

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II»

*На правах рукописи*

Васильев Богдан Юрьевич



МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОЛЮСОВ И АЛГОРИТМА ХУКА-  
ДЖИВСА

Специальность 1.6.22. Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Мустафин М.Г.

Санкт-Петербург – 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА В ОБЛАСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА .....</b>	<b>9</b>
1.1 Общие сведения о цифровых моделях рельефа .....	9
1.2 Анализ исходных данных для построения детальных цифровых моделей рельефа .....	13
1.3 Анализ методов пространственной интерполяции для построения цифровых моделей рельефа .....	16
1.4 Анализ форма представления детальных цифровых моделей рельефа .....	24
1.5 Выводы по главе 1 .....	28
<b>ГЛАВА 2 МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ ПОЛЮСОВ И ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ .....</b>	<b>30</b>
2.1 Метод построения характеристического многочлена n-го порядка.....	31
2.2 Алгоритм поиска смежных граней триангуляционной поверхности .....	34
2.2.1 Алгоритм поиска подмножества смежных граней по вершине.....	35
2.2.2 Алгоритм поиска подмножества смежных граней по ребру .....	35
2.3 Метод построения характеристических многочленов смежных граней .....	36
2.4 Алгоритм формирования наборов полюсов при вершинах и при ребрах .....	36
2.5 Метод определения обрабатываемых треугольных граней .....	37
2.6 Метод оптимизация положения наборов полюсов .....	40
2.6.1 Метод оптимизации положения полюсов через среднее положение нормали набора полюсов .....	41
2.6.2 Метод оптимизации положения полюсов через среднее положение нормали отдельных полюсов .....	49
2.8 Метод определения точек принадлежащих построенной поверхности .....	54
2.9 Выводы по главе 2.....	61
<b>ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА .....</b>	<b>62</b>
3.1 Алгоритм классификации.....	62
3.2 Построение математических поверхностей рельефа местности .....	72
3.3 Оценка точности построенных цифровых моделей рельефа.....	104
3.4 Выводы по главе 3.....	119
<b>ГЛАВА 4 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА С ОБЩЕПРИНЯТЫМИ. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ.....</b>	<b>121</b>
4.1 Сравнительный анализ результатов построения.....	121

4.2 Общие рекомендации.....	138
4.3 Выводы по главе 4.....	141
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>143</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>144</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А Акт внедрения.....</b>	<b>157</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....</b>	<b>158</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Развитие компьютерных технологий позволяет создавать цифровые аналоги реальных процессов с высокой точностью, которая ранее была недоступна. Выполнение исследований в данном направлении соответствует распоряжениям правительства РФ от 21 декабря 2021 г. № 3759-р «Об утверждении стратегического направления в области цифровой трансформации науки и высшего образования» и от 20 мая 2023 года №1315-р «Об утверждении Концепции технологического развития на период до 2030 года», которые указывают на необходимость развития цифровых технологий и цифровизации производства. В утвержденной стратегии развития одна из главных ролей отводится цифровым моделям, которые совместно с программным обеспечением определяют качество производственного процесса. Применительно к задачам геодезии широко применяются цифровые модели рельефа (ЦМР), используемые как математическое приближение к рельефу земной поверхности для составления топографических карт и планов, обеспечения этапов проектирования и строительства зданий и инженерных сооружений, в том числе в горном деле, геодезического (маркшейдерского) мониторинга за деформациями земной поверхности, для безопасного освоения территорий, определения пригодности земель для сельскохозяйственного освоения, а также во многих науках о Земле. Важно отметить, что цифровые модели рельефа, наиболее приближенные к реальной земной поверхности, обеспечивают решение задачи прогноза её поведения с использованием расчетных методов и контроля процесса сдвижения путём геодезических наблюдений.

Существуют программы по обработке этих измерений и построения цифровых моделей рельефа с использованием различных методов пространственной интерполяции: кригинга, естественного соседа, триангуляции, радиальной базисной функции, минимальной кривизны, обратного расстояния. При этом каждый метод обладает своими недостатками: метод «Кригинг» сильно зависит от выбора вариограммы; методы «Естественный сосед» и «Обратное расстояние» чувствительны к выбросам, плотности и однородности данных; метод «Триангуляция» недостаточно восстанавливает нелинейные зависимости в данных; метод «Радиальная базисная функция» некорректно обрабатывает участки с резкими изменениями кривизны поверхности на коротких расстояниях, поверхность построенная методом «Минимальная кривизна» не обязательно содержит исходные данные. Выбор метода пространственной интерполяции напрямую влияет на качество построения цифровой модели рельефа. В связи с возрастанием требований к точности построения цифровых моделей рельефа требуется разработка новых методов восстановления связей между геопространственными данными, так как эти связи определяют функциональную зависимость высотного положения определяемой точки от плановых координат.

Большая часть методов пространственной интерполяции, используемых для построения математических моделей рельефа, требует построения регулярной сети для снижения вычислительной нагрузки, в то время как геодезические измерения, выполняемые для получения данных о рельефе земной поверхности, являются нерегулярными. В таком случае переход от данных к регулярной сети приводит к снижению точности построения из-за аппроксимации в области узловых точек. Альтернативным подходом является построение нерегулярной сети триангуляции, которая не требует перехода к регулярной сети и корректно описывает участки с резким изменением кривизны поверхности, но слабо учитывает нелинейные связи между геопространственными данными.

Кроме того, современные методы получения геопространственной информации обладают высокой избыточностью. Поэтому, большой научно-практический интерес представляет снижение объема данных для построения цифровых моделей рельефа (исключение избыточных данных без потери качества), построенных по облакам точек. В этой связи решение обозначенных вопросов является актуальной задачей геодезии.

Содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности по пунктам 7, 11 и 12.

**Степень разработанности исследуемого направления:** следует отметить ученых, разработки которых позволили существенно расширить область научных знаний о методах построения цифровых моделей рельефа: Ф.С. Бахарев, В.И. Волков, В.Н. Гусев, Е.А. Жалковский, Н.Д. Жданов, В.И. Кафтан, А.В. Комиссаров, А.А. Кочнева, А.И. Майданич, А.А. Майоров, А.И. Мартыненко, А.Н. Медянец, М.Г. Мустафин, Б.А. Новаковский, Р.В. Пермяков, Т.Е. Самсонов, А.Д. Сашурин, В.А. Середович, Е.Ю. Тюшевский, В. В. Щербаков, Е.И. Халугин, Л.И. Чернова и др.

Научное исследование опирается также на труды зарубежных ученых, которые посвятили свои исследования анализу и оптимизации методов пространственной интерполяции, используемых при построении цифровых моделей рельефа: Arun P. V., Ajvazi B., Bektaş S, Cățeanu M., Ciubotaru A., Czimmer K. A., Erdede S. B., Grohmann C. H., Guth P. L., Habib M., Hui Z., Li D., Jin S., Van Niekerk A. и др.

**Целью работы** является разработка метода повышения точности построения цифровой модели рельефа.

**Идея работы** состоит в уточнении поверхности локального участка цифровой модели рельефа точками, полученными при интерполяции с применением теории полюсов и метода Хука-Дживса, используемого для обоснования пространственного положения полюсов, с возможностью регуляризации модели с помощью предельного ограничивающего угла.

**Задачи исследования:**

Поставленная в диссертационной работе цель достигается посредством решения нижеуказанных задач:

1. Анализ существующих методов построения цифровых моделей рельефа для обоснования и разработки детальной методики исследований;
2. Разработка метода построения математической модели рельефа с использованием основ теорий полюсов и оптимизации.
3. Оценка точности построения цифровых моделей рельефа общепринятыми методами пространственной интерполяции и предлагаемым;
4. Сравнительный анализ точности построение предлагаемым и общепринятыми методами;
5. Разработка общих рекомендаций по применению разработанного метода.

**Объект исследования** – цифровая модель рельефа.

**Предмет исследования** – математические методы построения цифровых моделей рельефа.

**Научная новизна работы:**

1. Разработан метод построения цифровой модели рельефа с уточнением локальных участков базовой поверхности на основе теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса как подход с восстановлением связей между геопространственными данными в локальной области с использованием характеристического многочлена и обоснованием пространственного положения полюсов его составляющих;
2. Разработан способ регуляризации математической модели рельефа, построенной по облакам точек, при использовании теории полюсов для управления областью поиска при восстановлении связей между геопространственными данными;
3. Усовершенствован алгоритм определения высотного положения дополнительной точки на уточняющей поверхности элемента рассматриваемой системы.

**Научные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработанный метод создания цифровой модели рельефа на основе облаков точек с помощью применяемых совместно теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса повышает точность построения цифровых моделей рельефа в сравнении с основными методами интерполяции более чем на 15%;
2. Выбор полюсов в локальной области описывающих поверхность дискретного элемента следует выполнять с использованием предельного ограничивающего угла, что обеспечивает управление аппроксимирующими кривыми при восстановлении нелинейных связей между геопространственными данными;

3. При интерполяции для уточнения поверхности дискретного элемента необходимо определять высотное положение добавляемой точки, которое в разработанном методе построения цифровой модели рельефа рассчитывается с помощью обратных операций в барицентрических координатах.

**Теоретическая и практическая значимость.** *Теоретическая значимость* работы состоит в том, что в ходе разработки метода построения цифровой модели рельефа с применением теории полюсов и метода Хука-Дживса были получены результаты, которые указывают на возможность восстанавливать связи между геопространственными данными в сложных структурных условиях. *Практическая значимость* полученных результатов состоит в том, что с использованием разработанного метода была повышена точность построения цифровых моделей рельефа объектов минерально-сырьевого комплекса по натурным наблюдениям для решения прикладных задач. Разработанный метод построения математической модели рельефа принят к использованию в производственном процессе компанией ООО «Лаборатория Инжиниринга» для построения цифровых моделей рельефа, что подтверждается актом внедрения от 02.10.2023 (Приложение А).

**Методология и методы исследования:** при выполнении исследования применялись следующие методы: теории полюсов, Хука-Дживса, теории ошибок геодезических измерений, сравнительного анализа, пространственной интерполяции, наименьших квадратов.

**Степень достоверности результатов исследования подтверждается** корректной постановкой цели и задач диссертационной работы, планированием экспериментальных исследований, применением теоретических основ методов теории полюсов, обсуждением основных результатов исследования на научных конференциях, экспериментальным моделированием разработанных методов при построении цифровых моделей рельефа на натурных данных. Результаты диссертационной работы согласуются с выводами, полученными другими отечественными и зарубежными исследователями.

**Апробация результатов исследования.** Основные положения и результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях: XVIII Международный форум-конкурс студентов и молодых ученых «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), Всероссийская научно-практическая конференция «Новые технологии при недропользовании» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), XXI Международная научно-практическая конференция «Современные методы и технологии управления социально-экономическими и инженерными системами и процессами» (г. Минск, 2022 г.), XI Международная горнопромышленная конференция «Баренц-арктическое экономическое партнерство» (г. Кировск, 2022 г.), XXXI Международный научный Симпозиум «Неделя Горняка-2023» (г. Москва, 2023 г.).

**Личный вклад автора** состоит в постановке цели и задач исследования; анализе зарубежных и отечественных литературных источников по созданию цифровых моделей рельефа; разработке метода заполнения пропусков в триангуляционной поверхности на основе восстановления пространственной связи между декомпозированной гранью триангуляции и смежными гранями с использованием теории полюсов и метода Хука-Дживса оптимизации с применением ограничивающего предельного угла для управления степенью обобщенности заполняющей поверхности; выполнении оценки точности построенных цифровых моделей рельефа и определения достоверности предлагаемых методов; анализе и обобщении результатов экспериментальных исследований; апробации результатов исследований на научных конференциях; написании научных публикаций по теме диссертации.

### **Публикации**

Результаты диссертационного исследования в достаточной степени освещены в 5 печатных работах (пункты списка литературы № 5, 6, 26, 27, 28), в том числе в 2 статьях – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (далее – Перечень ВАК), в 2 статьях – в изданиях, входящих в международные базы данных и системы цитирования (Scopus). Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Приложение Б).

### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой из них, заключения и библиографического списка. Содержит 158 страниц машинописного текста, 87 рисунков и 17 таблиц и список литературы из 141 наименования и 2 приложений.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю д.т.н., доценту Мустафину М.Г. за ценные советы и наставления; преподавателям и сотрудникам кафедры инженерной геодезии Санкт-Петербургского горного университета императрицы Екатерины II за всестороннюю помощь на каждом этапе исследования.

# ГЛАВА 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА В ОБЛАСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА

## 1.1 Общие сведения о цифровых моделях рельефа

Отображение реальной земной поверхности является сложным для измерения и в дальнейшем вычислительно затратным процессом. Для представления земной поверхности используют математические построения, приближенные к реальной поверхности, но генерализированные в степени достаточной для решения поставленных инженерных задач. Такие представления называют цифровыми моделями рельефа [75].

В соответствии с ГОСТ Р 59562-2021, цифровая модель рельефа определяется как файл или набор данных, содержащий пространственные координаты множества точек земной поверхности, представленные определенным образом в определенной системе отсчета. Эта система отсчета должна обеспечивать достаточную адекватность физической реальности для проектирования и решения различных инженерных задач, как это указано в СП 317.1325800.2017.

Важно отметить, что цифровые модели рельефа применяются для:

1. Прогнозирования траекторий склонового стока [111];
2. Моделирования процессов на Марсе [110];
3. Создания дренажных сетей [104];
4. Освоения арктической зоны [103];
5. Оценки объемов ледников [100];
6. Оценки шероховатости почвы [93];
7. Моделирования паводковых потоков [92];
8. Проектирования автомобильных дорог [88];
9. Моделирования приливных отмелей [87];
10. Мониторинга деформации поверхности [36, 83];
11. Для оценки рисков наводнений [29, 78];
12. Моделирования миграции дюн [73];
13. Оценки линейных параметров процессов сдвижений [10];
14. Реконструкции оползневых сдвижений [57];
15. Автоматизации построения границ водосборов [22].

Изучением процесса построения математических моделей на основе геопространственных данных от создания фундаментальной структуры [8, 18, 19, 20, 21, 40], в том числе разработкой способов получения [9, 33, 39], обработки [24] и хранения [2, 13, 15, 23] информации, а также наполнения моделей [14], до улучшения и разработки новых методов для

процесса построения цифровых моделей рельефа [6, 16, 27, 28] занимались различные ученые. В общем виде процесс построения цифровых моделей рельефа разделяется [3, 17, 25, 26, 32] на следующие этапы:

1. Сбор данных: для построения цифровых моделей требуется выполнить съемку земной поверхности с целью получения данных о рельефе. Эти данные содержат информацию о высотном положении поверхности земли в различных точках. Этап является первоочередным в создании цифровых моделей, предоставляя необходимую информацию для последующих этапов обработки и построения моделей;

2. Подготовка данных: осуществляется фильтрация и классификация, направленные на исключение измерений, не относящихся к земной поверхности, а также обработка данных, полученных с ошибкой. Процесс подготовки данных является ключевым в обеспечении качественной основы для построения цифровых моделей, обеспечивая точность и достоверность исходных геопространственных данных.

3. Восстановление связей между исходными данными: для заполнения пропусков между измеренными значениями в собранных геопространственных данных используются методы пространственной интерполяции. Эти методы направлены на восстановление связей между точками и предоставление значений в неизвестных областях. Такой подход обеспечивает полноту информации, а также позволяет более точно воссоздать земную поверхность.

4. Создание формы представления: после интерполяции данных, полученных в результате сбора геопространственной информации, осуществляется их преобразование в визуальную форму. Этот этап включает в себя создание графического представления, наиболее подходящего для решаемой задачи. Таким образом обеспечивается наглядное восприятие топографических особенностей региона и улучшается способность анализа информации.

5. Сглаживание (опционально): резкие перепады в данных могут создавать визуальный шум и затруднять адекватное восприятие форм и структуры рельефа, с целью улучшения визуального представления применяются методы сглаживания.

При этом том, в процессе создания цифровых моделей рельефа, могут возникать следующие проблемы:

1. Шумы: эти явления представляют собой случайную осцилляцию в измерениях, которые могут возникнуть из-за следующих факторов: атмосферные условия, технические характеристики оборудования и внешние воздействия. Присутствие шумов в данных может внести искажения в построенные ЦМР, приводя к погрешностям в определении высотного положения и формированию искусственных неровностей поверхности. Для борьбы с шумом требуется выполнять фильтрацию и удаление шумов, в том числе с использованием методов

статистической обработки или аппроксимировать зашумленные области простыми геометрическими построениями, как правило, плоскостями.

2. Пропуски в данных: пропущенные значения могут возникнуть из-за следующих причин: плотная растительность, сложные погодные условия, сложная структурная конфигурация участка земной поверхности, здания и сооружения или наличие теней от высоких объектов. Эта проблема оказывает существенное влияние на полноту и точность построенных моделей, поскольку области с отсутствием данных могут привести к неполным или искаженным представлениям поверхности.

3. Нерегулярная плотность точек: при неравномерном распределении геопространственных данных по земной поверхности возможна неоднородная точность ЦМР, что также снижает детализацию отображения рельефа в локальной области [44].

Снижение влияния ошибок, вызванных указанными проблемами, возможно на различных этапах построения ЦМР, в том числе с помощью разработки и совершенствования подходов к восстановлению связей между исходными данными [5, 6, 42, 51, 129], особенно в локальных областях [101, 140].

Важно отметить, что цифровую модель рельефа (ЦМР) можно декомпозировать на три основные составляющие, внесение изменения в которые, может улучшить конечный результат построения:

1. исходные данные;
2. связи между исходными данными;
3. форма представления.

В зависимости от источника исходных геопространственных данных определяется подход к процессу работы с моделью, так как данные могут быть получены с постоянным или переменным шагом, а также с различной точностью и плотностью [109, 112, 117]. Для построения цифровых моделей рельефа используют следующие исходные данные:

1. воздушного лазерного сканирования [49, 54, 55, 56, 60];
2. аэрофотограмметрической съемки [46, 48, 63, 65, 66];
3. наземной топографической съемки [132];
4. космической съемки [35, 105, 130, 135];
5. комбинации различных источников геопространственной информации [4, 108, 113, 116].

Однако эти данные часто содержат пропуски в значениях, вызванные различными причинами: ошибки сбора данных, технические неполадки или ограничения в работе измерительного оборудования. Заполнение пропусков в геопространственных данных становится ключевой задачей для обеспечения точности, достоверности и полноты информации.

Среди основных методов используемых для заполнения пропусков в геопространственных данных выделяют следующие:

1. Интерполяция: метод, при котором пропущенные значения вычисляются на основе известных данных в близлежащих точках в зависимости от характера данных и их распределения [59, 68, 76].
2. Статистические методы: включают в себя использование статистических характеристик для заполнения пропусков, где отсутствуют сложные зависимости [97].
3. Методы искусственного интеллекта: включает в себя применение алгоритмов для предсказания пропущенных значений на основе имеющихся данных с учетом сложных закономерностей [51, 91, 129].

Для восстановления связей между геопространственными данными при построении цифровых моделей рельефа, преимущественно используют методы пространственной интерполяции. При этом можно выделить следующие общие рекомендации [77, 81, 90, 106, 139] к выбору метода пространственной интерполяции:

1. Для областей с высокой плотностью точек данных (данные лидарного сканирования), целесообразным представляется использование методов, опирающихся на точечные оценки. В случае разреженных данных рекомендуется обращаться к методам, способным эффективно обрабатывать неравномерно распределенные и разреженные данные.
2. Для регионов со сложным рельефом, где имеются резкие перепады высот, более предпочтительными являются методы, сохраняющие локальные детали, такие как триангуляция или методы, использующие радиальные базисные функции. В более плоских регионах, где требуется гладкая поверхность, методы, например, основанные на учете кривизны поверхности, могут быть более уместны.

Кригинг и триангуляция часто используются для точных построений из-за их способности обеспечивать точность за счет структурной согласованности.

Однако, на текущий момент не существует универсального метода пространственной интерполяции, который подходил бы для построения цифровой модели рельефа на любом участке земной поверхности и для любой задачи [31, 45, 50, 64, 86], поэтому сравнение разрабатываемых методов следует выполнять с наиболее подходящим для исследуемой местности и данных её описывающих. Выбор метода зависит от множества факторов: характеристик и плотности данных, требований к точности, доступности вычислительных ресурсов.

Визуальное отображения цифровых моделей рельеф реализуется на этапе выбора способа представления. Для решения большинства научно-практических задач используются следующие способы представления цифровых моделей рельефа:

1. нерегулярная триангуляционная сеть (TIN) [37, 52, 55, 99, 121];
2. регулярная сеть (GRID) [55, 53, 122];
3. набор изолиний (горизонталей) .

