения выполняются аналогично начальной станции лазерного сканирования. Таким образом развивается сканерная сеть между всеми пунктами опорной сети (рисунок 2.9).

Обработку результатов предлагается выполнять в два этапа. В первую очередь выполняется взаимное ориентирование всех станций лазерного сканирования в единую модель. Вторым этапом выполняется преобразование координат из системы координат лазерного сканера в систему координат опорной сети.

С учетом вышеизложенного при проектировании сканерной сети необходимо определить:

- СКО определения положения центров специальных марок лазерным сканером;
- СКО взаимного ориентирования двух смежных станций лазерного сканирования;

- условия накопления СКО взаимного ориентирования всех станций ЛС между начальным и конечным пунктами опорной сети;
- СКО преобразования координат станций лазерного сканирования из системы координат лазерного сканера в систему координат опорной сети;
- СКО положения станций лазерного сканирования.

Тогда на основании изложенного предложим следующую методику проектирования сканерной сети.

Шаг 1. Определение по цифровому генеральному плану приближенных пространственных координат станций лазерного сканирования и вычисление горизонтальных проложений S между ними.

Шаг 2. Определение СКО измерений лазерным сканером зенитных расстояний m_z , наклонных расстояний m_D и горизонтальных углов m_β из технического паспорта прибора. Тогда СКО лазерного сканирования можно представить выражением $m_{\text{скан}} = \sqrt{m_D^2 + m_\beta^2 D^2 + m_z^2 D^2}$, где m_β и m_z выражаются в радианах.

Шаг 3. В зависимости от производителя и модели прибора СКО определения положения центров специальных марок лазерным сканером $m_{\text{с.скан}}$ индивидуальна и максимально может достигаться на определенном в настройках расстоянии от лазерного сканера. Однако, не все приборы имеют устройства наведения на специальные марки и определение положения их центров производится во время камеральной обработки. При этом в данном случае СКО определения положения центров специальной марок $m_{\text{с.скан}}$ лазерным сканером зависит от разрешения сканирования $\Delta\varphi(\Delta\theta)$, расстояния D от станции лазерного сканера до марки и СКО лазерного сканирования $m_{\text{скан}}$. Согласно исследованию [42] зависимость $m_{\text{с.скан}}$ от $\Delta\varphi(\Delta\theta)$ и D носит экспоненциальный характер, возрастает с увеличением $\Delta\varphi(\Delta\theta)$ и D , и может быть вычислена по формуле 2.37 [42]:

$$m_{\text{с.скан}} = (0,22e^{0,03D})e^{(5,9D^{0,615})\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}}, \quad (2.37)$$

где $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}$ выражено в радианах.

Так при $D = 20\text{ м}$ (как приводилось ранее, расстояние до марки выбирается в пределах 10–20 м), и линейным разрешением сканирования $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{л}} = 3\text{ мм}$ (что соответствует угловому разрешению $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}} = 0^{\circ}01'01.88''$), $m_{\text{с.скан}} = 0,76\text{ мм}$.

Отметим, что $m_{\text{с.скан}}$ также должна включать СКО определения положения центра специальной марки $m_{\text{с}}$ при построении опорной сети, вычисляемой из выражения (2.36). Тогда выражение 2.37 примет вид (2.38):

$$m_{\text{с.скан}} = \sqrt{m_{\text{с}}^2 + \left((0,22e^{0,03D})e^{(5,9D^{0,615})\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}} \right)^2}. \quad (2.38)$$

В случае, если $m_{\text{с.скан}}$ определяется по техническим характеристикам прибора (обозначим параметр как $m_{\text{с.скан.тех}}$), то выражение 2.38 примет вид (2.39):

$$m_{\text{с.скан}} = \sqrt{m_{\text{с}}^2 + m_{\text{с.скан.тех}}^2}. \quad (2.39)$$

Шаг 4. Преобразование координат начальной $t.St_i$ и конечной $t.St_j$ станций лазерного сканирования из системы координат лазерного сканера в систему координат опорной сети выполняется относительно центров специальных марок. Следовательно, СКО преобразования координат станции лазерного сканирования $m_{t.St_{i,j}}$ зависит от значений $m_{\text{с.скан}_i}$ для каждой марки и количества марок k , которые были отсканированы со станции лазерного сканирования, и может быть вычислена по преобразованной формуле 2.40 [37, 38]:

$$m_{t.St_{i,j}} = \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_{\text{с.скан}}}{\sqrt{k}}. \quad (2.40)$$

Шаг 5. Для вычисления СКО взаимного ориентирования $m_{\text{Вз.ор}}$ был проанализирован график зависимости значений $m_{\text{Вз.ор}}$ от расстояния между двумя станциями (рисунок 2.6, а). Из графика видно, что чем больше расстояние между

станциями лазерного сканирования, тем больше значение $m_{\text{Вз.ор}}$. На основании этого была подобрана аппроксимирующая функция методом наименьших квадратов, представляющая собой полином третьей степени (рисунок 2.10).

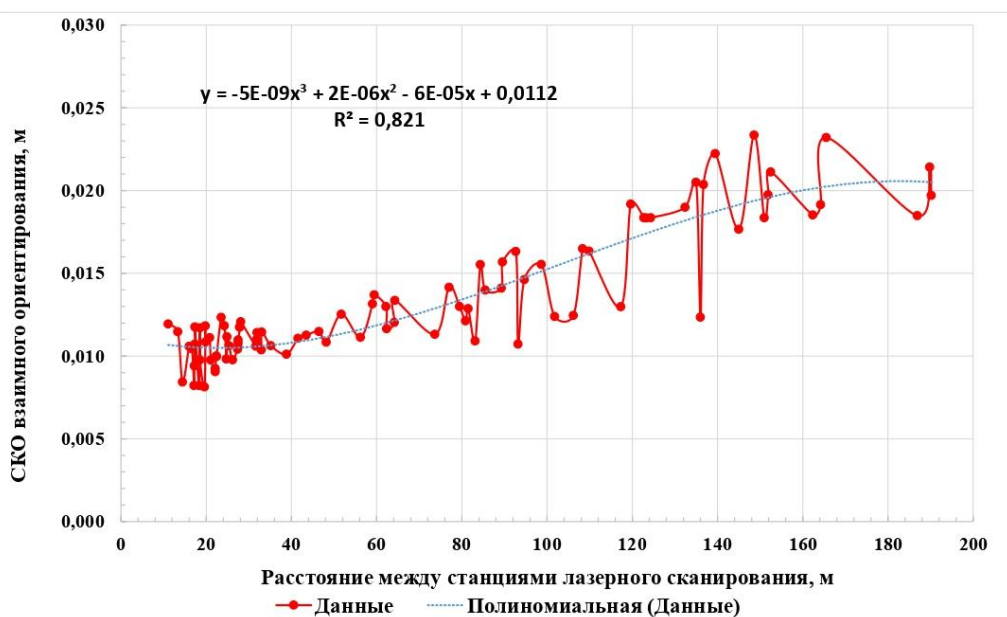


Рисунок 2.10 – Подбор уравнения тренда

Так значение $m_{\text{Вз.ор}}$ при $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{л}} = 6,3$ и дальности сканирования $D = 100$ м можно вычислить по формуле 2.41:

$$m_{\text{Вз.ор}} = 5 \cdot 10^{-9} x^3 + 2 \cdot 10^{-6} x^2 + 6 \cdot 10^{-5} x + 0,0112. \quad (2.41)$$

Шаг 6. Вычисление координат второй и последующих станций лазерного сканирования путем преобразования в пространстве, которое можно записать с помощью преобразования Гельмерта. При этом принимая масштабный коэффициент равным единице. Тогда формула вычисления координат примет вид $\mathbf{S}_{t_j} = \mathbf{t} + \mathbf{R}\mathbf{S}_{t_i}$, где \mathbf{S}_{t_j} и \mathbf{S}_{t_i} – вектор столбец (3×1) координат последующей и предыдущей станции ЛС, \mathbf{t} – вектор столбец (3×1) смещения, \mathbf{R} – матрица поворота (3×3).

При последовательном взаимном ориентировании станций лазерного сканирования в единую точечную модель из-за накопления $m_{\text{Вз.ор}}$ происходит пространственное смещение положения станций лазерного сканирования. Так как на начальной и конечной станциях лазерного сканирования между пунктами

опорной сети определяются центры специальных марок, то СКО смещения начальной и конечной станции $m_{\Delta ij}$ будет минимальной. Следовательно, накопление ошибок распределяется между всеми станциями лазерного сканирования и максимальное m_{Δ} следует ожидать в середине каждого хода сканерной сети. Тогда m_{Δ} для наиболее слабого пункта отдельного хода сканерной сети возможно вычислить из выражения 2.42:

$$m_{\Delta} = \frac{m_{\text{Вз.оп}}}{2} \sqrt{n}, \quad (2.42)$$

где n – количество станций лазерного сканирования между двумя пунктами опорной сети.

Шаг 7. С учетом СКО определения положения начальной и конечной станций лазерного сканирования, которые равны $m_{p.St_i,j} = m_{t.St_i,j}$, СКО определения положения $m_{p.St}$ наиболее слабого пункта хода сканерной сети можно вычислить по формуле 2.43:

$$m_{p.St} = \frac{m_{\text{Вз.оп}} + \sqrt{m_{t.St_i}^2 + m_{t.St_j}^2}}{2} \sqrt{n}. \quad (2.43)$$

Аналогично вычисления производятся для каждого хода сканерной сети между всеми пунктами опорной сети и вычисляются $m_{p.St}$ наиболее слабых пунктов.

2.4.3 Предложения по учету факторов, влияющих на точность измерений при наземном лазерном сканировании промышленных объектов

Расчет допустимого угла падения лазерного луча на поверхность объекта. Для исследования влияния угла падения лазерного луча γ на поверхность объекта и расстояния D до объекта воспользуемся формулой (1.1) для вычисления ошибки ΔD измерения расстояний. Результаты вычислений

представлены на рисунке 2.11 и в Приложении А. Из результатов вычислений видно, что:

- при $\gamma = 10^\circ$ и $D = 20\text{ м} - \Delta D = 0,4\text{ мм}$;
- $\gamma = 45^\circ$ и $D = 20\text{ м} - \Delta D = 2,1\text{ мм}$;
- $\gamma = 80^\circ$ и $D = 20\text{ м} - \Delta D = 14\text{ мм}$;
- $\gamma = 10^\circ$ и $D = 40\text{ м} - \Delta D = 0,9\text{ мм}$;
- $\gamma = 45^\circ$ и $D = 40\text{ м} - \Delta D = 5\text{ мм}$;
- $\gamma = 80^\circ$ и $D = 40\text{ м} - \Delta D = 28\text{ мм}$;
- $\gamma = 10^\circ$ и $D = 60\text{ м} - \Delta D = 1,3\text{ мм}$;
- $\gamma = 45^\circ$ и $D = 60\text{ м} - \Delta D = 7,5\text{ мм}$;
- $\gamma = 80^\circ$ и $D = 60\text{ м} - \Delta D = 42\text{ мм}$.

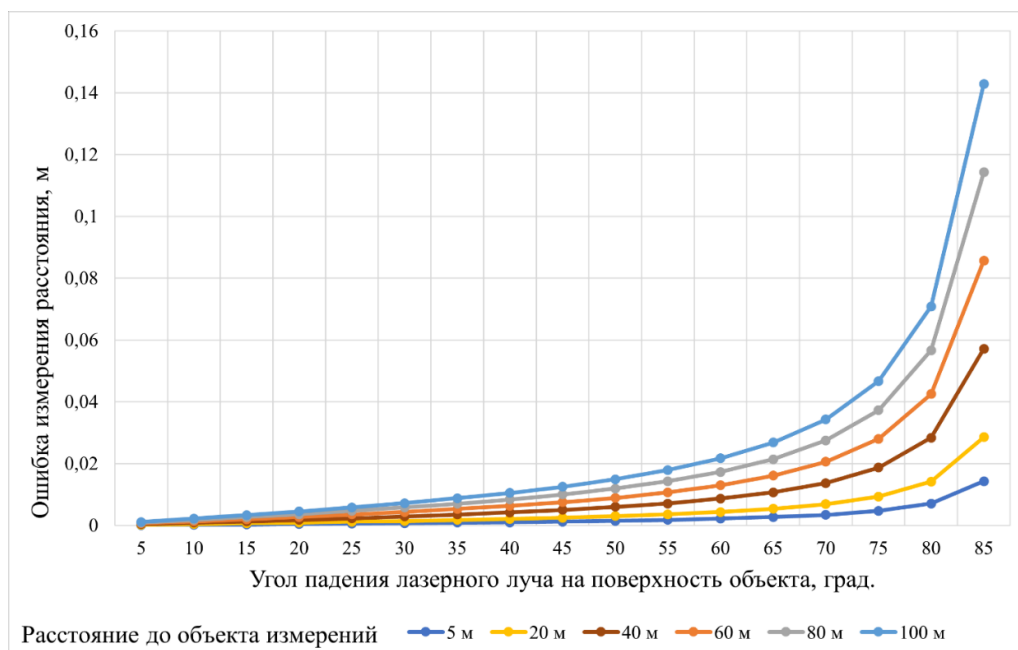


Рисунок 2.11 – Зависимость ошибки измерения расстояний от угла падения лазерного луча и расстояния до объекта

Анализ полученных результатов позволяет определить допустимый угол γ и расстояние до объекта, при которых ошибка измерения расстояний не превышает 1 мм, что соответствует техническим характеристикам большинства современных наземных лазерных сканеров:

- при D не более 5 м и γ не более 55° ;
- D не более 15 м и γ не более 30° ;
- D не более 30 м и γ не более 15° ;
- D не более 100 м и γ не более 5° .

Следовательно, в процессе подготовки к проведению НЛС необходимо учитывать указанную зависимость для удовлетворения требований к точности результатов измерений.

Расчет необходимого разрешения сканирования при съемке промышленных объектов. Как было отмечено в главе 1, пункте 1.3.1, разрешение сканирования устанавливается таким образом, чтобы было возможно идентифицировать минимально требуемый размер (согласно техническому заданию) конструктивного элемента. Как правило, при съемке промышленных объектов особую сложность представляет измерение трубопроводов диаметром менее 50 мм, анкерных болтов и точек подключения электрооборудования. Отметим также, что в условиях НЛС промышленного объекта при выполнении измерений с одной станции лазерного сканера объекты измерений будут иметь различный тип поверхности и соответственно различную интенсивность отраженного сигнала. На промышленных объектах преобладают такие материалы, как: сталь, оцинкованное железо, чугун, бетон и кирпич. При этом различия в отражающей способности этих материалов имеют большой диапазон (таблица 2.13). В связи с этим по формулам 1.3 и 2.44 выполнен расчет необходимого линейного разрешения сканирования $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{л}}$ в зависимости от коэффициента отражения поверхности объекта r , расстояния до объекта D и угла γ падения лазерного луча на поверхность объекта (таблица 2.13).

$$\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{л}} = 2D \sin\left(\frac{\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}}{2}\right). \quad (2.44)$$

где $\Delta\varphi(\Delta\theta)_{\text{угл}}$ – угловое разрешение сканирования, вычисляемое по формуле (1.3).

Таблица 2.13 – Требуемое разрешение сканирования

Коэффициент отражения поверхности объекта, %	Требуемое разрешение сканирования в зависимости от наименьшего измеряемого объекта, м				
	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050
0,10 (чугун, кирпич)	0,0007	0,0014	0,0021	0,0028	0,0035
0,30 (бетон)	0,0021	0,0042	0,0063	0,0084	0,0105
0,50 (железобетон)	0,0035	0,0070	0,0105	0,0141	0,0176
0,70 (сталь, оцинкованное железо, белая краска)	0,0049	0,0098	0,0148	0,0197	0,0247

Практический опыт автора показывает, что при НЛС объектов менее 50 мм, съемку необходимо выполнять не менее чем с двух станций лазерного сканирования для увеличения точек сканирования на поверхности объекта и, соответственно, более точной идентификации.

Расчет допустимого расстояния между станциями лазерного сканирования. Согласно разработанной методике проектирования и создания сканерной сети, взаимное ориентирование точечных моделей выполняется с применением итерационного алгоритма ближайших точек. Тогда на основании полученных результатов исследования приведенных в пункте 2.3, предлагается при установке станций лазерного сканирования соблюдать расстояние между соседними станциями, не превышающее 25 м. При этом отметим, что необходимо обеспечивать видимость объекта съемки с двух смежных станций лазерного сканирования для достаточного перекрытия в двух точечных моделях. Соблюдение предлагаемых условий при взаимном ориентировании точечных моделей позволяет определить достаточное количество соответствующих пар точек, что, в свою очередь, позволяет получить СКО взаимного ориентирования в пределах 10 мм. Предрасчет точности взаимного ориентирования в зависимости от расстояния между станциями лазерного сканирования предлагается выполнять по формуле 2.41. Отметим также, что предложения справедливы не только для построения сканерной сети, но и для выполнения съемки объекта.

Создание дополнительных связей при взаимном ориентировании. При НЛС технологических установок промышленного объекта предлагается взаимное ориентирование точечных моделей выполнять обособленно в границах каждого

технологического блока, как уже было отмечено в пункте 2.4. Отметим также, что взаимное ориентирование предлагается выполнять с учетом «замыкания» сети станций лазерного сканирования и создания дополнительных «узловых станций» (рисунок 2.12).

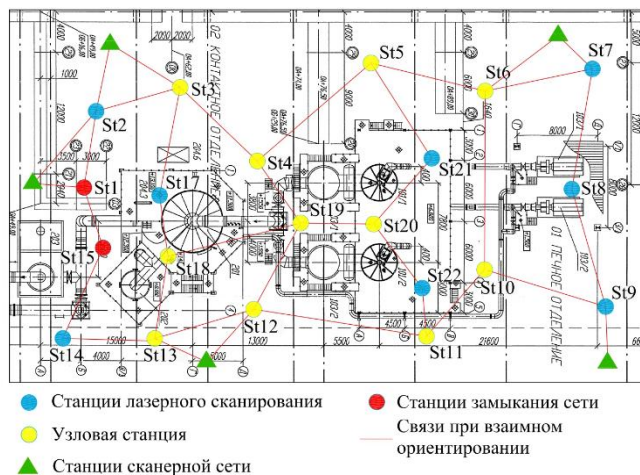


Рисунок 2.12. – Схема расположения станций лазерного сканирования при выполнении измерений технологического блока

Таким образом, при выполнении измерений объекта получается сеть взаимосвязанных станций, которая повышает точность определения положения станций лазерного сканирования. Соблюдение указанного предложения позволяет в ходе выполнения взаимного ориентирования отдельных блоков внутри технологической установки избежать коллизий двух моделей отдельных блоков.

Взаимное ориентирование моделей технологических блоков в единую модель. Для выполнения взаимного ориентирования отдельных технологических блоков в единую модель технологической установки предлагается использовать станции сканерной сети. Согласно разработанной методике построения сканерной сети установка станций выполняется по периметру каждого из технологических блоков (рисунок 2.9). В ходе уравнивания геодезической сети вычисляются координаты станций сканерной сети и, соответственно, координаты каждой измеренной точки объекта в заданной системе координат. Тогда при выполнении взаимного ориентирования точечных моделей отдельного технологического блока предлагается включать в обработку измерения с ближайших станций сканерной

сети (рисунок 2.12). При этом процесс взаимного ориентирования предполагает, что точечная модель, принадлежащая станции сканерной сети, принимается истинной и остается неподвижной, а ближайшая станция, принадлежащая модели технологического блока, является подвижной и стремится занять положение, наиболее близкое к истинной модели. В итоге получим модели всех технологических блоков, включающих станции сканерной сети с известными координатами. Дальнейший процесс объединения всех технологических блоков в единую модель технологической установки предлагается выполнять путем совмещения точечной модели сканерной сети и точечных моделей технологических блоков, где и в первой, и во второй модели имеются одинаковые станции.

2.5 Выводы по Главе 2

1. Разработаны дополнительные требования к уровню детализации *LOD* 500, удовлетворяющие решению различных производственных задач и регламентирующие требования к отображению таких важных элементов эксплуатационной ЦИМ, как:

- технологическое оборудование и коммуникации;
- пути эвакуации, пути прохода персонала и передвижения техники.

Предложено включить в спецификацию *LOD* 500 информацию о пунктах геодезических сетей, развиваемых на территории промышленного объекта, для решения ряда производственных задач, которые требуют геодезического обеспечения, таких как: мониторинг технического состояния объектов, разработка проекта реконструкции, планирование ремонтов.

2. Предложено для решения такой задачи, как геодезический мониторинг объектов, ввести новый уровень детализации (*LOD* 550), согласно которому объекты геодезического мониторинга в ЦИМ отражаются с их реальными деформациями и дефектами, что позволит выполнять анализ развития деформаций.

3. Разработана спецификация уровней информации (*LOI*) элементов эксплуатационной ЦИМ, основанная на группах атрибутивной информации (основной, технической, технологической и эксплуатационной) характеризующей конкретный объект и не зависящей от уровней детализации (*LOD*).

4. Разработаны требования к уровню точности (*LOA*) пространственного положения элементов эксплуатационной ЦИМ, учитывающие, что требования предъявляются не ко всему элементу, а к характерным точкам на поверхности элемента, ответственным за поведение конструкции во время эксплуатации. Установлено, что точность определяется как ошибка во взаимном пространственном положении конструкций на реальном объекте и элементов ЦИМ. Предложено ввести три уровня точности (*LOA*) элементов ЦИМ:

- элементы ЦИМ расположены в пространстве в соответствии с проектной документацией, с отображением проектных размеров;

- элементы ЦИМ расположены в пространстве в соответствии с исполнительной документацией или обмерной документацией и отражают реальное пространственное положение и размеры с точностью, установленной к исполнительной съемке или обмерным работам;

- элементы модели расположены в пространстве в соответствии с результатами наблюдений за деформациями и отражают изменение формы объекта за определенный период времени с точностью, установленной к выполнению наблюдений за деформациями.

5. Обоснованы требования к точности выполнения лазерного сканирования и трехмерного моделирования объектов, основанные на переходе:

- от характеристик точности определения пространственного положения точек, указанных в нормативно-технической документации (проектных, строительных и эксплуатационных), к предельным СКО определения положения точек;

- предельных СКО определения положения точек к СКО определения положения точек.

Выполнен расчет требований к точности НЛС при проведении таких геодезических работ, как: топографическая съемка, исполнительная съемка, обмерные работы и наблюдения за деформациями.

6. Выполнено исследование практических результатов взаимного ориентирования с применением итерационного алгоритма ближайших точек, в ходе которого выявлено, что на величину СКО взаимного ориентирования точечных моделей влияют расстояние между станциями лазерного сканирования, участвующими в оптимизации и, следовательно, количество соответствующих пар точек, найденных в двух моделях. Определено, что при расстоянии, не превышающем 25 м между станциями лазерного сканирования, СКО взаимного ориентирования не превышает 10 мм. При этом исследования показывают, что СКО определения положения точек в единой точечной модели в 2 раза выше СКО взаимного ориентирования.

7. Разработана методика проектирования и построения геодезической сети для последующего внешнего ориентирования результатов НЛС промышленного объекта, которая предполагает:

- проектирование и предрасчет точности положения пунктов опорной сети, координаты которых определяются от исходных пунктов традиционными методами геодезии;

- проектирование и предрасчет точности положения пунктов сканерной сети, координаты которых определяются от пунктов опорной сети.

В ходе проектирования опорной сети предложено: моделировать «результаты измерений» с учетом «ошибок измерений» методом Монте-Карло, СКО положения пунктов вычислять на основе многократного уравнивания параметрическим способом.

В ходе проектирования сканерной сети предложено создавать сеть, проходящую по границам технологических блоков, для обеспечения всей территории технологической установки достаточным количеством пунктов с известными координатами и исключения коллизий при взаимном ориентировании всех технологических блоков в единую модель.

При этом разработанная методика проектирования и построения геодезической сети основана на выполнении взаимного ориентирования моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек и выполнении внешнего ориентирования аналитическим методом с использованием специальных марок.

8. Сформулированы предложения по выполнению наземного лазерного сканирования промышленных объектов, учитывающие:

- ошибки измерения расстояний, зависящие от угла падения лазерного луча на поверхность объекта;

- выбор разрешения сканирования в зависимости от размера наименьшего объекта измерений, расстояния до объекта, коэффициента отражения поверхности и угла падения лазерного луча;

- выбор расстояния между станциями лазерного сканирования;

- методику съемки объекта;

- методику взаимного ориентирования моделей технологических блоков в единую модель.

ГЛАВА 3 ВЗАИМНОЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ КВАЗИНЬЮТОНА

Как было отмечено в главе 1, пункте 1.3.3, итерационный алгоритм ближайших точек состоит из двух этапов: поиска соответствующих точек в двух моделях и вычисления параметров преобразования между двумя системами координат для точек подвижной модели. Будем считать, что для двух точечных моделей найдены соответствующие точки с известными пространственными координатами.

Обозначим через $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ – начальную и $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ – подвижную дискретные точечные модели. Предположим, что каждая точка q_i подвижной модели сопоставлена точка w_i начальной модели. При этом каждая точка q_i , w_i описана вектором координат (3.1).

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} w_{xi} \\ w_{yi} \\ w_{zi} \end{pmatrix}, \mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $i = 1 \dots n$ – номера точек.

Условием задачи преобразования трехмерных данных будем считать оценку семи параметров преобразования: три угловых параметра поворота, три параметра смещения и коэффициент масштабирования. Тогда применительно к поставленной задаче оптимизацией будет являться процесс нахождения вектора параметров преобразования, подставляя значения которых в выражение 3.2 будет достигаться экстремум целевой функции 3.4.

$$f(\mathbf{R}, S, \mathbf{t}) = (\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{Q} + \mathbf{t}) - \mathbf{W}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ – вектор смещения подвижной модели относительно осей

координат x, y, z ;

S – масштабный коэффициент;

\mathbf{R} – матрица поворота, которая имеет вид (3.3):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – углы поворота подвижной модели относительно осей x, y, z соответственно;

$\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ – кососимметричные матрицы поворота.

Иными словами, в соответствии с принципом метода наименьших квадратов вычисление параметров преобразования для равноточных измерений должно удовлетворять условию:

$$F(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, S, t_x, t_y, t_z) = [v^2] = \min, \quad (3.4)$$

где $v = \sqrt{(q_{xi} - w_{xi})^2 + (q_{yi} - w_{yi})^2 + (q_{zi} - w_{zi})^2}$ – отклонение подвижной модели от начальной.

Тогда поставим задачу поиска параметров преобразования для ориентирования двух точечных моделей методом численной оптимизации *BFGS*. Как отмечалось в главе 1, пункте 1.3.3, преимуществом метода *BFGS* является высокая скорость сходимости, при этом отсутствует необходимость прямого вычисления матрицы Гессе, содержащей производные второго порядка, что дает возможность значительно сократить временные трудозатраты при работе с большим массивом измерений. Также стоит отметить, что в мировой практике метод *BFGS* широко используется для решения оптимизационных задач в различных отраслях.

3.1 Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей методом Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно

Так как метод *BFGS* итеративный, то требуется установить начальные значения параметров преобразования ξ_0 . При этом параметры преобразования имеют разную размерность и значения угловых и линейных параметров сильно отличаются. Так, значения угловых параметров не превысят 2π , при этом значения линейных параметров – десятки метров. Тогда в процессе вычислений длина шага может принимать малые значения, что в свою очередь приведет к большому количеству итераций для нахождения оптимальных параметров преобразования и минимизации $F(\xi_k)$. В связи с этим предлагается выполнить предварительную оптимизацию, заключающуюся в совмещении центров масс двух точечных моделей [122]. Для этого вычислим центр масс W_{cm} начальной и Q_{cm} подвижной модели по формулам (3.5):

$$W_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N}, \quad Q_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}, \quad (3.5)$$

где N – количество соответствующих точек.

Совместив центры масс, найдем начальный вектор \mathbf{t}_0 смещения подвижной модели относительно осей координат x, y, z (3.6):

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{W}_{cm} - \mathbf{Q}_{cm} = \begin{bmatrix} t_{0x} \\ t_{0y} \\ t_{0z} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Тогда за ξ_0 примем (3.7):

$$\xi_0 = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, S, t_{0x}, t_{0y}, t_{0z})^T = (0, 0, 0, 1, t_{0x}, t_{0y}, t_{0z})^T. \quad (3.7)$$

Установим требуемую точность ε поиска минимума целевой функции $F(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, S, t_x, t_y, t_z)$. Тогда итеративный процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будет верным условие $(F(\xi_k) - F(\xi_{k-1})) / F(\xi_{k-1}) \leq \varepsilon$, где k – номер

итерации. Замена критерия $F(\xi_k) - F(\xi_{k-1})$, который наиболее распространен в литературе, относительным соотношением выполнена, чтобы избежать ложной сходимости, которая может произойти, когда истинное значение ξ_k^* слишком мало. За начальное приближение матрицы Гессе \mathbf{H}_0 примем единичную матрицу \mathbf{I} размера 7×7 .

Приведем разработанную методику взаимного ориентирования дискретных точечных моделей на основе метода *BFGS*.

Шаг 1. Вычисление значения $f(\xi_k)$ при начальных параметрах (k – номер итерации) и координат искомой точечной модели \mathbf{Q}_k на итерации из выражения 3.8:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{Q} + \mathbf{t}, \quad (3.8)$$

где \mathbf{Q} – матрица размера $3 \times n$, где n – количество соответствующих точек.

Шаг 2. Вычисление значения целевой функции $F(\xi_k)$ (3.9):

$$F(\xi_k) = \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{f}(\xi_k) \right). \quad (3.9)$$

Шаг 3. Нахождение частных производных функции $f(\xi_k)$ по параметрам преобразования (3.10–3.16).

$$\frac{\partial f(\xi_k)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha_x}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_y}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_z}, \frac{\partial f}{\partial S}, \frac{\partial f}{\partial t_x}, \frac{\partial f}{\partial t_y}, \frac{\partial f}{\partial t_z} \right]. \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial f(\xi_k)}{\partial \alpha_i} = \mathbf{R}_i^* \mathbf{S}\mathbf{Q}, \quad (3.11)$$

где $i = x, y, z$;

\mathbf{R}_i^* – вычисляется по формулам 3.12–3.14.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^{\&} &= \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \alpha_x} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \\ 0 & -\cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y^{\&} &= \mathbf{R}_z \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \alpha_y} \mathbf{R}_x \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \alpha_y & 0 & -\cos \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z^{\&} &= \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \alpha_z} \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ -\cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f(\xi_k)}{\partial S} = \mathbf{RQ}. \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial f(\xi_k)}{\partial [t_x, t_y, t_z]} = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_n^T, \quad (3.16)$$

где \mathbf{I}_3 – единичный вектор размера 3×1 ,

$\mathbf{1}_n$ – единичная матрица размера $3 \times n$,

\otimes – произведение Кронекера результатом которого является матрица размера $9 \times n$.

Шаг 4. Вычисление значение градиента функции $\nabla F(\xi_k)$ при начальных параметрах (3.17)

$$\nabla F(\xi_k) = \begin{bmatrix} 2 \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{\left(\mathbf{R}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{S} \right)} \right) \\ 2 \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{\left(\mathbf{R}_y^T \mathbf{Q} \mathbf{S} \right)} \right) \\ 2 \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{\left(\mathbf{R}_z^T \mathbf{Q} \mathbf{S} \right)} \right) \\ 2 \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{\left(\mathbf{R} \mathbf{Q} \right)} \right) \\ 2 \sum_{i=1}^{x,y,z} \sum_{n=1}^N \left(f(\xi_k) \cdot \vec{\left(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_n^T \right)} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

В силу того, что в поставленной задаче оптимизации семимерное пространство, $\nabla F(\xi_k)$ не может быть строго положителен [117], в связи с этим предлагается вычислять $\nabla F(\xi_k)$ с помощью оператора векторизации. В результате вычислений получим вектор размера 7×1 .

Шаг 5. Определение направление спуска d_k по формуле 3.18:

$$d_k = -\mathbf{H}_k \cdot \nabla F(\xi_k). \quad (3.18)$$

Шаг 6. Нахождение следующего вектора параметров преобразования ξ_{k+1} через рекуррентное соотношение (3.19):

$$\xi_{k+1} = \xi_k + k_k d_k, \quad (3.19)$$

где $k_k > 0$ – длина шага, настраиваемая с помощью линейного поиска, который удовлетворяет сильным условиям Вольфе (3.20–3.21):

$$F(\xi_{k+1}) \leq F(\xi_k) + c_1 k_k \nabla F(\xi_k)^T d_k, \quad (3.20)$$

$$\left| \nabla F(\xi_{k+1})^T d_k \right| \leq c_2 \left| \nabla F(\xi_k)^T d_k \right|, \quad (3.21)$$

где c_1 и c_2 – константы, удовлетворяющие условию $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$. На практике c_1 выбирают близким к нулю, а c_2 – близким к единице.

Для исследования функции $F(\xi_k)$ предлагается k_k находить с помощью построения графика, где по оси абсцисс – значение k , а по оси ординат – значение $F(\xi_k)$ при k . Тогда возможно определить, как ведет себя функция на каждой итерации, и подобрать наиболее оптимальное значение k . В дальнейшем эти исследования возможно применить для разработки автоматического алгоритма вычисления оптимального k на каждой итерации.

Шаг 7. Определение вектора s_k шага алгоритма на итерации (3.22) и вектора y_k изменения градиента на итерации (3.23):

$$s_k = \xi_{k+1} - \xi_k, \quad (3.22)$$

$$y_k = \nabla F(\xi_{k+1}) - \nabla F(\xi_k). \quad (3.23)$$

Шаг 8. Вычисление матрицы Гессе на итерации (3.24):

$$H_{k+1} = (\mathbf{I} - \rho_k s_k y_k^T) H_k (\mathbf{I} - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T, \quad (3.24)$$

где $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$,

\mathbf{I} – единичная матрица размера 7×7 .

Шаг 9. Проверка на окончание поиска (3.25):

$$(F(\xi_k) - F(\xi_{k-1})) / F(\xi_{k-1}) \leq \varepsilon. \quad (3.25)$$

Повторение итерационного процесса до тех пор, пока не выполнится условие 3.25.

3.2 Условия работы метода Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно

Геометрический смысл метода BFGS можно представить как решение уравнения $F(\xi_k) = [v^2] = \min$ методом секущих, использующим информацию о $F(\xi_k)$ и $\nabla F(\xi_k)$ на двух последних итерациях (рисунок 3.1).

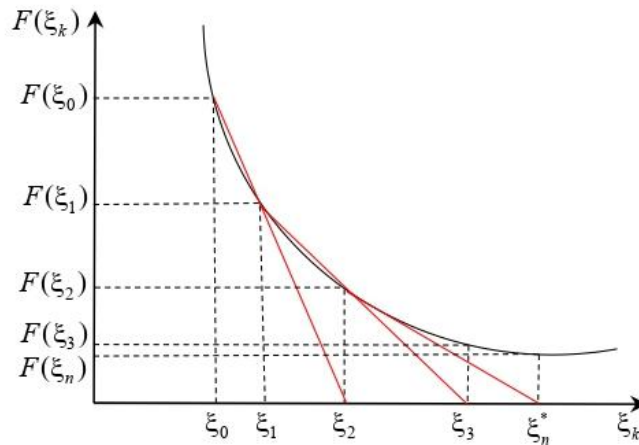


Рисунок 3.1 – Геометрическая интерпретация метода *BFGS*

Главным условием корректной работы метода является то, что матрица Гессе на каждой итерации должна быть положительно определена. Это условие соблюдается, если [174]:

1. $\nabla F(\xi_{k+1}) \leq \nabla F(\xi_k)$ т. е. частные производные функции по параметрам преобразования стремятся к нулю.
2. Соблюдаются условия Вольфе (3.20–3.21).
3. В функции линейного поиска коэффициент k строго положителен.
4. Для соблюдения условия кривизны в неравенстве 3.21, член $s_k y_k > 0$ всегда положителен и $y_k s_k \geq (c_2 - 1) k_k \nabla F(\xi_k) d_k$.