## **1.2 Анализ исходных данных для построения детальных цифровых моделей рельефа**

Анализ исходных данных для построения цифровых моделей рельефа (ЦМР) представляет собой важный этап в исследовании и создании точных моделей земной поверхности. Этот процесс включает в себя ряд шагов, направленных на оценку качества данных, изучение пространственной структуры информации, анализ географических характеристик района, выбор методов обработки и интерполяции, оценку статистических характеристик данных, а также учет источников ошибок и неопределенностей [47, 67, 74, 89, 96].

Первым и важным шагом при анализе данных для построения ЦМР является определение метода получения данных и проверка их качества. Это включает оценку достоверности и точности измерений, выявление ошибок и пропусков в данных [69, 120].

Далее, следует изучение пространственной структуры данных, включая распределение точек по поверхности земли [60]. Оценка плотности точек данных, выявление кластеров или регулярных паттернов помогает понять особенности рельефа и методов сбора данных.

Для лучшего понимания геопространственных данных и характеристики рельефа выполняется статистическая оценка с целью определить распределение высот, средние значения, медианы, стандартные отклонения.

На основе анализа данных выбираются методы обработки и интерполяции, наиболее подходящие под выявленные особенности и ограничения.

### **Воздушное лазерное сканирование**

Данные, полученные при воздушном лазерном сканировании (ВЛС) характеризуются высокой плотностью точек, что обеспечивает высокую точность восстановления рельефа [126], особенно в контексте сложных территориальных условий [123], и способствует детальному воспроизведению поверхности. Однако такая высокая плотность приводит к высокой избыточности, что затрудняет фильтрацию шума из полученного облака точек. Упрощенная схема процесса сканирования приведена на рисунке 1.1.

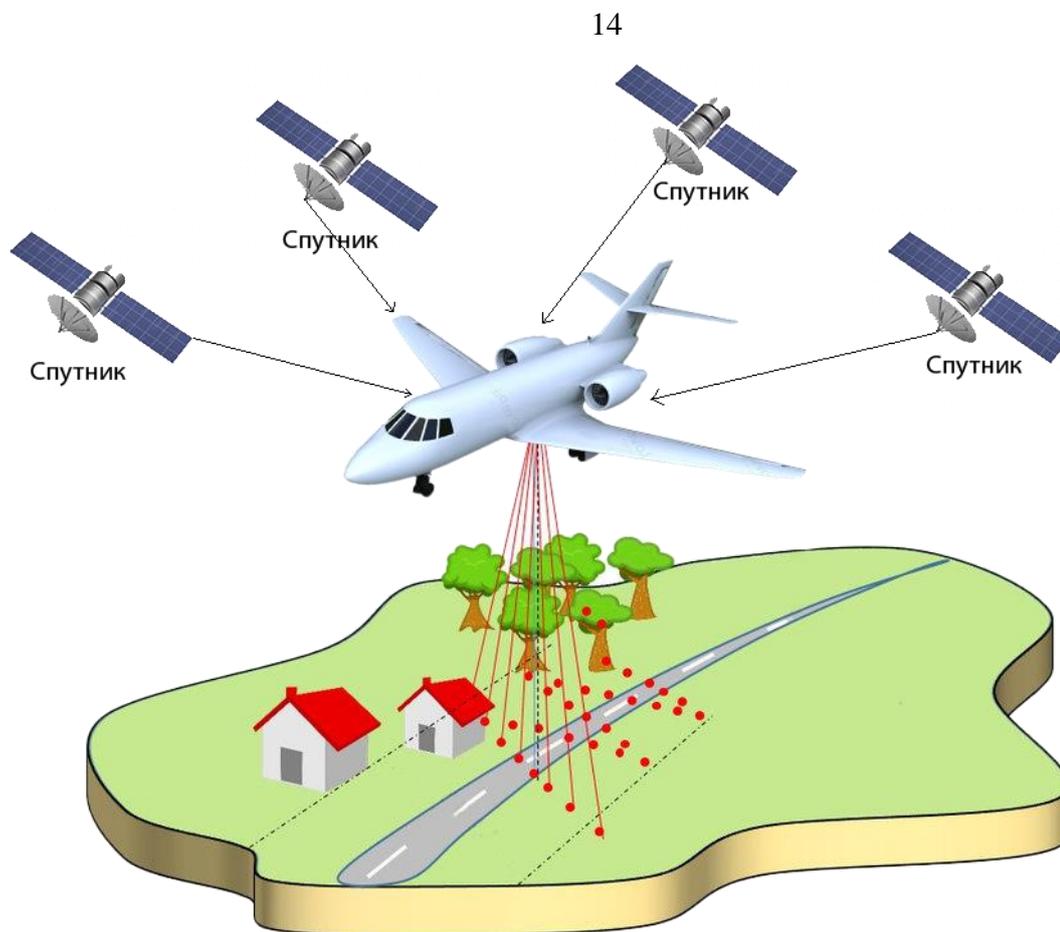


Рисунок 1.1 – Упрощенная схема процесса воздушного лазерного сканирования

Результатом ВЛС является облако точек [62], в котором данные, полученные при использовании лазерных лучей с высокой точностью при значительной скорости сканирования, что особенно необходимо при работах на обширных территориях [115]. За счет особенностей процесса сканирования и высокой скорости могут возникать пропуски в данных, которые требуется заполнить [133]. Для выделения из облака точек данных, относящихся к земной поверхности применяют процедуры классификации [85, 94, 128, 138, 141], фильтрации [85, 95] и идентификации [131].

Все эти особенности делают данные ВЛС ключевым инструментом для создания точных цифровых моделей рельефа, предоставляя широкие возможности для анализа параметров рельефа [119].

### **Фотограмметрическая съемка**

Фотограмметрические данные могут быть получены из различных источников, включая аэросъемку, спутниковые изображения или даже беспилотные летательные аппараты (БПЛА) [70, 71, 79, 89, 134]. Упрощенная схема аэрофотограмметрической съемки приведена на рисунке 1.2.

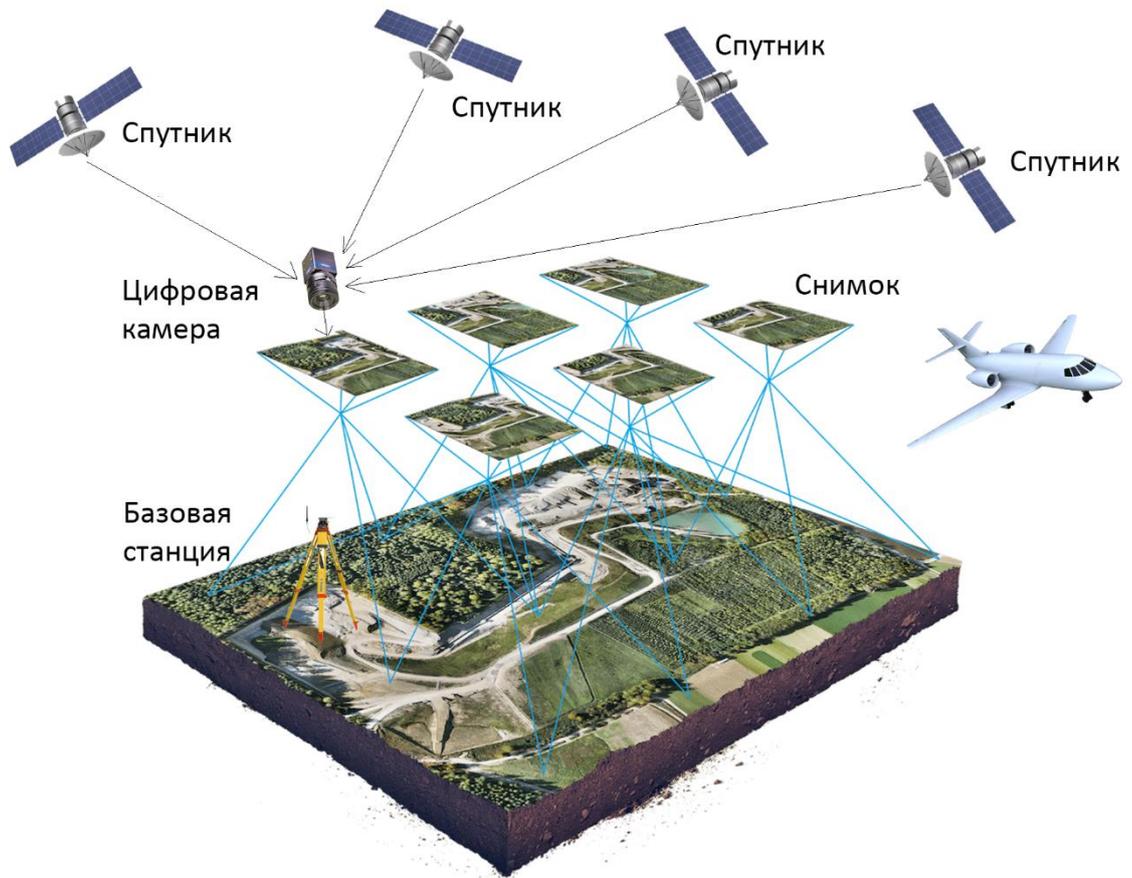


Рисунок 1.2 – Упрощенная схема процесса аэрофотограмметрической съемки

Фотограмметрические данные представляются в виде стереопар, содержащих пару изображений с различных углов обзора. При этом качество фотограмметрических данных зависит от разрешения используемых изображений, определяемого количеством пикселей на единицу площади. Более высокое разрешение позволяет точнее воссоздать рельеф местности, что существенно для точного построения ЦМР.

Для обеспечения точности фотограмметрических данных [7] используются контрольные точки, которые применяются для коррекции системы координат и обеспечивают геореференцию данных. Важно отметить, что однородное освещение в момент съемки важно для снижения искажений геометрии на изображениях из-за теней.

Результатом обработки стереопар могут являться цифровые модели рельефа или структурные линии [30].

### **Наземная топографическая съемка**

Данные, полученные при наземной геодезической съемке, характеризуются высокой точностью измерений, обеспечиваемой геодезическим оборудованием, таким как теодолиты, тахеометры и ГНСС-приемники, способным предоставить точные координаты и высоты для каждой измеренной точки.

Геодезическое оборудование способно зафиксировать детали рельефа и сложные структуры, а также здания и инженерные сооружения, что обеспечивает детализированное представление о земной поверхности и объектах на ней расположенных.

При этом наземная геодезическая съемка может сталкиваться с ограничениями по площади по сравнению с воздушным лазерным сканированием и фотограмметрической съемкой, что требует дополнительных усилий при работе с обширными территориями.

### **1.3 Анализ методов пространственной интерполяции для построения цифровых моделей рельефа**

Пространственная интерполяция в области построения цифровых моделей рельефа представляет собой важный аспект, обеспечивающий оценку высотных значений в областях, где данные о высотах ограничены или их недостаточно. Эти методы имеют важное значение для создания непрерывных и точных моделей рельефа на основе ограниченных данных, что является фундаментальным элементом в геоинформатике и геодезии.

Различные методы пространственной интерполяции, такие как Кригинг, Обратное расстояние, Триангуляция, Радиальная Базисная Функция, Минимальная Кривизна и Естественный Сосед, предоставляют подходы к оценке высотных данных в неизвестных точках. Взаимодействие этих методов с данными зависит от их особенностей, таких как: структура рельефа (характерные геоморфологические особенности поверхности земли) и плотность данных. Выбор конкретного метода требует исследования, учитывающего особенности данных и требования к точности.

Можно выделить следующие общие критерии применения методов пространственной интерполяции при построении цифровых моделей рельефа:

1. Метод должен учитывать особенности данных.
2. Метод должен учитывать пространственные зависимости в данных.
3. Метод должен быть адаптирован к обработке выбросов в данных.
4. Метод должен учитывать распределение данных по земной поверхности.
5. Метод должен корректно обрабатывать пропущенные значения в геопространственных данных.

#### **Кригинг**

Метод Кригинг представляет собой эффективный подход, основанный на создании вероятностной модели рельефа. В рамках этого метода формируется вариограмма, которая служит инструментом для анализа внутренних зависимостей данных в пространстве. Вариограмма представляет собой графическое отображение изменений вариации данных в зависимости от расстояния между точками.

Используя вариограмму, можно определить координаты интерполируемой точки по формуле (1):

$$\hat{Z}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z_i, \quad (1)$$

где  $Z_i$  – высотное положение точки выборки в области поиска;

$\lambda_i$  – веса, которые определяются путем решения системы уравнений кригинга по формуле (2):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i C_{ij} = C_{oj}, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $C_{ij}$  – значение функции ковариации;

$C_{oj}$  – значение функции ковариации между высотным положением в интерполируемой точке и высотным положением в  $i$ -ой точке выборки.

Этот процесс учитывает пространственные отношения между исходными данными внутри локального участка, что позволяет более точно оценивать значения в неизвестных точках. Таким образом, метод Кригинг не только предоставляет способ интерполяции данных, но и обеспечивает основу для построения вероятностной модели, что важно для оценки надежности предсказаний [86, 136].

В конечном итоге, использование вариограммы в методе Кригинг позволяет учесть геостатистические характеристики данных и создать более точные прогнозы в пространстве [80].

К преимуществам метода можно отнести тот факт, что Кригинг адаптируется к пространственной структуре данных, обеспечивая более точные прогнозы в областях с сильной пространственной корреляцией, а также возможность получить оценку неопределенности через вариации прогнозов. При этом метод обладает следующими недостатками:

1. Выбор подходящей модели вариограммы (функции, описывающей пространственную корреляцию) может существенно влиять на результаты. Если модель вариограммы неправильно выбрана или плохо соответствует данным, то высотные значения, полученные в результате интерполяции, могут быть неверными.

2. Кригинг лучше работает с однородными данными, где пространственная корреляция остается постоянной. Данные о рельефе могут быть разнородными, что будет приводить к ошибкам в интерполяции.

3. Кригинг может быть вычислительно затратным, особенно при работе с большими объемами данных. Это может быть проблемой в случае ограниченных вычислительных ресурсов или необходимости проводить интерполяцию в реальном времени [84, 86, 102, 118].

Вывод: выбор вариограммы и данные, использованные для вычисления вариограммы, определяют точность метода. При использовании неполных или ошибочных данных для вычисления вариограммы точность метода будет снижаться. Основное преимущество метода – возможность восстанавливать геопространственные связи в пропущенных данных.

### Обратное расстояние

Метод обратного расстояния (IDW) представляет собой метод пространственной интерполяции, основанный на концепции взвешивания известных данных в зависимости от обратного расстояния. Этот метод использует параметр показателя степени для регулирования влияния расстояния на веса, что влияет на точность интерполяции. Веса для данных уменьшаются с увеличением расстояния до точки интерполяции.

Важным параметром в методе IDW является показатель степени, который регулирует, насколько быстро веса убывают с расстоянием. Выбор оптимального значения этого параметра зависит от конкретных особенностей данных. При этом координата  $Z$  вычисляется по формуле (3):

$$\hat{Z}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i0} Z_i}{\sum_{i=1}^N w_{i0}}, \quad (3)$$

где  $Z_i$  – высотное положение точки выборки в области поиска;

$w_{i0}$  – веса, которые вычисляются по формуле (4):

$$w_{i0} = \frac{1}{(\sqrt{d_{i0}^2 - \delta^2})^\beta}, \quad (4)$$

где  $d_{i0}$  – расстояние между  $i$ -ой точкой измерения и интерполируемой точкой;

$\delta$  – коэффициент сглаживания;

$\beta$  – степенной параметр.

IDW обладает простотой и доступностью, что делает его привлекательным для широкого круга пользователей. Также метод не требует предварительных предположений о распределении данных. К недостаткам метода можно отнести следующие:

1. IDW чувствителен к выбросам данных. Наличие небольшого числа экстремальных значений может существенно исказить результаты интерполяции, так как веса данных прямо пропорциональны обратному квадрату расстояния, что может привести к недостоверным предсказаниям вблизи выбросов.

2. Метод может демонстрировать искажения в случае нерегулярной геометрии данных, так как веса наблюдений зависят от расстояния до точки интерполяции. В случае нерегулярной геометрии, где расстояния не соответствуют плотности данных, возможны ошибки в интерполяции. Это особенно важно в контексте пространственных данных, где плотность измерений неоднородна.

3. Метод Обратное расстояние предполагает однородность влияния расстояния во всех направлениях (изотропия). Однако, в реальных геодезических данных анизотропия (различное влияние в разных направлениях) может быть существенной.

4. При высокой плотности данных веса, получаемые данным методом, могут существенно изменяться даже на небольших расстояниях, что влияет на стабильность и обоснованность результатов при высокой плотности, так как локальные изменения на коротких расстояниях могут исказить общую структуру рельефа [31, 86].

Вывод: Метод обратных расстояний является простым и легко интерпретируемым методом пространственной интерполяции. Однако метод очень чувствителен к выбросам, плотности и однородности данных, что может приводить к искажениям в интерполируемых точках.

### **Триангуляция с линейной интерполяцией**

Метод триангуляции представляет собой подход к пространственной интерполяции, базирующийся на разбиении пространства на связанные треугольные грани с использованием известных данных в вершинах.

Метод содержит следующие основные этапы:

1. Формирование триангуляционной сети: выбираются тройки известных точек данных для построения треугольных граней. Этот процесс может быть осуществлен с применением метода Делоне или инкрементальной триангуляции.

2. Вычисление интерполированных значений: после формирования триангуляционной сети производится линейная интерполяция внутри треугольных граней для определения неизвестных по известным координатам вершин грани.

3. Формирование поверхности: интерполированные значения, полученные для каждого треугольника, объединяются для создания непрерывной поверхности, что обеспечивает возможность оценки значений в произвольных точках пространства.

Триангуляция является распространенным методом, подходящим для различных видов пространственных данных, включая геоданные, при этом отмечается эффективность при работе с данными, характеризующимися нерегулярной геометрией, так как построение треугольных граней поверхности выполняется в соответствии с распределением геопро пространственных данных. При этом к недостаткам триангуляции относят:

1. Недостаточная плотность треугольников в областях с быстрыми изменениями значений может привести к упрощенной интерполяции.

2. Линейная интерполяция применяется в предположении о линейной зависимости между значениями в узлах. В случае выбросов это предположение может оказаться несправедливым, что снижает надежность интерполяции.

3. Триангуляция с линейной интерполяцией имеет ограниченную способность отображения сложных поверхностей. Это особенно заметно в случаях, когда реальная зависимость данных не может быть адекватно представлена линейной функцией [55, 58, 107,125].

Определение высотного положения интерполируемой точки осуществляется в соответствии с формулой (5):

$$\hat{Z}_0 = \frac{-a \cdot X - b \cdot Y - d}{c}, \quad (5)$$

где  $X, Y$  – плановые координаты интерполируемой точки;

$a, b, c, d$  – коэффициенты уравнения плоскости (формула (6)) дискретного элемента триангуляции, к которому принадлежит интерполируемая точка:

$$a \cdot X + b \cdot Y + c \cdot Z + d = 0 \quad (6)$$

Вывод: Метод Триангуляция корректно отображает резкие изменения кривизны поверхности и участки рельефа, для которых справедливо утверждение о линейной зависимости. При этом при недостаточной плотности треугольников, нелинейной зависимости в данных и сложных формах рельефа использование метода приводит к ошибкам в интерполируемых значениях.

### **Минимальная кривизна**

Метод пространственной интерполяции Минимальная кривизна представляет собой подход к оценке значений внутри пространства на основе минимизации кривизны поверхности, которая проходит через заданные точки данных. Этот метод хорошо справляется с построением гладких и естественных интерполяционных поверхностей.

Основная идея метода заключается в том, чтобы построить поверхность, которая имеет минимальную кривизну в области интерполяции. Это достигается путем формирования математической модели, которая учитывает кривизну и её минимизацию, при этом метод акцентирует внимание на локальной информации, что позволяет более точно адаптироваться к изменениям в данных в конкретной области.

Минимизация кривизны способствует созданию более плавных интерполяционных поверхностей. Кроме того, метод эффективен в сглаживании шумов в данных, что способствует

получению более стабильных и точных результатов интерполяции. Можно выделить следующие недостатки метода:

1. Метод чувствителен к выбросам данных, что особенно заметно в случае, когда вблизи выброса требуется минимизировать кривизну. Такая чувствительность обусловлена попыткой минимизировать кривизну поверхности в окрестности точек с экстремальными значениями.

2. Эффективность метода Минимальная кривизна напрямую зависит от плотности точек данных в области интерполяции, так как минимизация кривизны требует подробной информации о форме поверхности в каждой точке.

3. Метод может проявлять неустойчивость при резких перепадах в значениях высоты в небольших пространственных областях.

4. Минимизация кривизны может привести к недостаточной адаптации к реальной геометрии, особенно в случае, когда поверхность обладает сложной структурой.

5. Отсутствие явных методов настройки параметров в методе Минимальная кривизна может усложнить применение метода в практических задачах и требовать дополнительных исследований [71].

Вычисление высотного положения интерполируемой точки осуществляется по формуле (7):

$$\hat{Z} = a + bX + cY + \hat{e}(X, Y), \quad (7)$$

где  $X, Y$  – плановые координаты интерполируемой точки;

$\hat{e}$  вычисляет с помощью решения модифицированного дифференциального уравнения по формуле (8):

$$(1 - T_i)\nabla^2(\nabla^2 e) - (T_i)\nabla^2 e = 0, \quad (8)$$

где  $T_i$  – параметр «внутреннее натяжение»;

$\nabla^2$  - оператор Лапласа;

$e$  – разность между результатами аппроксимации и известными значениями вычисляемая по формуле (9):

$$e = (a + bX_i + cY_i) - Z_i, \quad (9)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – коэффициенты уравнения плоскости (формула (6)) дискретного элемента триангуляции, к которому принадлежит интерполируемая точка:

Вывод: главный недостаток метода – аппроксимирующая поверхность может не проходить через геопространственные данные с известными координатами, но при этом обеспечивается максимальная близость предельно гладкой, с учетом граничных условий, поверхности к ним, что при резких изменениях в кривизне поверхности.

### **Естественный сосед**

Метод пространственной интерполяции Естественный сосед представляет собой эффективный подход к оценке значений внутри пространства на основе локальной информации о соседних точках.

Метод «Естественный сосед» вычисляет координату  $Z$  интерполируемой точки как средневзвешенное значение в выборочных точках по формуле (10):

$$\hat{Z}_0 = \sum_{i=1}^N w_{i0} Z_i, \quad (10)$$

где  $w_{i0}$  – вес  $i$ -й точки (вычисляется при помощи диаграмм Вороного);

$Z_i$  – значение в выборочных точках области.

Метод предусматривает генерацию двух диаграмм Вороного: первая формируется до включения интерполируемой точки, вторая – после. Ячейки, оказавшиеся в области пересечения между ячейкой интерполируемой точки и исходными, определяются как соседние и применяются для расчета координаты  $Z$  интерполируемой точки.

Одной из ключевых особенностей метода является его способность локально взвешивать значения соседних точек при интерполяции. Большой вес присваивается тем точкам, которые ближе к интерполируемой области. При этом метод базируется на триангуляции Делоне, где точки данных разбивают пространство на непересекающиеся треугольники, что обеспечивает эффективное построение локальных интерполяционных поверхностей. К недостаткам метода можно отнести:

1. Зависимость от качества построенной триангуляционной сети;
2. Трудности при обработке больших объемов данных;
3. Наличие выбросов может значительно повлиять на интерполяцию, особенно в областях с ограниченным количеством близлежащих точек;
4. В условиях переменной плотности данных метод может демонстрировать неустойчивую точность интерполяции [31, 106, 124].

### **Радиальная базисная функция**

Метод пространственной интерполяции, использующий радиальные базисные функции (РБФ), представляет собой подход к оценке значений внутри пространства на основе радиальных функций.

Основой метода являются радиальные базисные функции, которые представляют собой функции, зависящие от расстояния между точками с известными координатами и интерполируемой точкой, а также параметра сглаживания. Метод взвешивает точки данных в заданной пространственной области в зависимости от расстояния.

Коэффициенты сглаживания вычисляются для радиальных базисных функций с использованием методов оптимизации. Эти коэффициенты определяют вклад каждой точки данных в интерполяцию в зависимости от их расстояния и назначают веса.

Вычисление координаты  $Z$  интерполируемой точки с использованием метода РБФ осуществляется по формуле (11):

$$\hat{Z}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i B(d_{i0}), \quad (11)$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент  $i$ -ой точки с известными координатами;

$B(\ )$  – радиальная базисная функция;

$d_{i0}$  – расстояние между  $i$ -ой точкой с известными координатами и интерполируемой точкой.

В качестве базисной функции [82] могут быть использованы следующие базисные функции, вычисляемые по формулам (12-15):

1. Кубический сплайн:

$$B(d) = (d^2 + R^2)^{3/2}, \quad (12)$$

2. Обратная мультикватратичная функция:

$$B(d) = \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}}, \quad (13)$$

3. Мультилогарифмическая функция:

$$B(d) = \log(d^2 + R^2), \quad (14)$$

4. Плоский сплайн:

$$B(d) = (d^2 + R^2) \log(d^2 + R^2), \quad (15)$$

где  $d$  – расстояние от точки интерполяции до исходной точки;

$R^2$  – параметр сглаживания.

Следует отметить следующие недостатки метода РБФ:

1. Эффективность метода существенно зависит от выбора радиальной базисной функции. Различные функции могут демонстрировать разное поведение в зависимости от характера данных и их пространственного распределения. Неправильный выбор функции может привести к искажениям в интерполированных значениях.

2. Неравномерное распределение данных в пространстве влияет на равномерность интерполяции.

3. Метод РБФ требует настройки радиуса влияния и коэффициентов весов.

4. Расчеты для выявления влияния каждой точки могут требовать значительных ресурсов.

5. Наличие выбросов в данных может существенно влиять на результаты интерполяции метода РБФ, особенно если они расположены близко к области интерполирования [98, 114].

Метод Радиальная базисная функция зарекомендовал себя при построении математических моделей рельефа, при условии отсутствия резкого изменения морфометрических характеристик на локальных участках. В случае, когда наблюдаются значительные изменения кривизны поверхности в пределах небольших расстояний, метод может приводить к недостоверным построениям.

#### **1.4 Анализ форма представления детальных цифровых моделей рельефа**

Цифровые модели рельефа представляют собой важный инструмент в геоинформационных системах и инженерных проектах для моделирования земной поверхности. Эти модели обеспечивают высокоточное и достоверное представление рельефа, играя ключевую роль в различных науках о земле.

Формы представления цифровых моделей рельефа - математические уравнения или геометрические примитивы, например, как показано на рисунке 1.3, которые описывают форму рельефа. Этот метод позволяет создавать более сложные и точные модели, учитывая различные аспекты поверхности земли.

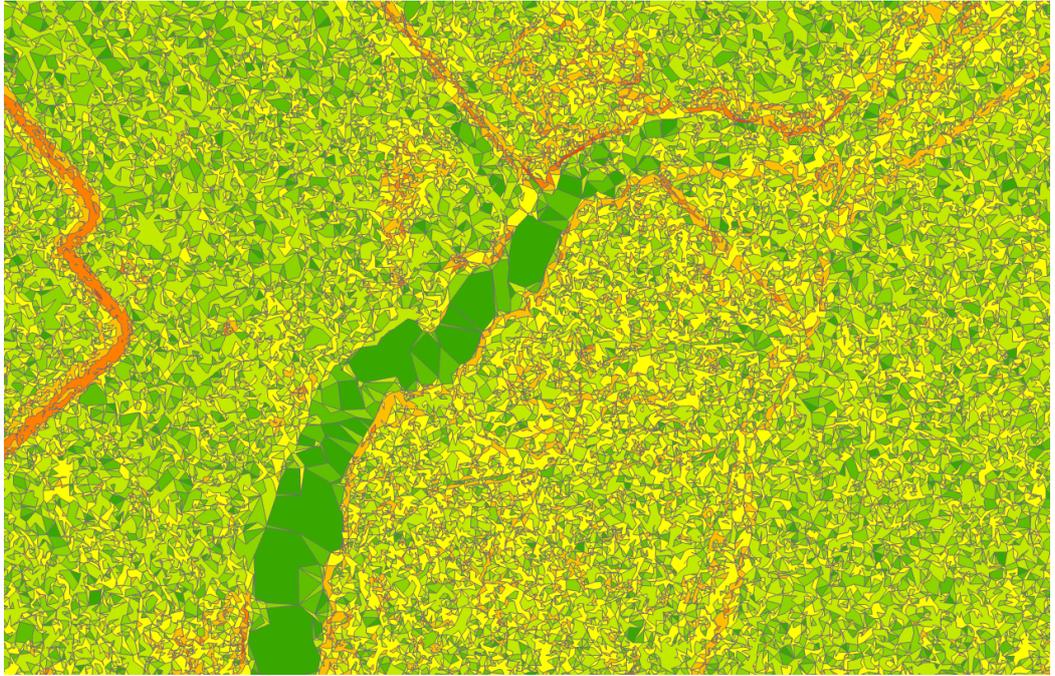


Рисунок 1.3 – Форма представления цифровой модели рельефа в виде геометрических примитивов

**Растровое представление.** Одной из базовых форм представления ЦМР является растровое представление, где поверхность разбивается на регулярную сетку пикселей, каждый из которых содержит информацию о высоте в данной точке. Растровое представление позволяет эффективно хранить и обрабатывать большие массивы данных. Тем не менее, при использовании растрового представления необходимо учесть разрешение, так как оно существенно влияет на точность модели.

Пример растрового представления ЦМР приведен на рисунке 1.4.

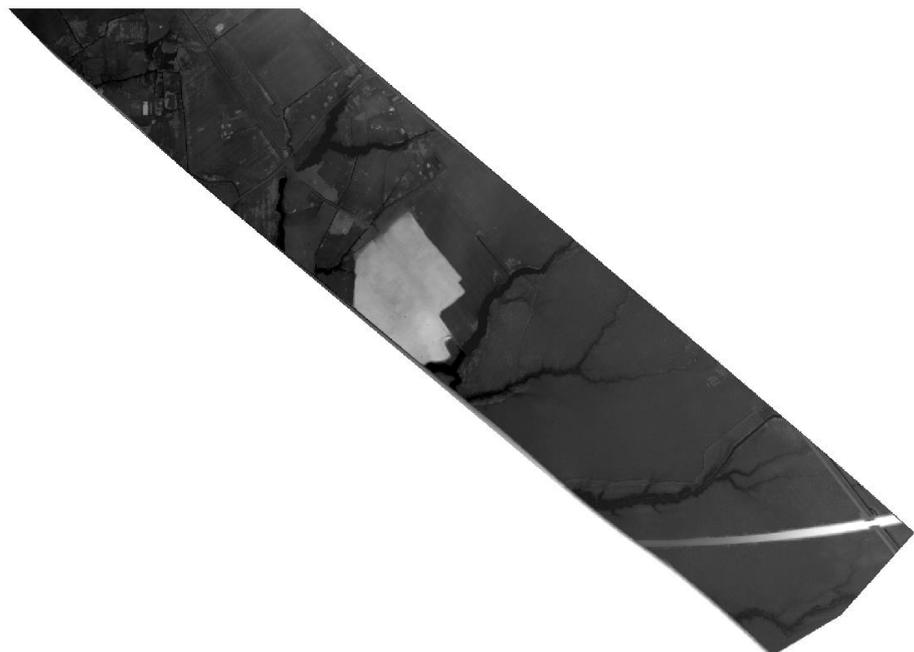


Рисунок 1.4 – Растровое представление цифровой модели рельефа равнинной местности

Благодаря своей структуре, растровая модель обеспечивает быстрый доступ к данным и позволяет проводить различные геоаналитические операции [127].

Однако, следует отметить, что ограничением растровой модели является потеря детализации в областях с высокими изменениями высот. В таких случаях, для сохранения точности и детализации, может потребоваться использование более высокого разрешения, что приводит к увеличению объема данных и затратам на их обработку, что усложняет работу с крупномасштабными проектами.

**Треугольная нерегулярная сетка (TIN).** Треугольная нерегулярная сетка (TIN) представляет собой форму представления, где поверхность моделируется с использованием треугольных элементов, определенных трехмерными координатами и высотами вершин. TIN-представление эффективно при работе с нерегулярными и неравномерными данными. Это представление позволяет гибко описывать сложные формы рельефа, такие как овраги, хребты и склоны. Визуальное представление TIN приведено на рисунке 1.5.

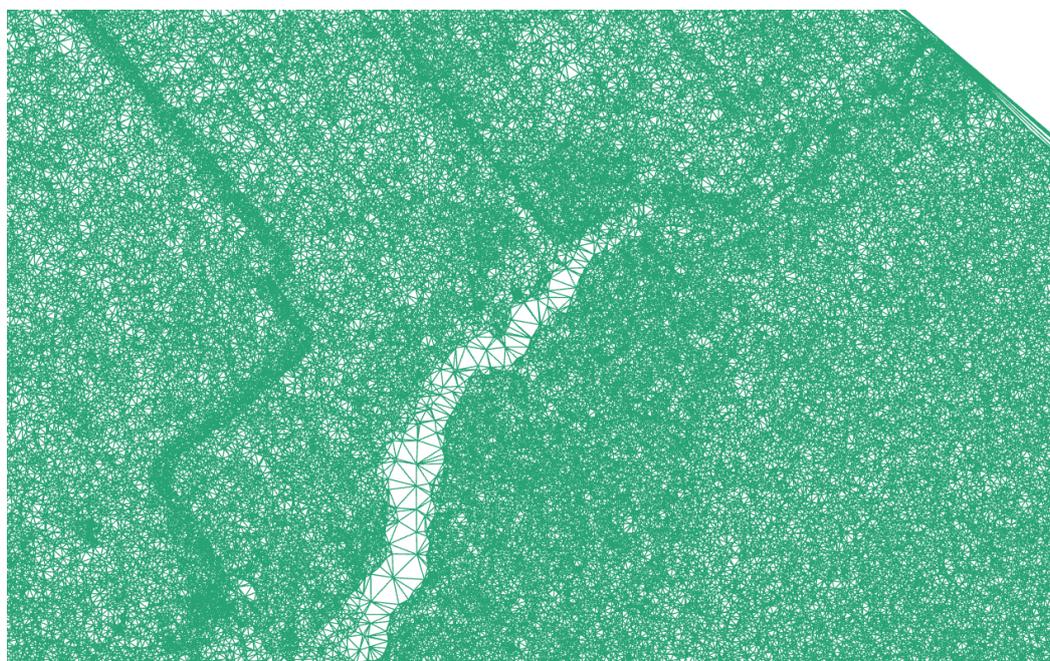


Рисунок 1.5 – Форма представления ЦМР в виде TIN

Одним из основных преимуществ использования TIN для представления DTM является его способность точно и эффективно моделировать сложные и нерегулярные формы рельефа.

**GRID.** Регулярная сеть (GRID) – система точек, упорядоченная в равномерной сетке на горизонтальной и вертикальной плоскостях [72]. Эти точки представляют собой числовые значения высоты, измеренные в определенных точках на земной поверхности, как это приведено на рисунке 1.6.

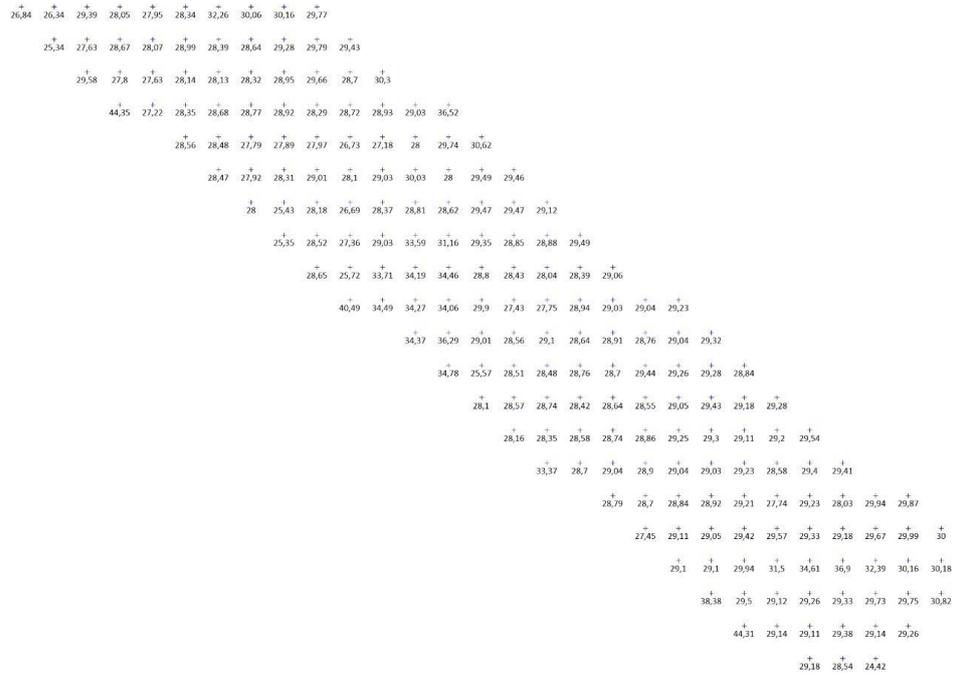


Рисунок 1.6 – Представление цифровой модели рельефа в виде регулярной сети точек

Благодаря структурированной форме данных, регулярная сеть обеспечивает простой и эффективный доступ к информации о рельефе для анализа, моделирования и визуализации. Другим преимуществом регулярной сети является ее способность предоставлять гибкость в выборе разрешения и точности модели. Пространственное разрешение цифровой модели регулируется за счет шага сетки, который изменяет плотность точек. Это позволяет создавать модели с различным уровнем детализации, адаптированные к специфическим требованиям проекта или задачи.

**Контурное представление.** Контурные линии представляют собой еще один способ визуализации ЦМР, приведенный на рисунке 1.7, где линии соединяют точки с одинаковой высотой и тем самым образуют изолинии. Этот метод важен в картографии, так как позволяет создавать четкие и наглядные карты рельефа.

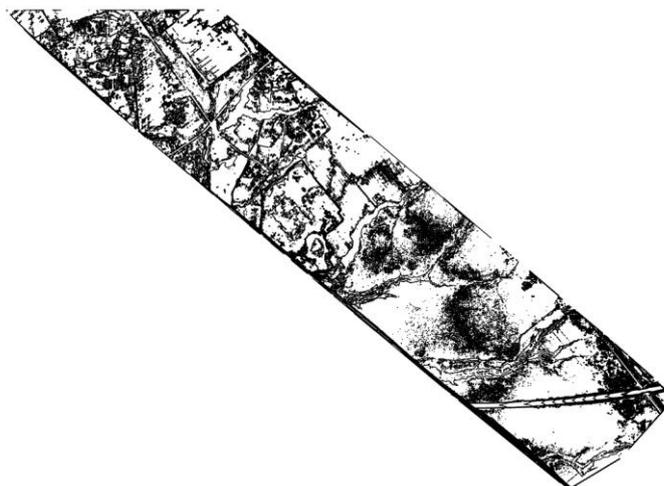


Рисунок 1.7 – Контурная форма представления цифровой модели рельефа

Контурные линии позволяют быстро и наглядно представить форму рельефа и его особенности [137]. Более того, контурные линии удобно использовать для анализа рельефа, например, его изменения со временем. Путем сопоставления контурных линий, полученных в разные периоды времени, можно выявлять изменения высот и формы рельефа, что полезно для мониторинга природных и антропогенных процессов.

При этом, контурные линии могут не передавать достаточно подробной информации о рельефе в сравнении с другими методами [1], в то же время требуя значительных вычислительных ресурсов и времени, особенно при обработке больших объемов данных. Это может создать проблемы при необходимости обновления информации о рельефе в режиме реального времени.

### **1.5 Выводы по главе 1**

Создание цифровых моделей рельефа представляет собой сложный процесс, в котором взаимосвязаны исходные данные, выбранные методы пространственной интерполяции и конечные формы представления. Каждый этап создания модели рельефа оказывает значительное влияние на точность, достоверность и применимость полученных результатов в различных научно-практических задачах.

Исходные данные, используемые для построения детальных ЦМР, могут быть получены в результате: воздушного лазерного сканирования, геодезической наземной съемки и фотограмметрических данных. При этом, выбор метода пространственной интерполяции играет ключевую роль в создании ЦМР. Методы пространственной интерполяции реализуют различные подходы к обработке и анализу исходных данных для построения поверхности. Например, метод Кригинга использует статистические зависимости между данными для создания вероятностной модели рельефа, в то время как метод IDW основан на взвешенном усреднении значений близлежащих точек.

Формы представления цифровых моделей рельефа значительно влияют на восприятие результата восстановления связей между геопространственными данными и служат для отображения результата восстановления связей между исходными данными.

Следовательно, успешное построение ЦМР требует тщательного анализа и взаимосвязи этих трех компонентов: исходных данных, выбора подходящего метода интерполяции и формы представления. Исключение или недооценка одного из этих аспектов может существенно повлиять на точность и применимость созданной математической модели рельефа в контексте конкретного проекта или задачи.