В случае, если на итерации не выполняются условия Вольфе, матрица Гессе, полученная из выражения 3.24, может потерять свойство положительной определенности, что в свою очередь приведет к нарушению сходимости метода. На практике существует так называемый «приглушенный» метод *BFGS*, который позволяет решить указанную проблему [174]. Выразим через $u_k = s_k y_k$ и $v_k = s_k (\mathbf{H}_k s_k)$, где \mathbf{H} – положительно определенная матрица Гессе, полученная на предыдущей итерации. Теперь член u_k может принимать любой знак, в то время как v_k – строго положителен. Тогда формула вычисления матрицы Гессе на текущей итерации примет вид (3.26):

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k - \frac{1}{v_k} \mathbf{H}_k s_k s_k^T \mathbf{H}_k + \frac{1}{u_k} r_k r_k^T, \quad (3.26)$$

где $r_k = \gamma_k y_k + (1 - \gamma_k) \mathbf{B}_k s_k$;

$\gamma_k = 1$, если $u_k \geq \frac{1}{5} v_k$, в противном случае $\gamma_k = \frac{4}{5} \frac{v_k}{v_k - u_k}$.

3.3 Выводы по Главе 3

1. Разработана методика взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением метода *BFGS*, в рамках которой предлагаются следующие элементы:

- выполнение предварительной оптимизации, основанной на совмещении центров масс двух точечных моделей и вычислении начального вектора смещения подвижной модели относительно осей координат, для приведения параметров преобразования к единой размерности и сокращения количества итераций вычислительного процесса;

- вычисление значения целевой функции и градиента целевой функции на итерации через оператор векторизации, что дает возможность сохранить знак каждого элемента вектора градиента целевой функции и тем самым корректно вычислять направление спуска;

- поиск длины шага с соблюдением сильных условий Вольфе, которые накладывают требования к условию кривизны таким образом, что длина шага помещается в окрестность минимума.

- построение графиков для определения оптимального значения длины шага на итерации, при котором значение целевой функции принимает минимальное значение, что позволит исследовать поведение функции на каждой итерации;

- повторение итерационного процесса до тех пор, пока частное от деления разности значений целевой функции на двух крайних итерациях на значение

целевой функции крайней итерации не примет значение, удовлетворяющее заданной точности, что позволит избежать ложной сходимости.

2. Обоснованы условия, при которых сохраняется положительная определенность матрицы Гессе, что является главным условием работы метода *BFGS* для корректного вычисления параметров преобразования. Условия включают в себя:

- значение градиента целевой функции должно уменьшаться на каждой последующей итерации;

- соблюдаются условия Вольфе;

- значение длины шага строго положительное.

3. Основными преимуществами метода *BFGS* являются:

- высокая скорость сходимости;

- отсутствие необходимости прямого вычисления матрицы Гессе, содержащей производные второго порядка;

- самокорректирующие свойства, которые заключаются в том, что, если матрица Гессе неверно оценивает кривизну функции, в ходе чего замедляется скорость сходимости, тогда аппроксимация гессиана стремится исправить ситуацию за несколько итераций.

ГЛАВА 4 РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННОЙ МЕТОДИКИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

4.1 Применение НЛС и ЦИМ для выявления отклонений конструкций от их проектных значений

Рассмотрим предложенную технологию сопровождения строительства с применением НЛС в комплексе с ЦИМ для выявления отклонений смонтированных конструкций от проектных значений, опубликованную, в работе автора [72]. Реализация работ представлена на примере сопровождения строительства технологической установки УК (установка комбинированная) на одном из нефтеперерабатывающих заводов, площадь которой составляла около 4 Га. Технологическая схема сопровождения строительства объекта представляла собой периодическое проведение циклов, состоящих из следующих этапов:

- 1) сгущение геодезической разбивочной основы (ГРО) (в последующих циклах – контроль ГРО);
- 2) наземное лазерное сканирование;
- 3) взаимное и внешнее ориентирование точечных моделей;
- 4) создание трёхмерной модели смонтированных конструкций по точечной модели;
- 5) выявление отклонений путём сравнения проектной и фактической трёхмерных моделей.

Контролируемые параметры некоторых основных конструкций, согласно техническому заданию, имели следующие допустимые значения:

- смещение осей колонн относительно разбивочных осей – 15 мм;
- отклонение осей колонн от вертикали в зависимости от высоты колонны – 15 мм;
- отклонение положения верхней грани балок – 15 мм;
- отклонение отметки поверхностей фундаментов, служащих опорами для стальных или железобетонных колонн, – 15 мм.

Приведем этапы выполнения работ по нулевому циклу.

Первым этапом было выполнено сгущение ГРО. На строительной площадке ГРО представляло собой сеть установленных на фундаментах анкеров, координаты центров которых были определены от опорной базовой линии. Всего на площадке строительства было установлено 20 исходных пунктов ГРО, служащих для геодезического обеспечения производства строительного-монтажных работ. Для сгущения ГРО были закреплены специальные чёрно-белые марки с чётко определенным центром с целью последующего внешнего ориентирования результатов лазерного сканирования в систему координат строительной площадки. Закрепление специальных марок проводилось по периметру и на территории строительной площадки на существующих конструкциях. Всего было закреплено 78 марок. Измерения были выполнены электронным тахеометром с СКО измерения углов – 2", СКО измерения расстояний – 2 мм + 2ppm до 500 м. Для сгущения ГРО была построена сеть (рисунок 4.1), в которой двумя приемами в прямом и обратном направлении были измерены все углы и длины сторон. Также по сторонам сети тригонометрическим нивелированием в прямом и обратном направлении были определены превышения. В связи с тем, что было невозможно установить прибор на существующие пункты ГРО, ориентирование станций сети было выполнено полярным способом. Далее с каждой станции сети двумя приемами полярным способом были выполнены измерения вертикальных, горизонтальных углов и расстояний на закрепленные марки.

Уравнивание построенной сети сгущения ГРО произведено в ПО *CredoDAT*. Результаты уравнивания представлены в таблице 4.1.

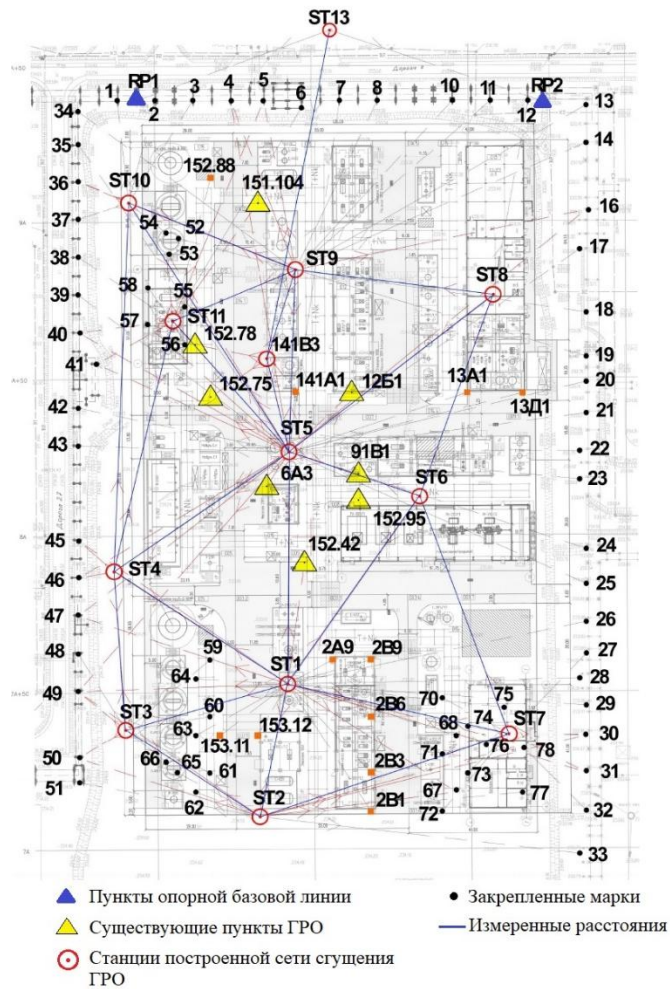


Рисунок 4.1 – Схема сгущения геодезической разбивочной основы

Таблица 4.1 – Результаты уравнивания сети сгущения ГРО

Параметр	Min, м	Max, м	Средняя, м
Длины сторон сети	5,587	121,726	59,612
Периметр сети, км	3,976		
СКО направлений	7,1 (с)		
СКО линий, м	<i>a</i>	0,0022	
	<i>b</i>	0,0170	
	<i>t</i>	0,0032	
СКО определения высот, м	0,001		
Поправки по результатам уравнивания в измеренные направления (с)	0°00'0"	0°00'25"	0°00'05"
Поправки по результатам уравнивания в измеренные расстояния, м	0,000	0,015	0,003
Оценка точности положения пунктов сети сгущения			
СКО расстояния, м	0,0004	0,0068	0,0037
СКО угла, сек	3,8	7,8	7,1
СКО положения, м	0,0007	0,0079	0,0042

В ходе уравнивания сети сгущения программно выявлены расхождения координат для десяти существующих пунктов ГРО, среднее значение СКО положения которых составило 24 мм, максимальное значение СКО – 29 мм. На основании выполненных работ по созданию и уравниванию сети сгущения были внесены изменения в значения координат исходных пунктов. Этот факт показывает необходимость постоянного геодезического контроля исходных пунктов.

Вторым этапом проведено НЛС объекта строительства. Измерения были выполнены прибором с СКО измерения углов – 8", СКО измерения расстояний 1,5 мм при альбедо 90 % до 100 м. В первом цикле для выполнения измерений всех смонтированных конструкций было установлено 205 станций лазерного сканирования. Для более точной идентификации конструкций в процессе постобработки места установки прибора определялись с учётом 60–70 % области перекрытия со смежных станций. Измерения с одной станции были выполнены с разрешением сканирования 6,3×6,3 мм на 10 м. Расстояние между смежными станциями не превышало 10 м. Для повышения точности определения центров специальных марок измерения производились с ближайших к ним станций лазерного сканирования с разрешением сканирования 3,1×3,1 мм на 10 м.

Третьим этапом были выполнены взаимное и внешнее ориентирование точечных моделей. Взаимное ориентирование точечных моделей производилось в программном продукте «Cyclone» методом «*Visual Registration (2D Scan Thumbnails)*», который основан на итерационном алгоритме ближайших точек. Взаимное ориентирование выполнялось последовательно, каждая последующая точечная модель ориентировалась относительно предыдущей до тех пор, пока все точечные модели не были объединены в единую точечную модель.

Далее было выполнено внешнее ориентирование единой точечной модели в систему координат сети сгущения ГРО. При этом создавался каталог координат марок, полученный в ходе уравнивания построенной сети, и трансформировался в единую модель. Дальнейшее трансформирование пространственных координат в заданную систему было выполнено с помощью преобразования Гельмерта.

На *четвертом этапе* полученная единая точечная модель была импортирована в систему автоматизированного проектирования (САПР) для анализа соответствия смонтированных конструкций проектным решениям. Анализ отклонений смонтированных конструкций от проектных решений с применением результатов лазерного сканирования может проводиться двумя способами. Первый способ подразумевает визуальное сравнение единой точечной модели с проектной ЦИМ. Первый способ актуален при выборочном анализе отдельных конструкций объекта. Второй способ подразумевает воссоздание исполнительной ЦИМ путём корректировки копии элементов проектной ЦИМ в соответствии с их фактическим пространственным положением и габаритами в единой точечной модели. На рассматриваемом объекте применялся второй способ в связи с тем, что он позволяет в сжатые сроки проводить анализ большого количества конструктивов объекта за счёт наличия инструментов автоматизированного сравнения в САПР. Также данный способ позволяет оперативно определить потенциально опасные участки строительства за счёт визуализации отклонений в исполнительной ЦИМ (рисунок 4.2).

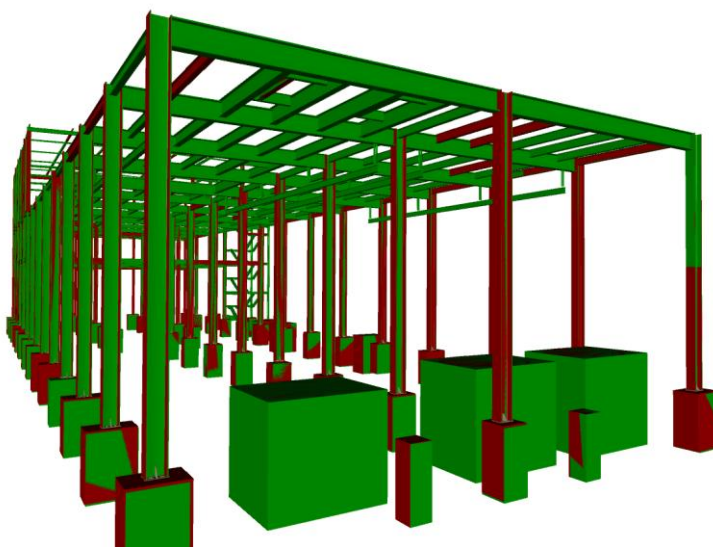


Рисунок 4.2 – Визуализация отклонений конструкций (зеленый цвет – проектная ЦИМ, красный цвет – исполнительная ЦИМ)

Пятым этапом выполнен анализ отклонений смонтированных конструкций от их проектных решений. В процессе проведения анализа отклонений было выявлено, что 27 % смонтированных конструкций имеют

отклонения от проекта выше допустимого значения, указанного в техническом задании (таблица 4.2).

За период строительства исследуемого объекта было выполнено пять циклов работ согласно приведенной технологической схеме. Этапы работ в последующих циклах были выполнены аналогично первому циклу. В таблице 4.2 приведены результаты выявленных отклонений смонтированных конструкций от их проектных решений согласно каждому из пяти циклов.

Таблица 4.2 – Анализ отклонений смонтированных конструкций от их проектных решений

Тип конструкций	Количество смонтированных конструкций, шт	Количество конструкций, смонтированных с отклонением более 15 мм
<i>Первый цикл</i>		
Фундаменты	3 230	130
Колонны		124
Балки		640
Всего конструкций		894
<i>Второй цикл</i>		
Фундаменты	2 803	98
Колонны		139
Балки		646
Всего конструкций		884
<i>Третий цикл</i>		
Фундаменты	5 475	98
Колонны		171
Балки		2 104
Всего конструкций		2 373
<i>Четвертый цикл</i>		
Фундаменты	3 063	22
Колонны		175
Балки		976
Всего конструкций		1 173
<i>Пятый цикл</i>		
Колонны	2 293	207
Балки		945
Всего конструкций		1 152

Полученные результаты показали необходимость своевременного и, с учётом быстрого темпа строительства, оперативного выявления критичных отклонений от проекта посредством геодезического контроля. При этом для повышения точности геодезического контроля в условиях строительства

рекомендуется проводить ряд мероприятий, таких как контроль стабильности положения пунктов и регулярные исполнительные съёмки по мере возведения объекта. Одним из инструментов оперативного геодезического контроля может служить предложенная технологическая схема применения НЛС в комплексе с ЦИМ.

4.2 Применение НЛС и ЦИМ в решении задач проектирования, строительства и ввода в эксплуатацию промышленного объекта

Рассмотрим примеры решения задач с помощью технологий НЛС и ЦИМ на различных стадиях жизненного цикла промышленного объекта, реализованные автором настоящей диссертации и опубликованные ранее в работе [125]. Задачи решались в рамках реализации проекта по инженерным изысканиям, проектированию, строительству и вводу в эксплуатацию 20 объектов на одном из промышленных предприятий. Работы по реализации проекта включали 6 этапов и выполнялись в следующем порядке.

Проведение НЛС на площадке строительства. На всех площадках, отведенных под новое строительство, было выполнено лазерное сканирование с целью построения цифровой модели местности и ЦИМ прилегающих зданий, строений и сооружений. На основании полученных данных производились точная установка границ строительства и стыковка с существующими объектами.

Создание ЦИМ по проектной документации. Для создания ЦИМ в САПР AVEVA E3D были разработаны каталоги конструкций на основании спецификаций в проектной документации. Далее конструкции из каталогов были расположены в пространстве ЦИМ в соответствии с данными из чертежей проектной документации. Таким образом, была создана проектная ЦИМ, которая позволила выполнить проверку на коллизии между всеми элементами модели. Процесс выявления коллизий выполнялся в автоматическом режиме в САПР путем поиска пересекающихся друг с другом элементов ЦИМ. По итогу формировался отчет, содержащий информацию о разделах проектной

документации, конструкциях, участвующих в коллизиях, и их визуальное отображение в ЦИМ. Для одного из объектов проверка на коллизии позволила выявить 350 ошибок в проектной документации. На рисунке 4.3 представлены примеры фрагментов отчета о выявленных коллизиях между разделами в проектной документации, на котором представлены коллизия элемента трубопровода с металлической балкой, коллизия элемента трубопровода с воздухопроводом и приведены соответствующие данным элементам листы рабочей документации.

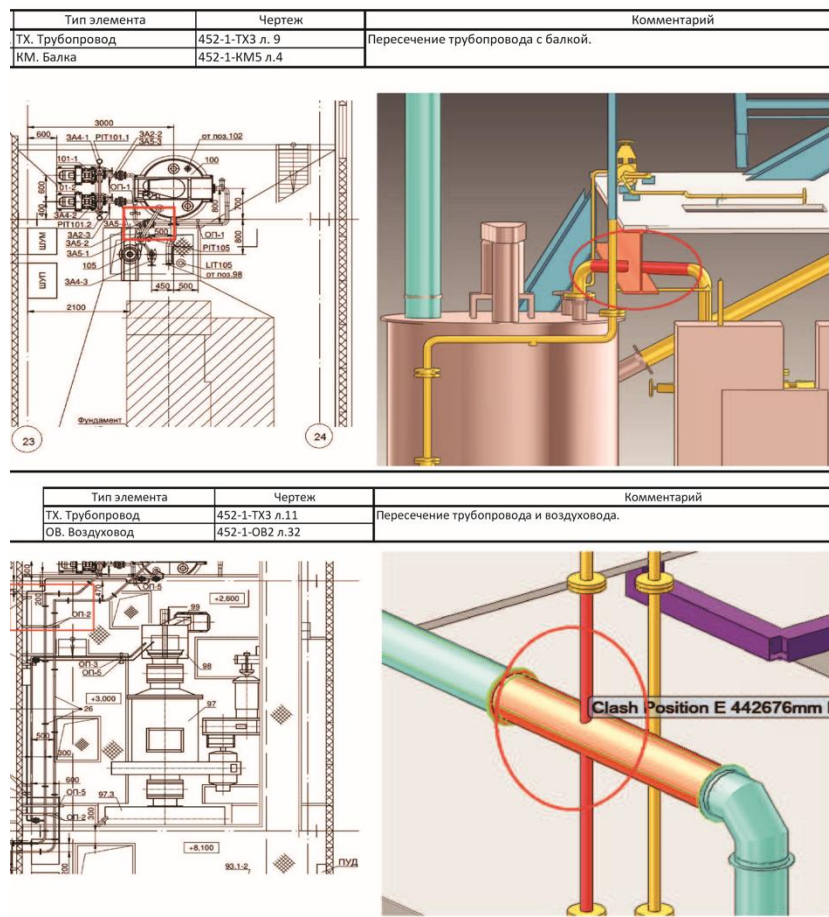


Рисунок 4.3 – Фрагмент отчета о коллизиях между разделами в проектной документации

Формирование ЦИМ по данным НЛС (далее – исполнительная ЦИМ). На всех площадках реконструкции было выполнено НЛС с целью получения актуальных данных о существующих строительных конструкциях, оборудовании и коммуникациях. Результаты НЛС были импортированы в САПР, где

проводилась идентификация групп точек в составе точечной модели, соответствующих тем или иным реальным конструкциям и коммуникациям (железобетонные фундаменты, металлические колонны и балки, трубопроводы, оборудование, элементы электрических сетей и т. д.). По идентифицированным группам точек выбирался тип конструкции из каталога САПР и выполнялось размещение выбранного элемента в пространстве исполнительной ЦИМ. Созданная таким образом исполнительная ЦИМ позволила провести анализ на отсутствие коллизий между существующими и проектируемыми конструкциями и коммуникациями до начала строительно-монтажных работ. Для автоматизированного выявления коллизий проектная и исполнительная ЦИМ были размещены в едином пространстве САПР. Далее проводился поиск пересечений между группами элементов ЦИМ, соответствующих определенным разделам документации. Сформированный по результатам работ отчет о коллизиях содержал данные о количестве выявленных коллизий, визуализацию мест их расположения и участвующих в коллизиях конструкциях. Для одного из объектов реконструкции выявлено 82 коллизии в проектной документации с существующими конструкциями (таблица 4.3).

Таблица 4.3 – Количество выявленных коллизий в проектной документации с существующими конструкциями на одном из объектов реконструкции

Раздел документации	Количество коллизий
КМ (конструкции металлические)	11
АТХ (автоматизация технологии производства)	25
ВК (внутренние системы водоснабжения и канализация)	2
КЖ (конструкции железобетонные)	14
ОВ (отопление, вентиляция и кондиционирование воздуха)	5
ТК (технологические коммуникации)	14
ТХ (технология производства)	11

Формирование отчетов об отклонениях смонтированных конструкций от проекта. В период проведения строительно-монтажных работ на объектах периодически выполнялось НЛС. Цель проведения НЛС заключалась в фиксации реального расположения и габаритов смонтированных конструкций, оборудования и коммуникаций на определенную дату. На основании получаемых

данных актуализировалась исполнительная ЦИМ, которая содержала смонтированные конструкции на момент проведения НЛС. Посредством совмещения исполнительной и проектной ЦИМ проводился анализ отклонений в габаритах и расположениях конструкций. По завершении проведения анализа формировались отчеты, содержащие информацию о фактических и допустимых отклонениях в габаритах и расположении конструкций согласно техническому заданию. За период строительно-монтажных работ одного из объектов было выполнено 9 циклов сканирования. При этом было выявлено, что 605 конструкций из 1 596 были смонтированы с недопустимыми отклонениями от проекта (рисунок 4.4).

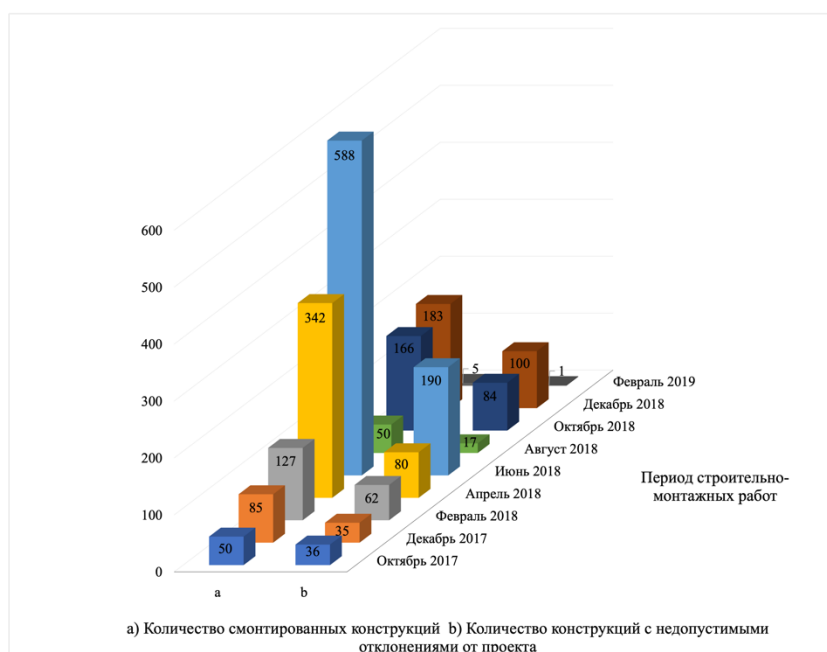


Рисунок 4.4 – Анализ выявленных отклонений за период строительно-монтажных работ

Формирование отчетов о физических объемах выполненных строительно-монтажных работ. Исполнительная ЦИМ позволяла помимо выявления отклонений смонтированных конструкций от проекта проводить анализ объемов выполненных строительно-монтажных работ. Для этой цели использовалась атрибутивная составляющая ЦИМ, содержащая информацию, необходимую для расчета объемов каждой строительной конструкции. Анализ проводился на основании данных об объемах смонтированных конструкций,

предоставленных строительной организацией, и данных об объемах, содержащихся в исполнительной ЦИМ.

Формирование эксплуатационной ЦИМ. По завершении строительно-монтажных работ было выполнено итоговое НЛС, что позволило дополнить периодически формируемую исполнительную ЦИМ всеми смонтированными конструкциями, оборудованием и коммуникациями. Для каждого элемента в ЦИМ была сформирована атрибутивная информация, содержащая данные, необходимые в процессе эксплуатации объекта: технические и технологические параметры, данные о материально-компонентном составе, данные о производителях, данные о плановых ремонтах и т. д.

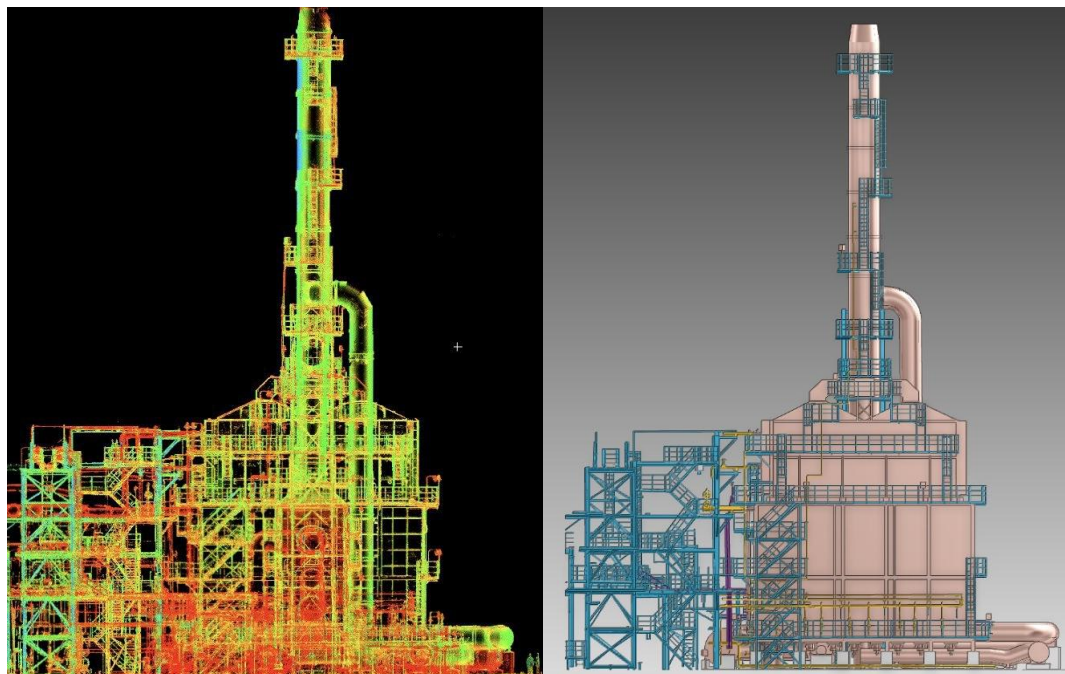


Рисунок 4.5 – Результаты НЛС и создания эксплуатационной ЦИМ одного из объектов

Результаты, полученные в ходе реализации проекта, показали эффективность применения технологий НЛС и ЦИМ для решения инженерных задач на различных стадиях жизненного цикла промышленного объекта. Применение данных технологий позволило выявить ошибки проектирования и строительства на ранних этапах, повысив качество выполняемых работ. Также следует отметить, что сформированная ЦИМ позволила обеспечить доступ к

инженерным данным о промышленном объекте всем участникам строительства, проектирования и эксплуатации.

4.3 Проектирование и создание геодезической сети при НЛС промышленного объекта

Для проверки разработанной методики проектирования геодезической сети, описанной в главе 2, пункте 2.4, были проведены следующие экспериментальные исследования:

1) в программной среде Mathcad 15 была реализована математическая модель проектирования опорной геодезической сети;

2) на языке программирования C# в среде *Visual Studio* 2019 была разработана математическая модель проектирования сканерной сети;

3) выполнено построение опорной сети на реальном объекте с ее последующим уравниванием в ПО *CredoDat*;

4) выполнено построение сканерной сети от опорной с последующей обработкой данных лазерного сканирования итерационным алгоритмом ближайших точек.

Отметим, что приведенные работы выполнялись в рамках реального проекта по сканированию технологической установки на одном из нефтеперерабатывающих заводов. Согласно техническому заданию, СКО определения положения точек лазерного сканирования не должна превышать 20 мм. Приведем основные результаты работ.

Этап 1. В качестве исходных пунктов опорной сети были приняты три ближайших пункта, расположенные на территории технологической установки. Далее по генеральному плану промышленного объекта были определены приближенные пространственные координаты 8-ми запроектированных пунктов опорной сети и 29 специальных марок лазерного сканирования (рисунок 4.6).

СКО «измеряемых» углов и расстояний были приняты согласно заданным в техническом паспорте прибора, которым планировалось выполнять дальнейшие

измерения, параметрам: СКО измерения расстояний – $m_D = 3$ мм; СКО измерения углов – $m_B = 5''$.

Составление параметрических уравнений связи и матрицы коэффициентов **В** параметрических уравнений поправок выполнено с учетом того, что на каждом пункте будут выполнены измерения направлений, наклонных и зенитных расстояний одним приемом в прямом и обратном направлениях.

Для каждого вычисленного «приближенного результата измерений» методом Монте-Карло было выполнено 100 циклов моделирования «ошибок измерений» ξ_i , учитывая следующие зависимости:

– для моделирования «ошибок измерений» направлений $-3m_N \leq \xi \leq 3m_N$,

где $m_N = m_B / \sqrt{2}$;

– моделирования «ошибок измерений» наклонных расстояний $-3m_D \leq \xi \leq 3m_D$;

– моделирования «ошибок измерений» зенитных расстояний $-3m_B \leq \xi \leq 3m_B$.

По результатам моделирования «ошибок измерений» было выполнено многократное вычисление вектора **L** свободных членов параметрических уравнений поправок, вектора **т** поправок к координатам определяемых пунктов, вектора **V** поправок к результатам измерений и СКО μ единицы веса. Далее многократно вычислены СКО определения координат пунктов и СКО положения пунктов опорной сети и из полученных значений найдено среднее (таблица 4.4). Подробный алгоритм вычислений приведен в Приложении Б.

Таблица 4.4 – Результаты проектирования опорной сети в соответствии с разработанной методикой

Пункт опорной сети	СКО пространственного положения, мм	СКО координаты x пункта, мм	СКО координаты y пункта, мм	СКО координаты z пункта, мм	СКО единицы веса
St1	2,8	0,8	2,5	1,1	0,003
St2	4,5	1,5	3,8	1,9	
St3	5,2	2,6	3,9	2,2	
St4	5,8	2,7	4,2	2,9	

Продолжение таблицы 4.4

Пункт опорной сети	СКО пространственного положения, мм	СКО координаты x пункта, мм	СКО координаты y пункта, мм	СКО координаты z пункта, мм
St5	4,6	1,7	3,9	1,8
St6	5,5	2,6	4,9	2,4
St7	6,0	3,1	4,3	2,9
St8	5,9	2,6	4,7	2,4

На основании полученных значений СКО m_p положения пунктов сети по формуле 4.1 были вычислены СКО m_c положения центров специальных марок электронным тахеометром, которые были приняты исходными для последующего проектирования сканерной сети (таблица 4.5).

$$m_c = \sqrt{m_p^2 + m_{\text{изм}}^2}, \quad (4.1)$$

где $m_{\text{изм}}$ – СКО измерений полярным способом углов β и расстояний D , равное

$$m_{\text{изм}} = \sqrt{m_D^2 + 2\left(D^2 m_\beta^2 \left(1/\rho^2\right)\right)}.$$

Таблица 4.5 – Вычисленные значения СКО положения центров специальных марок

Станция сети	СКО пространственного положения, мм	Количество проектируемых измерений центров марок	СКО измерений полярным способом, мм	СКО положения центров марок, мм
St2	4,5	6	3	5,4
St4	5,8	6		6,5
St5	4,6	6		5,5
St7	6,0	6		6,7
St8	5,9	6		6,6

Этап 2. На основании полученных в ходе проектирования опорной сети СКО положения центров специальных марок были выполнены дальнейшие вычисления в разработанной программе проектирования сканерной сети, на которую получено авторское Свидетельство для ЭВМ (Приложение В) [126]. Программа учитывает точностные характеристики прибора, которым планируется выполнять измерения, а также три основных показателя, которые влияют на

результатирующую ошибку измерений: дальность измерений, расстояние между смежными станциями установки лазерного сканера и разрешение сканирования.

В программе были заданы следующие технические параметры наземного лазерного сканера:

- СКО измерения углов – 8";
- СКО измерения расстояний – 1 мм;
- линейное разрешение сканирования – 6,3 мм;
- радиус выполнения сканирования – 100 м.

Далее по генеральному плану промышленного объекта были определены пространственные координаты проектируемых станций лазерного сканирования. Станции были расположены между пунктами опорной сети в соответствии с разработанной методикой проектирования, приведенной в главе 2, пункте 2.4.2. В результате было получено 6 сканерных сетей, проложенных между пунктами опорной сети (таблица 4.6). Проектирование было выполнено с учетом того, что с первой и последней станции сканерной сети необходимо выполнить сканирование с определением координат центров специальных марок.

Координаты станций лазерного сканирования и специальных марок были внесены в разработанную программу и далее вычислены:

- СКО определения положения центров марок лазерным сканером;
- СКО преобразования координат станций лазерного сканирования для начальной и конечной станций сети;
- СКО взаимного ориентирования станций лазерного сканирования;
- СКО определения положения наиболее слабого пункта сканерной сети;
- СКО определения положения точек лазерного сканирования в наиболее слабом пункте.

Подробный листинг программы представлен в Приложении Г.

Результаты проектирования сканерной сети показали, что наиболее слабый пункт сети имеет СКО определения положения 17 мм. С учетом того, что СКО измерений не превышает 1 мм, СКО определения положения точек лазерного сканирования в наиболее слабом пункте сканерной сети составила 17 мм, что

соответствует требованиям к точности, определенным в техническом задании (таблица 4.6).

Таблица 4.6 – Расположение станций лазерного сканирования

Пункты опорной сети	Количество станций сканерной сети между пунктами опорной сети	Среднее расстояние между станциями, м	СКО определения положения точек лазерного сканирования в наиболее слабом пункте, м
<i>St2, St7</i>	9	23,243	0,0170
<i>St2, St8</i>	8	20,013	0,0164
<i>St2, St4</i>	10	27,291	0,0163
<i>St4, St5</i>	11	21,992	0,0152
<i>St5, St7</i>	11	24,869	0,0139
<i>St7, St8</i>	9	21,870	0,0145

Этап 3. Результаты проектирования опорной сети по разработанной методике сравнивались с результатами уравнивания этой же опорной сети, построенной на реальном объекте [129]. Уравнивание сети было выполнено в ПО *CredoDAT*, при этом схема расположения опорных пунктов и специальных марок, а также их количество соответствовали схеме при проектировании опорной сети (рисунок 4.6). Измерения были выполнены электронным тахеометром с СКО измерения углов – 5", СКО измерения расстояний – 3 мм до 500 м, что соответствовало установленным параметрам при проектировании опорной сети. Основные результаты уравнивания представлены в Приложении Д.