Важно отметить, что не существует универсального метода пространственной интерполяции для построения цифровой модели рельефа, а лишь общие рекомендации. Методы восстановления связей имеют трудности с заполнением пропущенных значений. Для решения

данной проблематики требуется уточнение поверхности локального участка, в котором отсутствуют исходные данные, для улучшения точности построения и увеличения детализации в заданной области.

## ГЛАВА 2 МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ ПОЛЮСОВ И ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Нерегулярная триангуляционная сеть является одной из базовых структур, которая точно описывает участки с резким изменением кривизны поверхности цифровой модели рельефа, а также плоские фрагменты. Главный недостаток подхода – отсутствие информации между вершинами триангуляционных граней, так как при декомпозиции грань представляет собой плоскость, ограниченную тремя вершинами [37].

Для увеличения точности построения цифровых моделей рельефа предлагается рассмотреть подход к заполнению пропусков в триангуляционной поверхности с применением теории полюсов [11, 42, 43] и алгоритма Хука-Дживса [38, 41], используемого для обоснования положения полюсов по избыточным данным.

Теория полюсов – это законченная теория интерполяции, которая является обобщением точечной интерполяции Лагранжа [12].

Следует отметить следующие основные положения теории полюсов [11, 43]:

1. Результат интерполяции не зависит от выбора координатных осей;
2. Результат интерполяции нагляден за счет использования опорных элементов, которые называются полюсами;
3. Перемещая полюса, можно плавно изменять форму объекта;
4. Полюса располагаются вблизи от геометрических объектов;
5. Независимость полюсов от направления обхода при их вычислении;
6. Легко достигается стыковка на границах;
7. В рамках аффинной геометрии полюса обладают регулярными свойствами.

В [11, 43] подробно описано применение теории полюсов для аппроксимации полиномами любой степени, а в [42] приведен метод применения теории полюсов к кусочно-линейной поверхности (триангуляции). В качестве опорных элементов в [42] используется треугольная грань, подобная исходной, но уменьшенная в  $n$ -раз, что эквивалентно степени полинома при классическом подходе [11, 43].

Важно отметить, что дискретные элементы триангуляционной поверхности содержат часть геопространственной информации о смежных гранях триангуляции, которую можно отнести к двум базовым случаям:

1. декомпозированная грань триангуляции содержит две общие вершины со смежной гранью;
2. декомпозированная грань триангуляции содержит только одну общую вершину со смежной гранью.

Исходя из пространственной связи между гранями триангуляции, в которой ребро может занимать одно из двух положений: приближающее построение к принципу Делоне [37] или отдаляющее от него; можно сделать вывод, что пространственное положение смежных граней оказывает влияние на поверхность дискретных элементов.

## 2.1 Метод построения характеристического многочлена $n$ -го порядка

Определение области поиска геопространственной информации внутри смежных гранях возможно с использованием теории полюсов. В таком случае дискретный элемент триангуляции будет именоваться обрабатываемой гранью триангуляции. В пределах обрабатываемой грани триангуляции строится характеристический многочлен  $n$ -го порядка:

1. Каждое ребро обрабатываемой грани триангуляции (дискретного элемента) делится на  $n$  равных частей, как показано на рисунке 2.1, с допущением того, что одна из частей может быть незначительно больше остальных за счет округления. Вычисления выполняются по формуле (16):

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} \quad (16)$$

где  $x_A$   $y_A$  – плановые координаты начальной точки отрезка;

$x_B$   $y_B$  – плановые координаты конечной точки отрезка;

$\lambda$  – отношение отрезка;

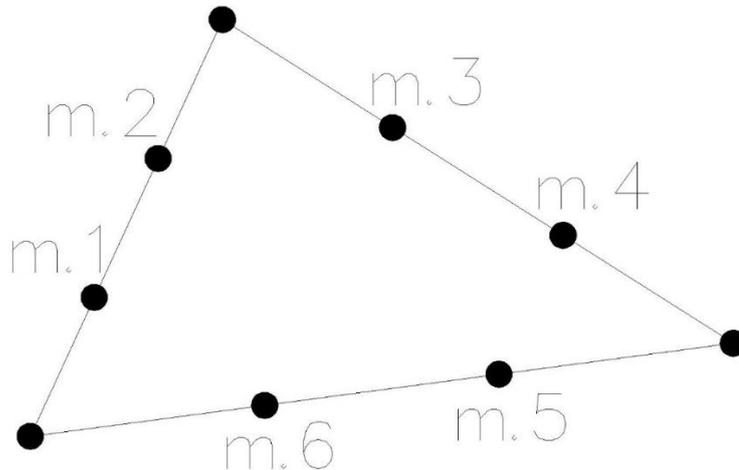


Рисунок 2.1 – Схематичное представление деления обрабатываемой грани триангуляции на 3 равных части

2. Новые точки соединяются между собой, следующим образом:
- а. т.1-т.4;

- b. т.1-т.6;
- с. т.2-т.3;
- d. т.3-т.6;
- e. т.4-т.5.

Таким образом строится  $n^2$  подобных обрабатываемой треугольных граней, как это показано на рисунке 2.2.

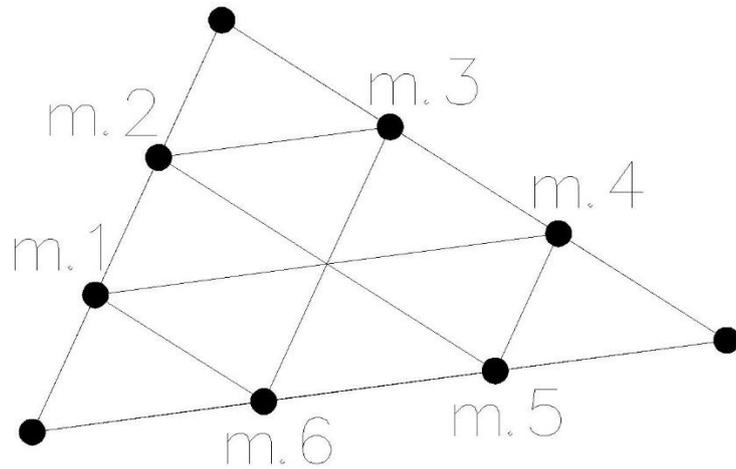


Рисунок 2.2 – Схема построения подобных граней для характеристического многочлена 3-го порядка (вид сверху)

3. Пространственная область поиска между обрабатываемой гранью триангуляции и смежными определена подобными гранями, которые располагаются вдоль ребер обрабатываемой грани. Подобные грани являются полюсами, которые выделены на рисунке 2.3 наклонной штриховкой;

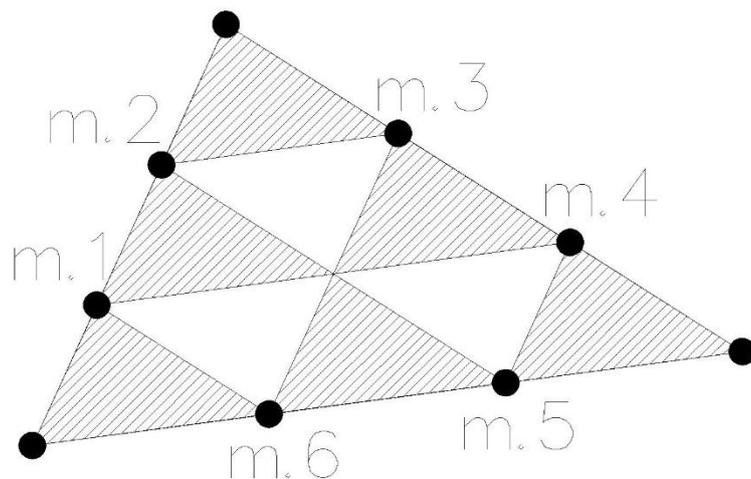


Рисунок 2.3 – Схематическое представление полюсов в характеристическом многочлене 3-го порядка (вид сверху)

4. Полюса, содержащие вершину обрабатываемой грани триангуляции, предлагается именовать полюсами при вершинах – выделены красным цветом на рисунке 2.4;

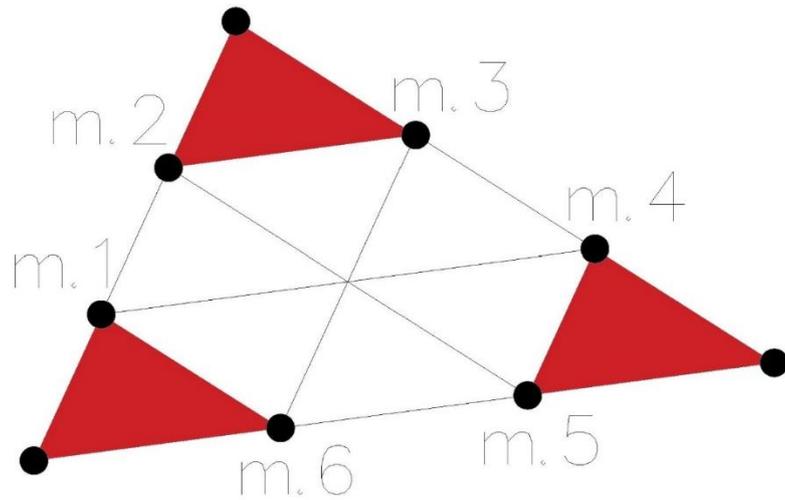


Рисунок 2.4 – Визуальное представление набора полюсов при вершинах в характеристическом многочлене 3-го порядка (вид сверху)

5. Полюса, не содержащие в себе вершину обрабатываемой грани, но включающие две вершины, принадлежащие ребру обрабатываемого дискретного элемента предлагается именовать полюсами при ребрах – выделены синим цветом на рисунке 2.5;

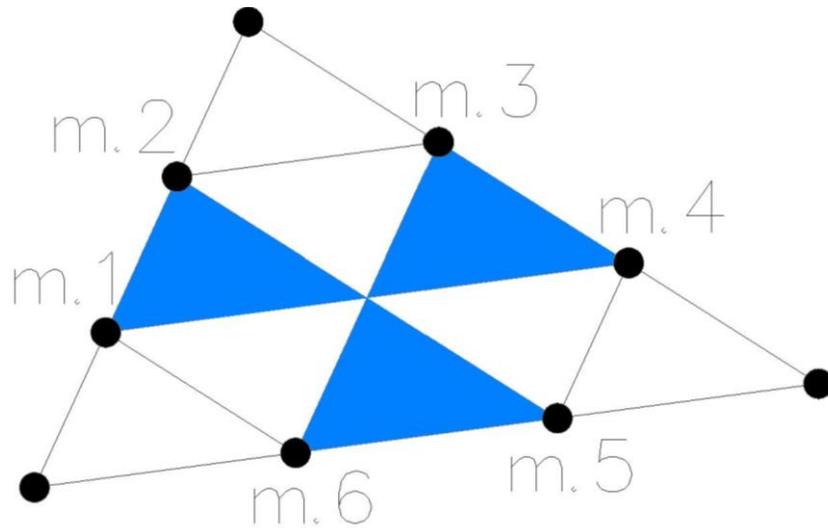


Рисунок 2.5 – Визуальное представление набора полюсов при ребрах в характеристическом многочлене 3-го порядка (вид сверху)

6. Все полюса при вершинах и при ребрах исходной грани триангуляции образуют характеристический многочлен  $n$ -го порядка, при чем данный порядок напрямую определяет размер области для извлечения пространственной информации из исходной и смежных граней.

Пример построенного характеристического многочлена 3-го порядка приведен на рисунке 2.6.

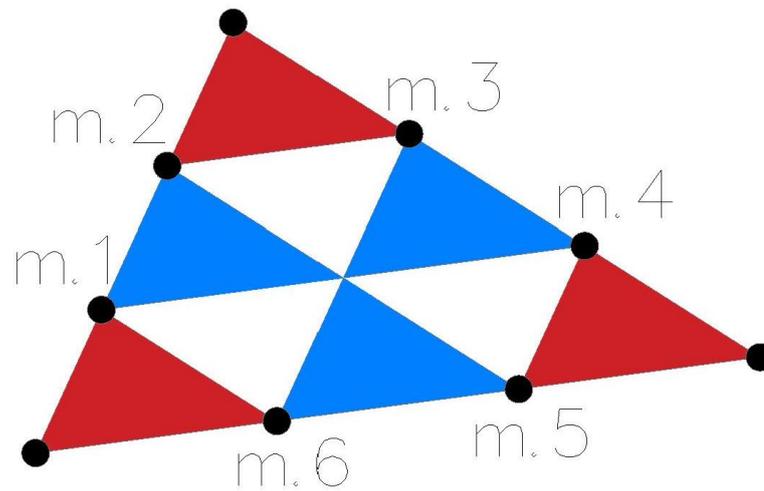


Рисунок 2.6 – Схематическое изображение характеристического многочлена 3-го порядка (вид сверху): синий цвет – полюса при ребре, красный цвет – полюса при вершине

## 2.2 Алгоритм поиска смежных граней триангуляционной поверхности

В общем случае смежной гранью триангуляции является грань, которая имеет как минимум 1 общую точку с исходным дискретным элементом.

Все смежные грани формируют в пространственном отношении множество для поиска пространственной информации на уровне триангуляционных граней поверхности, как это показано графически на рисунке 2.7.

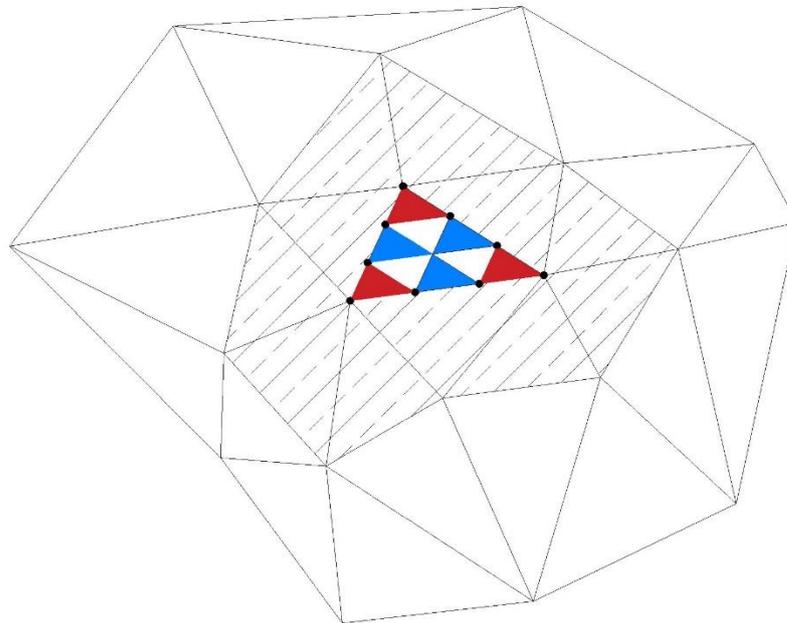


Рисунок 2.7 – Визуальное отображение множества для поиска пространственной информации на уровне триангуляционных граней (вид сверху)

Данное множество можно разделить по количеству общих вершин с исходной (обрабатываемой) триангуляционной гранью на следующие два подмножества:

1. смежные грани по вершине;

2. смежные грани по ребру.

### 2.2.1 Алгоритм поиска подмножества смежных граней по вершине

Для выделения подмножества смежных граней по вершине из множества всех смежных граней требуется определить те дискретные элементы, которые содержат не более 1 общей вершины с исходным дискретным элементом.

Графическое представление выделяемого подмножества по вершине приведено на рисунке 2.8.

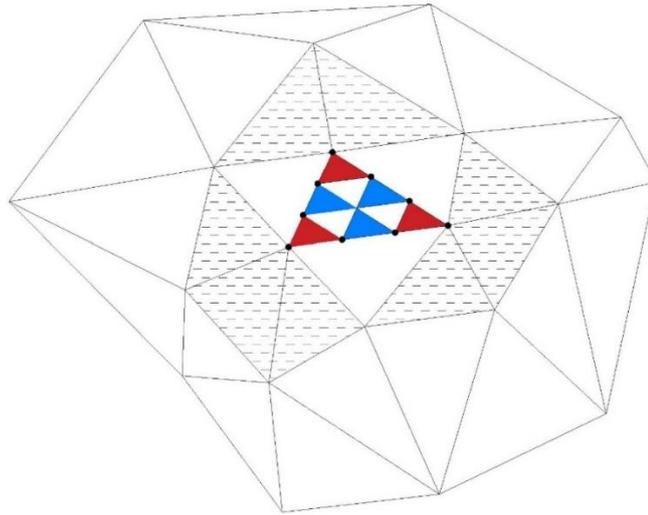


Рисунок 2.8 – Визуальное отображение подмножества смежных граней по вершине (вид сверху)

Из рисунка 2.8 можно определить, что при дальнейшем построении характеристических многочленов внутри каждой смежной грани по вершине, найдется только один полюс, содержащий общую вершину с исходной гранью триангуляции, при этом такой полюс в дальнейшем будет именоваться полюсом при вершине.

### 2.2.2 Алгоритм поиска подмножества смежных граней по ребру

Для выделения подмножества смежных граней по ребру из множества всех смежных граней требуется определить те дискретные элементы из множества всех смежных дискретных элементов, которые содержат более 1 общей вершины с исходным.

Графическое представление выделяемого подмножества по ребру приведено на рисунке 2.9.

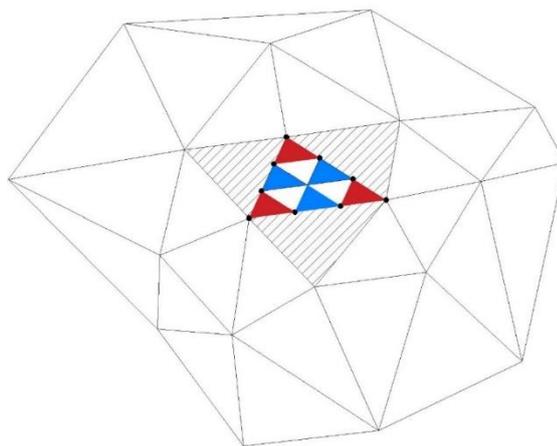


Рисунок 2.9 – Визуальное отображение подмножества смежных граней по ребру (вид сверху)

Из рисунка 2.9 можно определить, что при дальнейшем построении характеристических многочленов внутри каждой смежной грани по ребру, найдется только один полюс, не содержащий общую вершину исходной грани триангуляции, но содержащий две вершины, принадлежащие смежному ребру, а также найдутся два полюса, содержащие одну общую вершину с исходной гранью триангуляции.

### 2.3 Метод построения характеристических многочленов смежных граней

Внутри всех смежных с исходной гранью триангуляции выполняется построение характеристических многочленов  $n$ -ой степени, как это показано на рисунке 2.10. Данный этап необходим для определения ближайших смежных полюсов, содержащих пространственную информацию, влияющую на обрабатываемую грань.

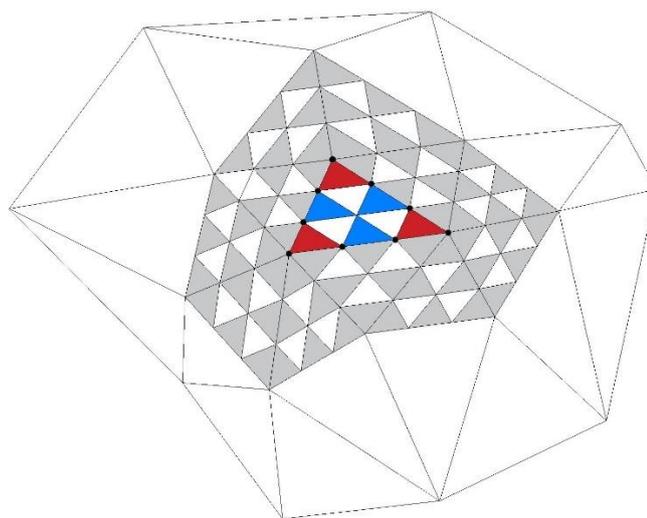


Рисунок 2.10 – Характеристический многочлен 3-го порядка обрабатываемой грани со смежными многочленами 3-го порядка (вид сверху)

### 2.4 Алгоритм формирования наборов полюсов при вершинах и при ребрах

Ближайшие полюса смежных с исходной гранью формируют локальные области, содержащие пространственную информацию на границе перехода одного дискретного элемента триангуляционной поверхности в другой. При этом все полюса, принадлежащие общей вершине, предлагается именовать набором полюсов при вершине. Графическое отображение наборов полюсов при вершине, окрашенных красным цветом, приведено на рисунке 2.11.

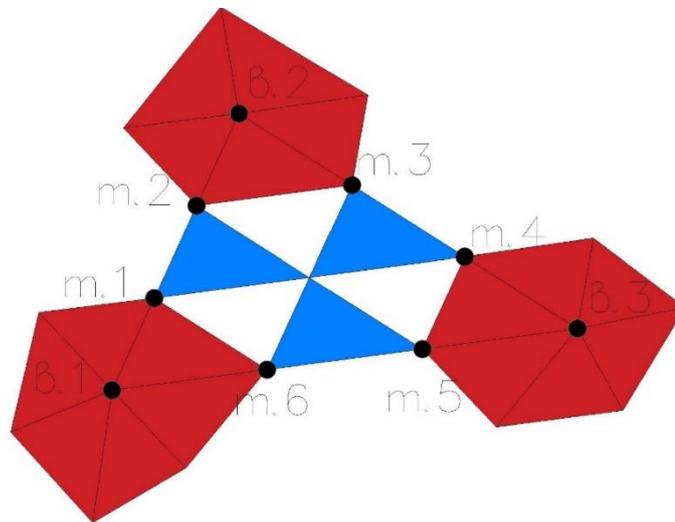


Рисунок 2.11 – Визуальное представление наборов полюсов при вершине для характеристического многочлена 3-го порядка (вид сверху)

При этом, все полюса, принадлежащие общему ребру, предлагается именовать набором полюсов при ребре. Графическое отображение наборов полюсов при ребре, окрашенных синим цветом, приведено на рисунке 2.12.

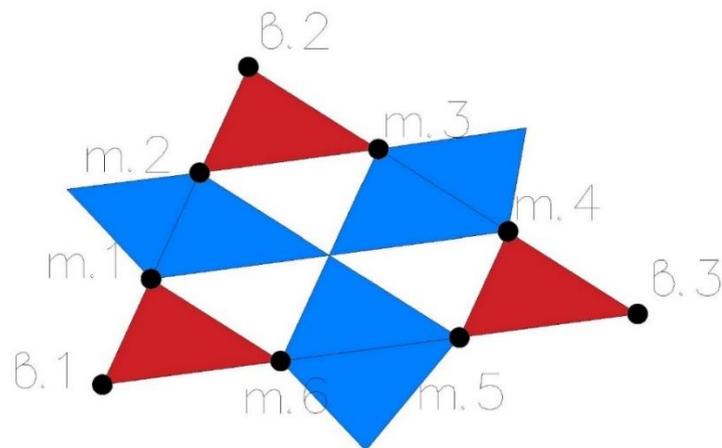


Рисунок 2.12 – Визуальное представление наборов полюсов при ребре для характеристического многочлена 3-го порядка (вид сверху)

## 2.5 Метод определения обрабатываемых треугольных граней

В теории полюсов для интерполяции новой точки используются все наборы полюсов. В работе [42] Чернова Л.И. разработала подход с использованием «расщепления» вдоль характерных линий для ограничения области поиска. Предлагается использовать метод

ограничения области поиска пространственной информации по углу между обрабатываемой и смежными граням, чтобы исключить влияние смежных граней с отличными морфометрическими характеристиками и гибко управлять аппроксимирующими кривыми, без необходимости добавлять новые структурные элементы, такие как характерные линии. Например, грани, отмеченные серым цветом на рисунке 2.13, в которых значение предельного угла между исходной и смежной гранью превышает устанавливаемый предел исключаются из обработки при интерполяции внутри обрабатываемой грани.

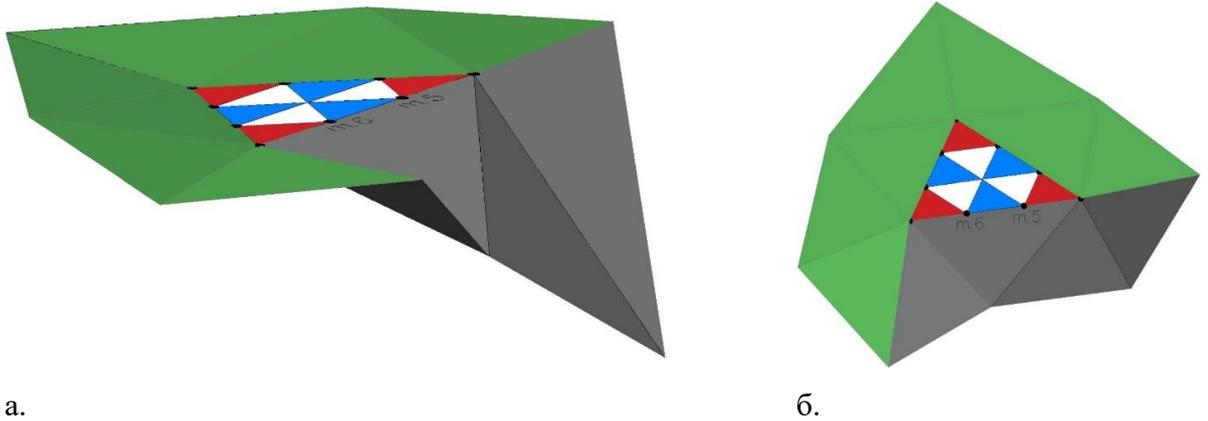


Рисунок 2.13 – Схематичное представление граней триангуляции с различным значением кривизны поверхности: а – перспектива, б – вид сверху

Вычисление предельного угла между двумя гранями следует осуществлять по формулам (17-20):

1. если угол  $\alpha < 90^\circ$ , то:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (17)$$

2. если угол  $\alpha > 90^\circ$  и  $\alpha < 180^\circ$ , то:

$$\alpha = 180 - \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (18)$$

3. если угол  $\alpha > 180^\circ$  и  $\alpha < 270^\circ$ , то:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) - 180 \quad (19)$$

4. если угол  $\alpha > 270^\circ$ , то:

$$\alpha = 360 - \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (20)$$

где  $A_1, B_1, C_1$  – переменные в общем уравнении плоскости для исходной грани триангуляции,

$A_2, B_2, C_2$  – переменные в общем уравнении плоскости для смежной грани триангуляции.

Переменные  $A, B, C$  можно вычислить по трем вершинам триангуляционной грани. Исходную грань триангуляции для получения значений, в меньшей степени отклоняющихся от реальной земной поверхности, следует соотносить с подобными ей по углам наклона участками, что характеризует их морфометрическую связность. При таком подходе при интерполяции учитывается только однородная пространственная информация, так как полюса, содержащиеся в смежных гранях триангуляции, которые находятся за границей заданного предельного угла не учитываются при дальнейшей обработке. Однако, исключенные на данном этапе полюса, показанные серым цветом на рисунке 2.14, будут использованы при обработке самой смежной грани триангуляции, что позволяет не выполнять дополнительные операции по удалению полюсов и повторных вычислений предельного угла, а, следовательно, и перестроению характеристических многочленов.

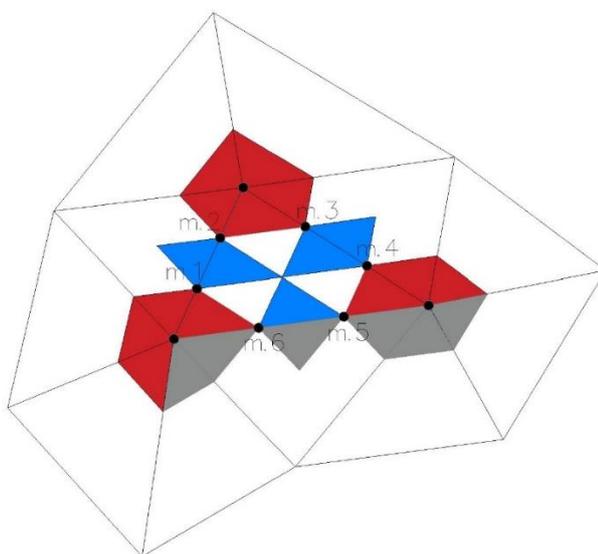


Рисунок 2.14 – Визуальное представление наборов полюсов характеристического многочлена 3-го порядка участвующих и не участвующих в построении (вид сверху): серым цветом показаны полюса, исключенные из построения

Предельный угол является гибким ограничивающим критерием, не требующим добавления дополнительных структурных элементов, что позволяет управлять гладкостью поверхности за счет изменения пределов подобия с помощью значений угла.

Так, чем больше значение  $\alpha$ , тем больше интерполятор будет сглаживать поверхность за счет учета смежных граней с меньшей однородностью относительно обрабатываемой и наоборот, при уменьшении значения предела  $\alpha$  обрабатываются все более однородные грани относительно угла между ними вплоть до исключения всех смежных граней из построения. Таким образом достигается регуляризация математической модели на уровне определения наборов полюсов.

### 2.6 Метод оптимизация положения наборов полюсов

Все точки, принадлежащие земной поверхности, на этапе классификации для снижения объема геопространственной информации, необходимой для построения, следует разделять на ключевые точки, по которым выполняется построение цифровой модели рельефа и на избыточные измерения. Избыточные измерения земной поверхности следует использовать для оптимизации положения полюсов, при котором отклонение избыточных измерений от его плоскости будет минимальным, при учете следующих ограничений:

1. Плановое положение точек полюса не должно изменяться;
2. Высотное положение вершин исходной триангуляционной грани не должно изменяться;
3. Высоты точек полюсов при ребре, опирающихся на полюса при вершине, должны быть установлены равными соответствующим им точкам полюсов при вершине и не могут быть изменены в ходе оптимизации их положения.

Следовательно, оптимизация положения полюсов должна выполняться последовательно:

1. Определяется положение полюсов при вершине;
2. Определяется положение полюсов при ребре.

При оптимизации положения полюсов при вершине, возможно изменение высотного положения точек, отмеченных зеленым цветом на рисунке 2.15.

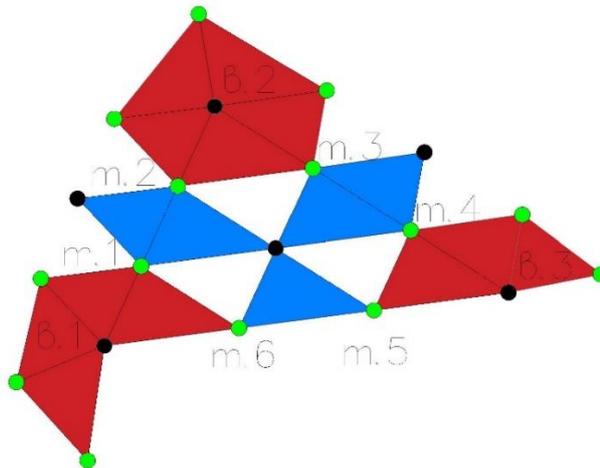


Рисунок 2.15 – Доступные для оптимизации высоты точек полюсов при вершинах  
(вид сверху)

При оптимизации полюсов при вершине определяется высотное положение точек, общих с полюсами при ребре, которые в дальнейшем не будут изменены. В этой связи, оптимизация высотного положения точек полюсов при ребрах после оптимизации высотного положения точек при вершине возможна только для точек, отмеченных зеленым цветом на рисунке 2.16.

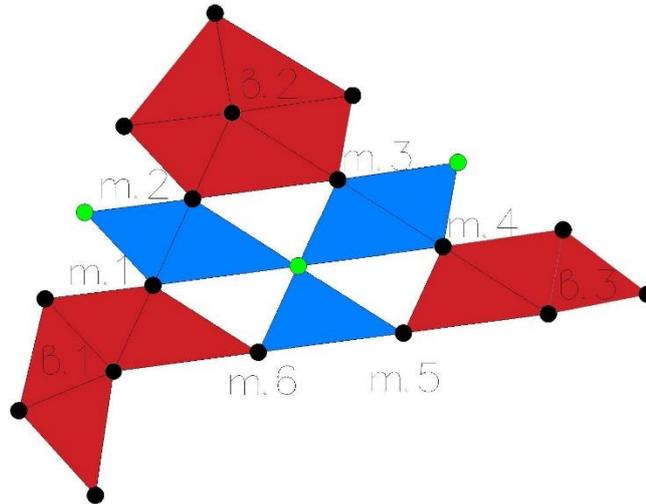


Рисунок 2.16 – Доступные для оптимизации высоты точки полюсов при ребрах  
(вид сверху)

Оптимизация положения полюсов может быть разделена на три подхода:

1. Привести каждый набор полюсов к среднему положению нормали, которое будет начальным для поиска, и затем найти оптимальное, относительно отклонений избыточных измерений от среднего положения набора полюсов, положение всего набора. В таком случае точки с большим по величине отклонением от среднего положения, принадлежащие области, ограниченной внешними ребрами, будут оказывать большое влияние на поиск положения с наименьшим отклонением от избыточных измерений. Следовательно, требуется строгий контроль за выбросами для повышения робастности поиска, но при этом достигается увеличение влияния больших по модулю отклонений на положение набора полюсов;
2. Выполнить поиск оптимального положения каждого полюса отдельно, а затем определить среднее положение набора полюсов. В таком случае каждый полюс из набора будет оказывать равное влияние на вычисление среднего положения набора полюсов и метод будет в меньшей степени зависеть от избыточных измерений со значительным значением отклонения от триангуляционной поверхности.

### 2.6.1 Метод оптимизации положения полюсов через среднее положение нормали набора полюсов

Данный подход подразумевает, что каждая точка имеет одинаковое влияние при определении положения набора полюсов. В таком случае полюса, с большей плотностью точек

внутри будут оказывать большее влияние на процесс оптимизации, так как набор полюсов будет рассматриваться в совокупности всех его элементов.

При оптимизации через среднее положение нормали набора полюсов начальное положение набора для поиска задается через среднее положение нормали набора перед поиском оптимального положения относительно отклонений, при условии, что точка не является экстремальной для триангуляционной поверхности. В противном случае касательная задается строго горизонтально, а нормаль общей поверхности перпендикулярна касательной. Положение вектора средней нормали определяется по формуле (21):

$$n_{cp} = \frac{\sum_i n}{i} \quad (21)$$

где  $n$  – вектор нормали;

$i$  – количество полюсов в наборе.

Тогда уравнение среднего положения плоскости, ограниченной набором полюсов, вычисляется по формуле (22):

$$p^0 = V_t \circ (-n_{cp}) \quad (22)$$

где  $V_t$  – вектор, содержащий координаты вершины исходной грани триангуляции.

### **Определение средней поверхности для смежных полюсов**

#### **Оптимизации набора полюсов при вершине**

Так как избыточные данные о пространственном положении точек, принадлежащих земной поверхности содержатся в большом количестве, то, чтобы аппроксимировать эти данные в пределах локальной области набора полюсов при вершине, требуется найти такое положение усредненной плоскости  $P^*$ , чтобы среднеквадратическое отклонение избыточных измерений от плоскости было наименьшим.

Для поиска оптимального положения плоскости  $P^*$  следует использовать метод конфигураций (Хука – Дживса), так как благодаря комбинации этапов поиска вдоль направления и шага образца, алгоритм обеспечивает быструю сходимость к локальному оптимуму целевой функции с высокой степенью робастности к начальным условиям при простоте реализации и низкой вычислительной сложности.

Для минимизации ошибки положения плоскости следует использовать следующую целевую дифференцируемую функцию вычисляемую по формуле (23):

$$f = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (dev_j - \overline{dev})^2}{m-1}} \quad (23)$$

где  $\overline{dev}$  – усеченное среднее значение отклонений точек земной поверхности с исключением 5% наибольших и наименьших значений;

$m$  – количество точек земной поверхности внутри области, ограниченной набором полюсом с исключением 5% наибольших и наименьших значений;

$dev$  – отклонение точки земной поверхности от оптимизируемого положения плоскости, которое вычисляется по формуле (24):

$$dev = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (24)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  - координаты точки земной поверхности внутри области поиска;

$a, b, c, d$  - составляющие уравнения плоскости, относительно которой вычисляется отклонение.

Так как влияние больших по величине отклонений в одном полюсе будет влиять на поиск оптимального положения всего набора, то усеченное среднее позволит увеличить робастность метода.

Алгоритм оптимизации средней поверхности для смежных полюсов:

1. Через среднее значение вектора нормали для набора задать нулевое положение набора полюсов  $P^0$  вычисляемое по формуле (25):

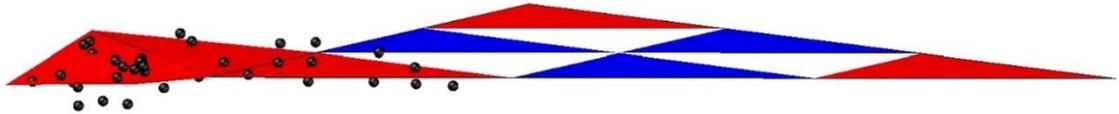
$$P^0 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты проекции трех точек полюса исходной грани принадлежащего исследуемому набору полюсов на плоскость заданную через среднее значение нормали всех полюсов  $n_{cp}$ , принадлежащих набору полюсов.

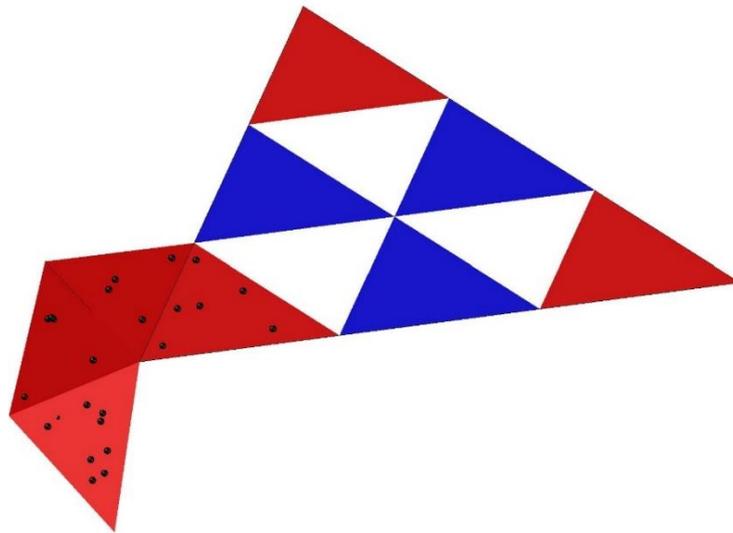
2. Определить значение коэффициента уменьшения шага поиска  $\gamma > 1$ ;

3. Задать значение шага поиска  $\theta$  в градусной мере, так как из-за заданных ограничений возможно только выполнять поворот набора полюсов при вершине вокруг осей  $y$  и  $x$ , проходящих через соответствующую набору вершину исходной грани.

4. Выделить подмножество точек земной поверхности  $GP_e$ , которое принадлежит пространственной области поиска, ограниченной внешними ребрами набора полюсов при вершине, как показано на рисунке 2.17.



а.



б.

Рисунок 2.17 – Пример набора точек, принадлежащего пространственной области, ограниченной внешними ребрами набора полюсов при вершине: а – перспектива; б – вид сверху

5. Задать значение  $\varepsilon > 0$ , при котором исследующий поиск будет остановлен, так как шаг достигнет своего наименьшего установленного значения;

6. Выполнить исследующий поиск: из начального положения плоскости  $p^0$  сделать шаг  $\theta$  во всех возможных направлениях, при условии, что новый набор координат  $\bar{p}^0$  не соответствует начальному  $\bar{p}^0 \neq p^0$ . Под шагом понимается поворот плоскости относительно соответствующей вершины исходной грани триангуляции в пространстве на угол  $\theta$  или  $-\theta$ . В таком случае вершина исходной грани триангуляции не изменит своего высотного положения, что позволит согласовать процесс оптимизации с исходными измерениями, которые не должны быть искажены. Вычисление нового положения плоскости после шага, в общем случае, выполняется по формуле (26):

$$\begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \times T \times R_Y \times T_{обр.} \quad (26),$$

где  $T$  - матрица переноса нулевого положения обрабатываемой плоскости, определяемая при помощи формулы (27):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_g & y_g & z_g & 1 \end{bmatrix} \quad (27),$$

где  $x_g, y_g, z_g$  - координаты вершины исходной грани триангуляции, соответствующей оптимизируемому набору полюсов;

$R_Y$  - матрица поворота нулевого положения обрабатываемой плоскости, которая вычисляется по формуле (28):

$$R_Y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28),$$

где  $\theta$  - значение шага в угловой мере;

$T_{обр.}$  - матрица обратного переноса нулевого положения обрабатываемой плоскости, которая определяется по формуле (29):

$$T_{обр.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_g & -y_g & -z_g & 1 \end{bmatrix} \quad (29),$$

7. Вычислить значения целевой функции:  $f^+$  при шаге в направлении  $\theta$  и  $f^-$  при шаге в направлении  $-\theta$  с использованием множества содержащего точки земной поверхности в области поиска. В общем виде значение целевой функции вычисляется по формуле (23).

8. Определить наименьшее значение целевой функции:

1. Если значения целевой функции  $f^+$  и  $f^-$  превышают значение целевой функции

$f^0$ , вычисленное для нулевого положения  $P^0$ , то поиск завершается и  $p^* = p^0$ .