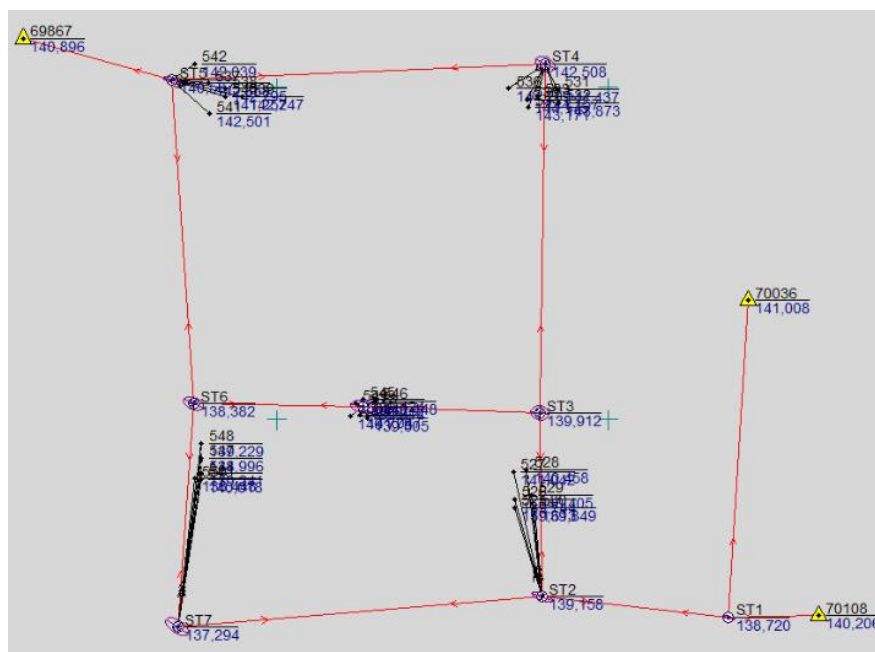


Рисунок 4.6 – Схема опорной сети по результатам уравнивания

По результатам уравнивания опорной сети были получены СКО координат пунктов и СКО положения пунктов опорной сети, представленные в таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Результаты уравнивания опорной сети

Пункт опорной сети	СКО плановых координат, мм	СКО координаты x пункта, мм	СКО координаты y пункта, мм	СКО определения высоты, мм	СКО положения марок, мм
$St1$	3,9	1,0	3,7	1,3	5,0
$St2$	6,8	2,9	6,1	2,1	7,6
$St3$	6,9	4,2	5,5	2,5	7,9
$St4$	7,3	4,6	5,7	3,4	8,6
$St5$	5,5	2,1	5,0	2,1	6,5
$St6$	7,3	4,1	6,0	2,9	8,3
$St7$	9,1	5,4	7,3	3,4	10,1
$St8$	8,4	3,7	7,6	3,0	9,4

Анализируя полученные результаты (таблица 4.4, 4.5 и 4.7), можно отметить согласованность значений СКО положения пунктов опорной сети, вычисленных в ходе проектирования и дальнейшего уравнивания построенной опорной сети.

Этап 4. Для проверки результатов проектирования сканерной сети по разработанной методике была построена аналогичная сеть от пунктов, полученных в ходе построения опорной сети. Построение сети было выполнено в соответствии с разработанной методикой, приведенной в главе 2, пункте 2.4.2. Взаимное ориентирование точечных моделей было выполнено с применением итерационного алгоритма ближайших точек, а внешнее ориентирование – аналитическим методом с использованием специальных марок. При этом создавался каталог координат марок, полученный в ходе уравнивания построенной опорной сети, и трансформировался в единую модель. Дальнейшее трансформирование пространственных координат в заданную систему было выполнено с помощью преобразования Гельмерта. Результаты взаимного и внешнего ориентирования приведены в таблицах 4.8 и 4.9.

Таблица 4.8 – Результаты взаимного ориентирования точечных моделей построенной сканерной сети

Сканерная сеть между опорными пунктами:	Среднее значение количества соответствующих точек в двух точечных моделях	Среднее значение абсолютной ошибки, м	СКО взаимного ориентирования, м
<i>St2, St7</i>	356 706	0,002	0,011
<i>St2, St8</i>	213 901	0,003	0,010
<i>St2, St4</i>	282 398	0,002	0,009
<i>St4, St5</i>	349 446	0,001	0,009
<i>St5, St7</i>	280 766	0,001	0,009
<i>St7, St8</i>	285 213	0,001	0,009

Таблица 4.9 – Результаты внешнего ориентирования точечной модели построенной сканерной сети

Имя марки	Расхождение координат			СКО координат по оси			СКО внешнего ориентирования, м
	Δx , м	Δy , м	Δz , м	m_x , м	m_y , м	m_z , м	
537	0,007	0,001	0,002	0,004	0,002	0,003	0,005
538	0,001	0,001	0,003				
539	0,002	0,002	0,003				
531	-0,005	0,003	-0,002				
529	0,001	0,005	-0,004				
530	0,001	0,001	-0,004				
535	-0,008	-0,003	-0,001				
536	-0,004	0,001	0,002				
546	0,007	-0,001	0,001				
544	-0,002	0,001	0,002				
545	-0,001	-0,004	-0,002				
532	-0,001	0,002	0,002				
528	-0,001	0,001	-0,004				
527	-0,001	0,001	-0,003				
542	0,003	0,004	0,004				
534	-0,004	-0,006	0,001				
533	-0,003	0,001	-0,002				
526	0,001	0,001	-0,005				
525	0,001	0,001	-0,005				
547	-0,002	-0,001	0,003				
548	-0,002	0,001	0,005				
549	0,001	-0,003	-0,001				
550	0,001	0,001	0,002				
543	0,001	0,001	0,001				
552	0,001	-0,003	-0,001				
551	0,001	-0,002	-0,001				
540	0,003	0,002	0,003				
541	0,006	0,001	0,002				
537	0,007	0,001	0,002				

Учитывая СКО взаимного и внешнего ориентирования, получим СКО положения наиболее слабого пункта сканерной – 12 мм, что не превышает значений, полученных в результате проектирования сканерной сети (таблица 4.10). Разработанная методика проектирования и построения геодезической сети была внедрена в производственный процесс по выполнению проектов наземного лазерного сканирования для создания ЦИМ промышленных объектов (Приложение И).

Таблица 4.10 – СКО положения наиболее слабых пунктов сканерной сети

Сканерная сеть между опорными пунктами:	Результаты построения сканерной сети			Результаты проектирования сканерной сети
	СКО внешнего ориентирования, м	СКО взаимного ориентирования, м	СКО положения наиболее слабого пункта сети, м	СКО положения наиболее слабого пункта сети, м
<i>St2, St7</i>	0,005	0,011	0,012	0,0170
<i>St2, St8</i>		0,010	0,011	0,0164
<i>St2, St4</i>		0,009	0,010	0,0163
<i>St4, St5</i>		0,009	0,010	0,0152
<i>St5, St7</i>		0,009	0,010	0,0139
<i>St7, St8</i>		0,009	0,010	0,0145

4.4 Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей с применением метода квазиньютона

Для проверки разработанной методики взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением метода *BFGS*, описанной в главе 3, пункте 3.1, был реализован алгоритм вычислений в программной среде *Mathcad*. Блок-схема реализованной методики вычислений представлена на рисунке 4.7. В качестве исходных данных были приняты две дискретные точечные модели **W** и **Q**, для которых были определены координаты 16- и соответствующих точек. При этом за **W** была принята начальная модель, а за **Q** – подвижная. Была определена необходимость продолжать итерационный процесс до тех пор, пока не выполнится условие $(F(\xi_k) - F(\xi_{k-1})) / F(\xi_{k-1}) \leq \varepsilon$, при $\varepsilon = 0,001$ м.

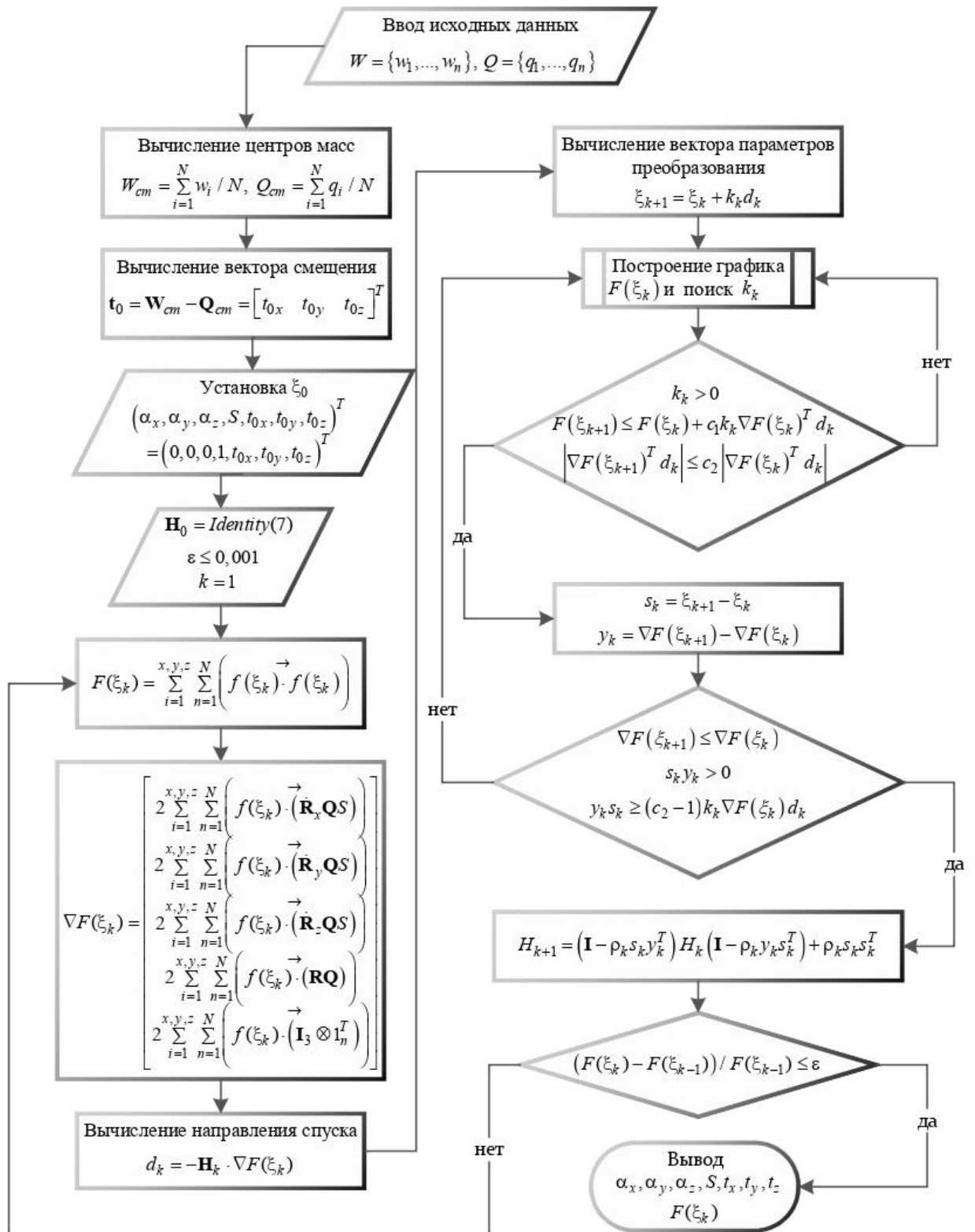


Рисунок 4.7 – Блок-схема реализованной методики взаимного ориентирования с применением метода *BFGS*

На первой итерации была выполнена предварительная оптимизация, в ходе которой вычислены центры масс W_{cm} , Q_{cm} двух дискретных точечных моделей и определены начальные параметры ξ_0 преобразования вектора смещения $[t_x \ t_y \ t_z]^T$ подвижной модели относительно осей x, y, z . За ξ_0 углов поворота $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ подвижной модели относительно осей x, y, z были приняты нулевые значения, а для коэффициента масштабирования – 1. За начальное приближение матрицы Гессе H_0 была принята единичная матрица.

При вычислении нового вектора параметров ξ_i на следующей итерации выполнялась проверка соблюдения сильных условий Вольфе (3.18, 3.19). Для исследования $F(\xi)$ и нахождения длины шага k , который удовлетворяет условиям 3.18 и 3.19, на каждой итерации было выполнено построение графиков, где по оси абсцисс отображалось значение k , а по оси ординат значение $F(\xi)$ при k

В результате вычислений для достижения заданной точности и нахождения вектора параметров, при которых $F(\xi) = \min$, было выполнено 12 итераций. Основные результаты представлены в таблице 4.11. Подробный листинг алгоритма представлен в Приложении Е.

Для проверки корректности работы разработанной методики было выполнено сравнение результатов взаимного ориентирования точечных моделей, полученных с использованием разработанной методики, основанной на методе *BFGS* и классического алгоритма *ICP*. Для этого алгоритм *ICP* был реализован в программной среде *Mathcad*. Листинг алгоритма представлен в Приложении Ж.

В связи с тем, что классический алгоритм *ICP* вычисляет сразу матрицу поворота, а не $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, сравнение результатов выполнялось по полученным координатам подвижной модели и значении $F(\xi)$. Результаты сравнения представлены в таблице 4.12.

Таблица 4.11. – Результаты вычислений на каждой итерации

№ итерации	Значение $F(\xi)$	Значение $\nabla F(\xi)$	Значение гессиана $ H $	Значения начальных параметров	Значения искомым параметров
0	3 115,336	24 018,206	1		
1	1 286,862	2 402,439	$6,4 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_x = 0$ rad	$\alpha_x = 0,000019$ rad
2	1 274,265	1 436,275	$4,1 \cdot 10^{-11}$	$\alpha_y = 0$ rad	$\alpha_y = 0,00002$ rad
3	1 267,568	1 576,061	$1,0 \cdot 10^{-14}$	$\alpha_z = 0$ rad	$\alpha_z = -0,2601422$ rad
4	102,505	4 517,816	$4,7 \cdot 10^{-17}$	$S = 1$	$S = 1,0000452$
5	4,829	1 131,467	$4,6 \cdot 10^{-22}$	$t_x = -6,521$ м	$t_x = 0,0026355$ м
6	1,62	312,086	$3,0 \cdot 10^{-22}$	$t_y = -9,546$ м	$t_y = 0,0007921$ м
7	0,005	31,148	$2,4 \cdot 10^{-23}$	$t_z = 11,674$ м	$t_z = 11,6754446$ м
8	0,003	27,006	$2,0 \cdot 10^{-24}$		
9	0,001	4,405	$1,7 \cdot 10^{-24}$		
10	0,001	0,042	$1,7 \cdot 10^{-24}$		
11	0,001	0,003	$1,8 \cdot 10^{-24}$		
12	0,001	0,00004	$1,7 \cdot 10^{-24}$		

Таблица 4.12 – Сравнение результатов взаимного ориентирования с применением разработанной методики, основанной на методе *BFGS* и классического алгоритма *ICP*

№ точки	Расхождение координат подвижной модели $Q_{BFGS} - Q_{ICP}$			Значение $F(\xi)$	
	Δx , м	Δy , м	Δz , м	<i>ICP</i>	<i>BFGS</i>
1	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$-7,43 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-6}$	0,0004	0,001
2	$8,01 \cdot 10^{-4}$	$-8,67 \cdot 10^{-4}$	$6,39 \cdot 10^{-6}$		
3	$3,21 \cdot 10^{-3}$	$-1,45 \cdot 10^{-3}$	$-2,41 \cdot 10^{-5}$		
4	$4,57 \cdot 10^{-4}$	$-1,16 \cdot 10^{-3}$	$6,16 \cdot 10^{-6}$		
5	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$-3,67 \cdot 10^{-3}$	$-1,46 \cdot 10^{-5}$		
6	$-1,21 \cdot 10^{-4}$	$-6,86 \cdot 10^{-4}$	$4,16 \cdot 10^{-6}$		
7	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-3,17 \cdot 10^{-3}$	$-1,43 \cdot 10^{-5}$		
8	$-5,97 \cdot 10^{-4}$	$-4,78 \cdot 10^{-4}$	$-2,47 \cdot 10^{-6}$		

Продолжение таблицы 4.12

№ точки	Расхождение координат подвижной модели $Q_{BFGS} - Q_{ICP}$		
	$\Delta x, \text{ м}$	$\Delta y, \text{ м}$	$\Delta z, \text{ м}$
9	$-3 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$-1,82 \cdot 10^{-6}$
10	$-1,62 \cdot 10^{-3}$	$8,53 \cdot 10^{-4}$	$1,99 \cdot 10^{-5}$
11	$-1,26 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$-3,96 \cdot 10^{-6}$
12	$-2,75 \cdot 10^{-3}$	$1,89 \cdot 10^{-3}$	$-6,79 \cdot 10^{-6}$
13	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$-7,67 \cdot 10^{-6}$
14	$1,91 \cdot 10^{-3}$	$3,87 \cdot 10^{-3}$	$2,49 \cdot 10^{-5}$
15	$1,23 \cdot 10^{-3}$	$9,79 \cdot 10^{-4}$	$7,04 \cdot 10^{-6}$
16	$1,31 \cdot 10^{-3}$	$4,34 \cdot 10^{-4}$	$2,85 \cdot 10^{-6}$

Анализируя полученные результаты, можно отметить сверхлинейную сходимость разработанной методики взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением метода *BFGS*. Так из таблицы 4.11 видно, что на нулевой итерации значение $F(\xi)$ равно $3,1 \cdot 10^4$, а на шестой итерации уменьшается до 1,62 и еще через две итерации достигает минимального значения. Также исследуя полученные результаты на каждой итерации, можно отметить самокорректирующие свойства методики. Так видно, что на третьей итерации $\nabla F(\xi)$ возрастает, что указывает на то, что **H** неверно оценивает кривизну функции. Однако при соблюдении условий Вольфе на итерации и проверке положительной определенности **H** аппроксимация гессиана исправляет ситуацию за две итерации, что в свою очередь повышает надежность конечных результатов.

4.5 Выводы по Главе 4

1. На основании разработанной методики НЛС в комплексе с ЦИМ реализован проект по сопровождению строительства для выявления отклонений смонтированных конструкций от проектных значений на одном из нефтеперерабатывающих заводов.

На первом этапе было выполнено сгущение ГРО, в ходе которого было закреплено и определено пространственное положение центров 78 специальных марок. В ходе уравнивания сети сгущения программно выявлены расхождения координат, превышающие допустимые значения, для десяти существующих пунктов ГРО, что позволило внести своевременные изменения в значения координат исходных пунктов.

В ходе реализации проекта было выполнено пять циклов, включающих НЛС и трехмерное моделирование смонтированных конструкций, и дальнейшее выявление отклонений путем сравнения проектной и фактической трёхмерных моделей. Реализованная технология позволила выявить на каждом из циклов от 884 до 2 373 конструкций, смонтированных с отклонениями, превышающими допустимые значения.

2. Реализованы проекты по решению задач с применением НЛС и ЦИМ на стадиях инженерных изысканий, проектирования, строительства и ввода в эксплуатацию 20 объектов, входящих в состав горно-металлургического комбината. Работы на каждом из объектов включали: НЛС объектов; создание проектной ЦИМ; создание исполнительной ЦИМ; сравнение двух моделей; создание эксплуатационной ЦИМ.

На стадии инженерных изысканий по результатам НЛС площадок под новое строительство и реконструкцию были созданы цифровая модель местности и ЦИМ прилегающих зданий, строений и сооружений, что позволило выполнить установку границ строительства и точное совмещение проектируемых и существующих объектов.

На стадии проектирования созданная проектная ЦИМ позволила выполнить проверку на коллизии между всеми элементами модели, и исправить ошибки проектирования до начала строительного-монтажных работ. Так для одного из объектов проверка на коллизии позволила выявить 350 ошибок в проектной документации.

На стадии строительства периодическое НЛС строительной площадки и последующее создание исполнительной ЦИМ позволили решить три задачи:

- поиск коллизий в проектной документации с существующими конструкциями (для одного из объектов выявлено 82 коллизии);
- выявление отклонений смонтированных конструкций от проектных решений (за 9 циклов сканирования одного из объектов было выявлено, что 605 конструкций из 1 596 были смонтированы с недопустимыми отклонениями от проекта);
- анализ объемов выполненных строительно-монтажных работ.

Полученные результаты на предыдущих стадиях жизненного цикла позволили создать эксплуатационную ЦИМ, содержащую в себе актуальные данные, необходимые в процессе эксплуатации объекта.

3. Реализована разработанная автором методика проектирования и построения геодезических сетей в ходе проекта по наземному лазерному сканированию технологической установки на одном из нефтеперерабатывающих заводов. На первом этапе было выполнено проектирование опорной сети в программной среде *Mathcad*, в ходе которого получены СКО пространственного положения пунктов сети. Таким образом вычислено, что СКО пространственного положения наиболее слабого пункта сети составила 6 мм. Далее были вычислены СКО положения центров специальных марок, которые были приняты за исходные для последующего проектирования сканерной сети. Для наиболее слабого пункта опорной сети СКО положения центров марок составила 6,7 мм.

На втором этапе было выполнено проектирование сканерной сети в разработанной автором программе для ЭВМ. Согласно разработанной методике проектирования сканерной сети были вычислены: СКО определения положения центров марок лазерным сканером; СКО преобразования координат станций лазерного сканирования для начальной и конечной станций сети; СКО взаимного ориентирования станций лазерного сканирования. В результате проектирования вычислено, что СКО определения положения наиболее слабого пункта сканерной сети составило 17 мм.

На третьем этапе были выполнены построение и уравнивание опорной сети. Уравнивание сети было выполнено в ПО *CredoDAT*, при этом схема

расположения опорных пунктов и специальных марок, а также их количество, соответствовали схеме при проектировании опорной сети. По результатам уравнивания опорной сети были получены СКО положения пунктов опорной сети и СКО положения центров марок. Вычислено, что СКО пространственного положения наиболее слабого пункта сети составило 9,1 мм и СКО положения центров марок в наиболее слабом пункте – 10,1 мм. При этом наиболее слабые пункты, определенные в ходе проектирования и построения опорной сети, совпадают и разница в полученных значениях СКО пространственного положения пункта – 3 мм.

На четвертом этапе от пунктов опорной сети была построена и уравнена сканерная сеть. Взаимное ориентирование точечных моделей было выполнено с применением итерационного алгоритма ближайших точек, а внешнее ориентирование аналитическим методом с использованием специальных марок. В результате уравнивания получено, что СКО положения наиболее слабого пункта сканерной сети составило 12 мм, что не превышает значений, полученных в результате проектирования сканерной сети.

Таким образом, разработанная методика проектирования позволила выполнить предрасчет точности, результаты которого согласовываются с результатами уравнивания построенной геодезической сети, а разработанная методика построения геодезической сети позволила выполнить измерения с точностью, удовлетворяющей требованиям, определенным в техническом задании.

4. В программной среде *Mathcad* реализована методика взаимного ориентирования точечных моделей, основанная на методе *BFGS*. За исходные данные были приняты две дискретные точечные модели, для которых были найдены соответствующие точки. Для нахождения вектора параметров преобразования, при которых выполняется условие минимизации целевой функции, было выполнено 12 итераций. В результате вычислений получены значение целевой функции, равное 0,001, и значение градиента целевой функции, равное $4 \cdot 10^{-5}$. Для проверки работы метода *BFGS* было выполнено сравнение с

результатами взаимного ориентирования классическим алгоритмом *ICP*, которое показало соответствие результатов, полученных двумя методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам выполнения диссертационной работы сделаны следующие выводы и рекомендации:

1. Выполнен анализ современного состояния методики НЛС промышленных объектов для создания ЦИМ с целью решения производственных задач на различных стадиях жизненного цикла, который показал, что существующая обобщенная методика, состоящая из последовательных этапов выполнения работ (рекогносцировка, проектирование и построение геодезической сети, лазерное сканирование объекта, обработка результатов измерений), требует дополнений, учитывающих требования к точности измерений и условия съемки промышленных объектов.

2. Разработаны дополнительные требования к уровням детализации (*LOD*), информации (*LOI*) и точности (*LOA*) элементов ЦИМ, удовлетворяющие решению различных производственных задач.

3. Обоснованы требования к точности выполнения лазерного сканирования и трехмерного моделирования, которые для каждого объекта определяются специальным расчетом, основанным на переходе: от характеристик точности, указанных в нормативно-технической документации (проектных, строительных и эксплуатационных), к предельным СКО определения положения точек; от предельных СКО определения положения точек к СКО определения положения точек.

4. Выполнен расчет требований к точности НЛС при проведении таких геодезических работ, как: топографическая съемка; исполнительная съемка; обмерные работы; наблюдения за деформациями.

5. Разработана методика проектирования и построения геодезической сети для последующего внешнего ориентирования результатов НЛС промышленного объекта, предполагающая: проектирование и предрасчет точности положения пунктов опорной сети, координаты которых определяются от исходных пунктов традиционными методами геодезии; проектирование и предрасчет точности

положения пунктов сканерной сети, координаты которых определяются от пунктов опорной сети в ходе лазерного сканирования.

В ходе проектирования опорной сети предложено моделировать «результаты измерений» с учетом «ошибок измерений» методом Монте-Карло и СКО положения пунктов вычислять на основе многократного уравнивания параметрическим способом.

В ходе проектирования сканерной сети предложено создавать сеть по границам технологических блоков для исключения коллизий при взаимном ориентировании всех технологических блоков в единую модель. Разработанная методика проектирования и построения сканерной сети основана на выполнении взаимного ориентирования моделей с применением итерационного алгоритма ближайших точек и выполнении внешнего ориентирования аналитическим методом с использованием специальных марок.

6. Разработаны предложения по выполнению НЛС промышленных объектов, учитывающие: ошибки измерения расстояний, зависящие от угла падения лазерного луча на поверхность объекта; выбор разрешения сканирования; выбор расстояния между станциями лазерного сканирования; методику съемки объекта; методику взаимного ориентирования моделей технологических блоков в единую модель.

7. Разработана методика взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением метода *BFGS*, предполагающая выполнение предварительной оптимизации, вычисление значения целевой функции и градиента целевой функции на итерации через оператор векторизации, поиск длины шага с соблюдением сильных условий Вольфе и построение графиков для определения оптимального значения длины шага на итерации.

8. Разработаны автоматизированные программы проектирования геодезической сети, включающие в себя: программу проектирования опорной сети, реализованную в программной среде *Mathcad*; программу проектирования сканерной сети, написанную на языке программирования *C#* в среде *Visual Studio*

2019, на которую было получено авторское свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

9. В программной среде *Mathcad* реализована методика взаимного ориентирования точечных моделей, основанная на методе *BFGS* с предварительной оптимизацией. Для проверки работы разработанной методики было выполнено сравнение с результатами взаимного ориентирования классическим алгоритмом *ICP*, которое показало соответствие результатов, полученных двумя методами.

10. Выполнены экспериментальные исследования элементов разработанной методики НЛС для создания ЦИМ промышленных объектов в ходе реализации проектов на реальных объектах и решения различных производственных задач.

Перспективным направлением развития научных исследований по тематике диссертации является развитие теоретических основ оценки точности результатов взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с применением итерационных алгоритмов ближайших точек, а также оценки точности трехмерного моделирования по результатам лазерного сканирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абу, Д. И. Математическая обработка и анализ точности наземных пространственных геодезических сетей методами нелинейного программирования и линейной алгебры: специальность 05.24.01 : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Дака Имад Абу. – Новополоцк, 1998. – 142 с.
2. Авакян, В. В. Прикладная геодезия: технологии инженерно-геодезических работ. – 2-е изд. / В. В. Авакян – М.: Инфра-Инженерия, 2016. – 588 с.
3. Аврунев, Е. И. Проектирование и уравнивание пространственных геодезических построений, предназначенных для создания трехмерного кадастра / Е. И. Аврунев, А. И. Гиниятов, А. И. Каленицкий // Вестник СГУГиТ. – 2021. – Т. 26, № 5. – С. 126–134.
4. Аврунев, Е. И. Разработка принципов для 3D-моделирования линейных сооружений и инженерной инфраструктуры территориального образования / Е. И. Аврунев, Н. В. Гатина, М. В. Козина // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, № 1. – С. 107–115.
5. Азаров, Б. Ф. К вопросу о методике контроля точности регистрации сканерных станций при выполнении инженерно-геодезических изысканий автодорог / Б. Ф. Азаров // Ползуновский вестник. – 2016. – № 4–2. – С. 125–128.
6. Азаров, Б. Ф. Наземное лазерное сканирование как инструмент для формирования информационных моделей зданий и сооружений / Б. Ф. Азаров, И. В. Карелина // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80. – № 6. – С. 16–23.
7. Азаров, Б. Ф. Применение наземного лазерного сканирования для разработки проектной и исполнительной информационной модели строящегося здания / Б. Ф. Азаров, И. А. Филипченко // Ползуновский альманах. – 2021. – № 1. – С. 11–13.
8. Азаров, Б. Ф. Статистическая обработка результатов регистрации сканерных станций при производстве исполнительных съемок строительных

конструкций / Б. Ф. Азаров, И. В. Карелина, В. В. Опара // Ползуновский альманах. – 2019. – № 2–1. – С. 3–7.

9. Алексеенко, Н. Н. Применение технологии лазерного сканирования в различных отраслях и на различных этапах жизненного цикла объектов / Н. Н. Алексеенко // Вестник МГСУ. – 2016. – № 2. – С. 62–73.

10. Алтынцев М. А. Создание метрической имитационной модели «цифрового двойника» активным методом дистанционного зондирования Земли / М. А. Алтынцев, П. А. Карпик // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Т. 25. – № 4. – С. 58–67.

11. Алтынцев, М. А. Методика создания цифровых трехмерных моделей объектов инфраструктуры нефтегазодобывающих комплексов с применением наземного лазерного сканирования / М. А. Алтынцев, П. А. Карпик // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). – 2020. – Т. 25. – № 2. – С. 121–139.

12. Алтынцев, М. А. Применение технологии лазерного сканирования для контроля состояния защитных сооружений при перекачке нефтепродуктов / М. А. Алтынцев, М. А. Алтынцева // ИнтерКарто. ИнтерГИС. – 2021. – Т. 27. – № 1. – С. 377–393.

13. Афонин, Д. А. Опыт применения наземного лазерного сканирования при обследовании инженерных сооружений / Д. А. Афонин, Н. Н. Богомолова, М. Я. Брынь, А. А. Никитчин // Геодезия и картография. – 2020. – Т. 81. – № 4. – С. 2–8.

14. Баденко, В. Л. Цифровые двойники сложных технических систем в индустрии 4.0: базовые подходы / В. Л. Баденко, Н. С. Большаков, А. А. Федотов, В. К. Ядыкин // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. – 2020. – Т. 13. – № 1. – С. 20–30.

15. Баран, П. И. Исследование точности решения геодезических задач методами математического программирования / П. И. Баран // Инженерная геодезия. – 1987. – № 30. – С. 5–8.

16. Богданов, А. Н. Строительный контроль методом наземного лазерного сканирования / А. Н. Богданов, Я. А. Листратов // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2019. – № 4(50). – С. 401–409.

17. Брынь М. Я. Опыт наземного лазерного сканирования крупного промышленного объекта для формирования цифровой информационной модели / М. Я. Брынь, М. Н. Аникушкин, **А. А. Шарафутдинова** // Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов : Материалы III всероссийской научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 15 мая 2020 года. – Санкт-Петербург: Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, 2021. – С. 291–298.

18. Бударова, В. А. Наземное лазерное сканирование объектов промышленных площадок на территории нефтегазовых месторождений / В. А. Бударова, Н. Г. Мартынова, А. В. Шереметинский, А. В. Привалов // Московский экономический журнал. – 2019. – № 6. – С. 4.

19. Будо, А. Ю. Сравнительный анализ результатов уравнивания, полученных по двум полярным методикам при обработке плановых геодезических сетей / А. Ю. Будо // Вестник ПГУ. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2010. – № 12. – С. 115–122.

20. Быкасов, Д. А. Метод обработки многоточечных геодезических измерений с использованием алгоритмов нелинейного программирования при оптимизации второго порядка : специальность 25.00.32 «Геодезия» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Быкасов Дмитрий Александрович. – Санкт-Петербург, 2022. – 162 с.

21. Быков, Н. Н. Уравнивание инженерно-геодезических сетей методом сопряжённого градиента / Н. Н. Быков // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1981. – № 1. – С. 25–28.

22. Вальдовский, А. Высокоточная съемка промышленных объектов методом лазерного сканирования с последующим 3D-моделированием / А. Вальдовский, Г. Морозова // САПР и графика. – 2010. – № 6(164). – С. 72–75.

23. Вальков, В. А. Геодезические наблюдения за процессом деформирования высотных сооружений с использованием технологии наземного лазерного сканирования : специальность 25.00.32 «Геодезия» : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Вальков Вячеслав Александрович. – Санкт-Петербург, 2015. – 22 с.

24. Васильев, Г. Г. Деформационный мониторинг строительных конструкций площадочных объектов нефтегазового комплекса на многолетнемерзлых грунтах / Г. Г. Васильев, А. А. Джалыбов, И. А. Леонович // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. – 2020. – № 5–6. – С. 34–39.

25. Велижев, А. Б. Разработка и исследование алгоритмов автоматического взаимного ориентирования трехмерных дискретных моделей объектов, полученных в результате лазерного сканирования : специальность 25.00.34 «Аэрокосмические исследования Земли, фотограмметрия» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Велижев Александр Брониславович. – Москва, 2008. – 78 с.

26. Вербная, В. П. Оптимальный метод выбора лазерного сканера для различных видов инженерно-технических работ / В. П. Вербная, В. С. Хорошилов, А. В. Комиссаров // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2015. – Т. 1. – № 1. – С. 204–208.

27. Войтенко, С. П. Математичне оброблення геодезичних вимірів / С. П. Войтенко, Р. В. Шульц, О. Й. Кузьмич, Ю. В. Кравченко : підручник. – К. : Знання, 2015. – 654 с.

28. Ворошилов, А. П. Выбор местоположения станций при наземном лазерном сканировании зданий и сооружений / А. П. Ворошилов, Ю. А. Караченцев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2009. – № 16(149). – С. 20–22.

29. Вохминцев, А. В. Методология решения проблемы одновременной навигации и построения карты на основе комбинирования визуальных и семантических характеристик окружающей среды : специальность 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в информационных и технических системах)» : диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Вохминцев Александр Владиславович. – Челябинск, 2020. – 298 с.

30. Выстрчил, М. Г. Обоснование способов внешнего ориентирования цифровых моделей горных выработок, получаемых по результатам съемок лазерно-сканирующими системами : специальность 25.00.16 «Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Выстрчил Михаил Георгиевич. – Санкт-Петербург, 2014. – 167 с.

31. Выстрчил, М. Г. Определение критерия граничной интенсивности для дешифрации марок внешнего ориентирования при производстве наземной лазерно-сканирующей съемки / М. Г. Выстрчил // Маркшейдерский вестник. – 2014. – № 1(99). – С. 27–29.