2. Если хотя бы одно значение меньше, то  $P^0$  принимает значения, соответствующее целевой функции с наименьшим значением, а затем выполняется переход к п.9.

9. Проверить выполнение условия завершения алгоритма через минимальное значение шага:

а.  $\|\theta\| < \varepsilon$  - алгоритм прекращает минимизацию целевой функции, при этом результирующему значению положения плоскости назначается текущее:  $p^* = p^0$

б.  $\|\theta\| > \varepsilon$  - требуется уменьшить значение шага с использованием коэффициента  $\gamma$ :

$$\theta = \frac{\theta}{\gamma} \quad (30)$$

после чего перейти к п.10.

10. Сделать шаг в направлении минимума целевой функции, определенном в п.8 и зафиксировать новое положение плоскости  $p^n$ .

11. Повторить исследующий поиск, согласно п.6 из нового положения обрабатываемой плоскости  $p^n$ .

12. Определить новые значения целевой функции  $f^{n+}$  и  $f^{n-}$  при шаге от положения плоскости  $p^n$  в направлении  $\theta$  и  $-\theta$  соответственно:

а.  $f^n < f^0$  - изменить значения  $p^0 = \bar{p}^0$  и  $\bar{p}^0 = p^n$ , после чего перейти к п.8.

б.  $f^n > f^0$  - изменить значение  $p^0 = \bar{p}^0$ , после чего перейти к п.6.

Аналогичным образом выполняется оптимизация всех наборов полюсов при вершине.

### Оптимизации набора полюсов при ребре

Определенные оптимальные по минимальному значению СКО точек земной поверхности плоскости, относящиеся к наборам полюсов по вершине, содержат по две общие вершины со смежными с ними наборами полюсов при ребре. В этой связи, в наборе полюсов при ребре существует только две вершины для оптимизации, выделенных на рисунке 2.18 зеленым цветом,

которые будут в дальнейшем именоваться свободными вершинами, так как их высотное положение не ограничивает связь с полюсами при вершине.

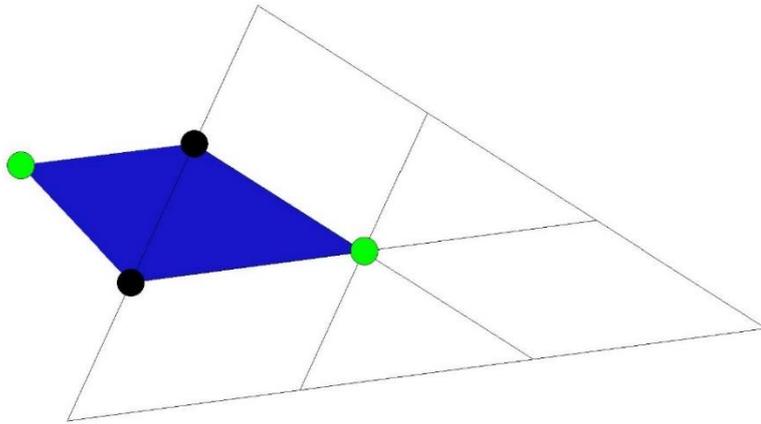


Рисунок 2.18 – Пример свободных вершин набора полюсов при вершине (вид сверху)

Важно отметить, что свободная вершина в центре характеристического многочлена третьего порядка для каждого набора полюсов при ребре имеет различное высотное положение, но из-за подхода к переходу к многочленам более низкого порядка, что необходимо для определения координат точки на интерполирующей поверхности, данная неоднозначность не сказывается на непрерывности поверхности.

Таким образом, оптимизация положения полюсов при ребре через среднее положение, выполняется с целью определения положения плоскости  $p^*$  при котором отклонение точек земной поверхности, принадлежащих набору полюсов при ребре, будет минимальным.

Порядок оптимизации:

1. Через среднее значение вектора нормали для набора полюсов при ребре задать нулевое положение плоскости через любую свободную вершину по формуле (31):

$$p^0 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix} \quad (31)$$

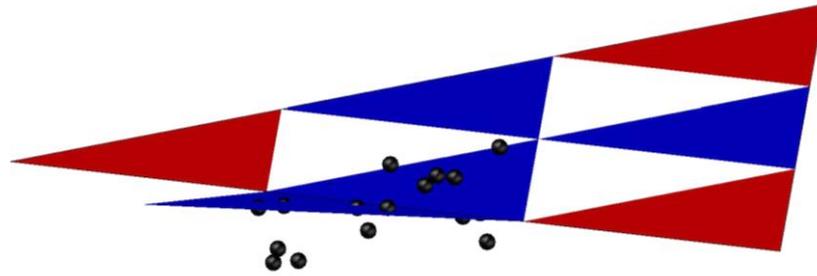
где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты вершин оптимизируемого набора полюсов при ребре, принадлежащих ребру исходной грани триангуляции;

$x_c, y_c, z_c$  - координаты нулевого положения свободной вершины, соответствующего оптимизируемого набора полюсов при ребре спроецированной на среднее положение плоскости набора по формуле (24).

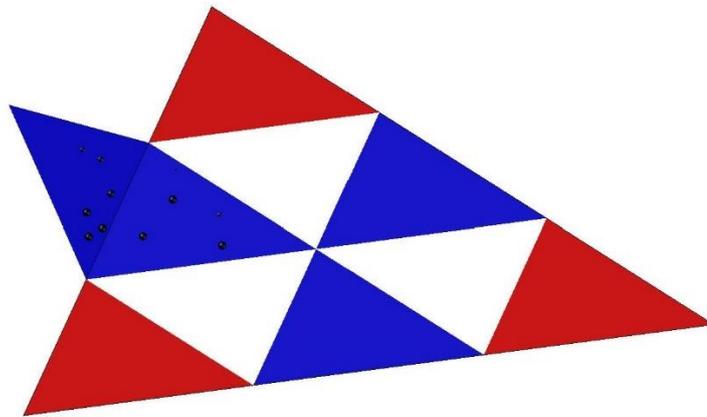
2. Определить значение коэффициента уменьшения шага поиска  $\gamma > 1$ ;

3. Задать значение шага поиска  $\theta$  в линейной мере для изменения высотного положения свободной вершины.

4. Выделить подмножество точек земной поверхности  $GP_p$ , которое принадлежит пространственной области поиска, ограниченной внешними ребрами набора полюсов при ребре, как показано на рисунке 2.19.



а.



б.

Рисунок 2.19 – Пример набора точек, принадлежащего пространственной области, ограниченной внешними ребрами набора полюсов при ребре: а – перспектива; б – вид сверху

5. Задать значение  $\varepsilon > 0$  для прекращения поиска в случае, если следующее значение шага поиска будет меньше установленного  $\varepsilon$ ;

6. Выполнить исследующий поиск: из начального положения  $v^0$  выполнить шаг  $\theta$ , при условии, что новые координаты  $\bar{v}^{-0}$  не соответствует начальным  $\bar{v}^{-0} \neq v^0$ , в двух допустимых направлениях:

а. сделать шаг в направлении увеличения высотной отметки свободной вершины по формуле (32):

$$p^+ = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты вершин оптимизируемого набора полюсов при ребре, принадлежащих ребру исходной грани триангуляции;

$x_c, y_c, z_c$  - координаты нулевого положения свободной вершины, соответствующего оптимизируемого набора полюсов при ребре спроецированной на среднее положение плоскости набора.

б. сделать шаг в направлении уменьшения высотной отметки свободной вершины по формуле (33):

$$p^- = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_c & y_c & z_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} \quad (33)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты вершин оптимизируемого набора полюсов при ребре, принадлежащих ребру исходной грани триангуляции;

$x_c, y_c, z_c$  - координаты нулевого положения свободной вершины, соответствующего оптимизируемого набора полюсов при ребре спроецированной на среднее положение плоскости набора.

7. Определить уравнения плоскостей  $p^+$  и  $p^-$ , проходящих через две вершины, лежащие на ребре исходной грани триангуляции, и новое высотное положение свободной вершины по формуле (24);

8. Вычислить значения целевой функции:  $f^+$  при вычислении отклонений точек земной поверхности от плоскости  $p^+$  и  $f^-$  при вычислении отклонений точек земной поверхности от плоскости  $p^-$ . В общем виде значение целевой функции вычисляется по формуле (23);

9. Выполнить пункты 8-12 раздела «Оптимизации набора полюсов при вершине» этой главы.

## **2.6.2 Метод оптимизации положения полюсов через среднее положение нормали отдельных полюсов**

В общем случае, при оптимизации положения полюсов через среднее значение нормали отдельных полюсов каждый полюс имеет равное влияние на определение положения набора полюсов, в независимости от того, какое количество точек содержится в каждом полюсе, таким

образом, различия в плотности сканирования не оказывают влияние на определение конечного значения нормального вектора.

### Определение средней поверхности для смежных полюсов.

#### Оптимизации набора полюсов при вершине

Для каждого полюса, входящего в набор полюсов при вершине, требуется найти такое положение плоскости  $P^*$ , чтобы суммарное среднеквадратическое отклонение точек земной поверхности в пространственной области поиска, ограниченной внешними ребрами набора полюсов, при вершине было наименьшим.

Для поиска оптимального положения плоскости  $P_n^*$  следует использовать метод конфигураций (Хука – Дживса). Для минимизации ошибки положения плоскости использовать целевую функцию (23).

Алгоритм оптимизации через среднее положение нормали отдельных полюсов:

1. Определить обрабатываемый набор полюсов при вершине  $P_{обр}^i$ .
2. Декомпозировать  $n$ -ый полюс  $p_n^0$ , выделенный зеленым цветом на рисунке 2.20, из набора полюсов при вершине  $P_{обр}^i$  в качестве начального положения для поиска по формуле (27):

$$p_n^0 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты вершин полюса.

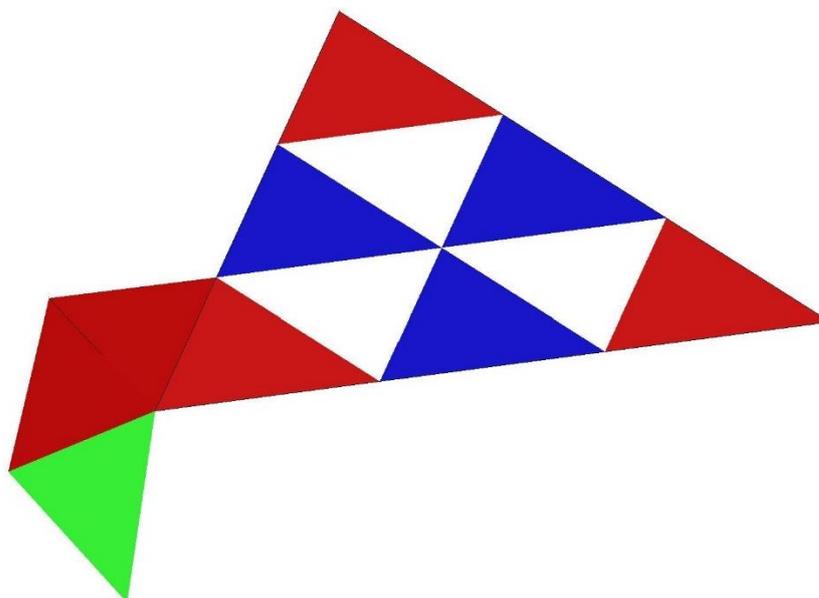
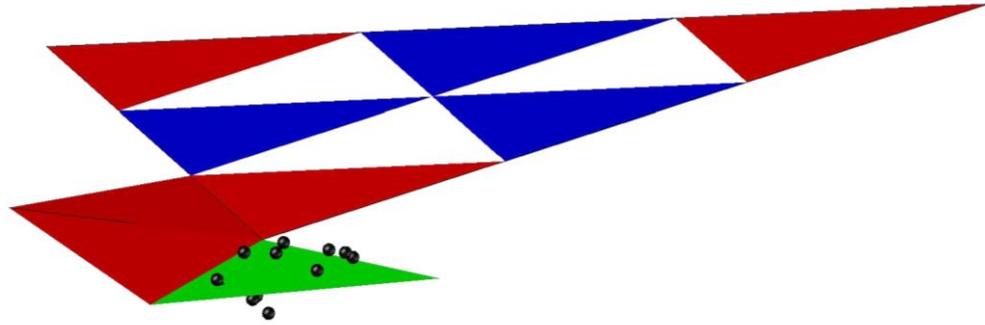
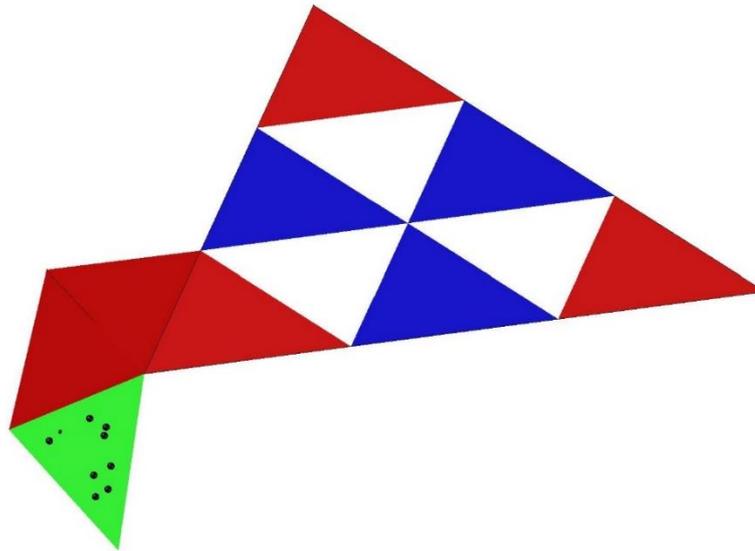


Рисунок 2.20 – Пример декомпозированного полюса при вершине (вид сверху)

3. Определить значение коэффициента уменьшения шага поиска  $\gamma > 1$ ;
4. Задать значение шага поиска  $\theta$  в градусной мере;
5. Выделить подмножество точек земной поверхности  $GP_e$ , которое принадлежит пространственной области поиска, ограниченной ребрами полюса  $p_n^0$ , как показано на рисунке 2.21.



а.



б.

Рисунок 2.21 – Пример набора точек, принадлежащего пространственной области, ограниченной декомпозированным полюсом при вершине: а – перспектива; б – вид сверху

6. Задать значение  $\varepsilon > 0$ , при котором исследующий поиск будет остановлен, так как шаг достигнет своего наименьшего установленного значения;
7. Осуществить поиск: из начального положения  $p_n^0$  сделать шаг в положительном  $\theta$  или отрицательном  $-\theta$  направлении, при условии, что новый набор координат  $\bar{p}_n^0$  не соответствует начальному  $\bar{p}_n^0 \neq p_n^0$ . Операция шага – это поворот полюса относительно вершины исходной грани триангуляции, как базовой точки. Шаг выполняется по формуле (26).

8. Вычислить значения целевой функции:  $f^+$  при шаге в направлении  $\theta$  и  $f^-$  при шаге в направлении  $-\theta$  с использованием множества содержащего точки земной поверхности в области поиска. В общем виде значение целевой функции вычисляется по формуле (23):

9. Выполнить пункты 8-12 алгоритма оптимизации средней поверхности для смежных полюсов из раздела 2.6.1.

10. Инкрементировать номер полюса  $n=n+1$  и повторить пункты 2-9.

11. Определить по формуле (35) среднее положение нормали для всех полюсов, входящих в набор  $P_{обр}^i$ :

$$n_{cp}^* = \frac{\sum_i n^*}{i} \quad (35)$$

где  $n^*$  – вектор нормали оптимизированного положения полюса при вершине;

$i$  – количество полюсов в наборе.

12. Вычислить среднее положение плоскости набора полюсов при вершине по формуле (36):

$$p_{cp}^* = V_t \circ (-n_{cp}^*) \quad (36)$$

где  $V_t$  – вектор, содержащий координаты вершины исходной грани триангуляции.

Аналогичным образом выполняется оптимизация всех наборов полюсов при вершине.

### **Оптимизации набора полюсов при ребре**

Оптимизированные плоскости, соответствующие наборам полюсов при вершине, содержат по 2 вершины, принадлежащие смежным с ними наборам полюсов при ребре, и требуется найти положение двух свободных вершин, аналогично с 2.6.1, соответствующих каждому набору полюсов при ребре, при условии, что среднеквадратическое отклонение точек земной поверхности, принадлежащих каждому полюсу в отдельности минимально.

Алгоритм оптимизации через среднее положение нормали отдельных полюсов:

1. Определить обрабатываемый набор полюсов при ребре  $P_{обр}^j$ .

2. Декомпозировать  $n$ -ый полюс  $p_n^0$ , из набора полюсов при ребре  $P_{обр}^j$  в качестве начального положения для поиска по формуле (37):

$$p_n^0 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты вершин полюса.

3. Задать значение коэффициента  $\gamma > 1$ , который будет использоваться для уменьшения шага;
4. Задать значение шага поиска  $\theta$  в линейной мере для изменения высотного положения свободной вершины.
5. Выделить подмножество точек земной поверхности  $GP_e$ , которое принадлежит пространственной области поиска, ограниченной внешними ребрами полюса  $p_n^0$ ,
6. Выполнить пункты 6-9 раздела «Оптимизации набора полюсов при ребре» 2-ой главы.
7. взять следующий полюс из набора полюсов при ребре  $GP_e$ , и повторить пункты 3-6.
8. Определить по формуле (38) среднее положение нормали для всех полюсов, входящих в набор  $P_{обр}^j$ :

$$n_{cp}^* = \frac{\sum n^*}{2} \quad (38)$$

где  $n^*$  – вектор нормали оптимизированного положения полюса при ребре.

9. Вычислить среднее положение плоскости набора полюсов при вершине по формуле (35).

Аналогичным образом выполняется оптимизация всех наборов полюсов при ребре.

### **Снижение объема избыточных измерений за счет аппроксимации локальной области плоскостями наборов полюсов**

После определения положения наборов полюсов в локальной области с использованием избыточных измерений предлагаемый метод обеспечивает снижение объема данных за счет описания подмножества избыточных измерений ( $n_l - n_0$ ) в интерполируемой области с помощью 6 плоскостей, принадлежащих наборам полюсов, как это указано на рисунке 2.22.

Суммарное количество точек, принадлежащих наборам полюсов обрабатываемой грани можно вычислить по формуле (39):

$$n = \sum_1^i \sum_1^j n_{ij} \quad (39)$$

где  $i$  – количество наборов полюсов, аппроксимирующих локальную область;

$j$  - количество точек, принадлежащих одному набору полюсов.

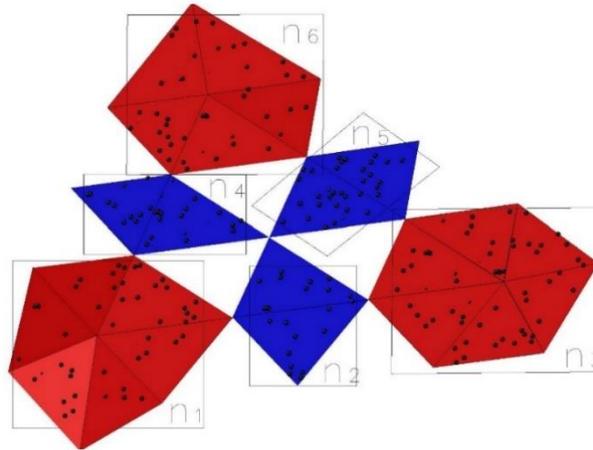


Рисунок 2.22 Пример снижение данных для описания избыточных измерений с помощью наборов полюсов

За счет обоснования положения полюсов с использованием избыточных измерений и алгоритма Хука-Дживса достигается снижение объема данных, необходимых для описания рельефа в локальной области до 6 аппроксимирующих плоскостей.

## 2.8 Метод определения точек принадлежащих построенной поверхности

### Классический подход

В теории полюсов хорошо описан способ получения точек на интерполирующей поверхности через переход от произвольно взятой точки внутри одного из полюсов.

Для этого требуется сначала перейти от характеристического многочлена 3-го порядка к характеристическому многочлену 2-го порядка (зеленые грани на рисунке 2.23). Такая операция называется сокращением индексов и является фундаментальной в теории полюсов [11, 43].