32. Выстрчил, М. Г. Погрешность определения положения цилиндрических марок внешнего ориентирования относительно лазерно-сканирующей системы / М. Г. Выстрчил, В. Н. Гусев // Маркшейдерский вестник. – 2014. – № 1(99). – С. 30–35.

33. Головань, Г. Е. Технология проектирования геодезических сетей с помощью программного обеспечения, разработанного в Полоцком государственном университете / Г. Е. Головань, Е. В. Грищенко, И. П. Шевелев // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F: Строительство. Прикладные науки. – 2010. – № 6. – С. 108–112.

34. Гопкало, В. Н. Обзор состояния нормативной базы внедрения информационного моделирования зданий и сооружений / В. Н. Гопкало,

А. А. Пиотрович // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. – 2020. – Т. 1. – С. 403–407.

35. Горбань, Н. Н. Разработка схемы размещения сканерных станций при наземном лазерном сканировании резервуаров с учетом требований к погрешности результатов измерений / Н. Н. Горбань, Г. Г. Васильев, А. П. Сальников, С. И. Шитов // Нефтяное хозяйство. – 2020. – № 2. – С. 74–78.

36. Гордеев, В. А. Теория ошибок измерений и уравнивательные вычисления / В. А. Гордеев : учебное пособие. – Екатеринбург : УГГУ, 2004. – 429 с.

37. Горяинов, И. В. О наилучшей конфигурации обратной линейно-угловой засечки и необходимом количестве пунктов для достижения заданной точности / И. В. Горяинов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 4. – С. 41–47.

38. Горяинов, И. В. Экспериментальные исследования применения обратной линейно-угловой засечки для оценки стабильности пунктов плановой деформационной геодезической сети / И. В. Горяинов // Вестник СГУГиТ. – 2018. – Т. 23, № 1. – С. 28–39.

39. ГОСТ Р 57311-2016. Моделирование информационное в строительстве. Требования к эксплуатационной документации объектов завершеного строительства : национальный стандарт Российской Федерации : издание официальное : утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 2 декабря 2016 г. № 1916-ст : дата введения 2017-07-01. – М. : Стандартинформ, 2018. – 8 с.

40. ГОСТ Р 57563-2017/ISO/TS 12911:2012. Моделирование информационное в строительстве. Основные положения по разработке стандартов информационного моделирования зданий и сооружений : национальный стандарт Российской Федерации : издание официальное : утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 28 июля 2017 г. № 763-ст : дата введения 2017-10-01. – М. : Стандартинформ, 2018. – 29 с.

41. ГОСТ Р 8.794-2012. Государственная система обеспечения единства измерений. Сканеры лазерные наземные. Методика поверки : национальный стандарт Российской Федерации : издание официальное : утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 27 ноября 2012 г. № 1240-ст : дата введения 2014-01-01. – М. : Стандартиформ, 2019. – 12 с.

42. Гриднев, С. О. Анализ погрешностей ориентирно-соединительной съемки, выполненной лазерной сканирующей системой / С. О. Гриднев, А. Л. Охотин // Вестник ИрГТУ. – 2013. – Т. 80, № 9. – С. 130–139.

43. Гусакова, Е. А. Информационное моделирование жизненного цикла проектов высотного строительства / Е. А. Гусакова // Вестник МГСУ. – 2018. – Т. 13. – № 1(112). – С. 14–22.

44. Дуда, П. И. Методика проектирования геодезических сетей в условиях применения наземного лазерного сканирования / П. И. Дуда, Г. М. Таратинский, Д. И. Степанов // Маркшейдерский вестник. – 2010. – № 3(77). – С. 34–39.

45. Дьяков, Б. Н. Проектирование надёжных геодезических сетей / Б. Н. Дьяков, Ю. В. Родионова // Гео-Сибирь. – 2006. – Т. 1. – № 1. – С. 62–66.

46. Жадан, В. Г. Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы / В. Г. Жадан : учебное пособие. – М.: МФТИ, 2015. – 320 с.

47. Жуков, Б. Н. Руководство по геодезическому контролю сооружений и промышленных предприятий при их эксплуатации / Б. Н. Жуков. – Новосибирск: СГГА, 2004. – 376 с.

48. Зайцев, А. К. Геодезические методы исследования деформаций сооружений / А. К. Зайцев, С. В. Марфенко, Д. Ш. Михелев и др. – М.: Недра, 1991. – 272 с.

49. Зубов, А. В. Оценка стабильности опорных и деформационных маркшейдерско-геодезических сетей / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Маркшейдерский вестник. – 2013. – № 2(94). – С. 21–23.

50. Зубов, А. В. Применение градиентного метода при решении геодезических задач / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Труды межвузовской научно-

практической конференции. – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского. – 2013. – С. 90–93.

51. Иванов, А. В. Разработка методики геодезического контроля инженерных объектов на основе данных наземного лазерного сканирования : специальность 25.00.32 «Геодезия» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Иванов Андрей Васильевич. – Новосибирск, 2012. – 150 с.

52. Иванов, Ю. К. Основания и фундаменты резервуаров / Ю. К. Иванов, П. А. Коновалов, Р. А. Мангушев, С. Н. Сотников. – М.: Стройиздат, 1989. – 223 с.

53. Измайлов, А. Ф. Численные методы оптимизации / А. Ф. Измайлов, М. В. Солодов : учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

54. Канашин, Н. В. Оценка возможности применения современных наземных лазерных сканеров для топографической съемки / Н. В. Канашин, К. П. Виноградов, Д. И. Степанов // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2014. – № 1. – С. 34–37.

55. Канашин, Н. В. Разработка технологии наземной сканерной съемки железнодорожных станций : специальность 25.00.35 «Геоинформатика» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Канашин Николай Владимирович. – Санкт-Петербург, 2009. – 160 с.

56. Канашин, Н. В. Сканерная сеть для съемки железнодорожной станции / Н. В. Канашин, К. П. Виноградов // Геодезия и картография. – 2009. – № 5. – С. 14–16.

57. Кемербаев, Н. Т. Новые задачи геодезии в автоматизированной системе управления промышленным предприятием / Н. Т. Кемербаев, А. А. Шоломицкий // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2021. – Т. 1. – С. 35–39.

58. Комиссаров, А. В. Априорная оценка точности создания трехмерной цифровой модели местности по данным наземного лазерного сканирования / А. В. Комиссаров, Т. А. Широкова, Е. А. Егорченкова [и др.] // Инженерные изыскания. – 2012. – № 12. – С. 58–60.

59. Комиссаров, А. В. Лазерное сканирование: обобщение существующей практики / А. В. Комиссаров // Инженерные изыскания. – 2013. – № 2. – С. 22–25.

60. Комиссаров, А. В. Методика совместного получения и обработки данных наземного лазерного сканирования и цифровой съемки / А. В. Комиссаров, М. С. Калинина // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 4. – С. 39–42.

61. Комиссаров, А. В. Теория и технология лазерного сканирования для пространственного моделирования территорий : специальность 25.00.34 «Аэрокосмические исследования Земли, фотограмметрия» : диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Комиссаров Александр Владимирович. – Новосибирск, 2016. – 278 с.

62. Комиссаров, Д. В. Разработка и исследование методики прокладки сканерных ходов / Д. В. Комиссаров, А. В. Комиссаров // Геодезия и картография. – 2008. – № 4. – С. 14–16.

63. Комиссаров, Д. В. Технология топографической съемки промышленных объектов с применением наземного лазерного сканирования / Д. В. Комиссаров, А. В. Середович, О. А. Дементьева // Гео-Сибирь. – 2005. – Т. 1. – № 1. – С. 225–227.

64. Король, Е. А. Реконструкция зданий с использованием BIM-технологий / Е. А. Король, И. Ф. Дрепалов // Системные технологии. – 2021. – № 4(41). – С. 47–51.

65. Коугия, В. А. Геодезические работы при строительстве мостов / В. А. Коугия, В. В. Грузинов, О. Н. Малковский, В. Д. Петров. – М.: Недра, 1986. – 247 с.

66. Коугия, В. А. Исследование способов уравнивания сканерных сетей / В. А. Коугия, Н. В. Канахин // Современные проблемы инженерной геодезии : Труды Международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 15–17 октября 2009 года / Под редакцией М.Я. Брыня. – Санкт-Петербург: Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2010. – С. 144–149.

67. Коугия, В. А. Математическое моделирование при обработке геодезических измерений: Учеб. пособие / В. А. Коугия. – СПб, 2007. – 100 с.

68. Коугия, В. А. Определение градиентным методом элементов связи между трёхмерными системами координат / В. А. Коугия, Н. В. Канашин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2008. – № 2. – С. 22–28.

69. Красикова, М. В. Оценка точности неизвестных при решении системы нормальных уравнений методом сопряжённых градиентов / М. В. Красикова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1969. – № 5. – С. 79–82.

70. Крутиков, Д. В. Опыт применения технологии наземного лазерного сканирования в решении инженерных и геодезических задач / Д. В. Крутиков // Геодезия и картография. – 2015. – № S15-2. – С. 29–31.

71. Крутиков, Д. В. Трёхмерное наземное лазерное сканирование в решении задач геоинформационного обеспечения инфраструктуры горнодобывающих предприятий : специальность 25.00.16 «Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Крутиков Дмитрий Викторович. – Екатеринбург, 2011. – 123 с.

72. Кузнецова, А. А. Применение наземного лазерного сканирования для выявления отклонений конструкций от их проектных значений / А. А. Кузнецова // Геодезия и картография. – 2018. – Т. 79. – № 12. – С. 2–7.

73. Куприяновский, В. П. Цифровые двойники на базе развития технологий BIM, связанные онтологиями, 5G, IoT и смешанной реальностью для использования в инфраструктурных проектах и IFRABIM / В. П. Куприяновский, А. А. Климов, Ю. Н. Воропаев [и др.] // International Journal of Open Information Technologies. – 2020. – Т. 8. – № 3. – С. 55–74.

74. Левчук, Г. П. Прикладная геодезия. Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ: Учебник для вузов / Г. П. Левчук, В. Е. Новак, В. Г. Конусов – М.: Недра, 1981. – 438 с.

75. Лукин, А. С. Применение статистических испытаний для исследования точности геодезических построений, используемых для решения кадастровых задач / А. С. Лукин, В. В. Батраков // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). – 2000. – № 5. – С. 44–48.

76. Мазуров, Б. Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики: Монография / Б. Т. Мазуров. – Новосибирск: Агентство «Сибпринт», 2019. – 360 с.

77. Мазуров, Б. Т. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой) / Б. Т. Мазуров, В. А. Падве // Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 22–35.

78. Маковецкий, А. Ю. Точные решения вариационной задачи алгоритма ИСР в классе аффинных преобразований / А. Ю. Маковецкий, С. М. Воронин, Д. В. Тихоньких, М. Н. Алексеев // Челябинский физико-математический журнал. – 2017. – Т. 2. – № 3. – С. 282–294.

79. Медведская, Т. М. Исследование точности опорных сетей для геодезического мониторинга крупногабаритного промышленного оборудования / Т. М. Медведская // Вестник СГУГиТ. – 2019. – Т. 24, № 2. – С. 56–65.

80. Меньшиков, С. Н. Оценка перспектив применения наземного лазерного сканирования при монтаже технологической обвязки установок и оборудования объектов обустройства промыслов / С. Н. Меньшиков, И. В. Мельников, А. А. Джалябов [и др.] // Газовая промышленность. – 2019. – № 9(790). – С. 136–144.

81. Мицель, А. А. Методы оптимизации: учебно-методическое пособие / А. А. Мицель, В. В. Романенко, Е. Б. Грибанова. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2018. – 451 с.

82. Мицкевич, В. И. Теория математической обработки геодезических построений методами нелинейного программирования: специальность 25.00.32 «Геодезия» : диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Валерий Иванович Мицкевич. – Новополюцк, 2004. – 133 с.

83. Мустафин, М. Г. Оценка влияния линейно-угловых параметров лазерно-сканирующей съемки на точность построения модели объекта / М. Г. Мустафин, Х. М. Шокер // Маркшейдерский вестник. – 2020. – № 6(139). – С. 42–50.

84. Назаренко, В. Г. Математическое программирование в уравнительных вычислениях / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1968. – № 4. – С. 134–139.

85. Назаренко, В. Г. О решении задач геодезического уравнивания методом квадратичного программирования / В. Г. Назаренко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1967. – № 3. – С. 21–24.

86. Назаренко, В. Г. Уравнивание триангуляции методом квадратичного программирования / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1966. – № 3. – С. 41–49.

87. Неволин, А. Г. 3D-моделирование крупногабаритных промышленных агрегатов с помощью программного комплекса Cyclone / А. Г. Неволин, Т. М. Медведская // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2019. – Т. 1. – № 1. – С. 223–230.

88. Никонов, А. В. О точности построения планово-высотной геодезической разбивочной основы наземными методами / А. В. Никонов, И. Н. Чешева // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2019. – Т. 1, № 1. – С. 130–143.

89. Носков, И. В. Современные методы и технологии организации геомониторинга за объектами при разработке нефтяных месторождений / И. В. Носков, А. В. Прохоров // Ползуновский альманах. – 2021. – № 1. – С. 140–142.

90. Овчинников, А. Н. Информационная модель объекта капитального строительства / А. Н. Овчинников, А. А. Волков // Перспективы науки. – 2018. – № 10(109). – С. 12–15.

91. Олейник, А. М. О возможности применения наземного лазерного сканирования для деформационного мониторинга сооружений нефтегазовых месторождений / А. М. Олейник, А. В. Привалов // Инновации и инвестиции. – 2021. – № 4. – С. 185–188.

92. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

93. Попова, Т. М. Методы безусловной оптимизации: Тексты лекций / Т. М. Попова. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. – 76 с.

94. Роман, Н. П. Обзор внедрения BIM в различных странах мира с законодательной и практической стороны / Н. П. Роман, И. А. Брянский // Экономика и предпринимательство. – 2020. – № 7(120). – С. 1146–1149.

95. Рыбин, Е. Н. BIM-технологии / Е. Н. Рыбин, С. К. Амбарян, В. В. Аносов [и др.] // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2019. – Т. 9. – № 1(28). – С. 98–105.

96. Сальников, А. П. Оценка напряженно-деформированного состояния резервуаров по результатам наземного лазерного сканирования : специальность 25.00.19 «Строительство и эксплуатация нефтегазопроводов, баз и хранилищ» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Сальников Антон Павлович. – Москва, 2016. – 166 с.

97. Свод правил. Геодезические работы в строительстве : (СП 126.13330.2017) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 24 октября 2017 г. № 1469/пр : введен в действие с 25.04.18 г. – Москва, 2018. – 54 с.

98. Свод правил. Инженерно-геодезические изыскания для строительства : (СП 11-104-97) : официальное издание : одобрен департаментом развития научно-технической политики и проектно-изыскательских работ Госстроя России от 14 октября 1997 г. № 9-4/116 : введен в действие с 01.01.98 г. – Москва, 2005. – 71 с.

99. Свод правил. Инженерно-геодезические изыскания для строительства. Общие правила производства работ : (СП 317.1325800.2017) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 22 декабря 2017 г. № 1702/пр : введен в действие с 23.06.18 г. – Москва, 2018. – 46 с.

100. Свод правил. Инженерные изыскания для размещения, проектирования и строительства АЭС. Часть II. Инженерные изыскания для

разработки проектной и рабочей документации и сопровождения строительства : (СП 151.13330.2012) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 25 декабря 2012 г. № 110/ГС : введен в действие с 23.06.18 г. – Москва, 2013. – 150 с.

101. Свод правил. Инженерные изыскания для строительства. Основные положения : (СП 47.13330.2016) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 30 декабря 2016 г. № 1033/пр : введен в действие с 01.07.17 г. – Москва, 2017. – 84 с.

102. Свод правил. Информационное моделирование в строительстве. Контроль качества производства строительных работ : (СП 471.1325800.2019) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 24 декабря 2019 г. № 854/пр : введен в действие с 25.06.20 г. – Москва, 2020. – 57 с.

103. Свод правил. Информационное моделирование в строительстве. Правила описания компонентов информационной модели : (СП 328.1325800.2020) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 31 декабря 2020 г. № 927/пр : введен в действие с 01.07.21 г. – Москва, 2020. – 13 с.

104. Свод правил. Информационное моделирование в строительстве. Правила формирования информационной модели объектов на различных стадиях жизненного цикла : (СП 333.1325800.2020) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 31 декабря 2020 г. № 928/пр : введен в действие с 01.07.21 г. – Москва, 2020. – 219 с.

105. Свод правил. Основания зданий и сооружений : (СП 22.13330.2016) : официальное издание : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 16 декабря 2016 г. № 970/пр : введен в действие с 01.07.17 г. – Москва, 2016. – 220 с.

106. Середович, А. В. Применение наземного лазерного сканирования в комплексе изыскательских работ по реконструкции технологических объектов / А. В. Середович, О. А. Дементьева // Гео-Сибирь. – 2009. – Т. 1. – № 1. – С. 144–148.
107. Середович, В. А. Наземное лазерное сканирование / В. А. Середович, А. В. Комиссаров, Д. В. Комиссаров, Т. А. Широкова. – Новосибирск : Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 2009. – 261 с.
108. Скворцов, А. В. Обзор международной нормативной базы в сфере BIM / А. В. Скворцов // САПР и ГИС автомобильных дорог. – 2016. – Т.2 – № 7. – С. 4–48.
109. Смирнов, Д. В. BIM как технология управления строительным объектом / Д. В. Смирнов // Путевой навигатор. 2021. – Т. 47. – № 73. – С. 22–26.
110. Смолич, С. В. Оценка погрешности маркшейдерско-геодезических измерений методом Монте-Карло // С. В. Смолич, Б. А. Просекин, И. Н. Юдина // В сборнике: Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов сборник статей XIX Международной научно-практической конференции. В 3 ч. ответственный редактор: А. В. Шапиева. – 2019. – С. 108–112.
111. Соломатин, В. А. Оценка точности наземных лазерных сканеров / В. А. Соломатин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 5. – С. 110–114.
112. Строк, А. В. Технологический алгоритм предрасчета точности плановых геодезических сетей на персональном компьютере / А. В. Строк // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия В: Прикладные науки. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 105–113.
113. Тараничев, Н. А. Применение способа Ньютона для обработки результатов геодезических измерений / Н. А. Тараничев // Геодезия и картография. – 1964. – № 4. – С. 22–27.

114. Тимов, Х. И. Приложение теории выпуклого программирования для уравнивания условных и посредственных измерений / Х. И. Тимов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1968. – № 1. – С. 49–50.

115. Тихая, Н. Создание «интеллектуальной» 3D-модели действующей электроподстанции на основе данных наземного лазерного сканирования / Н. Тихая // САПР и графика. – 2011. – № 4(174). – С. 28–30.

116. Тютина, А. Д. Основные тенденции развития информационного моделирования зданий (BIM) / А. Д. Тютина, Д. А. Бухтияров // Евразийское Научное Объединение. – 2021. – № 2–2(72). – С. 125–128.

117. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.

118. Хатум, Х. М. Проектирование и оценка геодезических наблюдений за деформациями обнажений выемки при строительстве станции метрополитена / Х. М. Хатум, М. Г. Мустафин // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Т. 25, № 4. – С. 45–57.

119. Чибуничев, А. Г. Автоматическое сопоставление облаков точек, полученных в результате наземного лазерного сканирования, с использованием ориентационных гистограмм / А. Г. Чибуничев, А. Б. Велижев // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 3. – С. 112–119.

120. **Шарафутдинова, А. А.** Анализ возможностей применения наземного лазерного сканирования для мониторинга деформаций промышленных объектов / А. А. Шарафутдинова // Современные проблемы инженерной геодезии : труды международной научно-практической конференции. 14 ноября 2019 г., Санкт-Петербург / Под ред. проф. М. Я. Брыня. – Спб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2020. – С. 146–149.

121. **Шарафутдинова, А. А.** Анализ результатов регистрации взаимного ориентирования данных наземного лазерного сканирования с помощью итерационного алгоритма ближайших точек / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры. Наука и образование : Сборник материалов III всероссийской научно-практической конференции,

Санкт-Петербург, 06–08 ноября 2019 года / Научный редактор О.А. Лазебник. – Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2019. – С. 129–134.

122. **Шарафутдинова, А. А.** Взаимное ориентирование дискретных точечных моделей на основе метода квазиньютона / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Геодезия и картография. – 2023. – № 2. – С. 2–12.

123. **Шарафутдинова, А. А.** Методика проектирования и построения геодезической сети при наземном лазерном сканировании крупных промышленных объектов / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, № 2. – С. 72–85.

124. **Шарафутдинова, А. А.** О применении технологий лазерного сканирования и информационного моделирования на различных стадиях жизненного цикла промышленного объекта / А. А. Шарафутдинова // Актуальные проблемы недропользования : Тезисы докладов XIX Всероссийской конференции-конкурса студентов и аспирантов, Санкт-Петербург, 12–16 апреля 2021 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский горный университет, 2021. – С. 177–179.

125. **Шарафутдинова, А. А.** Опыт применения наземного лазерного сканирования и информационного моделирования для управления инженерными данными в течение жизненного цикла промышленного объекта / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Вестник СГУГиТ. – 2021. – Т. 26. – № 1. – С. 57–67.

126. **Шарафутдинова, А. А.** Проектирование геодезической сети при выполнении наземного лазерного сканирования / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.: правообладатель Петербургский гос. ун-т. путей сообщения Императора Александра I. – рег. № 2022616904 от 18.04.22. – М.: Роспатент, 2022.

127. **Шарафутдинова, А. А.** Применение итерационного метода численной оптимизации для решения задачи взаимного ориентирования данных

наземного лазерного сканирования / А. А. Шарафутдинова // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2022. – № 1. – С. 214–217.

128. **Шарафутдинова, А. А.** Разработка требований к точности пространственного положения элементов в цифровой информационной модели / А. А. Шарафутдинова // Геодезия, землеустройство и кадастры: проблемы и перспективы развития : сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию юбилею кафедры землеустройства и землеустроительного факультет, Омск, 30–31 марта 2022 года / Министерство сельского хозяйства российской федерации, Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина. – Омск: Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина, 2022. – С. 304-307.

129. **Шарафутдинова, А. А.** Результаты построения геодезической сети при выполнении наземного лазерного сканирования промышленного объекта / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Геодезия, картография, геоинформатика и кадастры. Наука и образование : Сборник материалов IV всероссийской научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 2021 года / Научный редактор И.Е. Сидорина. – Санкт-Петербург: Политехника, 2021. – С. 192–196.

130. **Шарафутдинова, А. А.** Современное состояние цифрового информационного моделирования промышленных объектов / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Изыскательский вестник. – 2022. – № 24. – С. 153–162.

131. **Шарафутдинова, А. А.** Требования к точности наземного лазерного сканирования для решения инженерно-геодезических задач с помощью цифрового информационного моделирования / А. А. Шарафутдинова, М. Я. Брынь // Геодезия и картография. – 2021. – Т. 82. – № 8. – С. 2–12.

132. Шевченко, Г. Г. Разработка технологии геодезического мониторинга зданий и сооружений способом свободного стационарирования с использованием поискового метода нелинейного программирования : специальность 25.00.32

«Геодезия» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Шевченко Грители Геннадьевна. – Санкт-Петербург, 2020. – 212 с.

133. Шемякина, Т. Ю. Экономические особенности применения информационного моделирования в практике строительства / Т. Ю. Шемякина // Современная научная мысль. – 2020. – № 3. – С. 159–164.

134. Шестакова, Е. Б. Основные принципы формирования единого ресурсного пространства BIM технологии / Е. Б. Шестакова, Н. С. Мальщук // Путевой навигатор. 2019. – Т.41. – №67. – С. 36–43.

135. Шишкин, Н. В. Применение BIM технологий при проектировании промышленных зданий / Н. В. Шишкин, И. С. Щукин // Современные технологии в строительстве. Теория и практика. – 2020. – Т. 1. – С. 172–176.

136. Шнитко, С. Г. Алгоритмы уравнивания и оценки точности геодезических сетей нелинейными методами / С. Г. Шнитко // Вестник ПГУ. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2012. – № 8. – С. 133–135.

137. Шульц, Р. В. Опыт использования современных технологий в задачах геодезического мониторинга высотных зданий / Р. В. Шульц, А. А. Анненков, Н. В. Куличенко // Вестник МГСУ. – 2016. – № 1. – С. 80–93.

138. Шульц, Р. В. Наземное лазерное сканирование в задачах инженерной геодезии / Р. Шульц. – Кишинев: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 348 с.

139. Щербаков, В. В. Методика применения лазерных сканеров для геодезического обеспечения проектно-изыскательских работ на железной дороге / В. В. Щербаков // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2020. – Т. 64, № 3. – С. 289–297.

140. Щербаков, В. В. Исследование мобильного лазерного сканера «Сканпуть» при определении геопространственного положения железнодорожного пути / В. В. Щербаков // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Т. 25, № 2. – С. 98-108.

141. Яковлев, Н. В. Высшая геодезия : учебник для вузов / Н.В. Яковлев. – М.: Недра, 1989. – 445 с.

142. Ямбаев, Х. К. Мониторинг деформаций тоннелей методом наземного лазерного сканирования / Х. К. Ямбаев, Е. И. Горохова // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2014. – № S4. – С. 7–12.
143. Badenko, V. Integration of Digital Twin and BIM Technologies within Factories of the Future / V. Badenko, N. Bolshakov, E. Tishchenko, et al. // Magazine of Civil Engineering. – 2021. – Vol. 101. – № 1. – P. 10114.
144. Besl, P. J. A method for registration of 3-D shapes / P. J. Besl, N. D. McKay // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1992. – Vol. 14. – № 2. – P. 239–356.
145. Boyd, S., Vandenberghe, L. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – Cambridge University Press, 2004. – 716 p.
146. Cassano, M. LOD Standardization for Construction Site Elements / M. Cassano, M. L. Trani // Procedia Engineering. – 2017. – № 196 – P. 1057–1064.
147. Chacón, R. TLS measurements of initial imperfections of steel frames for structural analysis within BIM-enabled platforms / R. Chacón, C. Puig-Polo, E. Real // Automation in Construction. – 2021. – № 125. – P. 103618.
148. Cunha, C. Designing the Digital Twins of Reconfigurable Manufacturing Systems: application on a smart factory / C. Cunha, O. Cardin, G. Gallot, J. Viaud // IFAC-PapersOnLine. – 2021. Vol. 54. – № 1. – P. 100289.
149. Deb, S. Variational Monte Carlo Technique / S. Deb // Resonance. – 2014. – Vol. 19. – P. 713–738.
150. Eriksson, A. Virtual factory layouts from 3D laser scanning – A novel framework to define solid model requirements / A. Eriksson, E. Sedelius, J. Berglund, B. Johansson // Procedia CIRP. – 2018. – № 76. – P. 36–41.
151. Esfahani, M. E. Quantitative investigation on the accuracy and precision of Scan-to-BIM under different modelling scenarios / M. E. Esfahani, C. Rausch, M. M. Sharif, [et al.] // Automation in Construction. – 2021. – № 126. – P. 103686.
152. Fletcher, R. Practical methods of optimization. – New York: Wiley, 1988. – 456 p.

153. Grant, D. Point-to-plane registration of terrestrial laser scans / D. Grant, J. Bethel, M. Crawford // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. – 2012. – Vol. 72. – P. 16–26.

154. Gruen, A. Least squares 3D surface and curve matching / A. Gruen, D. Akca // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. – 2005. – Vol. 59. – № 3. – P. 151–174.

155. Grytting, I. Use of LoD Decision Plan in BIM-projects // I. Grytting, F. Svalestuen, J. Lohne, [et al.] // *Procedia Engineering*. – 2017. – № 196. – P. 407–414.

156. Hancock, J. A. Laser intensity-based obstacle detection and tracking : Doctoral dissertation, technical report CMU-RI-TR-99-01 / John A. Hancock – Pittsburgh, Pennsylvania, 1999. – 180 p.

157. Herr, C. M. BIM adoption across the Chinese AEC industries: An extended BIM adoption model / C. M. Herr, T. Fischer // *Journal of Computational Design and Engineering*. – 2019. – Vol. 6. – № 2. – P. 173–178.

158. Hijazi, A. A. Level of detail specifications, standards and file-format challenges in infrastructure projects for BIM level three / A. A. Hijazi, H. A. Omar // *WIT Transactions on The Built Environment*. – 2017. – № 169. – P. 143–154.

159. Hossain, M.A.J. BIM for Existing Buildings: Potential Opportunities and Barriers / M. A. J. Hossain, K. W. Yeoh // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2018. – № 371. – P. 1–9.

160. Kamble, S. S. Digital twin for sustainable manufacturing supply chains: Current trends, future perspectives, and an implementation framework / S. S. Kamble, A. Gunasekaran, H. Parekh, V. Mani, A. Belhadi, R. Sharma // *Technological Forecasting and Social Change*. – 2022. Vol. 176. – P. 121448.

161. Kassem, M. BIM in facilities management applications: A case study of a large university complex / M. Kassem, G. Kelly, N. Dawood, et al. // *Built Environment Project and Asset Management*. – 2015. – Vol. 5. – № 3. – P. 261–277.

162. **Kuznetsova, A.** Bringing safety, productivity with laser scanning / A. Kuznetsova // *Reporter. Leica Geosystems*. – 2017. – № 78. – URL: <https://leica->

geosystems.com/ru/about-us/news-room/customer-magazine/reporter-78/bringing-safety-productivity-with-laser-scanning (дата обращения: 08.04.2022).

163. **Kuznetsova, A.** The Terrestrial laser scanning during the industrial object construction results analysis / A. Kuznetsova, M. Ja. Bryn // IOP conference series: materials science and engineering. – 2019. – P. 044008.

164. **Kuznetsova, A.** The Use of Terrestrial Laser Scanning for the Development and Control the Design Documentation of Reconstruction Projects / A. Kuznetsova // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2019. – №. 50. – P. 177–184.

165. Leick, A. GPS satellite surveying. – New York: Wiley, 2004. – 840 p.

166. Li, L. Digital twin in smart manufacturing / L. Li, B. Lei, C. Mao // Journal of Industrial Information Integration. – 2022. Vol. 26. – P. 874–879.

167. Li, P. Evaluation of the ICP Algorithm in 3D Point Cloud Registration / P. Li, R. Wang, Y. Wang, W. Tao // IEEE Access. – 2020.

168. Li, Y. An accurate registration method based on point clouds and redundancy elimination of lidar data / Y. Li, Y. Wang // ISPRS Archives. – 2008. – Vol. 37. – № 5. – P. 605–610.

169. Lichti, D. D. Angular resolution measure for terrestrial laser scanners / D. D. Lichti // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Sciences. – 2006. – Vol. 21. – №114. – P. 141–160.

170. Lichti, D. D. The impact of angle parameterisation on terrestrial laser scanner self-calibration / D. D. Lichti // International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Science. – 2009. – Vol. 38. – №3. – P. 171–176.

171. Lu, J. Robust total least squares with reweighting iteration for three-dimensional similarity transformation / J. Lu, Y. Chen, B. F. Li, X. Fang // Survey Review. – 2014. – Vol. 46. – № 334. – P. 28–36.

172. McArthur, J. J. A Building Information Management (BIM) Framework and Supporting Case Study for Existing Building Operations, Maintenance and Sustainability / J. J. McArthur // Procedia Engineering. – 2015. – № 118. – P. 1104–1111.

173. Nicał, A. Enhancing Facility Management through BIM 6D / A. Nicał, W. A. Wodyński // *Procedia Engineering*. – 2016. – № 164. – P. 299–306.
174. Nocedal, J., Wright S. Numerical optimization. – New York: Springer, 2006. – 683 p.
175. Reshetyuk, Y. Self-calibration and direct georeferencing in terrestrial laser scanning : Doctoral thesis in Infrastructure, Geodesy / Yuriy Reshetyuk – Stockholm, 2009. – 174 p.
176. Ruzsa, C. Digital twin technology – external data resources in creating the model and classification of different digital twin types in manufacturing / C. Ruzsa // *Procedia Manufacturing*. – 2021. – № 54. – P. 209–215.
177. Saptari, A.Y. Level of Detail Analysis for Property and Building Information Modelling (BIM) Integration / A. Y. Saptari, S. Hendriatiningsih, A. Hernandi, [et al.] // *International Journal of Geoinformatics*. – 2020. – Vol. 16. – № 2. P. 89–97.
178. Shen, Y. Morbidity problems and solutions of bursa model for local region coordinate transformation / Y. Shen, L. Hu, B. Li // *Acta Geodaetica Et Cartographica Sinica*. – 2006. – Vol. 35. – № 1. – P. 95–98.
179. Soler, T. A compendium of transformation formulas useful in GPS work / T. Soler // *Journal of Geodesy*. – 1998. – Vol. 72. – P. 482–490.
180. Tan Qu, T. Usage of 3D Point Cloud Data in BIM (Building Information Modelling): Current Applications and Challenges / T. Tan Qu, W. Sun // *Journal of Civil Engineering and Architecture*. – 2015. – № 9. – P. 1269–1278.
181. Tao, Y. Q. TLS algorithm for GPS height fitting based on robust estimation / Y. Q. Tao, J. X. Gao, Y. F. Yao // *Survey Review*. – 2014. – Vol. 46. – № 336. – P. 184–188.
182. Trani, M.L. BIM Level of Detail for Construction Site Design / M. L. Trani, M. Cassano, D. Todaro, et al. // *Procedia Engineering*. – 2015. – № 123. – P. 581–589.

183. Volkov, A. Information Management in the Application of BIM in Construction. Stages of Construction / A. Volkov, P. Chelyshkov, D. Lysenko // *Procedia Engineering*. – 2016. – № 153. – P. 833–837.

184. Wolf, H. Scale and orientation in combined Doppler and triangulation nets / H. Wolf // *Bulletin Geodesique*. – 1980. – Vol. 54. – № 1. – P. 45–53.

185. Yang, Y. Robust estimation of geodetic datum transformation / Y. Yang // *Journal of Geodesy*. – 1999. – № 7. – P. 268–274.