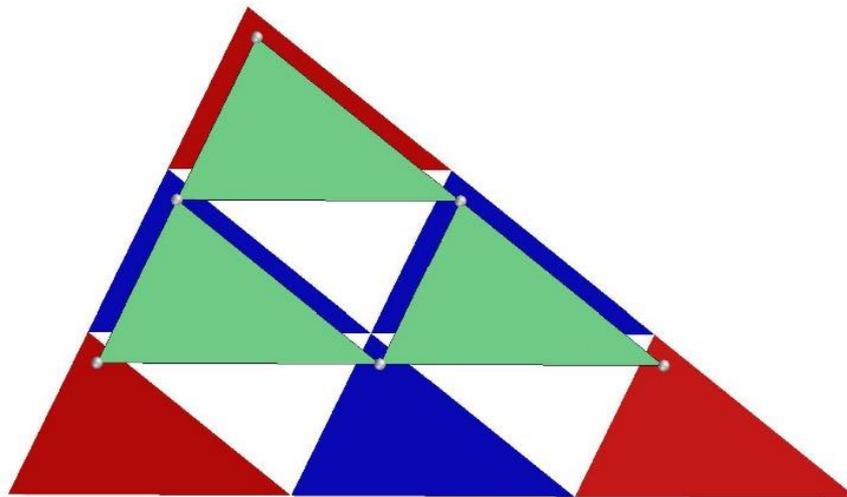


Рисунок 2.23 – Визуальное представление перехода к характеристическому многочлену 2-го порядка (вид сверху)

Для выполнения данного перехода требуется определить положение точки, произвольно взятой в одном из полюсов аналогично в других полюсах. Так как все полюса являются подобными исходной треугольной грани, то для это цели используются барицентрические координаты [34], более того в теории полюсов переход к барицентрическим координатам необходим, чтобы исключить появление вырожденных поверхностей при работе в трехмерном пространстве [11, 43].

Затем, аналогичным образом выполняется переход от характеристического многочлена 2-го порядка к характеристическому многочлену 1-го порядка – оранжевая грань на рисунке 2.24.

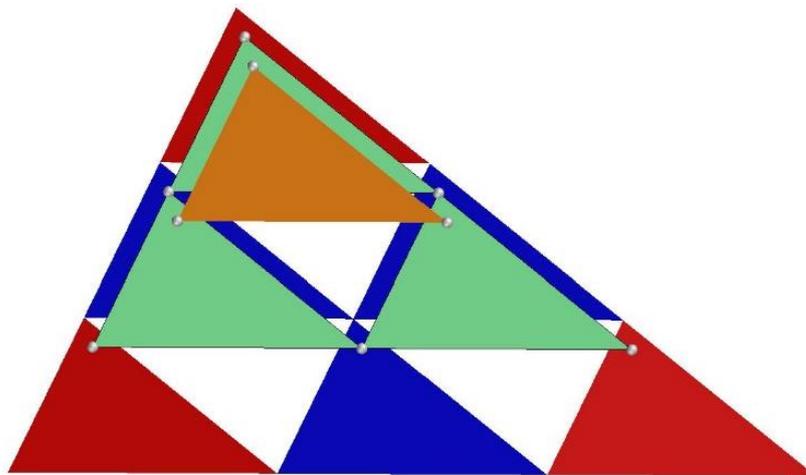


Рисунок 2.24 – Визуальное представление перехода к характеристическому многочлену 1-го порядка (вид сверху)

Координаты новых точек определяются эквивалентным соотношением площадей, как и в случае с переходом от многочлена 3-го порядка ко 2-му.

Последний этап – определить точку с помощью барицентрических координат, равных на всех предыдущих этапах, внутри характеристического многочлена 1-го порядка. Точка на интерполирующей поверхности – фиолетовая сфера на рисунке 2.25.

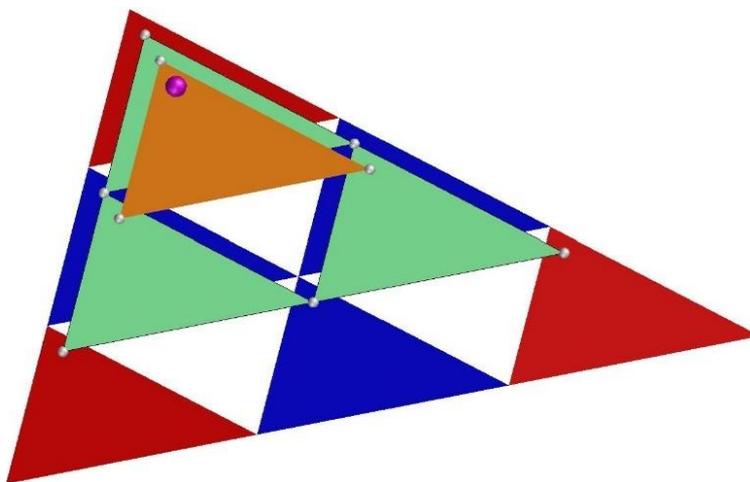


Рисунок 2.25 – Визуальное представление перехода от характеристического многочлена 1-го порядка к точке на интерполирующей поверхности (вид сверху)

Так как определенные барицентрические координаты для одного полюса полностью соответствуют барицентрическим координатам этой точки для остальных полюсов, то данный подход позволяет легко выполнить переход от произвольной точки внутри одного из полюсов к точке на интерполирующей поверхности.

Для вычисления барицентрических координат точки в двумерном случае следует воспользоваться формулой (40):

$$b_1 = \frac{S_1}{S}$$

$$b_2 = \frac{S_2}{S}$$

$$b_3 = \frac{S_3}{S}$$
(40)

где  $S_i$  – площадь полюса;

$S_n$  – площадь треугольника, образованного после добавления новой точки в полюс по часовой стрелке, которая вычисляется по формуле (41):

$$S_1 = \frac{(x_1 - x_n) * (y_2 - y_n) + (x_2 - x_n) * (y_n - y_1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{(x_2 - x_n) * (y_3 - y_n) + (x_3 - x_n) * (y_n - y_2)}{2}$$

$$S_3 = \frac{(x_1 - x_n) * (y_3 - y_n) + (x_3 - x_n) * (y_n - y_1)}{2}$$
(41)

где  $x_i, y_i$  - координаты вершин полюса;

$x_n, y_n$  - координаты вставляемой в полюс точки.

Барицентрические координаты всегда положительны и удовлетворяют соотношению вычисляемому по формуле (42):

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$
(42)

В классическом подходе существует 3 основные проблемы:

1. Получение координат определенной точки - в стандартном подходе точка на интерполирующей поверхности отклоняется в своем пространственном положении от произвольно взятой точки внутри полюса, с которого начинается процесс восстановления связи и нет возможности получить координаты строго заданной точки;
2. Произвольно взятая точка должна обязательно попадать внутрь одного из полюсов, чтобы определить координаты точки на интерполирующей поверхности;
3. Отсутствует способ задать веса полюсов. Иными словами, нет возможности ограничить влияние отдаленных полюсов от интерполируемой точки на результирующее значение пространственных координат этой точки. Таким образом, каждый полюс в классическом представлении вносит равное влияние.

### **Предлагаемый метод вычисления координат интерполируемой точки с помощью обратных операций в барицентрических координатах**

Определить координаты определяемой точки  $P$  можно следующим образом:

1. Так как плановые координаты точки  $P$  известны, то требуется определить только её высотное положение. Для этого нужно определить барицентрические координаты точки  $P$  по формуле (39). Выполним вспомогательные построения для наглядности: соединим вершины исходной грани триангуляции и точки, координаты которой требуется определить, как это показано на рисунке 2.26.

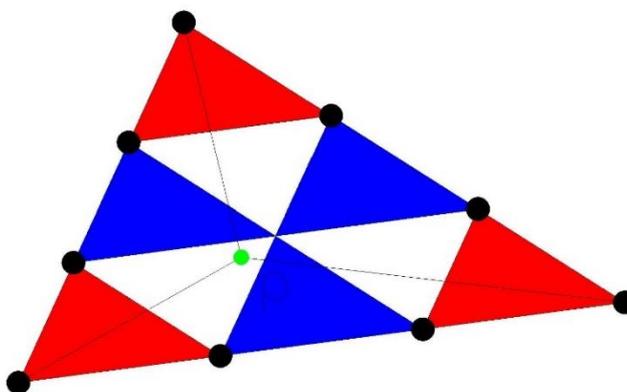


Рисунок 2.26 – Визуальное представление вспомогательных построений для определения барицентрических координат интерполируемой точки: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами (вид сверху)

2. Определим барицентрические координаты точек внутри декомпозированного, например, из многочлена 3-го порядка полюса по формуле (43):

$$b_{1pp} = b_{1p} / 3$$

$$b_{2pp} = b_{2p} / 3 \quad (43)$$

$$b_{3pp} = b_{3p} / 3$$

где  $b_{1p}, b_{2p}, b_{3p}$  – барицентрические координаты интерполируемой точки  $P$ .

Так как все полюса подобны исходному, но их площадь меньше площади исходной грани в 3 раза, то барицентрические координаты для каждого полюса будут одинаковыми.

3. Вычислим пространственные координаты точек внутри всех полюсов многочлена 3-го порядка по известным барицентрическим координатам определяемой точки. Для этого потребуется решить систему линейных уравнений с 2 неизвестными плановыми координатами по формуле (44):

$$\begin{cases} x_n(y_1 - y_2) + y_n(x_2 - x_1) = 2s_1 - x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_n(y_2 - y_3) + y_n(x_3 - x_2) = 2s_2 - x_2y_3 + x_3y_2 \end{cases} \quad (44)$$

где  $x_{1-3}, y_{1-3}$  – плановые координаты вершин полюса;

$x_n, y_n$  – координаты определяемой точки внутри полюса;

$S_{1-3}$  вычисляются по формуле (45):

$$\begin{aligned} S_1 &= b_{1pp} S \\ S_2 &= b_{2pp} S \\ S_3 &= b_{3pp} S \end{aligned} \quad (45)$$

где  $S$  – площадь соответствующего полюса.

4. Вычисление координаты  $Z$  определяемых точек внутри полюсов осуществляется по формуле (46):

$$Z = \frac{-a \cdot X - b \cdot Y - d}{c} \quad (46)$$

где  $a, b, c, d$  переменные в уравнении плоскости полюса;

$X, Y$  – плановые координаты интерполируемой точки.

В графическом представлении вспомогательные построения для перехода к многочлену 2-го порядка показаны на рисунке 2.27.

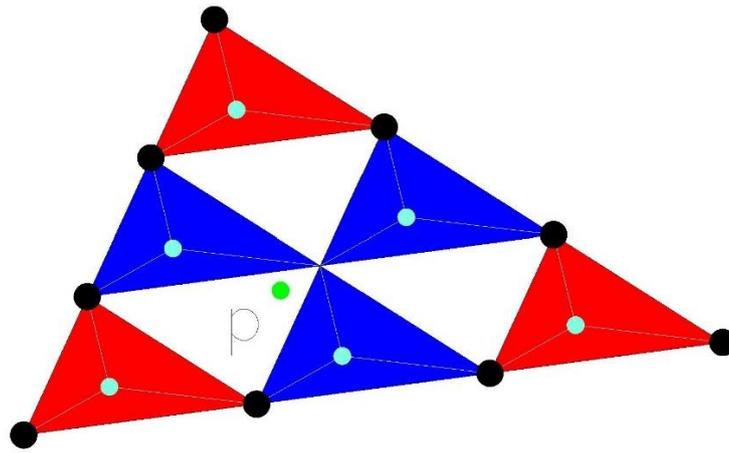


Рисунок 2.27 – Визуальное представление вспомогательных построений для определения координат вершин характеристического многочлена 2-го порядка: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами; бирюзовые окружности – вершины многочлена 2-го порядка (вид сверху)

Таким образом будет выполнен переход к многочлену 2-го порядка, как это показано на рисунке 2.28.

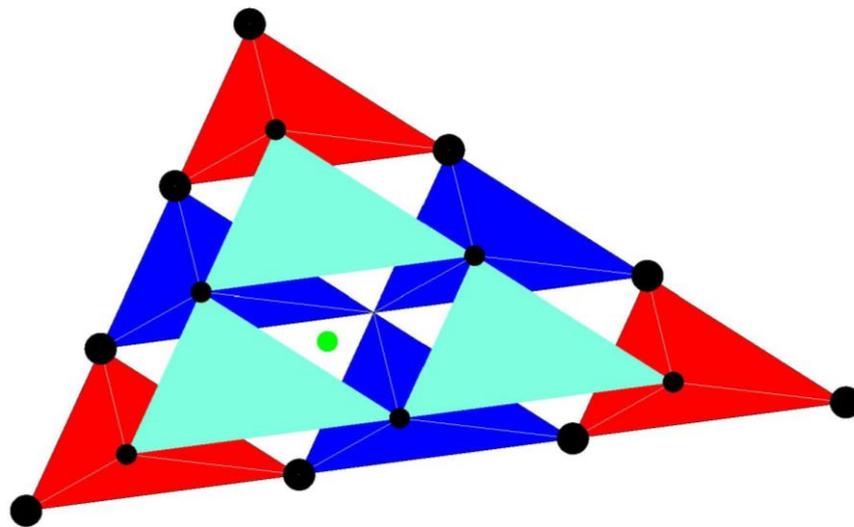


Рисунок 2.28 – Визуальное представление перехода к многочлену 2-го порядка: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами; бирюзовые грани – многочлен 2-го порядка (вид сверху)

5. Определить пространственные координаты точек (оранжевые окружности на рисунке 2.29) внутри всех полюсов многочлена 2-го порядка по известным барицентрическим координатам определяемой точки.

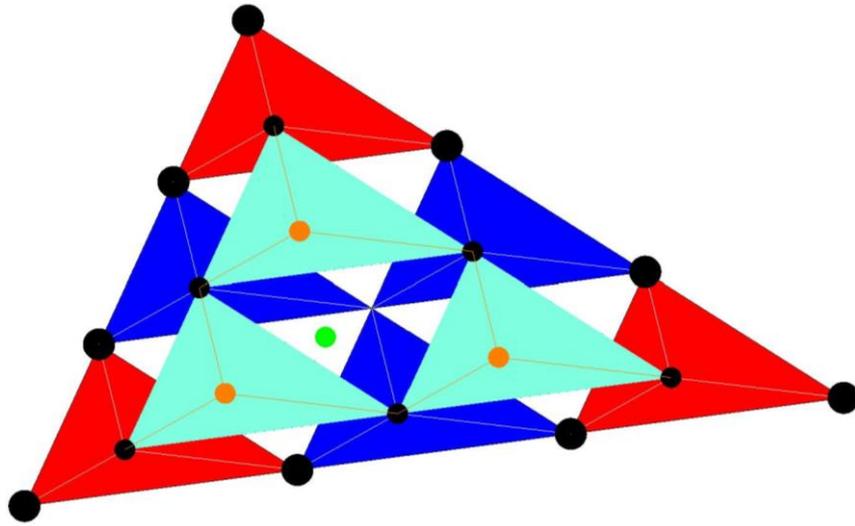


Рисунок 2.29 – Визуальное представление вспомогательных построений для определения координат вершин характеристического многочлена 1-го порядка: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами; бирюзовые окружности – вершины многочлена 2-го порядка; оранжевые окружности – вершины многочлена 1-го порядка (вид сверху)

Таким образом определены координаты всех вершин для построения характеристического многочлена 1-го порядка, визуальное представление которого показано на рисунке 2.30.

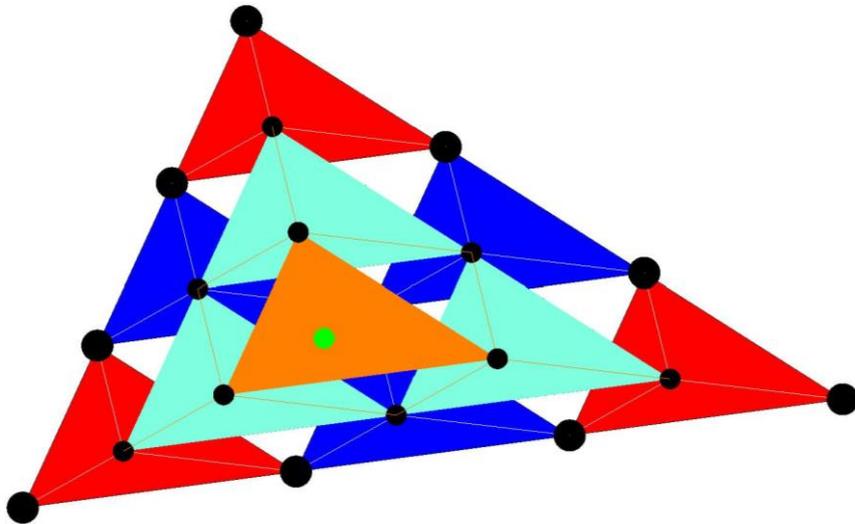


Рисунок 2.30 – Визуальное представление перехода к многочлену 1-го порядка: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами; бирюзовые грани – многочлен 2-го порядка; оранжевая грань – многочлен 1-го порядка (вид сверху)

6. Определить высотное положение определяемой точки, при помощи интерполяции внутри многочлена 1-го порядка с помощью решения системы уравнений (43).

Таким образом возможно получать пространственные координаты определенной интерполируемой точки, что является необходимым элементом концепции интерполяции при помощи теории полюсов в геодезии.

## 2.9 Выводы по главе 2

Разработанный метод построения цифровых моделей рельефа с использованием теории полюсов и метода Хука-Дживса позволяет восстановить сложные связи между геопространственными данными на локальных участках математической поверхности за счет построения связанной пространственной области, определяемой с использованием характеристических многочленов и определения положения полюсов их составляющих с использованием метода Хука-Дживса по избыточным измерениям. Более того, за счет аппроксимации полюсами избыточных измерений снижается объем необходимой информации для восстановления связей между геопространственными данными.

Важно отметить, что разработанный метод ограничения области поиска пространственной интерполяции на уровне смежных граней с использованием предельного угла позволяет управлять аппроксимирующими кривыми за счет исключения из обработки смежных граней, отличающихся в своих морфометрических характеристиках от обрабатываемой. Более того, метод не требует добавления в модель новых структурных элементов (характерных линий) и устойчив к способу определения угла между плоскостями.

Предлагаемый метод определения высотного положения интерполируемой точки с помощью обратных операций в барицентрических координатах позволяет выполнить операцию по снижению индекса характеристического многочлена без смещения.

## ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА

### Исходные данные

В качестве исходных данных для построения цифровых моделей рельефа были использованы облака точек, полученные во время воздушного лазерного сканирования земной поверхности, а также облако точек подводного рельефа, полученное с использованием многолучевого эхолота.

По периодичности данные можно разделить на две группы:

1. данные периодической съемки:
  - a. Антропогенные участки  $K_{1-6}$ ;
  - b. Антропогенные участки  $P_{1-6}$ ;
2. данные единичной съемки:
  - a. Горный участок;
  - b. Карьер;
  - c. Участок шельфа;
  - d. Равнинный участок.

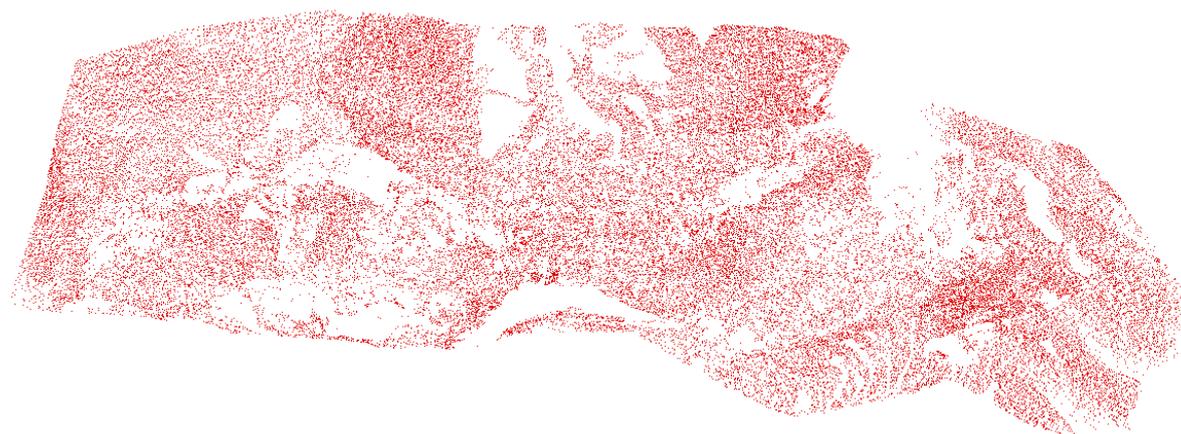
Облака точек соответствовали различным, в том числе, по своим морфометрическим характеристикам, участкам земной поверхности и были получены с высокой степенью детализации.