186. Zhang, Z. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Z. Zhang // *International Journal of Computer Vision*. – 1994. – Vol. 13. – № 2. – P. 119–148.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Расчет влияния угла падения лазерного луча на ошибку измерения расстояний

Расстояние до объекта измерений, м	Ошибка ΔR измерения расстояний (мм), при различных углах γ падения лазерного луча на поверхность объекта																	
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	89°
5	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0017	0,0023	0,0035	0,0071	0,0358
10	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,001	0,0012	0,0015	0,0018	0,0022	0,0027	0,0034	0,0047	0,0071	0,0143	0,0716
15	0,0002	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0027	0,0032	0,004	0,0052	0,007	0,0106	0,0214	0,1074
20	0,0002	0,0004	0,0007	0,0009	0,0012	0,0014	0,0018	0,0021	0,0025	0,003	0,0036	0,0043	0,0054	0,0069	0,0093	0,0142	0,0286	0,1432
25	0,0003	0,0006	0,0008	0,0011	0,0015	0,0018	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0045	0,0054	0,0067	0,0086	0,0117	0,0177	0,0357	0,179
30	0,0003	0,0007	0,001	0,0014	0,0017	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0045	0,0054	0,0065	0,008	0,0103	0,014	0,0213	0,0429	0,2148
35	0,0004	0,0008	0,0012	0,0016	0,002	0,0025	0,0031	0,0037	0,0044	0,0052	0,0062	0,0076	0,0094	0,012	0,0163	0,0248	0,05	0,2506
40	0,0004	0,0009	0,0013	0,0018	0,0023	0,0029	0,0035	0,0042	0,005	0,006	0,0071	0,0087	0,0107	0,0137	0,0187	0,0284	0,0572	0,2864
45	0,0005	0,001	0,0015	0,002	0,0026	0,0032	0,0039	0,0047	0,0056	0,0067	0,008	0,0097	0,0121	0,0155	0,021	0,0319	0,0643	0,3222
50	0,0005	0,0011	0,0017	0,0023	0,0029	0,0036	0,0044	0,0052	0,0062	0,0074	0,0089	0,0108	0,0134	0,0172	0,0233	0,0354	0,0714	0,358
55	0,0006	0,0012	0,0018	0,0025	0,0032	0,004	0,0048	0,0058	0,0069	0,0082	0,0098	0,0119	0,0147	0,0189	0,0257	0,039	0,0786	0,3938
60	0,0007	0,0013	0,002	0,0027	0,0035	0,0043	0,0053	0,0063	0,0075	0,0089	0,0107	0,013	0,0161	0,0206	0,028	0,0425	0,0857	0,4296
65	0,0007	0,0014	0,0022	0,003	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081	0,0097	0,0116	0,0141	0,0174	0,0223	0,0303	0,0461	0,0929	0,4654
70	0,0008	0,0015	0,0023	0,0032	0,0041	0,0051	0,0061	0,0073	0,0087	0,0104	0,0125	0,0152	0,0188	0,024	0,0327	0,0496	0,1	0,5012
75	0,0008	0,0017	0,0025	0,0034	0,0044	0,0054	0,0066	0,0079	0,0094	0,0112	0,0134	0,0162	0,0201	0,0258	0,035	0,0532	0,1072	0,537
80	0,0009	0,0018	0,0027	0,0036	0,0047	0,0058	0,007	0,0084	0,01	0,0119	0,0143	0,0173	0,0214	0,0275	0,0373	0,0567	0,1143	0,5728
85	0,0009	0,0019	0,0028	0,0039	0,005	0,0061	0,0074	0,0089	0,0106	0,0127	0,0152	0,0184	0,0228	0,0292	0,0397	0,0603	0,1214	0,6086
90	0,001	0,002	0,003	0,0041	0,0052	0,0065	0,0079	0,0094	0,0112	0,0134	0,0161	0,0195	0,0241	0,0309	0,042	0,0638	0,1286	0,6444
95	0,001	0,0021	0,0032	0,0043	0,0055	0,0069	0,0083	0,01	0,0119	0,0142	0,017	0,0206	0,0255	0,0326	0,0443	0,0673	0,1357	0,6802
100	0,0011	0,0022	0,0033	0,0045	0,0058	0,0072	0,0088	0,0105	0,0125	0,0149	0,0179	0,0217	0,0268	0,0343	0,0467	0,0709	0,1429	0,716

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Результаты проектирования опорной сети по разработанной методике

Шаг 1. Инициализация исходных

Rp1 := (13029.483 12446.894 140.896)
 Rp2 := (12871.668 12884.399 141.008)
 Rp3 := (12681.879 12926.902 140.206)
 St1 := (12680.832 12872.461 138.720)
 St2 := (12693.313 12759.820 139.158)
 St3 := (12804.029 12758.640 139.913)
 St4 := (13014.331 12761.510 142.508)
 St5 := (13004.471 12536.488 142.508)
 St6 := (12809.629 12549.463 138.383)
 St7 := (12675.093 12539.803 137.296)
 St8 := (12807.997 12651.888 139.014)

Шаг 2. Вычисление "приближенных результатов измерений"

$$\begin{aligned}
 \Delta X := & \begin{pmatrix} Rp2_{0,0} - St1_{0,0} \\ Rp3_{0,0} - St1_{0,0} \\ St2_{0,0} - St1_{0,0} \\ St1_{0,0} - St2_{0,0} \\ St3_{0,0} - St2_{0,0} \\ St2_{0,0} - St3_{0,0} \\ St4_{0,0} - St3_{0,0} \\ St8_{0,0} - St3_{0,0} \\ St3_{0,0} - St4_{0,0} \\ St5_{0,0} - St4_{0,0} \\ St4_{0,0} - St5_{0,0} \\ St6_{0,0} - St5_{0,0} \\ Rp1_{0,0} - St5_{0,0} \\ St5_{0,0} - St6_{0,0} \\ St7_{0,0} - St6_{0,0} \\ St8_{0,0} - St6_{0,0} \\ St6_{0,0} - St7_{0,0} \\ St2_{0,0} - St7_{0,0} \\ St3_{0,0} - St8_{0,0} \\ St6_{0,0} - St8_{0,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190.836 \\ 12.047 \\ 12.481 \\ -12.481 \\ 110.716 \\ -110.716 \\ 210.302 \\ 3.968 \\ -210.302 \\ -9.860 \\ 9.860 \\ -194.842 \\ 194.842 \\ -134.536 \\ -1.632 \\ 134.536 \\ 18.220 \\ -3.968 \\ 1.632 \end{pmatrix} \\
 \Delta Y := & \begin{pmatrix} Rp2_{0,1} - St1_{0,1} \\ Rp3_{0,1} - St1_{0,1} \\ St2_{0,1} - St1_{0,1} \\ St1_{0,1} - St2_{0,1} \\ St3_{0,1} - St2_{0,1} \\ St2_{0,1} - St3_{0,1} \\ St4_{0,1} - St3_{0,1} \\ St8_{0,1} - St3_{0,1} \\ St3_{0,1} - St4_{0,1} \\ St5_{0,1} - St4_{0,1} \\ St4_{0,1} - St5_{0,1} \\ St6_{0,1} - St5_{0,1} \\ Rp1_{0,1} - St5_{0,1} \\ St5_{0,1} - St6_{0,1} \\ St7_{0,1} - St6_{0,1} \\ St8_{0,1} - St6_{0,1} \\ St6_{0,1} - St7_{0,1} \\ St2_{0,1} - St7_{0,1} \\ St3_{0,1} - St8_{0,1} \\ St6_{0,1} - St8_{0,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.938 \\ 54.441 \\ -112.641 \\ 112.641 \\ -1.180 \\ 1.180 \\ 2.870 \\ -106.752 \\ -2.870 \\ -225.022 \\ 225.022 \\ 12.975 \\ -12.975 \\ -9.660 \\ 102.425 \\ 9.660 \\ 220.017 \\ 106.752 \\ -102.425 \end{pmatrix} \\
 \Delta H := & \begin{pmatrix} Rp2_{0,2} - St1_{0,2} \\ Rp3_{0,2} - St1_{0,2} \\ St2_{0,2} - St1_{0,2} \\ St1_{0,2} - St2_{0,2} \\ St3_{0,2} - St2_{0,2} \\ St2_{0,2} - St3_{0,2} \\ St4_{0,2} - St3_{0,2} \\ St8_{0,2} - St3_{0,2} \\ St3_{0,2} - St4_{0,2} \\ St5_{0,2} - St4_{0,2} \\ St4_{0,2} - St5_{0,2} \\ St6_{0,2} - St5_{0,2} \\ Rp1_{0,2} - St5_{0,2} \\ St5_{0,2} - St6_{0,2} \\ St7_{0,2} - St6_{0,2} \\ St8_{0,2} - St6_{0,2} \\ St6_{0,2} - St7_{0,2} \\ St2_{0,2} - St7_{0,2} \\ St3_{0,2} - St8_{0,2} \\ St6_{0,2} - St8_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.288 \\ 1.486 \\ 0.438 \\ -0.438 \\ 0.755 \\ -0.755 \\ 2.595 \\ -0.899 \\ -2.595 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -4.125 \\ 4.125 \\ -1.087 \\ 0.631 \\ 1.087 \\ 1.862 \\ 0.899 \\ -0.631 \end{pmatrix} \\
 A0 := & \begin{pmatrix} \operatorname{atan}(\Delta Y_0 + \Delta X_0) \\ \operatorname{atan}(\Delta Y_1 + \Delta X_1) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_2 + \Delta X_2) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_3 + \Delta X_3) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_4 + \Delta X_4) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_5 + \Delta X_5) \\ \operatorname{atan}(\Delta Y_6 + \Delta X_6) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_7 + \Delta X_7) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_8 + \Delta X_8) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_9 + \Delta X_9) \\ \operatorname{atan}(\Delta Y_{10} + \Delta X_{10}) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{11} + \Delta X_{11}) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{12} + \Delta X_{12}) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{13} + \Delta X_{13}) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{14} + \Delta X_{14}) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{15} + \Delta X_{15}) \\ \operatorname{atan}(\Delta Y_{16} + \Delta X_{16}) \\ \operatorname{atan}(\Delta Y_{17} + \Delta X_{17}) \\ \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{18} + \Delta X_{18}) \\ 2 \cdot \pi + \operatorname{atan}(\Delta Y_{19} + \Delta X_{19}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 1.552 \\ 4.823 \\ 1.681 \\ 6.273 \\ 3.131 \\ 0.014 \\ 4.75 \\ 3.155 \\ 4.669 \\ 1.527 \\ 3.075 \\ 4.985 \\ 6.217 \\ 3.213 \\ 1.587 \\ 0.072 \\ 1.488 \\ 1.608 \\ 4.728 \end{pmatrix} \\
 Agrad := & \begin{pmatrix} A0_0 \cdot (180 + \pi) \\ A0_1 \cdot (180 + \pi) \\ A0_2 \cdot (180 + \pi) \\ A0_3 \cdot (180 + \pi) \\ A0_4 \cdot (180 + \pi) \\ A0_5 \cdot (180 + \pi) \\ A0_6 \cdot (180 + \pi) \\ A0_7 \cdot (180 + \pi) \\ A0_8 \cdot (180 + \pi) \\ A0_9 \cdot (180 + \pi) \\ A0_{10} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{11} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{12} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{13} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{14} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{15} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{16} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{17} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{18} \cdot (180 + \pi) \\ A0_{19} \cdot (180 + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.58 \\ 88.898 \\ 276.323 \\ 96.323 \\ 359.389 \\ 179.389 \\ 0.782 \\ 272.129 \\ 180.782 \\ 267.491 \\ 87.491 \\ 176.19 \\ 285.598 \\ 356.19 \\ 184.107 \\ 90.913 \\ 4.107 \\ 85.266 \\ 92.129 \\ 270.913 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Продолжение приложения Б

$$\begin{aligned}
 \text{NI} := & \begin{pmatrix} \text{atan}(\Delta Y_0 \div \Delta X_0) - A0_0 \\ \text{atan}(\Delta Y_1 \div \Delta X_1) - A0_1 \\ \text{atan}(\Delta Y_2 \div \Delta X_2) - A0_2 \\ \text{atan}(\Delta Y_3 \div \Delta X_3) - A0_3 \\ \text{atan}(\Delta Y_4 \div \Delta X_4) - A0_4 \\ \text{atan}(\Delta Y_5 \div \Delta X_5) - A0_5 \\ \text{atan}(\Delta Y_6 \div \Delta X_6) - A0_6 \\ \text{atan}(\Delta Y_7 \div \Delta X_7) - A0_7 \\ \text{atan}(\Delta Y_8 \div \Delta X_8) - A0_8 \\ \text{atan}(\Delta Y_9 \div \Delta X_9) - A0_9 \\ \text{atan}(\Delta Y_{10} \div \Delta X_{10}) - A0_{10} \\ \text{atan}(\Delta Y_{11} \div \Delta X_{11}) - A0_{11} \\ \text{atan}(\Delta Y_{12} \div \Delta X_{12}) - A0_{12} \\ \text{atan}(\Delta Y_{13} \div \Delta X_{13}) - A0_{13} \\ \text{atan}(\Delta Y_{14} \div \Delta X_{14}) - A0_{14} \\ \text{atan}(\Delta Y_{15} \div \Delta X_{15}) - A0_{15} \\ \text{atan}(\Delta Y_{16} \div \Delta X_{16}) - A0_{16} \\ \text{atan}(\Delta Y_{17} \div \Delta X_{17}) - A0_{17} \\ \text{atan}(\Delta Y_{18} \div \Delta X_{18}) - A0_{18} \\ \text{atan}(\Delta Y_{19} \div \Delta X_{19}) - A0_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.283 \\ -3.142 \\ -6.283 \\ -3.142 \\ 0 \\ -6.283 \\ -3.142 \\ -3.142 \\ 0 \\ -3.142 \\ -6.283 \\ -6.283 \\ -3.142 \\ -3.142 \\ 0 \\ 0 \\ -3.142 \\ -3.142 \\ 0 \\ 0 \\ -6.283 \end{pmatrix} \\
 \text{D} := & \begin{pmatrix} \sqrt{(\Delta X_0)^2 + (\Delta Y_0)^2 + (\Delta H_0)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_1)^2 + (\Delta Y_1)^2 + (\Delta H_1)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_2)^2 + (\Delta Y_2)^2 + (\Delta H_2)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_3)^2 + (\Delta Y_3)^2 + (\Delta H_3)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_4)^2 + (\Delta Y_4)^2 + (\Delta H_4)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_5)^2 + (\Delta Y_5)^2 + (\Delta H_5)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_6)^2 + (\Delta Y_6)^2 + (\Delta H_6)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_7)^2 + (\Delta Y_7)^2 + (\Delta H_7)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_8)^2 + (\Delta Y_8)^2 + (\Delta H_8)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_9)^2 + (\Delta Y_9)^2 + (\Delta H_9)^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{10})^2 + (\Delta Y_{10})^2 + (\Delta H_{10})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{11})^2 + (\Delta Y_{11})^2 + (\Delta H_{11})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{12})^2 + (\Delta Y_{12})^2 + (\Delta H_{12})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{13})^2 + (\Delta Y_{13})^2 + (\Delta H_{13})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{14})^2 + (\Delta Y_{14})^2 + (\Delta H_{14})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{15})^2 + (\Delta Y_{15})^2 + (\Delta H_{15})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{16})^2 + (\Delta Y_{16})^2 + (\Delta H_{16})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{17})^2 + (\Delta Y_{17})^2 + (\Delta H_{17})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{18})^2 + (\Delta Y_{18})^2 + (\Delta H_{18})^2} \\ \sqrt{(\Delta X_{19})^2 + (\Delta Y_{19})^2 + (\Delta H_{19})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 191.223 \\ 54.471 \\ 113.331 \\ 113.331 \\ 110.725 \\ 210.338 \\ 106.83 \\ 210.338 \\ 225.238 \\ 225.238 \\ 195.317 \\ 93.034 \\ 195.317 \\ 134.887 \\ 102.44 \\ 134.887 \\ 220.778 \\ 106.83 \\ 102.44 \end{pmatrix} \\
 \text{z} := & \begin{pmatrix} \text{acos}(\Delta H_0 \div D_0) \\ \text{acos}(\Delta H_1 \div D_1) \\ \text{acos}(\Delta H_2 \div D_2) \\ \text{acos}(\Delta H_3 \div D_3) \\ \text{acos}(\Delta H_4 \div D_4) \\ \text{acos}(\Delta H_5 \div D_5) \\ \text{acos}(\Delta H_6 \div D_6) \\ \text{acos}(\Delta H_7 \div D_7) \\ \text{acos}(\Delta H_8 \div D_8) \\ \text{acos}(\Delta H_9 \div D_9) \\ \text{acos}(\Delta H_{10} \div D_{10}) \\ \text{acos}(\Delta H_{11} \div D_{11}) \\ \text{acos}(\Delta H_{12} \div D_{12}) \\ \text{acos}(\Delta H_{13} \div D_{13}) \\ \text{acos}(\Delta H_{14} \div D_{14}) \\ \text{acos}(\Delta H_{15} \div D_{15}) \\ \text{acos}(\Delta H_{16} \div D_{16}) \\ \text{acos}(\Delta H_{17} \div D_{17}) \\ \text{acos}(\Delta H_{18} \div D_{18}) \\ \text{acos}(\Delta H_{19} \div D_{19}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.559 \\ 1.544 \\ 1.567 \\ 1.575 \\ 1.564 \\ 1.578 \\ 1.558 \\ 1.579 \\ 1.583 \\ 1.571 \\ 1.571 \\ 1.592 \\ 1.588 \\ 1.55 \\ 1.579 \\ 1.565 \\ 1.563 \\ 1.562 \\ 1.562 \\ 1.577 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ni := stack(NI, D, z)

Шаг 3. Определение СКО "измерений" n

mD := 0.003 mz := 0.000024241 mN := mz \div $\sqrt{2}$

Шаг 4. Составление матрицы P

P :=
 ...\Matrix_P.xlsx

Продолжение приложения Б

Шаг 6. Вычисление "результатов измерений" n' и формирование вектора L

$\xi n1 := \text{stack}(\xi N1, \xi D1, \xi z1)$	$\xi n21 := \text{stack}(\xi N21, \xi D21, \xi z21)$	$\xi n41 := \text{stack}(\xi N41, \xi D41, \xi z41)$	$\xi n61 := \text{stack}(\xi N61, \xi D61, \xi z61)$	$\xi n81 := \text{stack}(\xi N81, \xi D81, \xi z81)$
$\xi n2 := \text{stack}(\xi N2, \xi D2, \xi z2)$	$\xi n22 := \text{stack}(\xi N22, \xi D22, \xi z22)$	$\xi n42 := \text{stack}(\xi N42, \xi D42, \xi z42)$	$\xi n62 := \text{stack}(\xi N62, \xi D62, \xi z62)$	$\xi n82 := \text{stack}(\xi N82, \xi D82, \xi z82)$
$\xi n3 := \text{stack}(\xi N3, \xi D3, \xi z3)$	$\xi n23 := \text{stack}(\xi N23, \xi D23, \xi z23)$	$\xi n43 := \text{stack}(\xi N43, \xi D43, \xi z43)$	$\xi n63 := \text{stack}(\xi N63, \xi D63, \xi z63)$	$\xi n83 := \text{stack}(\xi N83, \xi D83, \xi z83)$
$\xi n4 := \text{stack}(\xi N4, \xi D4, \xi z4)$	$\xi n24 := \text{stack}(\xi N24, \xi D24, \xi z24)$	$\xi n44 := \text{stack}(\xi N44, \xi D44, \xi z44)$	$\xi n64 := \text{stack}(\xi N64, \xi D64, \xi z64)$	$\xi n84 := \text{stack}(\xi N84, \xi D84, \xi z84)$
$\xi n5 := \text{stack}(\xi N5, \xi D5, \xi z5)$	$\xi n25 := \text{stack}(\xi N25, \xi D25, \xi z25)$	$\xi n45 := \text{stack}(\xi N45, \xi D45, \xi z45)$	$\xi n65 := \text{stack}(\xi N65, \xi D65, \xi z65)$	$\xi n85 := \text{stack}(\xi N85, \xi D85, \xi z85)$
$\xi n6 := \text{stack}(\xi N6, \xi D6, \xi z6)$	$\xi n26 := \text{stack}(\xi N26, \xi D26, \xi z26)$	$\xi n46 := \text{stack}(\xi N46, \xi D46, \xi z46)$	$\xi n66 := \text{stack}(\xi N66, \xi D66, \xi z66)$	$\xi n86 := \text{stack}(\xi N86, \xi D86, \xi z86)$
$\xi n7 := \text{stack}(\xi N7, \xi D7, \xi z7)$	$\xi n27 := \text{stack}(\xi N27, \xi D27, \xi z27)$	$\xi n47 := \text{stack}(\xi N47, \xi D47, \xi z47)$	$\xi n67 := \text{stack}(\xi N67, \xi D67, \xi z67)$	$\xi n87 := \text{stack}(\xi N87, \xi D87, \xi z87)$
$\xi n8 := \text{stack}(\xi N8, \xi D8, \xi z8)$	$\xi n28 := \text{stack}(\xi N28, \xi D28, \xi z28)$	$\xi n48 := \text{stack}(\xi N48, \xi D48, \xi z48)$	$\xi n68 := \text{stack}(\xi N68, \xi D68, \xi z68)$	$\xi n88 := \text{stack}(\xi N88, \xi D88, \xi z88)$
$\xi n9 := \text{stack}(\xi N9, \xi D9, \xi z9)$	$\xi n29 := \text{stack}(\xi N29, \xi D29, \xi z29)$	$\xi n49 := \text{stack}(\xi N49, \xi D49, \xi z49)$	$\xi n69 := \text{stack}(\xi N69, \xi D69, \xi z69)$	$\xi n89 := \text{stack}(\xi N89, \xi D89, \xi z89)$
$\xi n10 := \text{stack}(\xi N10, \xi D10, \xi z10)$	$\xi n30 := \text{stack}(\xi N30, \xi D30, \xi z30)$	$\xi n50 := \text{stack}(\xi N50, \xi D50, \xi z50)$	$\xi n70 := \text{stack}(\xi N70, \xi D70, \xi z70)$	$\xi n90 := \text{stack}(\xi N90, \xi D90, \xi z90)$
$\xi n11 := \text{stack}(\xi N11, \xi D11, \xi z11)$	$\xi n31 := \text{stack}(\xi N31, \xi D31, \xi z31)$	$\xi n51 := \text{stack}(\xi N51, \xi D51, \xi z51)$	$\xi n71 := \text{stack}(\xi N71, \xi D71, \xi z71)$	$\xi n91 := \text{stack}(\xi N91, \xi D91, \xi z91)$
$\xi n12 := \text{stack}(\xi N12, \xi D12, \xi z12)$	$\xi n32 := \text{stack}(\xi N32, \xi D32, \xi z32)$	$\xi n52 := \text{stack}(\xi N52, \xi D52, \xi z52)$	$\xi n72 := \text{stack}(\xi N72, \xi D72, \xi z72)$	$\xi n92 := \text{stack}(\xi N92, \xi D92, \xi z92)$
$\xi n13 := \text{stack}(\xi N13, \xi D13, \xi z13)$	$\xi n33 := \text{stack}(\xi N33, \xi D33, \xi z33)$	$\xi n53 := \text{stack}(\xi N53, \xi D53, \xi z53)$	$\xi n73 := \text{stack}(\xi N73, \xi D73, \xi z73)$	$\xi n93 := \text{stack}(\xi N93, \xi D93, \xi z93)$
$\xi n14 := \text{stack}(\xi N14, \xi D14, \xi z14)$	$\xi n34 := \text{stack}(\xi N34, \xi D34, \xi z34)$	$\xi n54 := \text{stack}(\xi N54, \xi D54, \xi z54)$	$\xi n74 := \text{stack}(\xi N74, \xi D74, \xi z74)$	$\xi n94 := \text{stack}(\xi N94, \xi D94, \xi z94)$
$\xi n15 := \text{stack}(\xi N15, \xi D15, \xi z15)$	$\xi n35 := \text{stack}(\xi N35, \xi D35, \xi z35)$	$\xi n55 := \text{stack}(\xi N55, \xi D55, \xi z55)$	$\xi n75 := \text{stack}(\xi N75, \xi D75, \xi z75)$	$\xi n95 := \text{stack}(\xi N95, \xi D95, \xi z95)$
$\xi n16 := \text{stack}(\xi N16, \xi D16, \xi z16)$	$\xi n36 := \text{stack}(\xi N36, \xi D36, \xi z36)$	$\xi n56 := \text{stack}(\xi N56, \xi D56, \xi z56)$	$\xi n76 := \text{stack}(\xi N76, \xi D76, \xi z76)$	$\xi n96 := \text{stack}(\xi N96, \xi D96, \xi z96)$
$\xi n17 := \text{stack}(\xi N17, \xi D17, \xi z17)$	$\xi n37 := \text{stack}(\xi N37, \xi D37, \xi z37)$	$\xi n57 := \text{stack}(\xi N57, \xi D57, \xi z57)$	$\xi n77 := \text{stack}(\xi N77, \xi D77, \xi z77)$	$\xi n97 := \text{stack}(\xi N97, \xi D97, \xi z97)$
$\xi n18 := \text{stack}(\xi N18, \xi D18, \xi z18)$	$\xi n38 := \text{stack}(\xi N38, \xi D38, \xi z38)$	$\xi n58 := \text{stack}(\xi N58, \xi D58, \xi z58)$	$\xi n78 := \text{stack}(\xi N78, \xi D78, \xi z78)$	$\xi n98 := \text{stack}(\xi N98, \xi D98, \xi z98)$
$\xi n19 := \text{stack}(\xi N19, \xi D19, \xi z19)$	$\xi n39 := \text{stack}(\xi N39, \xi D39, \xi z39)$	$\xi n59 := \text{stack}(\xi N59, \xi D59, \xi z59)$	$\xi n79 := \text{stack}(\xi N79, \xi D79, \xi z79)$	$\xi n99 := \text{stack}(\xi N99, \xi D99, \xi z99)$
$\xi n20 := \text{stack}(\xi N20, \xi D20, \xi z20)$	$\xi n40 := \text{stack}(\xi N40, \xi D40, \xi z40)$	$\xi n60 := \text{stack}(\xi N60, \xi D60, \xi z60)$	$\xi n80 := \text{stack}(\xi N80, \xi D80, \xi z80)$	$\xi n100 := \text{stack}(\xi N100, \xi D100, \xi z100)$

$L1 := ni - (ni + \xi n1)$	$L21 := ni - (ni + \xi n21)$	$L41 := ni - (ni + \xi n41)$	$L61 := ni - (ni + \xi n61)$	$L81 := ni - (ni + \xi n81)$
$L2 := ni - (ni + \xi n2)$	$L22 := ni - (ni + \xi n22)$	$L42 := ni - (ni + \xi n42)$	$L62 := ni - (ni + \xi n62)$	$L82 := ni - (ni + \xi n82)$
$L3 := ni - (ni + \xi n3)$	$L23 := ni - (ni + \xi n23)$	$L43 := ni - (ni + \xi n43)$	$L63 := ni - (ni + \xi n63)$	$L83 := ni - (ni + \xi n83)$
$L4 := ni - (ni + \xi n4)$	$L24 := ni - (ni + \xi n24)$	$L44 := ni - (ni + \xi n44)$	$L64 := ni - (ni + \xi n64)$	$L84 := ni - (ni + \xi n84)$
$L5 := ni - (ni + \xi n5)$	$L25 := ni - (ni + \xi n25)$	$L45 := ni - (ni + \xi n45)$	$L65 := ni - (ni + \xi n65)$	$L85 := ni - (ni + \xi n85)$
$L6 := ni - (ni + \xi n6)$	$L26 := ni - (ni + \xi n26)$	$L46 := ni - (ni + \xi n46)$	$L66 := ni - (ni + \xi n66)$	$L86 := ni - (ni + \xi n86)$
$L7 := ni - (ni + \xi n7)$	$L27 := ni - (ni + \xi n27)$	$L47 := ni - (ni + \xi n47)$	$L67 := ni - (ni + \xi n67)$	$L87 := ni - (ni + \xi n87)$
$L8 := ni - (ni + \xi n8)$	$L28 := ni - (ni + \xi n28)$	$L48 := ni - (ni + \xi n48)$	$L68 := ni - (ni + \xi n68)$	$L88 := ni - (ni + \xi n88)$
$L9 := ni - (ni + \xi n9)$	$L29 := ni - (ni + \xi n29)$	$L49 := ni - (ni + \xi n49)$	$L69 := ni - (ni + \xi n69)$	$L89 := ni - (ni + \xi n89)$
$L10 := ni - (ni + \xi n10)$	$L30 := ni - (ni + \xi n30)$	$L50 := ni - (ni + \xi n50)$	$L70 := ni - (ni + \xi n70)$	$L90 := ni - (ni + \xi n90)$
$L11 := ni - (ni + \xi n11)$	$L31 := ni - (ni + \xi n31)$	$L51 := ni - (ni + \xi n51)$	$L71 := ni - (ni + \xi n71)$	$L91 := ni - (ni + \xi n91)$
$L12 := ni - (ni + \xi n12)$	$L32 := ni - (ni + \xi n32)$	$L52 := ni - (ni + \xi n52)$	$L72 := ni - (ni + \xi n72)$	$L92 := ni - (ni + \xi n92)$
$L13 := ni - (ni + \xi n13)$	$L33 := ni - (ni + \xi n33)$	$L53 := ni - (ni + \xi n53)$	$L73 := ni - (ni + \xi n73)$	$L93 := ni - (ni + \xi n93)$
$L14 := ni - (ni + \xi n14)$	$L34 := ni - (ni + \xi n34)$	$L54 := ni - (ni + \xi n54)$	$L74 := ni - (ni + \xi n74)$	$L94 := ni - (ni + \xi n94)$
$L15 := ni - (ni + \xi n15)$	$L35 := ni - (ni + \xi n35)$	$L55 := ni - (ni + \xi n55)$	$L75 := ni - (ni + \xi n75)$	$L95 := ni - (ni + \xi n95)$
$L16 := ni - (ni + \xi n16)$	$L36 := ni - (ni + \xi n36)$	$L56 := ni - (ni + \xi n56)$	$L76 := ni - (ni + \xi n76)$	$L96 := ni - (ni + \xi n96)$
$L17 := ni - (ni + \xi n17)$	$L37 := ni - (ni + \xi n37)$	$L57 := ni - (ni + \xi n57)$	$L77 := ni - (ni + \xi n77)$	$L97 := ni - (ni + \xi n97)$
$L18 := ni - (ni + \xi n18)$	$L38 := ni - (ni + \xi n38)$	$L58 := ni - (ni + \xi n58)$	$L78 := ni - (ni + \xi n78)$	$L98 := ni - (ni + \xi n98)$
$L19 := ni - (ni + \xi n19)$	$L39 := ni - (ni + \xi n39)$	$L59 := ni - (ni + \xi n59)$	$L79 := ni - (ni + \xi n79)$	$L99 := ni - (ni + \xi n99)$
$L20 := ni - (ni + \xi n20)$	$L40 := ni - (ni + \xi n40)$	$L60 := ni - (ni + \xi n60)$	$L80 := ni - (ni + \xi n80)$	$L100 := ni - (ni + \xi n100)$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2022616904 от 07.04.2022 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022616904

**Проектирование геодезической сети при выполнении
наземного лазерного сканирования**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I» (ФГБОУ ВО ПГУПС) (RU)*

Авторы: *Шарафутдинова Анжелика Алексеевна (RU),
Брынь Михаил Ярославович (RU)*

Заявка № 2022616216

Дата поступления 07 апреля 2022 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 апреля 2022 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Результаты проектирования сканерной сети по разработанной методике

Проектирование сканерной сети

Технические параметры

SKO измерения зенитных расстояний, arcsec	SKO измерения зенитных расстояний, rad	SKO измерения наклонных расстояний, мм	SKO измерения горизонтальных направлений, arcsec	SKO измерения горизонтальных направлений, rad	SKO определения центра марки, мм	Разрешение сканирования, мм	Разрешение сканирования, arcsec	Расстояние сканирования, м	SKO сканирования, мм
0.0022	0.000038	0.001	0.0022	0.000038		0.0063	0.03610418	100	0.00113525

Группа	Имя станции ЛС	X	Y	Z	Имя специальной марки	X	Y	Z	SKO определения центра марки при построении геодезической сети, мм	Наклонное расстояние от станции ЛС до марки	Наклонное расстояние между соседними станциями ЛС	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO взаимного ориентирования, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм				
▶	ST1	12752.6931	12740.6936	142.3343	Tg1	12743.2643	12747.2224	139.158	0.0054	11.90026809	22.51415775	0.000835155				0.009630963	0.016338781		0.016378173					
					Tg2	12743.3816	12752.0369	139.158	0.0054	15.01543768		0.001065554												
					Tg3	12742.7214	12768.514	139.158	0.0054	29.72369995		0.002983193												
					Tg4	12750.5675	12769.8752	139.158	0.0054	29.43081439		0.002926457												
					Tg5	12753.2732	12754.7663	139.158	0.0054	14.43836151		0.001019530												
					Tg6	12755.1086	12747.1756	139.158	0.0054	7.61182277		0.000590699												
	ST2	12738.5891	12758.1354	140.3983												0.009451926								
	ST3	12746.9901	12776.1545	140.3983												0.010272133								
	ST4	12747.3588	12808.0953	140.5121												0.010434836								
	ST5	12748.5248	12842.3629	142.3343												0.009525880								
	ST6	12748.4316	12863.2376	140.3519												0.009998340								
	ST7	12745.2811	12890.9051	142.3343												0.011216612								
	ST8	12756.7735	12935.2734	142.3343												0.011210281								
	ST9	12743.3164	12978.9884	142.3343												0.009750098								
	ST10	12758.821	12997.6553	142.3343	Tg7	12739.7549	12999.2409	144.2098	0.0065	19.22362601	24.26614466	0.001454548			0.000343962		0.009750098							
Tg8					12750.9609	12992.6084	144.1746	0.0065	9.52045565		0.000686071													
Tg9					12757.3385	12994.7365	140.587	0.0065	3.71082969		0.000396317													
Tg10					12769.3557	12999.0676	142.508	0.0065	10.63036533		0.000752976													
Tg11					12769.7096	12990.8498	140.587	0.0065	12.95876142		0.000908631													
Tg12					12751.4322	12988.0842	140.587	0.0065	12.21692997		0.000856652													
	ST9	12743.3164	12978.9884	142.3343												0.009511914	0.016406525		0.016445755					
	ST11	12727.4468	12965.599	142.3343												0.009317725								
	ST12	12709.5391	12965.6265	142.3343												0.009477295								
	ST13	12689.9178	12970.6507	142.3343												0.009372191								
	ST14	12671.2927	12968.8842	142.3343												0.010981994								
	ST15	12629.9943	12959.3606	142.3343												0.010390411								
	ST16	12596.35	12960.9646	142.3343												0.009253668								
	ST17	12592.7872	12977.552	142.3343												0.009199885								
	ST18	12580.1698	12987.6725	142.3343												0.010195171								

Продолжение приложения Г

Проектирование сканерной сети

Технические параметры

SKO измерения зенитных расстояний, arcsec	SKO измерения зенитных расстояний, rad	SKO измерения наклонных расстояний, мм	SKO измерения горизонтальных направлений, arcsec	SKO измерения горизонтальных направлений, rad	SKO определения центра марки, мм	Разрешение сканирования, мм	Разрешение сканирования, arcsec	Расстояние сканирования, м	SKO сканирования, мм
0.0022	0.000038	0.001	0.0022	0.000038		0.0063	0.03610418	100	0.00113525

Группа	Имя станции ЛС	X	Y	Z	Имя специальной марки	X	Y	Z	SKO определения центра марки при построении геодезической сети, мм	Наклонное расстояние от станции ЛС до марки	Наклонное расстояние между соседними станциями ЛС	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO взаимного ориентирования, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм
	ST19	12553.7887	13003.5903	142.3343	Tg13	12550.3803	13014.5029	139.158	0.0055	11.86553459	26.09056282	0.000832823		0.000529442		0.009874158				
					Tg14	12558.6665	13002.8126	139.158	0.0055	5.87253198		0.000494043								
					Tg15	12568.7686	12999.3525	139.158	0.0055	15.88852525		0.001138320								
					Tg16	12578.742	12994.6612	139.158	0.0055	26.69241258		0.002440614								
					Tg17	12568.7485	12994.648	139.158	0.0055	17.71579033		0.001303656								
					Tg18	12559.2021	12984.2779	139.158	0.0055	20.30671256		0.001571715								
	ST20	12564.5203	12979.809	142.3343							26.07496598					0.009873098	0.017016433		0.017054260	
	ST21	12564.6921	12953.7346	142.3343							48.00579251					0.011364394				
	ST22	12573.1547	12906.4806	142.3343							29.97203062					0.010138098				
	ST23	12574.2226	12876.5276	142.3343							12.72074959					0.008965011				
	ST24	12575.2109	12863.8453	142.3343							49.37895261					0.011457769				
	ST25	12573.2175	12814.5066	142.3343							17.24431858					0.009272614				
	ST26	12557.1828	12808.8711	139.4195							27.70134312					0.009983691				
	ST27	12569.2418	12784.1032	142.3343							23.87439721					0.009723459				
	ST28	12562.4367	12761.2192	142.3343							13.23111162					0.008999716				
	ST29	12550.3776	12756.6209	139.4195	Tg19	12554.3351	12785.8152	137.294	0.0067	29.53788599	44.04525729	0.002947088		0.000595650		0.011095077				
					Tg20	12554.3832	12776.8135	137.294	0.0067	20.69549894		0.001615677								
					Tg21	12554.4208	12767.8178	137.294	0.0067	12.09279894		0.000848181								
					Tg22	12554.2557	12764.1431	137.294	0.0067	8.72587547		0.000640793								
					Tg23	12549.9958	12764.6771	138.449	0.0067	8.12342292		0.000607828								
	ST30	12594.317	12755.7166	142.3343							19.91933714					0.009454515	0.015207694		0.015250008	
	ST31	12614.023	12758.6241	142.3343							13.86390829					0.009042746				
	ST32	12627.8808	12759.0356	142.3343							14.24252613					0.009068492				
	ST33	12641.592	12762.8895	142.3343							15.03549309					0.009122414				
	ST34	12655.7963	12757.9596	142.3343							31.76597799					0.010260087				
	ST35	12687.0707	12763.5264	142.3343							31.23889031					0.010224245				
	ST36	12717.9487	12758.7917	142.3343							39.17543305					0.010763929				
	ST1	12752.6931	12740.6936	142.3343	Tg1	12743.2643	12747.2224	139.158	0.0054	11.90026809	22.51415775	0.000835155		0.000640309		0.009630963				
					Tg2	12743.3816	12752.0369	139.158	0.0054	15.01543768		0.001065554								

Продолжение приложения Г

Проектирование сканерной сети

Технические параметры

SKO измерения зенитных расстояний, arcsec	SKO измерения зенитных расстояний, rad	SKO измерения наклонных расстояний, мм	SKO измерения горизонтальных направлений, arcsec	SKO измерения горизонтальных направлений, rad	SKO определения центра марки, мм	Разрешение сканирования, мм	Разрешение сканирования, arcsec	Расстояние сканирования, м	SKO сканирования, мм
0.0022	0.000038	0.001	0.0022	0.000038		0.0063	0.03610418	100	0.00113525

Группа	Имя станции ЛС	X	Y	Z	Имя специальной марки	X	Y	Z	SKO определения центра марки при построении геодезической сети, мм	Наклонное расстояние от станции ЛС до марки	Наклонное расстояние между соседними станциями ЛС	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO определения центра марки лазерным сканером, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO преобразования координат станции ЛС, мм	SKO взаимного ориентирования, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения станции ЛС, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм	SKO определения положения точек лазерного отражения, мм
					Tg2	12743.3816	12752.0369	139.158	0.0054	15.01543768		0.001065554								
					Tg3	12742.7214	12768.514	139.158	0.0054	29.72369995		0.002983193								
					Tg4	12750.5675	12769.8752	139.158	0.0054	29.43081439		0.002926457								
					Tg5	12753.2732	12754.7663	139.158	0.0054	14.43836151		0.001019530								
					Tg6	12755.1086	12747.1756	139.158	0.0054	7.61182277		0.000580699								
	ST2	12738.5891	12758.1354	140.3983								19.88126671				0.009451926	0.013860165		0.013906580	
	ST3	12746.9901	12776.1545	140.3983								31.94313064				0.010272133				
	ST4	12747.3588	12808.0953	140.5121								25.88018329				0.009859852				
	ST37	12721.483	12808.5716	140.5121								15.58104098				0.009159511				
	ST38	12709.4241	12798.7049	140.5121								21.41670752				0.009556336				
	ST39	12699.6669	12806.971	140.5121								37.88970436				0.010676500				
	ST40	12651.8529	12808.0636	138.382	Tg24	12647.6131	12809.7143	138.382	0.0066	4.54980379	10.94724981	0.000433151		0.000217585		0.008844413				
					Tg25	12651.9284	12812.14	139.014	0.0066	4.12579219		0.000414385								
					Tg26	12659.2283	12811.1474	139.014	0.0066	8.01908795		0.000602233								
					Tg27	12644.1999	12802.4715	138.382	0.0066	9.47839604		0.000683622								
					Tg28	12650.0971	12802.7526	138.382	0.0066	5.59370670		0.000480891								
					Tg29	12654.1492	12800.808	139.3046	0.0066	7.66602347		0.000583547								
	ST41	12641.4555	12805.3805	140.5121								20.08395593				0.009465709	0.014501467		0.014545836	
	ST42	12621.3716	12805.3331	140.5121								5.02239796				0.008441523				
	ST43	12616.5987	12806.8964	140.5121								28.27696345				0.010022834				
	ST44	12588.4691	12804.0133	140.5121								31.68003414				0.010254242				
	ST26	12557.1828	12808.8711	139.4195								27.70134312				0.009983691				
	ST27	12569.2418	12784.1032	142.3343								23.87439721				0.009723459				
	ST28	12562.4367	12761.2192	142.3343								13.23111162				0.008999716				
	ST29	12550.3776	12756.6209	139.4195	Tg19	12554.3351	12785.8152	137.294	0.0067	29.53788599	17.895.88758586	0.002947088		0.000756467		0.008100000				
					Tg20	12554.3832	12776.8135	137.294	0.0067	20.69549894		0.001615677								
					Tg21	12554.4208	12767.8178	137.294	0.0067	12.09279894		0.000848181								
					Tg22	12554.2557	12764.1431	137.294	0.0067	8.72587547		0.000640793								
					Tg23	12549.9958	12764.6771	138.449	0.0067	8.12342292		0.000607828								

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Результаты уравнивания опорной сети, построенной на промышленном объекте

Оценка точности взаимного планового положения пунктов сети (по сторонам сети)

Тип стороны	Пункт1	Пункт2	Длина линии	Дир. угол	СКО расстояния	СКО угла	Относительная ошибка	СКО расстояния поперечное	СКО линии
1-разряд									
Min	ST1	70108	54,4515	88°53'56"	0,00374	4,1	14545	0,00109	0,00390
Max	ST7	ST2	220,7703	85°15'57"	0,00572	4,1	38574	0,00440	0,00722
По сети			145,8582		0,00489	3,7	29833	0,00269	0,00558
2-разряд									
Min	ST3	ST4	210,3218	0°46'55"	0,00435	3,2	48390	0,00329	0,00545
Max	ST5	ST4	225,2380	87°29'28"	0,00480	3,1	46880	0,00340	0,00589
По сети			176,1932		0,00482	3,3	36546	0,00288	0,00562

Ведомость оценки точности положения пунктов по результатам уравнивания

M min	Пункт	M max	Пункт	M средняя
0,00390	ST1	0,02207	548	0,01825

Пункт	M	Mx	My	a	b	α	Mh
1	2	3	4	5	6	7	8
525	0,02116	0,01935	0,00856	0,01935	0,00856	0°00'00"	0,00257
526	0,02116	0,01949	0,00825	0,01949	0,00825	0°00'00"	0,00264
527	0,02118	0,01973	0,00770	0,01973	0,00770	0°00'00"	0,00291
528	0,02118	0,02007	0,00674	0,02007	0,00674	0°00'00"	0,00289
529	0,02116	0,02011	0,00660	0,02011	0,00660	0°00'00"	0,00267
530	0,02115	0,02014	0,00647	0,02014	0,00647	0°00'00"	0,00255
531	0,02132	0,01839	0,01078	0,01839	0,01078	0°00'00"	0,00412
532	0,02132	0,01945	0,00873	0,01945	0,00873	0°00'00"	0,00364
533	0,02132	0,02011	0,00708	0,02011	0,00708	0°00'00"	0,00383
534	0,02132	0,01925	0,00918	0,01925	0,00918	0°00'00"	0,00352
535	0,02132	0,01859	0,01044	0,01859	0,01044	0°00'00"	0,00374
536	0,02132	0,01232	0,01740	0,01740	0,01232	90°00'00"	0,00371
537	0,02075	0,00264	0,02058	0,02058	0,00264	90°00'00"	0,00300
538	0,02075	0,00384	0,02039	0,02039	0,00384	90°00'00"	0,00265
539	0,02076	0,00506	0,02013	0,02013	0,00506	90°00'00"	0,00258
540	0,02075	0,00623	0,01979	0,01979	0,00623	90°00'00"	0,00232
541	0,02075	0,01347	0,01579	0,01579	0,01347	90°00'00"	0,00258
542	0,02075	0,01191	0,01699	0,01699	0,01191	90°00'00"	0,00275
543	0,02204	0,02047	0,00815	0,02047	0,00815	0°00'00"	0,00417
544	0,02204	0,02049	0,00813	0,02049	0,00813	0°00'00"	0,00419
545	0,02172	0,02034	0,00763	0,02034	0,00763	0°00'00"	0,00360
546	0,02172	0,00872	0,01990	0,01990	0,00872	90°00'00"	0,00469
547	0,02205	0,02053	0,00806	0,02053	0,00806	0°00'00"	0,00430
548	0,02207	0,02056	0,00801	0,02056	0,00801	0°00'00"	0,00443
549	0,02172	0,00833	0,02006	0,02006	0,00833	90°00'00"	0,00782
550	0,02204	0,02060	0,00783	0,02060	0,00783	0°00'00"	0,00413
551	0,02172	0,01943	0,00970	0,01943	0,00970	0°00'00"	0,00311
552	0,02172	0,01929	0,00999	0,01929	0,00999	0°00'00"	0,00794
553	0,02172	0,01224	0,01794	0,01794	0,01224	90°00'00"	0,00480
ST1	0,00390	0,00103	0,00376	0,00386	0,00058	102°56'03"	0,00130
ST2	0,00683	0,00295	0,00616	0,00648	0,00217	109°05'11"	0,00218
ST3	0,00695	0,00423	0,00552	0,00556	0,00417	101°04'22"	0,00258
ST4	0,00737	0,00466	0,00571	0,00612	0,00411	119°07'22"	0,00342
ST5	0,00550	0,00215	0,00507	0,00527	0,00158	106°47'48"	0,00213
ST6	0,00730	0,00411	0,00603	0,00638	0,00354	113°04'22"	0,00296
ST7	0,00912	0,00542	0,00734	0,00826	0,00386	121°21'04"	0,00349
ST8	0,00848	0,00371	0,00762	0,00767	0,00361	97°10'17"	0,00301

Примечание: Характеристики оценки точности M, Mx, My вычислены с учетом доверительного коэффициента, установленного в разделе Классы точности Свойств проекта.

Размеры полуосей эллипсов ошибок вычислены с доверительным коэффициентом 1.0 (68.3%).

Продолжение приложения Д

Ведомость поправок

Станция	Цель	Редуцированное значение	Поправка	Уравненное значение
1	2	3	4	5
Направления (наземные)				
ST1	70108	0°00'00"	-0,069041"	0°00'00"
	70036	274°40'50"	0,542082"	274°40'51"
	ST2	187°25'26"	-0,471330"	187°25'26"
ST2	ST1	0°00'00"	0,432937"	0°00'00"
	ST3	263°04'00"	-0,433178"	263°03'59"
ST3	ST2	0°00'00"	-1,427829"	359°59'59"
	ST4	181°23'28"	4,886758"	181°23'33"
	ST4	181°23'36"	-3,459242"	181°23'33"
ST4	ST3	0°00'00"	-0,144714"	0°00'00"
	ST5	86°42'32"	0,144372"	86°42'32"
ST5	ST4	0°00'00"	-0,971997"	359°59'59"
	69867	198°06'18"	6,364736"	198°06'24"
	69867	198°06'28"	-3,661264"	198°06'24"
	ST6	88°41'58"	-1,732236"	88°41'56"
ST6	ST5	0°00'00"	0,200990"	0°00'00"
	ST7	187°54'59"	0,205981"	187°55'00"
	ST8	94°43'22"	-0,407948"	94°43'21"
ST7	ST6	0°00'00"	-0,074739"	0°00'00"
	ST2	81°09'33"	0,074155"	81°09'33"
ST8	ST3	0°00'00"	-0,208831"	0°00'00"
	ST6	178°47'02"	0,208253"	178°47'02"
Расстояния (наземные)				
ST1	70108 (исх.)	54,4626	-0,0110	54,4515
	70036 (исх.)	191,2140	-0,0056	191,2084
	ST2	113,3278	0,0018	113,3297
ST2	ST1	113,3246	0,0051	113,3297
	ST3	110,7227	-0,0009	110,7218
ST3	ST2	110,7250	-0,0032	110,7218
	ST4	210,3190	0,0028	210,3218
	ST4	210,3190	0,0028	210,3218
ST4	ST3	210,3190	0,0028	210,3218
	ST5	225,2332	0,0048	225,2380
ST5	ST4	225,2324	0,0056	225,2380
	69867 (исх.)	93,0173	0,0027	93,0200
	69867 (исх.)	93,0162	0,0038	93,0200
	ST6	195,2795	-0,0059	195,2735
ST6	ST5	195,2778	-0,0043	195,2735
	ST7	134,8802	0,0024	134,8826
	ST8	102,4371	0,0006	102,4377
ST7	ST6	134,8818	0,0008	134,8826
	ST2	220,7772	-0,0069	220,7703
ST8	ST3	106,8234	0,0026	106,8260
	ST6	102,4355	0,0022	102,4377
Превышения (наземные)				
ST1	70108 (исх.)	1,4850	0,0009	1,4859
	70036 (исх.)	2,2923	-0,0044	2,2879
	ST2	0,4391	-0,0011	0,4380
ST2	ST1	-0,4392	0,0012	-0,4380
	ST3	0,7551	-0,0007	0,7544
ST3	ST2	-0,7540	-0,0004	-0,7544
	ST4	2,5983	-0,0026	2,5957
ST4	ST3	-2,5975	0,0017	-2,5957
	ST5	-1,9238	0,0028	-1,9211
ST5	ST4	1,9134	0,0077	1,9211
	69867 (исх.)	0,3104	-0,0015	0,3089
	ST6	-2,2074	0,0031	-2,2043
ST6	ST5	2,2043	0,0000	2,2043
	ST7	-1,0855	-0,0014	-1,0869
	ST8	0,6351	-0,0035	0,6316
ST7	ST6	1,0912	-0,0043	1,0869
	ST2	1,8544	0,0077	1,8622
ST8	ST3	0,8990	-0,0009	0,8981
	ST6	-0,6289	-0,0027	-0,6316

Продолжение приложения Д

Каталог координат и высот пунктов планово-высотного обоснования

Пункт	X	Y	H	Дирекционный угол	На пункт	Сторона	СКО дирекционного угла	СКО расстояния	Относительная ошибка
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Исходные									
69867	13029,4830	12446,8940	140,8960						
70036	12871,6680	12884,3990	141,0080						
70108	12681,8790	12926,9020	140,2060						
Определяемые									
ST1	12680,8327	12872,4605	138,7201	88°53'56"	70108	54,4515	0°00'04,1"	0,00374	1:14544
				3°34'47"	70036	191,2084	0°00'04,1"	0,00085	1:225854
				276°19'22"	ST2	113,3297	0°00'03,6"	0,00534	1:21204
ST2	12693,3136	12759,8202	139,1581	96°19'22"	ST1	113,3297	0°00'03,6"	0,00534	1:21204
				359°23'21"	ST3	110,7218	0°00'03,4"	0,00480	1:23059
ST3	12804,0290	12758,6398	139,9125	179°23'21"	ST2	110,7218	0°00'03,4"	0,00480	1:23059
				0°46'55"	ST4	210,3218	0°00'03,2"	0,00435	1:48390
ST4	13014,3312	12761,5103	142,5082	180°46'55"	ST3	210,3218	0°00'03,2"	0,00435	1:48390
				267°29'28"	ST5	225,2380	0°00'03,1"	0,00480	1:46880
ST5	13004,4713	12536,4883	140,5871	87°29'28"	ST4	225,2380	0°00'03,1"	0,00480	1:46880
				285°35'53"	69867	93,0200	0°00'03,5"	0,00527	1:17656
				176°11'25"	ST6	195,2735	0°00'03,4"	0,00465	1:42033
ST6	12809,6293	12549,4628	138,3828	356°11'25"	ST5	195,2735	0°00'03,4"	0,00465	1:42033
				184°06'24"	ST7	134,8826	0°00'03,7"	0,00485	1:27835
				90°54'46"	ST8	102,4377	0°00'03,8"	0,00558	1:18354
ST7	12675,0930	12539,8031	137,2959	4°06'24"	ST6	134,8826	0°00'03,7"	0,00485	1:27835
				85°15'57"	ST2	220,7703	0°00'04,1"	0,00572	1:38574
ST8	12807,9972	12651,8876	139,0144	92°07'44"	ST3	106,8260	0°00'04,3"	0,00620	1:17217
				270°54'46"	ST6	102,4377	0°00'03,8"	0,00558	1:18354
Примечание: СКО дирекционного угла, расстояния и относительная ошибка вычислены с учетом доверительного коэффициента, установленного в разделе Классы точности Свойств проекта									

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Реализация метода BFGS для решения задачи взаимного ориентирования дискретных точечных моделей

ИТЕРАЦИЯ 0

ШАГ 1. Инициализация входных данных

$$\varepsilon < 0.01 \quad \text{Hes0} := \text{identity}(7) \quad I := [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$q := \begin{bmatrix} -9.5944 & -21.0414 & 27.0391 & -30.0372 & -50.5036 & -39.7171 & -74.7659 & -48.6984 & -91.3032 & -63.0371 & -52.1179 & -81.2673 & -21.9691 & 29.4729 & -1.3419 & -2.7782 \\ 21.7114 & 6.6193 & -19.4048 & 2.3789 & -49.5929 & 15.7380 & -31.8092 & 22.8852 & 69.2574 & 57.1522 & 66.8618 & 85.7328 & 51.0736 & 101.4705 & 43.6117 & 31.5367 \\ 0.5518 & 0.5985 & -0.0756 & 0.5927 & 0.1341 & 0.5485 & 0.1425 & 0.4027 & 0.4191 & 0.8988 & 0.3702 & 0.3098 & 0.2886 & 1.0062 & 0.6124 & 0.5189 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} -14.8553 & -22.0359 & 31.1188 & -29.6401 & -36.0319 & -42.4299 & -64.0752 & -52.948 & -106.0444 & -75.6162 & -67.5614 & -100.5844 & -34.3648 & 2.3854 & -12.5142 & -10.7972 \\ 18.5143 & 0.9864 & -11.7981 & -5.4315 & -60.9252 & 4.9895 & -49.9722 & 9.5869 & 43.4454 & 39.0149 & 51.2083 & 61.9494 & 43.7071 & 105.6405 & 41.8023 & 29.7643 \\ 12.228 & 12.275 & 11.602 & 12.269 & 11.809 & 12.222 & 11.815 & 12.074 & 12.091 & 12.574 & 12.045 & 11.983 & 11.961 & 12.678 & 12.287 & 12.194 \end{bmatrix}$$

Предварительная оптимизация

$$qav := \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} q^{(i)}\right)}{16} = \begin{bmatrix} -33.229 \\ 29.701 \\ 0.457 \end{bmatrix} \quad wav := \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} w^{(i)}\right)}{16} = \begin{bmatrix} -39.75 \\ 20.155 \\ 12.132 \end{bmatrix} \quad tin := wav - qav = \begin{bmatrix} -6.521 \\ -9.546 \\ 11.674 \end{bmatrix}$$

Функция вычисления отклонения точек

$$f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} \cos(a3) & \sin(a3) & 0 \\ -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a2) & 0 & \cos(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a1) & \sin(a1) \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \end{bmatrix} \cdot S \cdot q + \begin{bmatrix} t1 \\ t2 \\ t3 \end{bmatrix} \cdot I - w$$

Значение функции при начальных значениях аргументов

$$a1 := 0 \quad a2 := 0 \quad a3 := 0 \quad S := 1 \quad t1 := tin_0 \quad t2 := tin_1 \quad t3 := tin_2$$

$$f0 := f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) = \begin{bmatrix} -1.26 & -5.5264 & -10.6006 & -6.918 & -20.9926 & -3.8081 & -17.2116 & -2.2713 & 8.2203 & 6.0582 & 8.9226 & 12.7962 & 5.8748 & 20.5666 & 4.6514 & 1.4981 \\ -6.3492 & -3.9134 & -17.153 & -1.7359 & 1.786 & 1.2022 & 8.6167 & 3.752 & 16.2657 & 8.591 & 6.1072 & 14.2371 & -2.1798 & -13.7163 & -7.7369 & -7.7739 \\ -0.002 & -0.0023 & -0.0034 & -0.0021 & -0.0007 & 0.0007 & 0.0017 & 0.0029 & 0.0023 & -0.001 & -0.0006 & 0.001 & 0.0018 & 0.0024 & -0.0004 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

$$q0 := \begin{bmatrix} \cos(a3) & \sin(a3) & 0 \\ -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a2) & 0 & \cos(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a1) & \sin(a1) \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \end{bmatrix} \cdot S \cdot q + \begin{bmatrix} t1 \\ t2 \\ t3 \end{bmatrix} \cdot I$$

ШАГ 2. Вычисление частных производных функции

$$diff1(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} \cos(a3) & \sin(a3) & 0 \\ -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a2) & 0 & \cos(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \\ 0 & -\cos(a1) & -\sin(a1) \end{bmatrix} \cdot S \cdot q \quad diff5(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$diff2(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} \cos(a3) & \sin(a3) & 0 \\ -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(a2) & 0 & -\cos(a2) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a1) & \sin(a1) \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \end{bmatrix} \cdot S \cdot q \quad diff6(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$diff3(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ -\cos(a3) & -\sin(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a2) & 0 & \cos(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a1) & \sin(a1) \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \end{bmatrix} \cdot S \cdot q \quad diff7(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$diff4(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) := \begin{bmatrix} \cos(a3) & \sin(a3) & 0 \\ -\sin(a3) & \cos(a3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a2) & 0 & -\sin(a2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a2) & 0 & \cos(a2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a1) & \sin(a1) \\ 0 & -\sin(a1) & \cos(a1) \end{bmatrix} \cdot q$$

$$diff10 := diff1(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \quad diff50 := diff5(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3)$$

$$diff20 := diff2(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \quad diff60 := diff6(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3)$$

$$diff30 := diff3(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \quad diff70 := diff7(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3)$$

$$diff40 := diff4(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3)$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 3. Вычисление градиента функции

$$G\theta := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff1\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff2\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff3\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff4\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff5\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff6\theta}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f(a1, a2, a3, S, t1, t2, t3) \cdot diff7\theta}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.8954 \\ -54.0103 \\ 23815.7928 \\ 3111.1482 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ШАГ 4. Проверка на окончание поиска

$$\varepsilon\theta := \text{norm}(G\theta) = 24018.20612$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d\theta := -\text{Hes}\theta \cdot G\theta = \begin{bmatrix} 8.8953584 \\ 54.0102763 \\ -23815.7927831 \\ -3111.1481905 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G\theta^T \cdot d\theta = -576874225.186$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k\theta := 0.000006 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e\theta := \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ S \\ t1 \\ t2 \\ t3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -6.5208749999999966 \\ -9.546268750000003 \\ 11.6742375 \end{bmatrix} \quad e1 := e\theta + k\theta \cdot d\theta = \begin{bmatrix} 0.0000534 \\ 0.0003241 \\ -0.1428948 \\ 0.9813331 \\ -6.520875 \\ -9.5462688 \\ 11.6742375 \end{bmatrix}$$

$$c1 \cdot k\theta \cdot G\theta^T \cdot d\theta = -3.4612$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$f1 := f(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6) = \begin{bmatrix} -4.019 & -5.848 & -8.664 & -6.389 & -12.614 & -4.869 & -10.623 & -4.074 & 1.159 & -0.122 & 1.073 & 3.145 & -0.633 & 5.541 & -1.405 & -2.83 \\ -8.312 & -7.044 & -12.818 & -6.002 & -3.85 & -4.799 & -0.92 & -3.71 & 1.521 & -1.857 & -3.093 & 0.422 & -6.714 & -12.506 & -9.175 & -9.066 \\ -0.016 & -0.02 & 0.008 & -0.023 & -0.017 & -0.023 & -0.023 & -0.021 & -0.038 & -0.041 & -0.028 & -0.035 & -0.013 & -0.012 & -0.015 & -0.013 \end{bmatrix}$$

$$q1 := f1 + w = \begin{bmatrix} -18.875 & -27.884 & 22.455 & -36.03 & -48.646 & -47.299 & -74.698 & -57.022 & -104.885 & -75.738 & -66.489 & -97.44 & -34.998 & 7.926 & -13.919 & -13.627 \\ 10.202 & -6.057 & -24.616 & -11.433 & -64.775 & 0.19 & -50.892 & 5.877 & 44.966 & 37.158 & 48.115 & 62.372 & 36.993 & 93.134 & 32.628 & 20.698 \\ 12.212 & 12.255 & 11.61 & 12.246 & 11.792 & 12.199 & 11.792 & 12.053 & 12.053 & 12.533 & 12.017 & 11.948 & 11.948 & 12.666 & 12.272 & 12.181 \end{bmatrix}$$

$$e1r(r) := e\theta + r \cdot d\theta$$

$$fk\theta(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(\overrightarrow{f(e1r(r)_0, e1r(r)_1, e1r(r)_2, e1r(r)_3, e1r(r)_4, e1r(r)_5, e1r(r)_6) \cdot f(e1r(r)_0, e1r(r)_1, e1r(r)_2, e1r(r)_3, e1r(r)_4, e1r(r)_5, e1r(r)_6)} \right)_{j,i}$$

$$\text{wolfcond1}(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f\theta \cdot f\theta}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G\theta^T \cdot d\theta - fk\theta(r)$$

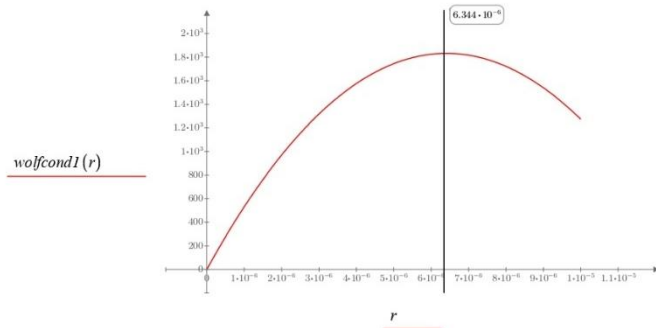
$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f\theta \cdot f\theta}_{j,i} = 1286.862 \quad \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{f\theta \cdot d\theta}_{j,i} = 3115.336$$

Продолжение приложения Е

Условия убывания

$$\text{wolfcond1}(k0) > 0 = 1$$

$$\text{wolfcond1}(1 \cdot k0) = 1825.014$$



Условия кривизны

$$\text{diff11} := \text{diff1}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff21} := \text{diff2}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff31} := \text{diff3}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff41} := \text{diff4}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff51} := \text{diff5}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff61} := \text{diff6}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$\text{diff71} := \text{diff7}(e1_0, e1_1, e1_2, e1_3, e1_4, e1_5, e1_6)$$

$$G1 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff11}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff21}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff31}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff41}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff51}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff61}}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \sqrt{\pi \cdot \text{diff71}}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54.266 \\ 65.495 \\ 1745.804 \\ -1635.62 \\ -102.346 \\ -175.848 \\ -0.661 \end{bmatrix}$$

$$\text{left2} := G1^T \cdot d0 = -36485990.4417 \quad \text{right2} := c2 \cdot (G0^T \cdot d0) = -519186802.6678$$

$$|\text{left2}| \leq |\text{right2}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$step1 := e1 - e0 = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0003 \\ -0.1429 \\ -0.0187 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y1 := G1 - G0 = \begin{bmatrix} -45.371102 \\ 119.505144 \\ -22069.989047 \\ -4746.767770 \\ -102.345886 \\ -175.847785 \\ -0.661184 \end{bmatrix}$$

$$step1^T \cdot y1 > 0 = 1$$

$$y1^T \cdot step1 \geq (c2 - 1) \cdot k0 \cdot G0^T \cdot d0 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n1 := \frac{1}{y1^T \cdot step1} = 0.0003 \quad z1 := Hes0 - \frac{step1 \cdot y1^T}{step1^T \cdot y1} \quad Ident1 := identity(7)$$

$$H1 := z1 \cdot Hes0 \cdot z1^T + \frac{step1 \cdot step1^T}{step1^T \cdot y1} \quad H1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.005 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ -0.002 & 0.005 & 0.045 & -0.207 & -0.005 & -0.008 & 0 \\ 0 & 0.001 & -0.207 & 0.962 & -0.001 & -0.001 & 0 \\ 0 & 0 & -0.005 & -0.001 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.008 & -0.001 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|H1\| = 6.40511 \cdot 10^{-6}$$

ИТЕРАЦИЯ 1

ШАГ 4. Проверка на окончание поиска

$$e1 := norm(G1) = 2402.439$$

$$e1 \leq e0 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d1 := -H1 \cdot G1 = \begin{bmatrix} 57.3907074 \\ -73.1940075 \\ -418.6639602 \\ 1934.8211157 \\ 109.2560867 \\ 187.720695 \\ 0.7058259 \end{bmatrix} \quad G1^T \cdot d1 = -3947637.275$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k1 := 0.0000073 \quad \epsilon1 := 0.001 \quad \epsilon2 := 0.9$$

$$e2 := e1 + k1 \cdot d1 = \begin{bmatrix} 0.0004723 \\ -0.0002103 \\ -0.145951 \\ 0.9954573 \\ -6.5200774 \\ -9.5448984 \\ 11.6742427 \end{bmatrix}$$

$$c1 \cdot k1 \cdot G1^T \cdot d1 = -0.02882$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$f2 := f(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) = \begin{bmatrix} -4.257 & -6.166 & -8.2 & -6.807 & -13.048 & -5.485 & -11.475 & -4.847 & -0.424 & -1.261 & 0.032 & 1.615 & -1.186 & 5.432 & -1.641 & -3.025 \\ -8.065 & -7.058 & -12.944 & -6.119 & -4.774 & -4.784 & -1.725 & -3.643 & 2.001 & -1.398 & -2.448 & 1.177 & -6.131 & -10.982 & -8.589 & -8.651 \\ -0.013 & -0.004 & 0 & 0 & 0.033 & -0.001 & 0.032 & 0.001 & -0.013 & -0.019 & -0.023 & -0.024 & -0.019 & -0.056 & -0.023 & -0.017 \end{bmatrix}$$

$$q2 := f2 + w = \begin{bmatrix} -19.112 & -28.201 & 22.919 & -36.447 & -49.08 & -47.915 & -75.55 & -57.795 & -106.469 & -76.878 & -67.529 & -98.97 & -35.551 & 7.817 & -14.155 & -13.822 \\ 10.449 & -6.072 & -24.742 & -11.55 & -65.699 & 0.205 & -51.697 & 5.944 & 45.447 & 37.617 & 48.76 & 63.126 & 37.576 & 94.658 & 33.213 & 21.113 \\ 12.215 & 12.271 & 11.602 & 12.269 & 11.842 & 12.221 & 11.847 & 12.075 & 12.078 & 12.555 & 12.022 & 11.959 & 11.942 & 12.622 & 12.264 & 12.177 \end{bmatrix}$$

$$e2r(r) := e1 + r \cdot d1$$

$$fk1(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e2r(r)_0, e2r(r)_1, e2r(r)_2, e2r(r)_3, e2r(r)_4, e2r(r)_5, e2r(r)_6) \cdot f(e2r(r)_0, e2r(r)_1, e2r(r)_2, e2r(r)_3, e2r(r)_4, e2r(r)_5, e2r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

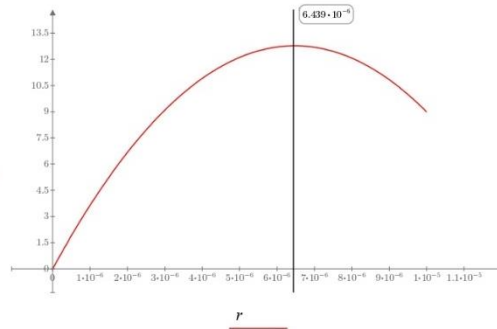
$$\begin{aligned} \text{wolfcond2}(r) &:= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f1 \cdot \vec{f1} \rangle}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G1^T \cdot d1 - fkl(r) \\ \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \vec{f2} \rangle}_{j,i} &= 1274.265 \\ \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f1 \cdot \vec{f1} \rangle}_{j,i} &= 1286.862 \end{aligned}$$

Условия убывания

$$\text{wolfcond2}(kl) > 0 = 1$$

$$\text{wolfcond2}(1 \cdot kl) = 12.567$$

wolfcond2(r)



Условия кривизны

$$\begin{aligned} \text{diff12} &:= \text{diff1}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff22} &:= \text{diff2}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff32} &:= \text{diff3}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff42} &:= \text{diff4}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff52} &:= \text{diff5}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff62} &:= \text{diff6}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \\ \text{diff72} &:= \text{diff7}(e2_0, e2_1, e2_2, e2_3, e2_4, e2_5, e2_6) \end{aligned}$$

$$G2 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff12} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff22} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff32} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff42} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff52} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff62} \rangle}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{\langle f2 \cdot \text{diff72} \rangle}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39.023 \\ 45.993 \\ 1302.524 \\ 565.337 \\ -121.487 \\ -168.266 \\ -0.291 \end{bmatrix}$$

$$\text{left21} := G2^T \cdot d1 = 498039.4545 \quad \text{right21} := c2 \cdot (G1^T \cdot d1) = -3552873.5474$$

$$|\text{left21}| \leq |\text{right21}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step2} := (e2 - e1) = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ -0.0005 \\ -0.0031 \\ 0.0141 \\ 0.0008 \\ 0.0014 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y2 := G2 - G1 = \begin{bmatrix} 15.243046 \\ -19.502005 \\ -443.279833 \\ 2200.956389 \\ -19.140987 \\ 7.582069 \\ 0.370523 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \text{step2}^T \cdot y2 &> 0 = 1 \\ y2^T \cdot \text{step2} &\geq (c2 - 1) \cdot k1 \cdot G1^T \cdot d1 = 1 \end{aligned}$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n2 := \frac{1}{y2^T \cdot \text{step2}} = 0.0308 \quad z2 := \text{Iden1} - \frac{\text{step2} \cdot y2^T}{\text{step2}^T \cdot y2}$$

$$H2 := z2 \cdot H1 \cdot z2^T + \frac{\text{step2} \cdot \text{step2}^T}{\text{step2}^T \cdot y2} = \begin{bmatrix} 1 & -0.001 & -0.001 & -0.007 & 0.001 & 0.002 & 0 \\ -0.001 & 1.001 & 0.003 & 0.01 & -0.002 & -0.003 & 0 \\ -0.001 & 0.003 & 0 & 0 & -0.006 & -0.007 & 0 \\ -0.007 & 0.01 & 0 & 0 & 0.007 & -0.005 & 0 \\ 0.001 & -0.002 & -0.006 & 0.007 & 1.004 & 0.006 & 0 \\ 0.002 & -0.003 & -0.007 & -0.005 & 0.006 & 1.008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|H2\| = 4.152 \cdot 10^{-11}$$

ИТЕРАЦИЯ 2

ШАГ 4. Проверка на окончание поиска

$$e2 := \text{norm}(G2) = 1436.275$$

$$e2 \leq \varepsilon1 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d2 := -H2 \cdot G2 = \begin{bmatrix} 44.3013857 \\ -56.5172777 \\ -2.2794845 \\ -0.7915065 \\ 127.1205137 \\ 182.4789942 \\ 0.382418 \end{bmatrix} \quad G2^T \cdot d2 = -53893.277$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k2 := 0.00025 \quad \bar{c}1 := 0.001 \quad \bar{c}2 := 0.9$$

$$e3 := e2 + k2 \cdot d2 = \begin{bmatrix} 0.0115477 \\ -0.0143396 \\ -0.1465209 \\ 0.9952594 \\ -6.4882973 \\ -9.4992786 \\ 11.6743383 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k2 \cdot G2^T \cdot d2 = -0.01347$$

$$f3 := f(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6) = \begin{bmatrix} -4.23 & -6.123 & -8.166 & -6.758 & -12.962 & -5.442 & -11.391 & -4.807 & -0.4 & -1.234 & 0.042 & 1.622 & -1.177 & 5.395 & -1.631 & -3.007 \\ -8.025 & -7.018 & -12.878 & -6.082 & -4.734 & -4.758 & -1.704 & -3.626 & 1.98 & -1.394 & -2.449 & 1.153 & -6.112 & -10.946 & -8.552 & -8.612 \\ -0.117 & 0.219 & -0.166 & 0.396 & 1.289 & 0.384 & 1.434 & 0.433 & 0.508 & 0.238 & -0.027 & 0.174 & -0.273 & -1.589 & -0.485 & -0.326 \end{bmatrix}$$

$$q3 := \beta + \eta = \begin{bmatrix} -19.085 & -28.159 & 22.953 & -36.398 & -48.993 & -47.872 & -75.466 & -57.755 & -106.445 & -76.85 & -67.519 & -98.962 & -35.542 & 7.78 & -14.145 & -13.804 \\ 10.489 & -6.032 & -24.676 & -11.513 & -65.66 & 0.232 & -51.676 & 5.961 & 45.425 & 37.621 & 48.759 & 63.102 & 37.595 & 94.695 & 33.25 & 21.152 \\ 12.111 & 12.494 & 11.436 & 12.665 & 13.098 & 12.606 & 13.249 & 12.507 & 12.599 & 12.812 & 12.018 & 12.157 & 11.688 & 11.089 & 11.802 & 11.868 \end{bmatrix}$$

$$e3r(r) := e2 + r \cdot d2$$

$$fk2(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e3r(r)_0, e3r(r)_1, e3r(r)_2, e3r(r)_3, e3r(r)_4, e3r(r)_5, e3r(r)_6) \cdot f(e3r(r)_0, e3r(r)_1, e3r(r)_2, e3r(r)_3, e3r(r)_4, e3r(r)_5, e3r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

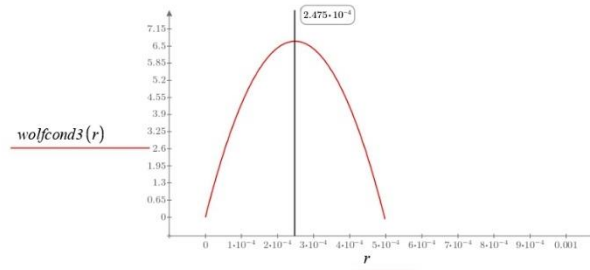
Условия убывания

$$\text{wolfcond3}(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\sqrt{f2 \cdot f2})}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G2^T \cdot d2 - fk2(r)$$

$$\text{wolfcond3}(k2) > 0 = 1 \quad \text{wolfcond3}(k2) = 6.684$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\sqrt{\beta \cdot f3})}_{j,i} = 1267.568$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\sqrt{f2 \cdot f2})}_{j,i} = 1274.265$$



Условия кривизны

$$\text{diff13} := \text{diff1}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff23} := \text{diff2}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff33} := \text{diff3}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff43} := \text{diff4}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff53} := \text{diff5}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff63} := \text{diff6}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$\text{diff73} := \text{diff7}(e3_0, e3_1, e3_2, e3_3, e3_4, e3_5, e3_6)$$

$$G3 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff13})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff23})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff33})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff43})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff53})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff63})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(\beta \cdot \text{diff73})}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 417.239 \\ -550.211 \\ 1294.513 \\ 537.378 \\ -120.538 \\ -167.516 \\ 4.184 \end{bmatrix}$$

$$\text{left22} := G3^T \cdot d2 = 315.0830$$

$$\text{right22} := c2 \cdot (G2^T \cdot d2) = -48503.9495$$

$$|\text{left22}| \leq |\text{right22}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step3} := e3 - e2 = \begin{bmatrix} 0.0111 \\ -0.0141 \\ -0.0006 \\ -0.0002 \\ 0.0318 \\ 0.0456 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y3 := G3 - G2 = \begin{bmatrix} 456.261949 \\ -596.203435 \\ -8.010446 \\ -27.959093 \\ 0.949064 \\ 0.749577 \\ 4.474763 \end{bmatrix}$$

$\text{step3}^T \cdot y3 > 0 = 1$
 $y3^T \cdot \text{step3} \geq (c2 - 1) \cdot k2 \cdot G2^T \cdot d2 = 1$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n3 := \frac{1}{y3^T \cdot \text{step3}} = 0.0738 \quad \text{Iden1} := \text{identity}(7) \quad z3 := \text{Iden1} - \frac{\text{step3} \cdot y3^T}{\text{step3}^T \cdot y3}$$

$$H3 := z3 \cdot H2 \cdot z3^T + \frac{\text{step3} \cdot \text{step3}^T}{\text{step3}^T \cdot y3} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.483 & 0.001 & 0 & 0.01 & 0.015 & -0.004 \\ 0.483 & 0.369 & 0.001 & 0 & 0.02 & 0.029 & 0.005 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0 & -0.057 & -0.079 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 & -0.003 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & -0.057 & 0.009 & 4.098 & 4.448 & -0.001 \\ 0.015 & 0.029 & -0.079 & -0.003 & 4.448 & 7.386 & -0.002 \\ -0.004 & 0.005 & 0 & 0 & -0.001 & -0.002 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|H3\| = 1.032 \cdot 10^{-14}$$

ИТЕРАЦИЯ 3

ШАГ 4. Проверка на окончание поиска

$$e3 := \text{norm}(G3) = 1576.061$$

$$e3 \leq e2 = 0$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d3 := -H3 \cdot G3 = \begin{bmatrix} 4.5842024 \\ 8.2249991 \\ -21.3310492 \\ 0.6575441 \\ 1314.3174659 \\ 1887.0035259 \\ -0.4954898 \end{bmatrix} \quad G3^T \cdot d3 = -504403.322$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k3 := 0.0045 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e4 := e3 + k3 \cdot d3 = \begin{bmatrix} 0.0321766 \\ 0.0226729 \\ -0.2425106 \\ 0.9982184 \\ -0.5738687 \\ -1.0077628 \\ 11.6721086 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k3 \cdot G3^T \cdot d3 = -2.26981$$

$$f4 := f(e4_0, e4_1, e4_2, e4_3, e4_4, e4_5, e4_6) = \begin{bmatrix} -0.216 & -0.521 & -0.861 & -0.618 & -1.625 & -0.396 & -1.334 & -0.282 & 0.463 & 0.295 & 0.515 & 0.793 \\ -0.776 & -0.609 & -1.529 & -0.455 & -0.222 & -0.256 & 0.237 & -0.086 & 0.765 & 0.256 & 0.071 & 0.623 \\ -0.92 & -0.695 & 1.23 & -0.762 & 0.446 & -1.407 & -0.672 & -1.837 & -4.291 & -3.267 & -3.33 & -4.594 \dots \end{bmatrix}$$

$$q4 := f3 + w = \begin{bmatrix} -19.085 & -28.159 & 22.953 & -36.398 & -48.993 & -47.872 & -75.466 & -57.755 & -106.445 & -76.85 & -67.519 & -98.962 \\ 10.489 & -6.032 & -24.676 & -11.513 & -65.66 & 0.232 & -51.676 & 5.961 & 45.425 & 37.621 & 48.759 & 63.102 \\ 12.111 & 12.494 & 11.436 & 12.665 & 13.098 & 12.606 & 13.249 & 12.507 & 12.599 & 12.812 & 12.018 & 12.157 \dots \end{bmatrix}$$

$$e4r(r) := e3 + r \cdot d3$$

$$fk3(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e4r(r)_0, e4r(r)_1, e4r(r)_2, e4r(r)_3, e4r(r)_4, e4r(r)_5, e4r(r)_6) \cdot f(e4r(r)_0, e4r(r)_1, e4r(r)_2, e4r(r)_3, e4r(r)_4, e4r(r)_5, e4r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

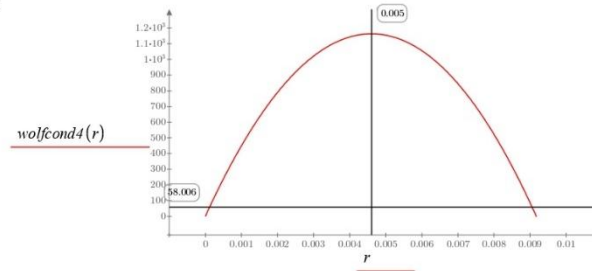
Условия убывания

$$wolfcond4(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f3 \cdot f3})_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G3^T \cdot d3 - fk3(r)$$

$$wolfcond4(k3) > 0 = 1 \quad wolfcond4(k3) = 1162.793$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot f4})_{j,i} = 102.505$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f3 \cdot f3})_{j,i} = 1267.568$$



Условия кривизны

$$diff14 := diff1(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff24 := diff2(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff34 := diff3(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff44 := diff4(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff54 := diff5(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff64 := diff6(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$diff74 := diff7(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

$$G4 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff14})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff24})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff34})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff44})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff54})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff64})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f4 \cdot diff74})_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3385.293 \\ 2759.864 \\ 1147.157 \\ -120.459 \\ -3.956 \\ -10.983 \\ -54.684 \end{bmatrix}$$

$$left23 := G4^T \cdot d3 = -12227.7399 \quad right23 := c2 \cdot (G3^T \cdot d3) = -453962.9901$$

$$|left23| \leq |right23| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step4} := e4 - e3 = \begin{bmatrix} 0.0206 \\ 0.037 \\ -0.096 \\ 0.003 \\ 5.9144 \\ 8.4915 \\ -0.0022 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y4 := G4 - G3 = \begin{bmatrix} 2968.054495 \\ 3310.074509 \\ -147.356230 \\ -657.836795 \\ 116.582193 \\ 156.532920 \\ -58.867694 \end{bmatrix}$$

$$\text{step4}^T \cdot y4 > 0 = 1$$

$$y4^T \cdot \text{step4} \geq (e2 - 1) \cdot k3 \cdot G3^T \cdot d3 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n4 := \frac{1}{y4^T \cdot \text{step4}} = 0.0005 \quad \text{Iden1} := \text{identity}(7) \quad z4 := \text{Iden1} - \frac{\text{step4} \cdot y4^T}{\text{step4}^T \cdot y4}$$

$$H4 := z4 \cdot H3 \cdot z4^T + \frac{\text{step4} \cdot \text{step4}^T}{\text{step4}^T \cdot y4} = \begin{bmatrix} 0.568 & 0.403 & 0.144 & -0.004 & -8.79 & -12.62 & 0 \\ 0.403 & 0.286 & 0.102 & -0.003 & -6.237 & -8.954 & 0.008 \\ 0.144 & 0.102 & 0.036 & -0.001 & -2.229 & -3.198 & -0.001 \\ -0.004 & -0.003 & -0.001 & 0 & 0.073 & 0.089 & 0 \\ -8.79 & -6.237 & -2.229 & 0.073 & 136.786 & 194.955 & 0.093 \\ -12.62 & -8.954 & -3.198 & 0.089 & 194.955 & 280.907 & 0.133 \\ 0 & 0.008 & -0.001 & 0 & 0.093 & 0.133 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|H4\| = 4.759 \cdot 10^{-17}$$

ИТЕРАЦИЯ 4

ШАГ 4. Проверка на окончание поиска

$$e4 := \text{norm}(G4) = 4517.816$$

$$e4 \leq e3 = 0$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d4 := -H4 \cdot G4 = \begin{bmatrix} -3372.7314513 \\ -2393.114907 \\ -854.7806681 \\ 25.1781316 \\ 52221.8238161 \\ 74977.5512642 \\ 35.4956002 \end{bmatrix} \quad G4^T \cdot d4 = -20037961.911$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k4 := 0.00001 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e5 := e4 + k4 \cdot d4 = \begin{bmatrix} -0.0015507 \\ -0.0012582 \\ -0.2510584 \\ 0.9984702 \\ -0.0516505 \\ -0.2579873 \\ 11.6724635 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k4 \cdot G4^T \cdot d4 = -0.20038$$

$$f5 := f(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6) = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.007 & -0.206 & -0.052 & -0.564 & 0.062 & -0.397 & 0.121 & 0.509 & 0.422 & 0.519 & 0.668 \\ -0.154 & -0.062 & -0.52 & 0.023 & 0.175 & 0.121 & 0.404 & 0.209 & 0.632 & 0.365 & 0.272 & 0.552 \\ 0.041 & 0.032 & -0.069 & 0.037 & -0.016 & 0.072 & 0.044 & 0.097 & 0.222 & 0.164 & 0.166 & 0.234 \dots \end{bmatrix}$$

$$q5 := f4 + w = \begin{bmatrix} -15.071 & -22.557 & 30.258 & -30.259 & -37.657 & -42.826 & -65.41 & -53.23 & -105.581 & -75.321 & -67.047 & -99.792 \\ 17.739 & 0.377 & -13.327 & -5.887 & -61.147 & 4.733 & -49.735 & 9.5 & 44.211 & 39.271 & 51.279 & 62.572 \\ 11.308 & 11.58 & 12.832 & 11.507 & 12.255 & 10.815 & 11.143 & 10.237 & 7.8 & 9.307 & 8.715 & 7.389 \dots \end{bmatrix}$$

$$e5r(r) := e4 + r \cdot d4$$

$$fk4(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e5r(r)_0, e5r(r)_1, e5r(r)_2, e5r(r)_3, e5r(r)_4, e5r(r)_5, e5r(r)_6) \cdot f(e5r(r)_0, e5r(r)_1, e5r(r)_2, e5r(r)_3, e5r(r)_4, e5r(r)_5, e5r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

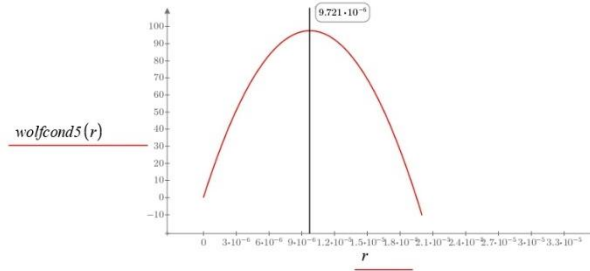
Условия убывания

$$wolfcond5(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f4 \cdot f4}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G4^T \cdot d4 - flk4(r)$$

$$wolfcond5(k4) > 0 = 1 \quad wolfcond5(k4) = 97.476$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot f5}_{j,i} = 4.829$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f4 \cdot f4}_{j,i} = 102.505$$



Условия кривизны

$$diff15 := diff1(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff25 := diff2(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff35 := diff3(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff45 := diff4(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff55 := diff5(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff65 := diff6(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$diff75 := diff7(e5_0, e5_1, e5_2, e5_3, e5_4, e5_5, e5_6)$$

$$G5 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff15}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff25}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff35}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff45}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff55}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff65}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot diff75}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -167.359 \\ -148.736 \\ 1055.846 \\ -339.449 \\ 6.195 \\ 2.246 \\ 2.728 \end{bmatrix}$$

$$left24 := G5^T \cdot d4 = 501369.5885 \quad right24 := c2 \cdot (G4^T \cdot d4) = -18034165.7201$$

$$|left24| \leq |right24| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step5} := e5 - e4 = \begin{bmatrix} -0.0337 \\ -0.0239 \\ -0.0085 \\ 0.0003 \\ 0.5222 \\ 0.7498 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y5 := G5 - G4 = \begin{bmatrix} -3552.652477 \\ -2908.599809 \\ -91.311500 \\ -218.989698 \\ 10.150720 \\ 13.229435 \\ 57.411884 \end{bmatrix}$$

$$\text{step5}^T \cdot y5 > 0 = 1$$

$$y5^T \cdot \text{step5} \geq (c2 - 1) \cdot k4 \cdot G4^T \cdot d4 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n5 := \frac{1}{y5^T \cdot \text{step5}} = 0.0049 \quad \text{[Iden]} := \text{identity}(7) \quad z5 := \text{Iden}1 - \frac{\text{step5} \cdot y5^T}{\text{step5}^T \cdot y5}$$

$$H5 := z5 \cdot H4 \cdot z5^T + \frac{\text{step5} \cdot \text{step5}^T}{\text{step5}^T \cdot y5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.005 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001 & 0.007 & 0.692 & -0.444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.005 & -0.444 & 0.361 & 0 \\ 0.006 & 0.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|H5\| = 4.643 \cdot 10^{-22}$$

ИТЕРАЦИЯ 5

$$e5 := \text{norm}(G5) = 1131.467$$

$$e5 \leq e4 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d5 := -H5 \cdot G5 = \begin{bmatrix} 0.001641 \\ 0.001925 \\ -0.0094706 \\ 0.0059142 \\ 0.4620908 \\ -0.0283326 \\ 0.0440626 \end{bmatrix} \quad G5^T \cdot d5 = -9.649$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k5 := 0.65 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e6 := e5 + k5 \cdot d5 = \begin{bmatrix} -0.0004841 \\ -0.000007 \\ -0.2572143 \\ 1.0023144 \\ 0.2487085 \\ -0.2764035 \\ 11.7011042 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k5 \cdot G5^T \cdot d5 = -0.00627$$

$$f6 := f(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6) = \begin{bmatrix} 0.268 & 0.201 & 0.288 & 0.166 & -0.03 & 0.166 & -0.039 & 0.156 & 0.13 & 0.188 & 0.242 & 0.198 \\ -0.192 & -0.212 & -0.394 & -0.198 & -0.301 & -0.138 & -0.202 & -0.097 & 0.132 & 0.035 & 0.038 & 0.157 \\ 0.037 & 0.029 & 0.014 & 0.028 & 0.003 & 0.037 & 0.014 & 0.042 & 0.064 & 0.056 & 0.06 & 0.071 \dots \end{bmatrix}$$

$$q6 := f5 + w = \begin{bmatrix} -14.716 & -22.043 & 30.913 & -29.692 & -36.595 & -42.368 & -64.472 & -52.827 & -105.536 & -75.194 & -67.043 & -99.916 \\ 18.36 & 0.924 & -12.319 & -5.409 & -60.75 & 5.111 & -49.569 & 9.796 & 44.077 & 39.38 & 51.48 & 62.501 \\ 12.269 & 12.307 & 11.533 & 12.306 & 11.793 & 12.294 & 11.859 & 12.171 & 12.313 & 12.738 & 12.211 & 12.217 \dots \end{bmatrix}$$

$$e6r(r) := e5 + r \cdot d5$$

$$fk5(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e6r(r)_0, e6r(r)_1, e6r(r)_2, e6r(r)_3, e6r(r)_4, e6r(r)_5, e6r(r)_6) \cdot f(e6r(r)_0, e6r(r)_1, e6r(r)_2, e6r(r)_3, e6r(r)_4, e6r(r)_5, e6r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

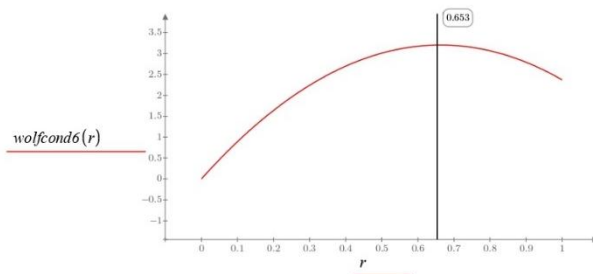
Условия убывания

$$wolfcond6(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot f5}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G5^T \cdot d5 - fk5(r)$$

$$wolfcond6(k5) > 0 = 1 \quad wolfcond6(k5) = 3.202$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot f6}_{j,i} = 1.62$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f5 \cdot f5}_{j,i} = 4.829$$



Условия кривизны

$$diff16 := diff1(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff26 := diff2(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff36 := diff3(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff46 := diff4(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff56 := diff5(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff66 := diff6(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$diff76 := diff7(e6_0, e6_1, e6_2, e6_3, e6_4, e6_5, e6_6)$$

$$G6 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff16}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff26}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff36}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff46}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff56}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff66}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot diff76}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70.186 \\ -50.476 \\ 267.187 \\ -135.914 \\ 6.888 \\ -3.633 \\ 1.362 \end{bmatrix}$$

$$left25 := G6^T \cdot d5 = -0.2005$$

$$right25 := c2 \cdot (G5^T \cdot d5) = -8.6838$$

$$|left25| \leq |right25| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step6} := e6 - e5 = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0013 \\ -0.0062 \\ 0.0038 \\ 0.3004 \\ -0.0184 \\ 0.0286 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y6 := G6 - G5 = \begin{bmatrix} 97.172960 \\ 98.259569 \\ -788.658918 \\ 203.535204 \\ 0.693365 \\ -5.879191 \\ -1.366043 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{step6}^T \cdot y6 &> 0 = 1 \\ y6^T \cdot \text{step6} &\geq (c2 - 1) \cdot k5 \cdot G5^T \cdot d5 = 1 \end{aligned}$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n6 := \frac{1}{y6^T \cdot \text{step6}} = 0.1628 \quad \text{IdenJ} := \text{identity}(7) \quad z6 := \text{IdenJ} - \frac{\text{step6} \cdot y6^T}{\text{step6}^T \cdot y6}$$

$$H6 := z6 \cdot H5 \cdot z6^T + \frac{\text{step6} \cdot \text{step6}^T}{\text{step6}^T \cdot y6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0.001 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0.001 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & -0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & -0.003 & 0 \\ -0.001 & -0.001 & 0.002 & 0.003 & 0.283 & -0.257 & -0.032 \\ 0.001 & 0.001 & -0.003 & -0.003 & -0.257 & 0.339 & 0.018 \\ 0.006 & 0.012 & 0 & 0 & -0.032 & 0.018 & 0.997 \end{bmatrix}$$

$$\|H6\| = 3.082 \cdot 10^{-22}$$

ИТЕРАЦИЯ 6

$$e6 := \text{norm}(G6) = 312.086$$

$$e6 \leq e5 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d6 := -H6 \cdot G6 = \begin{bmatrix} 0.0073799 \\ 0.0045485 \\ -0.0356652 \\ -0.0301247 \\ -3.1982977 \\ 3.5760674 \\ -0.1551724 \end{bmatrix} \quad G6^T \cdot d6 = -41.417$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k6 := 0.077 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e7 := e6 + k6 \cdot d6 = \begin{bmatrix} 0.0000842 \\ 0.0003432 \\ -0.2599605 \\ 0.9999948 \\ 0.0024396 \\ -0.0010463 \\ 11.6891559 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k6 \cdot G6^T \cdot d6 = -0.00319$$

$$f7 := f(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6) = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.002 & 0.002 & 0.003 & -0.025 & 0.004 & 0 & 0.006 & 0.01 & 0.009 & 0.011 & 0.014 \\ 0 & 0.001 & -0.005 & 0.009 & 0.016 & 0.01 & 0.013 & 0.011 & 0.015 & 0.013 & 0.009 & 0.012 \\ 0.008 & 0.005 & 0.022 & 0.002 & 0.001 & 0.001 & -0.006 & -0.001 & -0.02 & -0.012 & -0.009 & -0.019 \dots \end{bmatrix}$$

$$q7 := f6 + w = \begin{bmatrix} -14.587 & -21.835 & 31.407 & -29.474 & -36.061 & -42.263 & -64.114 & -52.792 & -105.914 & -75.428 & -67.319 & -100.387 \\ 18.323 & 0.775 & -12.192 & -5.629 & -61.226 & 4.852 & -50.174 & 9.49 & 43.577 & 39.05 & 51.246 & 62.107 \\ 12.265 & 12.304 & 11.616 & 12.297 & 11.812 & 12.259 & 11.829 & 12.116 & 12.155 & 12.63 & 12.105 & 12.054 \dots \end{bmatrix}$$

$$e7r(r) := e6 + r \cdot d6$$

$$fk6(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e7r(r)_0, e7r(r)_1, e7r(r)_2, e7r(r)_3, e7r(r)_4, e7r(r)_5, e7r(r)_6) \cdot f(e7r(r)_0, e7r(r)_1, e7r(r)_2, e7r(r)_3, e7r(r)_4, e7r(r)_5, e7r(r)_6) \right)_{j,i,r}$$

Продолжение приложения Е

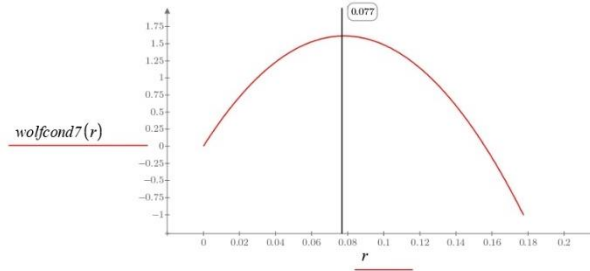
Условия убывания

$$wolfcond7(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot f6}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G6^T \cdot d6 - fk6(r)$$

$$wolfcond7(k6) > 0 = 1 \quad wolfcond7(k6) = 1.612$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot f7}_{j,i} = 0.005$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f6 \cdot f6}_{j,i} = 1.62$$



Условия кривизны

$$diff17 := diff1(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff27 := diff2(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff37 := diff3(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff47 := diff4(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff57 := diff5(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff67 := diff6(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$diff77 := diff7(e7_0, e7_1, e7_2, e7_3, e7_4, e7_5, e7_6)$$

$$G7 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff17}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff27}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff37}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff47}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff57}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff67}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{f7 \cdot diff77}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.009 \\ 11.542 \\ 27.752 \\ -7.592 \\ 0.17 \\ 0.19 \\ 0.032 \end{bmatrix}$$

$$left26 := G7^T \cdot d6 = -0.5563$$

$$right26 := c2 \cdot (G6^T \cdot d6) = -37.2753$$

$$|left26| \leq |right26| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step7} := e7 - e6 = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0004 \\ -0.0027 \\ -0.0023 \\ -0.2463 \\ 0.2754 \\ -0.0119 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y7 := G7 - G6 = \begin{bmatrix} 73.195343 \\ 62.018546 \\ -239.434533 \\ 128.321642 \\ -6.718072 \\ 3.823150 \\ -1.329883 \end{bmatrix}$$

$$\text{step7}^T \cdot y7 > 0 = 1$$

$$y7^T \cdot \text{step7} \geq (c2 - 1) \cdot k6 \cdot G6^T \cdot d6 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n7 := \frac{1}{y7^T \cdot \text{step7}} = 0.3178 \quad \text{[iden]} := \text{identity}(7) \quad z7 := \text{Iden1} - \frac{\text{step7} \cdot y7^T}{\text{step7}^T \cdot y7}$$

$$H7 := z7 \cdot H6 \cdot z7^T + \frac{\text{step7} \cdot \text{step7}^T}{\text{step7}^T \cdot y7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 & -0.027 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0.013 \\ 0.006 & 0.012 & 0 & 0 & -0.027 & 0.013 & 0.998 \end{bmatrix}$$

$$\|H7\| = 2.405 \cdot 10^{-23}$$

ИТЕРАЦИЯ 7

$$e7 := \text{norm}(G7) = 31.148$$

$$e7 \leq e6 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d7 := -H7 \cdot G7 = \begin{bmatrix} -0.0011837 \\ -0.0026184 \\ -0.0002367 \\ 0.0001404 \\ 0.0059059 \\ -0.0023679 \\ -0.1999506 \end{bmatrix} \quad G7^T \cdot d7 = -0.047$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k7 := 0.102 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e8 := e7 + k7 \cdot d7 = \begin{bmatrix} -0.0000366 \\ 0.0000761 \\ -0.2599846 \\ 1.0000091 \\ 0.003042 \\ -0.0012878 \\ 11.668761 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k7 \cdot G7^T \cdot d7 = -4.8281 \cdot 10^{-6}$$

$$f8 := f(e8_0, e8_1, e8_2, e8_3, e8_4, e8_5, e8_6) = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.003 & 0.003 & 0.004 & -0.023 & 0.004 & 0.001 & 0.006 & 0.008 & 0.008 & 0.01 & 0.011 \\ 0 & 0 & -0.005 & 0.008 & 0.014 & 0.008 & 0.01 & 0.009 & 0.013 & 0.011 & 0.008 & 0.01 \\ -0.007 & -0.009 & -0.007 & -0.01 & -0.012 & -0.007 & -0.011 & -0.005 & -0.008 & -0.009 & -0.008 & -0.007 \dots \end{bmatrix}$$

$$g8 := f7 + w = \begin{bmatrix} -14.85 & -22.034 & 31.121 & -29.637 & -36.057 & -42.425 & -64.075 & -52.942 & -106.035 & -75.607 & -67.55 & -100.571 \\ 18.515 & 0.987 & -11.804 & -5.423 & -60.909 & 4.999 & -49.959 & 9.598 & 43.46 & 39.027 & 51.217 & 61.962 \\ 12.236 & 12.28 & 11.624 & 12.271 & 11.81 & 12.223 & 11.809 & 12.073 & 12.071 & 12.562 & 12.036 & 11.964 \dots \end{bmatrix}$$

$$e8r(r) := e7 + r \cdot d7$$

$$fk7 := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e8r(r)_0, e8r(r)_1, e8r(r)_2, e8r(r)_3, e8r(r)_4, e8r(r)_5, e8r(r)_6) \cdot f(e8r(r)_0, e8r(r)_1, e8r(r)_2, e8r(r)_3, e8r(r)_4, e8r(r)_5, e8r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

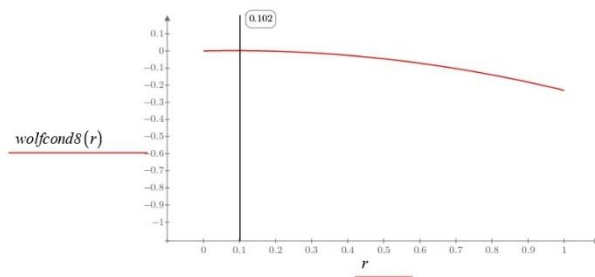
Условия убывания

$$wolfcond8(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f7 \cdot f7)}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G7^T \cdot d7 - fk7(r)$$

$$wolfcond8(k7) > 0 = 1 \quad wolfcond8(k7) = 0.002$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot f8)}_{j,i} = 0.003$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f7 \cdot f7)}_{j,i} = 0.005$$



Условия кривизны

$$diff18 := diff1(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff28 := diff2(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff38 := diff3(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff48 := diff4(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff58 := diff5(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff68 := diff6(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$diff78 := diff7(e\delta_0, e\delta_1, e\delta_2, e\delta_3, e\delta_4, e\delta_5, e\delta_6)$$

$$G8 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff18)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff28)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff38)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff48)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff58)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff68)}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overline{(f8 \cdot diff78)}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.723 \\ 9.36 \\ 24.177 \\ -6.576 \\ 0.16 \\ 0.16 \\ -0.221 \end{bmatrix}$$

$$left27 := G8^T \cdot d7 = 0.0093$$

$$right27 := c2 \cdot (G7^T \cdot d7) = -0.0426$$

$$|left27| \leq |right27| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$\text{step8} := e8 - e7 = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0003 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0006 \\ -0.0002 \\ -0.0204 \end{bmatrix}$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n8 := \frac{1}{y8^T \cdot \text{step8}} = 173.2386 \quad \text{Iden1} := \text{identity}(7) \quad z8 := \text{Iden1} - \frac{\text{step8} \cdot y8^T}{\text{step8}^T \cdot y8}$$

$$H8 := z8 \cdot H7 \cdot z8^T + \frac{\text{step8} \cdot \text{step8}^T}{\text{step8}^T \cdot y8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}$$

$$\|H8\| = 2.052 \cdot 10^{-24}$$

ИТЕРАЦИЯ 8

$$e8 := \text{norm}(G8) = 27.006$$

$$e8 \leq e7 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d8 := -H8 \cdot G8 = \begin{bmatrix} 0.0000694 \\ -0.0000773 \\ -0.0001807 \\ 0.0000504 \\ -0.0002846 \\ 0.0005517 \\ 0.0072783 \end{bmatrix} \quad G8^T \cdot d8 = -0.007$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$f9 := f(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.007 & 0.003 & -0.014 & 0.001 & 0.007 & 0.001 & -0.006 & -0.003 & -0.003 & -0.005 & -0.002 & -0.004 & 0.001 & 0.002 \\ -0.001 & -0.003 & 0 & 0.003 & 0.005 & 0.002 & -0.003 & 0.001 & -0.004 & 0 & -0.001 & -0.004 & -0.002 & 0.002 & -0.002 & -0.003 \\ -0.001 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0.003 & 0.002 & 0.005 & 0.004 & 0.002 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0.002 & 0.001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g9 := \sqrt{s} + w = \begin{bmatrix} -14.85 & -22.033 & 31.122 & -29.637 & -36.055 & -42.425 & -64.074 & -52.942 & -106.037 & -75.608 & -67.552 & -100.573 & -34.357 & 2.401 & -12.505 & -10.789 \\ 18.514 & 0.987 & -11.803 & -5.424 & -60.911 & 4.998 & -49.962 & 9.596 & 43.458 & 39.026 & 51.216 & 61.96 & 43.709 & 105.637 & 41.8 & 29.762 \\ 12.221 & 12.266 & 11.595 & 12.259 & 11.797 & 12.215 & 11.804 & 12.069 & 12.083 & 12.565 & 12.037 & 11.976 & 11.958 & 12.681 & 12.283 & 12.189 \end{bmatrix}$$

$$e9r(r) := e8 + r \cdot d8$$

$$fk8(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e9r(r)_0, e9r(r)_1, e9r(r)_2, e9r(r)_3, e9r(r)_4, e9r(r)_5, e9r(r)_6) \cdot f(e9r(r)_0, e9r(r)_1, e9r(r)_2, e9r(r)_3, e9r(r)_4, e9r(r)_5, e9r(r)_6) \right)_{j,i}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y8 := G8 - G7 = \begin{bmatrix} 0.714360 \\ -2.182538 \\ -3.575384 \\ 1.016146 \\ -0.010364 \\ -0.029926 \\ -0.253684 \end{bmatrix}$$

$$\text{step8}^T \cdot y8 > 0 = 1 \\ y8^T \cdot \text{step8} \geq (c2 - 1) \cdot k7 \cdot G7^T \cdot d7 = 1$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k8 := 1 \quad c1 := 0.001 \quad c2 := 0.9$$

$$e9 := e8 + k8 \cdot d8 = \begin{bmatrix} 0.0000328 \\ -0.0000012 \\ -0.2601653 \\ 1.0000595 \\ 0.0027574 \\ -0.0007361 \\ 11.6760392 \end{bmatrix}$$

$$c1 \cdot k8 \cdot G8^T \cdot d8 = -6.73391 \cdot 10^{-6}$$

Продолжение приложения Е

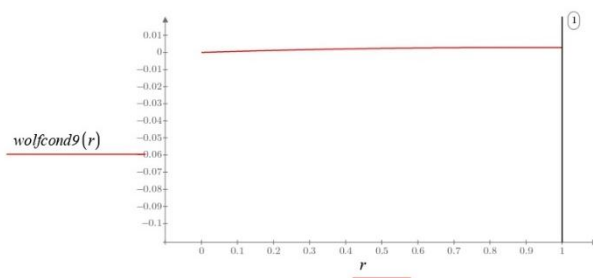
Условия убывания

$$wolfcond9(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f8 \cdot f8})_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G8^T \cdot d8 - f8(r)$$

$$wolfcond9(k8) > 0 = 1 \quad wolfcond9(k8) = 0.003$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot p9})_{j,i} = 0.001$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f8 \cdot f8})_{j,i} = 0.003$$



Условия кривизны

$$diff19 := diff1(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff29 := diff2(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff39 := diff3(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff49 := diff4(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff59 := diff5(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff69 := diff6(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$diff79 := diff7(e9_0, e9_1, e9_2, e9_3, e9_4, e9_5, e9_6)$$

$$G9 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff19})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff29})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff39})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff49})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff59})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff69})_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{p9 \cdot diff79})_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.146 \\ -1.743 \\ -3.444 \\ 2.118 \\ -0.029 \\ -0.018 \\ 0.029 \end{bmatrix}$$

$$left28 := G9^T \cdot d8 = 0.0011$$

$$right28 := c2 \cdot (G8^T \cdot d8) = -0.0061$$

$$|left28| \leq |right28| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$step9 := e9 - e8 = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.0002 \\ 0.0001 \\ -0.0003 \\ 0.0006 \\ 0.0073 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y9 := G9 - G8 = \begin{bmatrix} -3.869447 \\ -11.103172 \\ -27.620679 \\ 8.693380 \\ -0.188954 \\ -0.178413 \\ 0.249968 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} step9^T \cdot y9 &> 0 = 1 \\ y9^T \cdot step9 &\geq (c2 - 1) \cdot k8 \cdot GS^T \cdot d8 = 1 \end{aligned}$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n9 := \frac{1}{y9^T \cdot step9} = 128.2975 \quad \text{Iden1} := \text{identity}(7) \quad z9 := \text{Iden1} - \frac{step9 \cdot y9^T}{step9^T \cdot y9}$$

$$H9 := z9 \cdot H8 \cdot z9^T + \frac{step9 \cdot step9^T}{step9^T \cdot y9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}$$

$$\|H9\| = 1.773 \cdot 10^{-24}$$

ИТЕРАЦИЯ 9

$$e9 := \text{norm}(G9) = 4.405$$

$$e9 \leq e8 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d9 := -H9 \cdot G9 = \begin{bmatrix} -0.0000139 \\ 0.0000216 \\ 0.0000229 \\ -0.000014 \\ -0.0001039 \\ -0.0000368 \\ -0.0005893 \end{bmatrix} \quad G9^T \cdot d9 = 0$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k9 := 1 \quad c1 := 0.001 \quad e3 := 0.9$$

$$e10 := e9 + k9 \cdot d9 = \begin{bmatrix} 0.0000189 \\ 0.0000204 \\ -0.2601425 \\ 1.0000455 \\ 0.0026535 \\ -0.0007729 \\ 11.6754499 \end{bmatrix}$$

$$c1 \cdot k9 \cdot G9^T \cdot d9 = -1.57172 \cdot 10^{-7}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$f10 := f(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.002 & 0.006 & 0.003 & -0.015 & 0.002 & 0.007 & 0.002 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0.002 & 0.003 \\ -0.001 & -0.003 & 0 & 0.003 & 0.007 & 0.002 & -0.001 & 0.002 & -0.002 & 0.001 & 0 & -0.003 & -0.002 & 0.001 & -0.002 & -0.003 \\ -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0.001 & 0.002 & 0.003 & 0 & -0.002 & -0.002 & -0.001 & 0.002 & 0.002 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q10 := f9 + w = \begin{bmatrix} -14.855 & -22.035 & 31.125 & -29.637 & -36.046 & -42.429 & -64.068 & -52.947 & -106.05 & -75.619 & -67.565 & -100.59 & -34.367 & 2.382 & -12.513 & -10.795 \\ 18.513 & 0.983 & -11.798 & -5.429 & -60.92 & 4.991 & -49.975 & 9.588 & 43.442 & 39.015 & 51.207 & 61.945 & 43.705 & 105.643 & 41.801 & 29.762 \\ 12.227 & 12.274 & 11.601 & 12.269 & 11.812 & 12.224 & 11.82 & 12.078 & 12.093 & 12.573 & 12.044 & 11.983 & 11.963 & 12.679 & 12.287 & 12.194 \end{bmatrix}$$

$$e10r(r) := e9 + r \cdot d9$$

$$fk9(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e10r(r)_0, e10r(r)_1, e10r(r)_2, e10r(r)_3, e10r(r)_4, e10r(r)_5, e10r(r)_6) \cdot f(e10r(r)_0, e10r(r)_1, e10r(r)_2, e10r(r)_3, e10r(r)_4, e10r(r)_5, e10r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

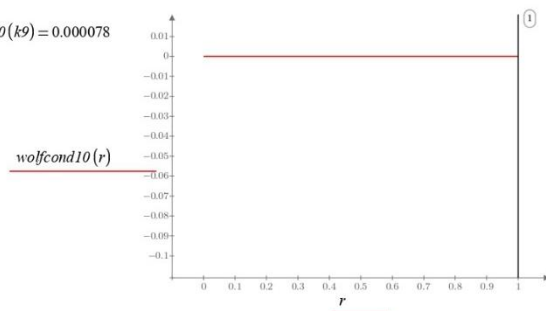
Условия убывания

$$\text{wolfcond10}(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f9 \cdot f9})_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G9^T \cdot d9 - f89(r)$$

$$\text{wolfcond10}(k9) > 0 = 1 \quad \text{wolfcond10}(k9) = 0.000078$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \pi0)}_{j,i} = 0.001$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} (\overrightarrow{f9 \cdot f9})_{j,i} = 0.001$$



Условия кривизны

$$\text{diff110} := \text{diff1}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff210} := \text{diff2}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff310} := \text{diff3}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff410} := \text{diff4}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff510} := \text{diff5}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff610} := \text{diff6}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$\text{diff710} := \text{diff7}(e10_0, e10_1, e10_2, e10_3, e10_4, e10_5, e10_6)$$

$$G10 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff110})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff210})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff310})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff410})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff510})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff610})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi0 \cdot \text{diff710})}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.021 \\ -0.003 \\ 0.036 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{left29} := G10^T \cdot d9 = -6.8275 \cdot 10^{-8} \quad \text{right29} := c2 \cdot (G9^T \cdot d9) = -0.0001$$

$$|\text{left29}| \leq |\text{right29}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$step10 := e10 - e9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y10 := G10 - G9 = \begin{bmatrix} 0.147430 \\ 1.764216 \\ 3.440849 \\ -2.081196 \\ 0.028950 \\ 0.018653 \\ -0.028815 \end{bmatrix}$$

$$step10^T \cdot y10 > 0 = 1$$

$$y10^T \cdot step10 \geq (c2 - 1) \cdot k9 \cdot G9^T \cdot d9 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n10 := \frac{1}{y10^T \cdot step10} = 6365.2158 \quad [iden1] := \text{identity}(7) \quad z10 := Iden1 - \frac{step10 \cdot y10^T}{step10^T \cdot y10}$$

$$H10 := z10 \cdot H9 \cdot z10^T + \frac{step10 \cdot step10^T}{step10^T \cdot y10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}$$

$$\|H10\| = 1.774 \cdot 10^{-24}$$

ИТЕРАЦИЯ 10

$$e10 := \text{norm}(G10) = 0.042$$

$$e10 \leq e9 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d10 := -H10 \cdot G10 = \begin{bmatrix} 0.0000001 \\ -0.0000004 \\ 0.0000003 \\ -0.0000003 \\ -0.0000173 \\ -0.0000185 \\ -0.0000052 \end{bmatrix} \quad G10^T \cdot d10 = 0$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k10 := 1 \quad \epsilon1 := 0.001 \quad \epsilon2 := 0.9$$

$$e11 := e10 + k10 \cdot d10 = \begin{bmatrix} 0.000019 \\ 0.00002 \\ -0.2601422 \\ 1.0000452 \\ 0.0026362 \\ -0.0007914 \\ 11.6754447 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k10 \cdot G10^T \cdot d10 = -2.80091 \cdot 10^{-11}$$

$$f11 := f(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.006 & 0.003 & -0.015 & 0.002 & 0.007 & 0.002 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0.002 & 0.003 \\ -0.001 & -0.003 & 0 & 0.003 & 0.007 & 0.002 & -0.001 & 0.002 & -0.002 & 0.001 & 0 & -0.003 & -0.002 & 0.001 & -0.002 & -0.003 \\ -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0.001 & 0.002 & 0.003 & 0 & -0.002 & -0.002 & -0.001 & 0.002 & 0.002 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q11 := f10 + w = \begin{bmatrix} -14.854 & -22.034 & 31.125 & -29.637 & -36.047 & -42.428 & -64.069 & -52.946 & -106.048 & -75.618 & -67.563 & -100.587 & -34.366 & 2.384 & -12.512 & -10.794 \\ 18.513 & 0.984 & -11.798 & -5.428 & -60.918 & 4.992 & -49.973 & 9.589 & 43.443 & 39.016 & 51.208 & 61.947 & 43.706 & 105.641 & 41.8 & 29.762 \\ 12.227 & 12.273 & 11.601 & 12.268 & 11.809 & 12.223 & 11.817 & 12.077 & 12.091 & 12.572 & 12.043 & 11.982 & 11.963 & 12.68 & 12.287 & 12.194 \end{bmatrix}$$

$$e11r(r) := e10 + r \cdot d10$$

$$fk10(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e11r(r)_0, e11r(r)_1, e11r(r)_2, e11r(r)_3, e11r(r)_4, e11r(r)_5, e11r(r)_6) \cdot f(e11r(r)_0, e11r(r)_1, e11r(r)_2, e11r(r)_3, e11r(r)_4, e11r(r)_5, e11r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

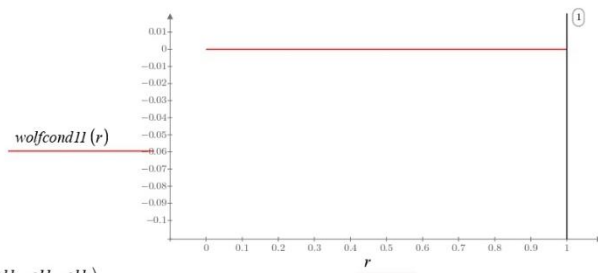
Условия убывания

$$\text{wolfcond11}(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 0 \cdot \pi 0)}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G10^T \cdot d10 - fk10(r)$$

$$\text{wolfcond11}(k10) > 0 = 1 \quad \text{wolfcond11}(k10) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \pi 1)}_{j,i} = 0.001$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 0 \cdot \pi 0)}_{j,i} = 0.001$$



Условия кривизны

$$\text{diff111} := \text{diff1}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff211} := \text{diff2}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff311} := \text{diff3}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff411} := \text{diff4}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff511} := \text{diff5}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff611} := \text{diff6}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$\text{diff711} := \text{diff7}(e11_0, e11_1, e11_2, e11_3, e11_4, e11_5, e11_6)$$

$$G11 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff11})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff211})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff311})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff411})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff511})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff611})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \text{diff711})}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0.002 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{left210} := G11^T \cdot d10 = -6.0763 \cdot 10^{-10} \quad \text{right210} := c2 \cdot (G10^T \cdot d10) = -2.5208 \cdot 10^{-8}$$

$$|\text{left210}| \leq |\text{right210}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$step11 := e11 - e10 = \begin{bmatrix} 1.0501 \cdot 10^{-7} \\ -4.013 \cdot 10^{-7} \\ 2.5109 \cdot 10^{-7} \\ -2.8506 \cdot 10^{-7} \\ -1.7285 \cdot 10^{-5} \\ -1.8504 \cdot 10^{-5} \\ -5.1743 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y11 := G11 - G10 = \begin{bmatrix} 0.000197 \\ -0.020788 \\ 0.004823 \\ -0.034537 \\ -0.000023 \\ -0.000454 \\ 0.000157 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} step11^T \cdot y11 &> 0 = 1 \\ y11^T \cdot step11 &\geq (c2 - 1) \cdot k10 \cdot G10^T \cdot d10 = 1 \end{aligned}$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n11 := \frac{1}{y11^T \cdot step11} = 36494333.4148 \quad \boxed{iden1} := identity(7) \quad z11 := iden1 - \frac{step11 \cdot y11^T}{step11^T \cdot y11}$$

$$H11 := z11 \cdot H10 \cdot z11^T + \frac{step11 \cdot step11^T}{step11^T \cdot y11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0.053 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}$$

$$\|H11\| = 1.813 \cdot 10^{-24}$$

ИТЕРАЦИЯ 11

$$e11 := norm(G11) = 0.003$$

$$e11 \leq e10 = 1$$

ШАГ 5. Определение направления спуска

$$d11 := -H11 \cdot G11 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0000007 \\ -0.0000007 \\ -0.0000001 \end{bmatrix} \quad G11^T \cdot d11 = 0$$

ШАГ 6. Вычисление параметров преобразования на итерации

$$k11 := 1 \quad \boxed{c1} := 0.001 \quad \boxed{e2} := 0.9$$

$$e12 := e11 + k11 \cdot d11 = \begin{bmatrix} 0.000019 \\ 0.00002 \\ -0.2601422 \\ 1.0000452 \\ 0.0026355 \\ -0.0007921 \\ 11.6754446 \end{bmatrix}$$

Проверка соблюдения условий Вольфе

$$c1 \cdot k11 \cdot G11^T \cdot d11 = -9.24134 \cdot 10^{-14}$$

$$f12 := f(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.006 & 0.003 & -0.015 & 0.002 & 0.007 & 0.002 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0.002 & 0.003 \\ -0.001 & -0.003 & 0 & 0.003 & 0.007 & 0.002 & -0.001 & 0.002 & -0.002 & 0.001 & 0 & -0.003 & -0.002 & 0.001 & -0.002 & -0.003 \\ -0.001 & -0.002 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0.001 & 0.002 & 0.003 & 0 & -0.002 & -0.002 & -0.001 & 0.002 & 0.002 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q12 := f11 + w = \begin{bmatrix} -14.854 & -22.034 & 31.125 & -29.637 & -36.047 & -42.428 & -64.069 & -52.946 & -106.048 & -75.617 & -67.563 & -100.587 & -34.366 & 2.384 & -12.512 & -10.794 \\ 18.513 & 0.984 & -11.798 & -5.428 & -60.918 & 4.992 & -49.973 & 9.589 & 43.443 & 39.016 & 51.208 & 61.947 & 43.705 & 105.641 & 41.8 & 29.762 \\ 12.227 & 12.273 & 11.601 & 12.268 & 11.809 & 12.223 & 11.817 & 12.077 & 12.091 & 12.572 & 12.043 & 11.982 & 11.963 & 12.68 & 12.287 & 12.194 \end{bmatrix}$$

$$e12r(r) := e11 + r \cdot d11$$

$$f11(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \left(f(e12r(r)_0, e12r(r)_1, e12r(r)_2, e12r(r)_3, e12r(r)_4, e12r(r)_5, e12r(r)_6) \cdot f(e12r(r)_0, e12r(r)_1, e12r(r)_2, e12r(r)_3, e12r(r)_4, e12r(r)_5, e12r(r)_6) \right)_{j,i}$$

Продолжение приложения Е

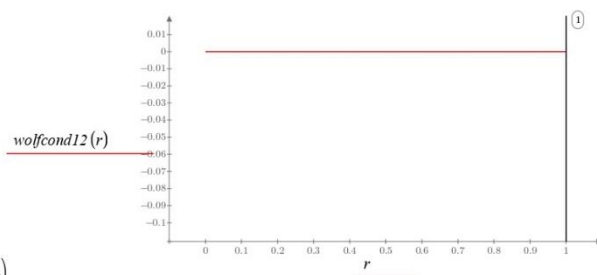
Условия убывания

$$\text{wolfcond12}(r) := \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \pi 1)}_{j,i} + c1 \cdot r \cdot G11^T \cdot d11 - f k11(r)$$

$$\text{wolfcond12}(k11) \geq 0 = 1 \quad \text{wolfcond12}(k11) = 0$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \pi 2)}_{j,i} = 0.001$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 1 \cdot \pi 1)}_{j,i} = 0.001$$



Условия кривизны

$$\text{diff112} := \text{diff1}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff212} := \text{diff2}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff312} := \text{diff3}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff412} := \text{diff4}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff512} := \text{diff5}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff612} := \text{diff6}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$\text{diff712} := \text{diff7}(e12_0, e12_1, e12_2, e12_3, e12_4, e12_5, e12_6)$$

$$G12 := \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff112})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff212})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff312})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff412})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff512})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff612})}_{j,i} \\ 2 \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^{15} \overrightarrow{(\pi 2 \cdot \text{diff712})}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.249 \cdot 10^{-5} \\ 1.101 \cdot 10^{-5} \\ -8.927 \cdot 10^{-6} \\ 2.68 \cdot 10^{-5} \\ -5.705 \cdot 10^{-7} \\ -4.21 \cdot 10^{-7} \\ -1.191 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$\text{left211} := G12^T \cdot d11 = 1.1425 \cdot 10^{-12} \quad \text{right211} := c2 \cdot (G11^T \cdot d11) = -8.3172 \cdot 10^{-11}$$

$$|\text{left211}| \leq |\text{right211}| = 1$$

Продолжение приложения Е

ШАГ 7. Вычисление вектора шага на итерации

$$step12 := e12 - e11 = \begin{bmatrix} -2.2044 \cdot 10^{-8} \\ 8.9051 \cdot 10^{-9} \\ -3.5341 \cdot 10^{-9} \\ -1.4337 \cdot 10^{-8} \\ -6.7458 \cdot 10^{-7} \\ -7.0056 \cdot 10^{-7} \\ -9.2194 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление вектора изменения градиента на итерации

$$y12 := G12 - G11 = \begin{bmatrix} -0.001428 \\ 0.000050 \\ -0.001893 \\ -0.001834 \\ -0.000006 \\ -0.000037 \\ 0.000008 \end{bmatrix}$$

$$step12^T \cdot y12 > 0 = 1$$

$$y12^T \cdot step12 \geq (c2 - 1) \cdot k11 \cdot G11^T \cdot d11 = 1$$

ШАГ 9. Вычисление матрицы Гессе на итерации

$$n12 := \frac{1}{y12^T \cdot step12} = 10688788714.0639 \quad \text{Iden1} := \text{identity}(7) \quad z12 := \text{Iden1} - \frac{step12 \cdot y12^T}{step12^T \cdot y12}$$

$$H12 := z12 \cdot H11 \cdot z12^T + \frac{step12 \cdot step12^T}{step12^T \cdot y12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}$$

$$\|H12\| = 1.791 \cdot 10^{-24}$$

ИТЕРАЦИЯ 12

$$e12 := \text{norm}(G12) = 0.0000444$$

$$e12 \leq e11 = 1$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Результаты взаимного ориентирования дискретных точечных моделей с помощью алгоритма ИСР

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ИСР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМНОГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ ДАННЫХ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

ШАГ 1. Инициализация входных данных

$\epsilon < 0.01$ $I := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ $N := 16$

$$p := \begin{pmatrix} -9.5944 & -21.0414 & 27.0391 & -30.0372 & -50.5036 & -39.7171 & -74.7659 & -48.6984 & -91.3032 & -63.0371 & -52.1179 & -81.2673 & -21.9691 & 29.4729 & -1.3419 & -2.7782 \\ 21.7114 & 6.6193 & -19.4048 & 2.3789 & -49.5929 & 15.7380 & -31.8092 & 22.8852 & 69.2574 & 57.1522 & 66.8618 & 85.7328 & 51.0736 & 101.4705 & 43.6117 & 31.5367 \\ 0.5518 & 0.5985 & -0.0756 & 0.5927 & 0.1341 & 0.5485 & 0.1425 & 0.4027 & 0.4191 & 0.8988 & 0.3702 & 0.3098 & 0.2886 & 1.0062 & 0.6124 & 0.5189 \end{pmatrix}$$

$$q := \begin{pmatrix} -14.8553 & -22.0359 & 31.1188 & -29.6401 & -36.0319 & -42.4299 & -64.0752 & -52.948 & -106.0444 & -75.6162 & -67.5614 & -100.5844 & -34.3648 & 2.3854 & -12.5142 & -10.7972 \\ 18.5143 & 0.9864 & -11.7981 & -5.4315 & -60.9252 & 4.9895 & -49.9722 & 9.5869 & 43.4454 & 39.0149 & 51.2083 & 61.9494 & 43.7071 & 105.6405 & 41.8023 & 29.7643 \\ 12.228 & 12.275 & 11.602 & 12.269 & 11.809 & 12.222 & 11.815 & 12.074 & 12.091 & 12.574 & 12.045 & 11.983 & 11.961 & 12.678 & 12.287 & 12.194 \end{pmatrix}$$

Функции вычисления отклонения точек

$f(R, t) := R \cdot p + t - q$

ШАГ 2. Вычисление центров масс для каждой точечной модели

$$\mu Q := \begin{pmatrix} q_{0,0} + q_{0,1} + q_{0,2} + q_{0,3} + q_{0,4} + q_{0,5} + q_{0,6} + q_{0,7} + q_{0,8} + q_{0,9} + q_{0,10} + q_{0,11} + q_{0,12} + q_{0,13} + q_{0,14} + q_{0,15} \\ q_{1,0} + q_{1,1} + q_{1,2} + q_{1,3} + q_{1,4} + q_{1,5} + q_{1,6} + q_{1,7} + q_{1,8} + q_{1,9} + q_{1,10} + q_{1,11} + q_{1,12} + q_{1,13} + q_{1,14} + q_{1,15} \\ q_{2,0} + q_{2,1} + q_{2,2} + q_{2,3} + q_{2,4} + q_{2,5} + q_{2,6} + q_{2,7} + q_{2,8} + q_{2,9} + q_{2,10} + q_{2,11} + q_{2,12} + q_{2,13} + q_{2,14} + q_{2,15} \end{pmatrix} \div N \rightarrow \begin{pmatrix} -39.74966875 \\ 20.15514375 \\ 12.1316875 \end{pmatrix}$$

$$\mu P := \begin{pmatrix} p_{0,0} + p_{0,1} + p_{0,2} + p_{0,3} + p_{0,4} + p_{0,5} + p_{0,6} + p_{0,7} + p_{0,8} + p_{0,9} + p_{0,10} + p_{0,11} + p_{0,12} + p_{0,13} + p_{0,14} + p_{0,15} \\ p_{1,0} + p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} + p_{1,4} + p_{1,5} + p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,8} + p_{1,9} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,12} + p_{1,13} + p_{1,14} + p_{1,15} \\ p_{2,0} + p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{2,4} + p_{2,5} + p_{2,6} + p_{2,7} + p_{2,8} + p_{2,9} + p_{2,10} + p_{2,11} + p_{2,12} + p_{2,13} + p_{2,14} + p_{2,15} \end{pmatrix} \div N \rightarrow \begin{pmatrix} -33.22879375 \\ 29.7014125 \\ 0.45745 \end{pmatrix}$$

ШАГ 3. Вычисление центрированных векторов для каждой точечной модели

$$q1 := \begin{pmatrix} q_{0,0} - \mu Q_{0,0} & q_{0,1} - \mu Q_{0,0} & q_{0,2} - \mu Q_{0,0} & q_{0,3} - \mu Q_{0,0} & q_{0,4} - \mu Q_{0,0} & q_{0,5} - \mu Q_{0,0} & q_{0,6} - \mu Q_{0,0} & q_{0,7} - \mu Q_{0,0} & q_{0,8} - \mu Q_{0,0} & q_{0,9} - \mu Q_{0,0} & q_{0,10} - \mu Q_{0,0} & q_{0,11} - \mu Q_{0,0} & q_{0,12} - \mu Q_{0,0} & q_{0,13} - \mu Q_{0,0} & q_{0,14} - \mu Q_{0,0} & q_{0,15} - \mu Q_{0,0} \\ q_{1,0} - \mu Q_{1,0} & q_{1,1} - \mu Q_{1,0} & q_{1,2} - \mu Q_{1,0} & q_{1,3} - \mu Q_{1,0} & q_{1,4} - \mu Q_{1,0} & q_{1,5} - \mu Q_{1,0} & q_{1,6} - \mu Q_{1,0} & q_{1,7} - \mu Q_{1,0} & q_{1,8} - \mu Q_{1,0} & q_{1,9} - \mu Q_{1,0} & q_{1,10} - \mu Q_{1,0} & q_{1,11} - \mu Q_{1,0} & q_{1,12} - \mu Q_{1,0} & q_{1,13} - \mu Q_{1,0} & q_{1,14} - \mu Q_{1,0} & q_{1,15} - \mu Q_{1,0} \\ q_{2,0} - \mu Q_{2,0} & q_{2,1} - \mu Q_{2,0} & q_{2,2} - \mu Q_{2,0} & q_{2,3} - \mu Q_{2,0} & q_{2,4} - \mu Q_{2,0} & q_{2,5} - \mu Q_{2,0} & q_{2,6} - \mu Q_{2,0} & q_{2,7} - \mu Q_{2,0} & q_{2,8} - \mu Q_{2,0} & q_{2,9} - \mu Q_{2,0} & q_{2,10} - \mu Q_{2,0} & q_{2,11} - \mu Q_{2,0} & q_{2,12} - \mu Q_{2,0} & q_{2,13} - \mu Q_{2,0} & q_{2,14} - \mu Q_{2,0} & q_{2,15} - \mu Q_{2,0} \end{pmatrix}$$

$$q1 \rightarrow \begin{pmatrix} 24.8944 & 17.7138 & 70.8685 & 10.1096 & 3.7178 & -2.6802 & -24.3255 & -13.1983 & -66.2947 & -35.8665 & -27.8117 & -60.8347 & 5.3849 & 42.1351 & 27.2355 & 28.9525 \\ -1.6408 & -19.1687 & -31.9532 & -25.5866 & -81.0803 & -15.1656 & -70.1273 & -10.5682 & 23.2903 & 18.8598 & 31.0532 & 41.7943 & 23.552 & 85.4854 & 21.6472 & 9.6092 \\ 0.0963 & 0.1433 & -0.5297 & 0.1373 & -0.3227 & 0.0903 & -0.3167 & -0.0577 & -0.0407 & 0.4423 & -0.0867 & -0.1487 & -0.1707 & 0.5463 & 0.1553 & 0.0623 \end{pmatrix}$$

$$p1 := \begin{pmatrix} p_{0,0} - \mu P_{0,0} & p_{0,1} - \mu P_{0,0} & p_{0,2} - \mu P_{0,0} & p_{0,3} - \mu P_{0,0} & p_{0,4} - \mu P_{0,0} & p_{0,5} - \mu P_{0,0} & p_{0,6} - \mu P_{0,0} & p_{0,7} - \mu P_{0,0} & p_{0,8} - \mu P_{0,0} & p_{0,9} - \mu P_{0,0} & p_{0,10} - \mu P_{0,0} & p_{0,11} - \mu P_{0,0} & p_{0,12} - \mu P_{0,0} & p_{0,13} - \mu P_{0,0} & p_{0,14} - \mu P_{0,0} & p_{0,15} - \mu P_{0,0} \\ p_{1,0} - \mu P_{1,0} & p_{1,1} - \mu P_{1,0} & p_{1,2} - \mu P_{1,0} & p_{1,3} - \mu P_{1,0} & p_{1,4} - \mu P_{1,0} & p_{1,5} - \mu P_{1,0} & p_{1,6} - \mu P_{1,0} & p_{1,7} - \mu P_{1,0} & p_{1,8} - \mu P_{1,0} & p_{1,9} - \mu P_{1,0} & p_{1,10} - \mu P_{1,0} & p_{1,11} - \mu P_{1,0} & p_{1,12} - \mu P_{1,0} & p_{1,13} - \mu P_{1,0} & p_{1,14} - \mu P_{1,0} & p_{1,15} - \mu P_{1,0} \\ p_{2,0} - \mu P_{2,0} & p_{2,1} - \mu P_{2,0} & p_{2,2} - \mu P_{2,0} & p_{2,3} - \mu P_{2,0} & p_{2,4} - \mu P_{2,0} & p_{2,5} - \mu P_{2,0} & p_{2,6} - \mu P_{2,0} & p_{2,7} - \mu P_{2,0} & p_{2,8} - \mu P_{2,0} & p_{2,9} - \mu P_{2,0} & p_{2,10} - \mu P_{2,0} & p_{2,11} - \mu P_{2,0} & p_{2,12} - \mu P_{2,0} & p_{2,13} - \mu P_{2,0} & p_{2,14} - \mu P_{2,0} & p_{2,15} - \mu P_{2,0} \end{pmatrix}$$

Продолжение приложения Ж

$$p1 \rightarrow \begin{pmatrix} 23.6344 & 12.1874 & 60.2679 & 3.1916 & -17.2748 & -6.4883 & -41.5371 & -15.4696 & -58.0744 & -29.8083 & -18.8891 & -48.0385 & 11.2597 & 62.7017 & 31.8869 & 30.4506 \\ -7.99 & -23.0821 & -49.1062 & -27.3225 & -79.2943 & -13.9634 & -61.5106 & -6.8162 & 39.556 & 27.4508 & 37.1604 & 56.0314 & 21.3722 & 71.7691 & 13.9103 & 1.8353 \\ 0.0944 & 0.1411 & -0.5331 & 0.1353 & -0.3234 & 0.0911 & -0.315 & -0.0547 & -0.0384 & 0.4413 & -0.0872 & -0.1477 & -0.1688 & 0.5487 & 0.155 & 0.0614 \end{pmatrix}$$

ШАГ 4. Вычисление ковариационной матрицы центрированных векторов

$$W := q1 \cdot p1^T \rightarrow \begin{pmatrix} 19094.9011 & -7513.2062 & 1.7091 \\ 4394.6901 & 25642.3835 & 103.6435 \\ 28.7143 & 99.1959 & 1.1285 \end{pmatrix}$$

ШАГ 5. Сингулярное разложение матрицы W

$$UDV := \text{svd}(W) = \begin{pmatrix} 0.34506 & 0.93858 & -0.00057 \\ -0.93857 & 0.34505 & -0.00404 \\ -0.00359 & 0.00193 & 0.99999 \\ 0.09203 & 0.99575 & -0.00157 \\ -0.99575 & 0.09202 & -0.00377 \\ -0.00361 & 0.00191 & 0.99999 \end{pmatrix} \quad D := \text{svds}(W) = \begin{pmatrix} 26773.93249 \\ 19521.43943 \\ 0.7091 \end{pmatrix} \quad U := \text{submatrix}(UDV, 0, 2, 0, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.34506 & 0.93858 & -0.00057 \\ -0.93857 & 0.34505 & -0.00404 \\ -0.00359 & 0.00193 & 0.99999 \end{pmatrix}$$

$$V := \text{submatrix}(UDV, 3, 5, 0, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.09203 & 0.99575 & -0.00157 \\ -0.99575 & 0.09202 & -0.00377 \\ -0.00361 & 0.00191 & 0.99999 \end{pmatrix}$$

ШАГ 6. Вычисление матрицы поворота R

$$R := U \cdot V^T = \begin{pmatrix} 0.9663534099 & -0.257217975 & -0.0000241821 \\ 0.2572179753 & 0.96635341 & 0.0000132242 \\ 0.000019967 & -0.000018994 & 0.9999999996 \end{pmatrix}$$

ШАГ 7. Вычисление вектора смещения t

$$t := \mu Q - R \cdot \mu P \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0008 \\ 0.0001 \\ 11.6755 \end{pmatrix}$$

ШАГ 8. Вычисление отклонений между соответствующими точками в двух моделях

$$m := (R \cdot p + t) - q \rightarrow \begin{pmatrix} -0 & 0.0007 & 0.0026 & 0.0025 & -0.0154 & 0.0019 & 0.0076 & 0.0025 & -0.0002 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0013 & -0.0034 & 0.0006 & 0.0015 \\ -0.0011 & -0.0019 & 0.0013 & 0.0044 & 0.0106 & 0.0031 & 0.0023 & 0.0023 & -0.003 & 0.0002 & -0.0017 & -0.0045 & -0.0027 & -0.003 & -0.003 & -0.0032 \\ -0.0013 & -0.0016 & -0.0012 & -0.0015 & 0.0005 & 0.0009 & 0.0021 & 0.0028 & 0.0004 & -0.0021 & -0.0016 & -0.001 & 0.0017 & 0.0023 & 0 & -0.0003 \end{pmatrix}$$

$$\text{RMSE} := \text{norme}(m^T \cdot m) = 0.00044$$

ШАГ 9. Вычисление координат искомой точечной модели

$$W_{\text{target}} := R \cdot p + t \rightarrow \begin{pmatrix} -14.8553 & -22.0352 & 31.1214 & -29.6376 & -36.0473 & -42.428 & -64.0676 & -52.9455 & -106.0446 & -75.6159 & -67.5615 & -100.5841 & -34.3661 & 2.382 & -12.5136 & -10.7957 \\ 18.5132 & 0.9845 & -11.7968 & -5.4271 & -60.9146 & 4.9926 & -49.9699 & 9.5892 & 43.4424 & 39.0151 & 51.2066 & 61.9449 & 43.7044 & 105.6375 & 41.7993 & 29.7611 \\ 12.2267 & 12.2734 & 11.6008 & 12.2675 & 11.8095 & 12.2229 & 11.8171 & 12.0768 & 12.0914 & 12.5719 & 12.0434 & 11.982 & 11.9627 & 12.6803 & 12.287 & 12.1937 \end{pmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ И

Акт внедрения результатов диссертационного исследования



УТВЕРЖДАЮ



Генеральный директор
ООО «Промгеодезия»
В. В. Петров

Дата: «03» июня 2022 г.

**АКТ о внедрении результатов кандидатской диссертации Шарафутдиновой
Анжелики Алексеевны
По научной специальности 1.6.22 «Геодезия»**

Специальная комиссия в составе:

Председатель П.К.Минигазиев;

Члены комиссии: Медянников В.О., Кирилловский М.А., Иванов М.А.

Составили настоящий акт о том, что результаты диссертации на тему «Разработка методики наземного лазерного сканирования промышленных объектов для создания цифровых информационных моделей», представленной на соискание ученой степени кандидата наук, использованы в производственной деятельности ООО «Промышленная геодезия» при реализации проектов наземного лазерного сканирования промышленных объектов в виде:

- методики предрасчета требуемой точности при выполнении наземного лазерного сканирования в зависимости от видов выполняемых геодезических работ;
- методики проектирования и построения геодезических сетей для внешнего ориентирования дискретных точечных моделей;
- технических предложений по выполнению наземного лазерного сканирования с учетом факторов влияющих на точность измерений.

Использование указанных результатов позволяет учитывать особенности геодезической съемки промышленных объектов и повысить точность определения пространственного положения объектов при создании цифровых информационных моделей.

Председатель комиссии

Руководитель проектов

П.К.Минигазиев

Члены комиссии:

Инженер-геодезист

В.О.Медянников

Инженер-геодезист

М.А.Кирилловский

Инженер-геодезист

М.А.Иванов