### 3.1 Алгоритм классификации

**Автоматическая классификация.** Для выделения геопространственных данных из полученного набора данных была выполнена классификация в автоматическом режиме с использованием программы MicroStation v8i и модуля TerraSolid TerraScan. В результате автоматической классификации геопространственные данные были разделены на два поднабора:

1. «ключевые точки» – облако точек, которое было использовано для построения цифровых моделей рельефа, так как содержит основной набор данных, характеризующих земную поверхность;
2. «точки земной поверхности» – облако точек, которое содержит точки земной поверхности, не вошедшие в набор данных «ключевые точки», но относящиеся к земной поверхности. Данный набор данных был использован как избыточные измерения для оценки точности построений.

Пример набора данных «ключевые точки» для Антропогенных участков периодической съемки приведен на рисунке 3.1.



А



Б

Рисунок 3.1 – Построенные по классифицированным данным участки периодических съемок:

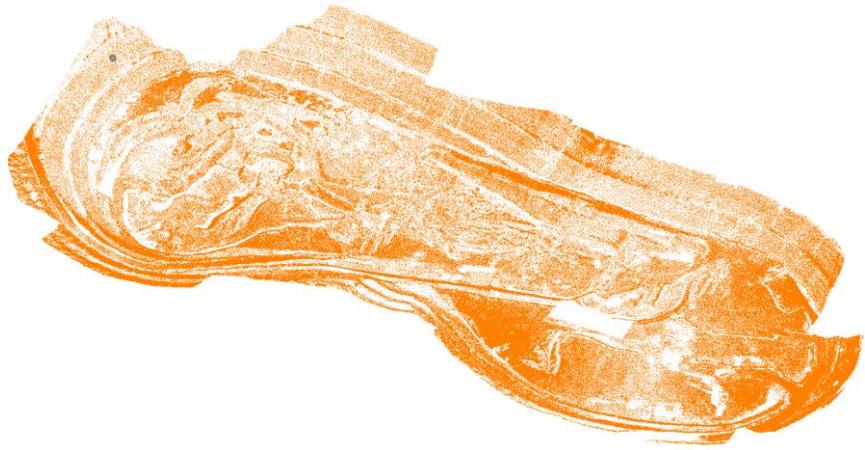
А - Антропогенный К1, Б - Антропогенный Р1

На рисунке 3.1 отчетливо видны пропуски в геопространственных данных, которые не связаны с классификацией, а получены в ходе съемки.

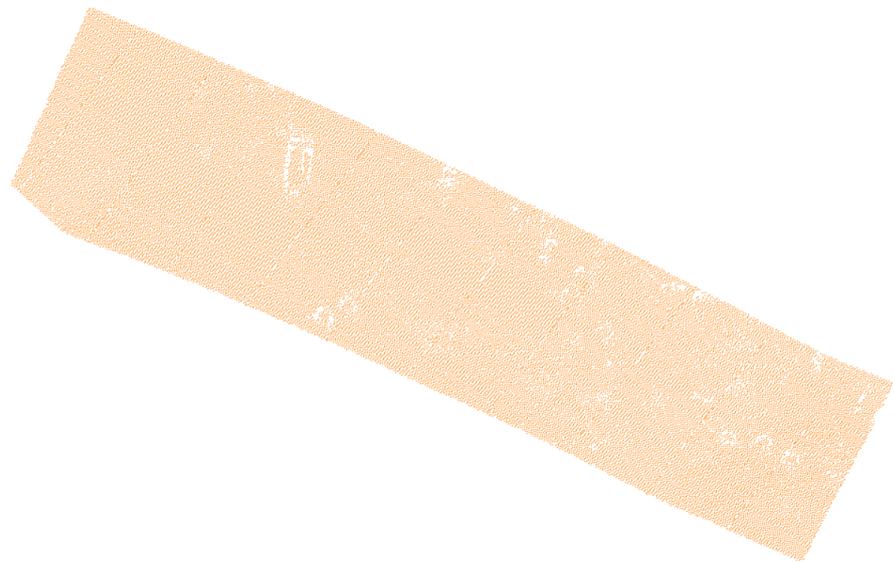
Визуальное представление набора данных «ключевые точки» для участков единичной съемки приведено на рисунке 3.2.



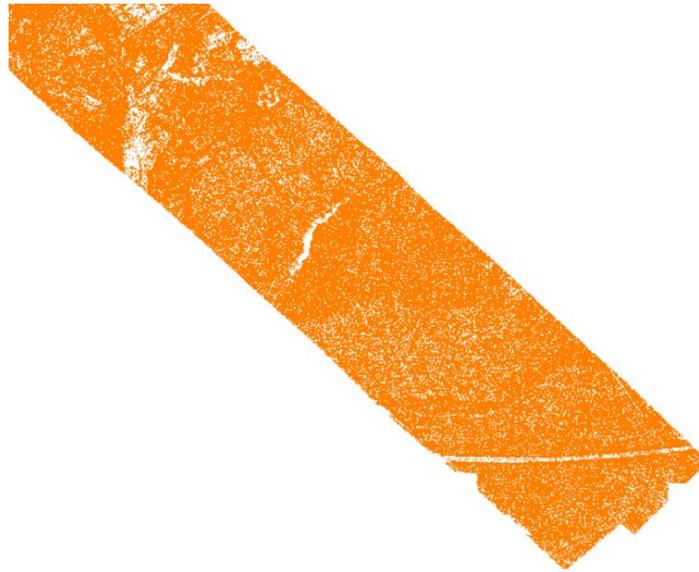
В



Г



Д



Е

Рисунок 3.2 – Построенные по классифицированным данным участки единичной съемки: В - Горный участок, Г - Карьер, Д - Участок шельфа, Е - Равнинный участок

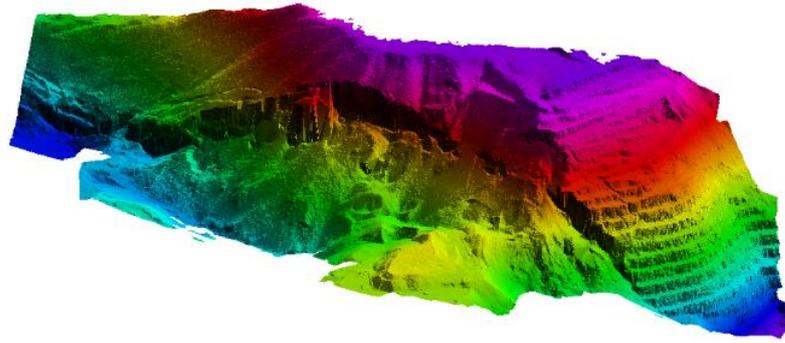
На рисунке 3.2В видны пропуски в данных, которые связаны со съемкой, на рисунке 3.2Г часть пропусков в геопространственных данных связана со съемкой (криволинейные границы), а часть связана с классификацией (прямоугольные участки), на рисунке 3.2Д – пропуски в данных связаны с получением данных, на рисунке 3.2Е – на пропуски в данных оказала влияния классификация и съемка.

Таким образом, во всех облаках точек, связанных с земной поверхностью, наблюдается наличие пропусков в данных различного генезиса, что позволяет утверждать, что при построении цифровых моделей рельефа оценка точности различных методов пространственной интерполяции будет связана и с обработкой, используемыми методами, пропущенных значений.

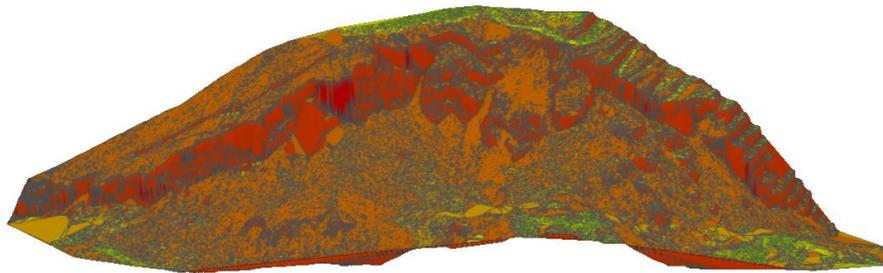
**Ручная доработка результатов автоматической классификации.** Результаты автоматической классификации могут приводить к ошибкам в определении метки класса. Для устранения влияния ошибок автоматической классификации на построение цифровых моделей, а также последующую оценку точности построений была выполнена ручная доработка.

Для ручной доработки результатов автоматической классификации были построены цифровые модели рельефа в программе Microstation с использованием модуля TerraModel, а также цифровые модели наклона. Методом визуальной оценки были обнаружены локальные ошибки в присвоении меток класса, которые были удалены из наборов геопространственной информации.

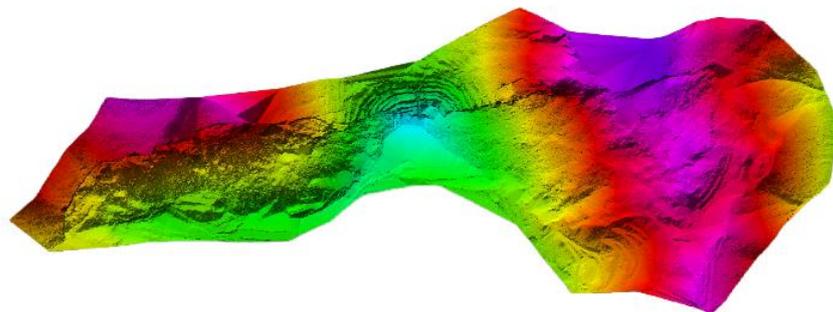
Пример цифровых моделей рельефа и цифровых моделей наклона для участков периодической съемки после удаления выбросов приведено на рисунке 3.3.



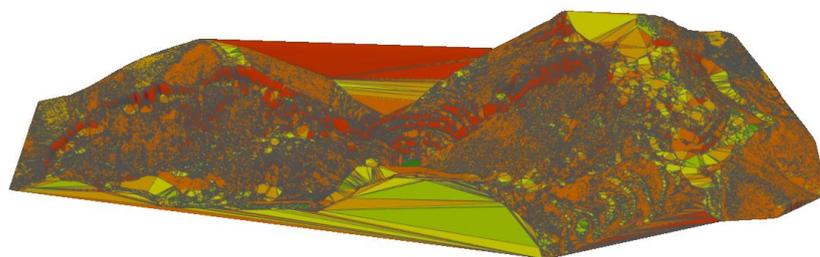
A1



A2



B1



B2

Рисунок 3.3 – Построенные по классифицированным данным участки с периодическими данными: А - антропогенный участок К1, Б - антропогенный участок Р1; 1 – цифровая модель рельефа, 2 – цифровая модель наклона

Цифровые модели наклона на рисунке 3.3 содержат плоские, отнесенные в большинстве случаев к пропускам в геопространственных данных, и наклонные грани. Цветовая шкала для моделей наклона приведена на рисунке 3.4.

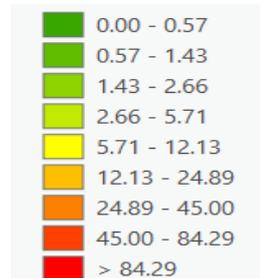
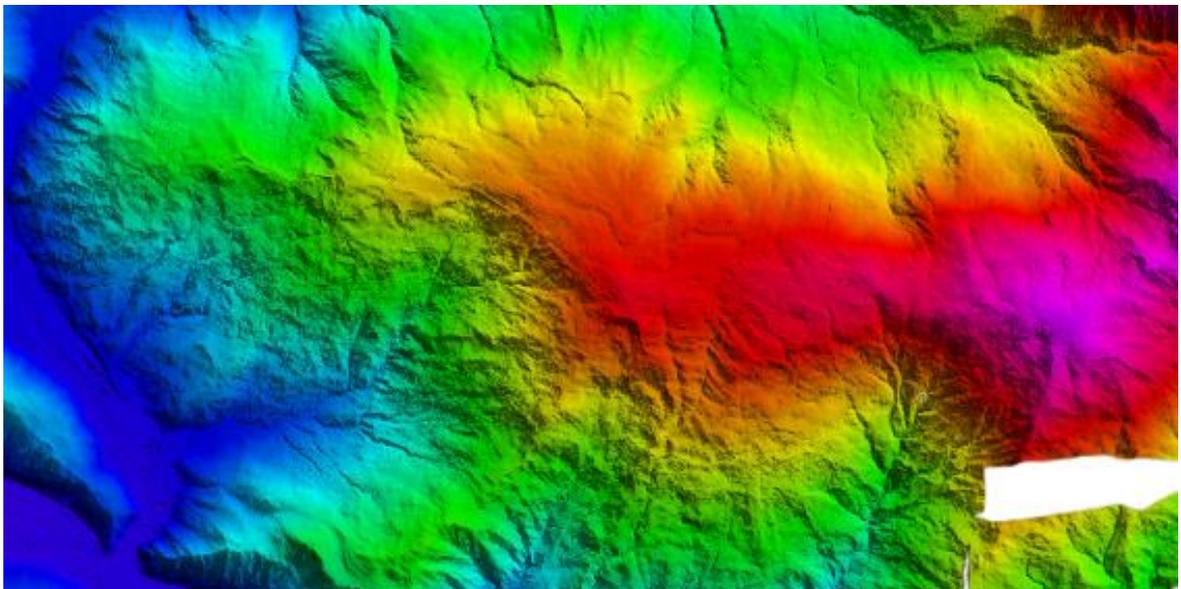
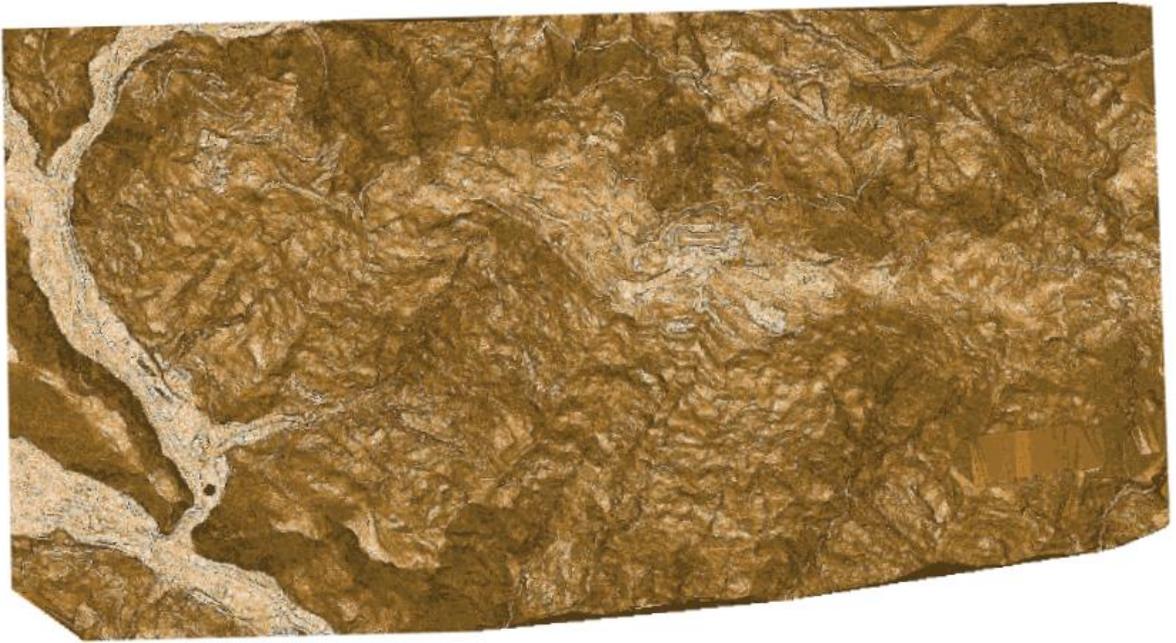


Рисунок 3.4 – Цветовая шкала углов наклона в градусах

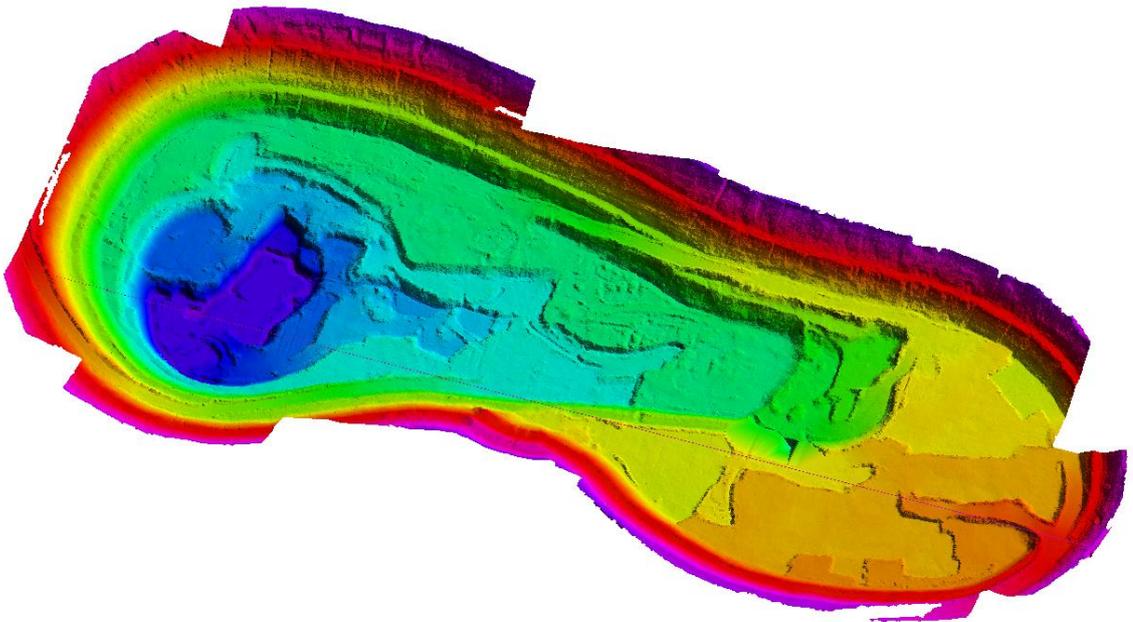
Визуальное представление цифровых моделей рельефа и цифровых моделей наклона для участков разовой съемки после удаления выбросов приведено на рисунке 3.5.



B1



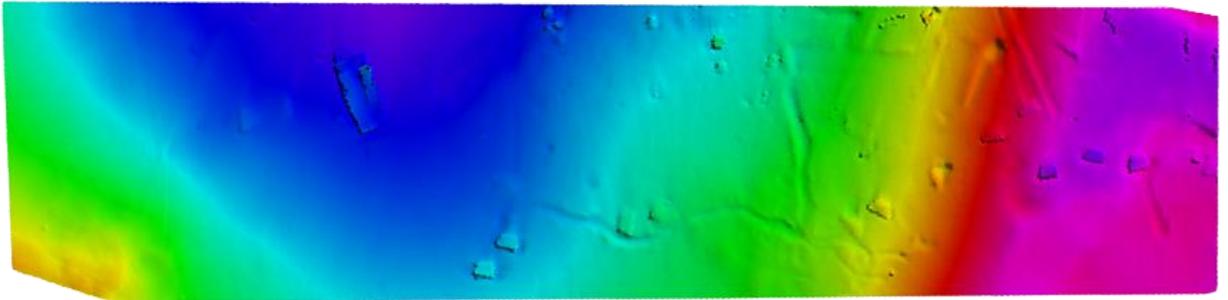
B2



Г1



Г2



Д1



Д2



E1



E2

Рисунок 3.5 – Построенные по классифицированным данным участки единичной съемки: В - Горный участок, Г - Карьер, Д - Участок шельфа, Е - Равнинный участок; 1 – цифровая модель рельефа, 2 – цифровая модель наклона

На цифровой модели наклона на рисунке 3.5В2 отображен участок с небольшим углом наклона в левой части модели и значительное количество наклонных участков, на рисунке 3.5Г2 визуальнo выделяются характерные линии, где поверхность резко изменяет свою кривизну, а также условно плоские участки между характерными линиями, на рисунке 3.5Д2 наклон модели незначительный, при этом явно выделяются линии, полученные в ходе движения якоря судна по дну, рисунок 3.5Д2 демонстрирует, что в модели наклона Равнинного участка преобладают условно плоские грани.

Цветовая шкала цифровых моделей наклона с градусными единицами измерения приведена на рисунке 3.6.

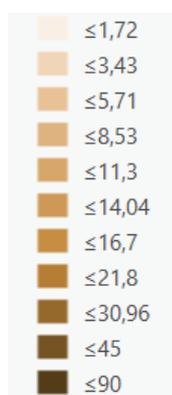


Рисунок 3.6 – Цветовая шкала углов наклона в градусах

Краткие характеристики обработанных облаков точек, содержащих информацию о разнообразных в своем морфометрическом представлении участков земной поверхности приведена в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Краткая характеристика участков периодической съемки

Наименование участка	Количество точек земной поверхности	Количество ключевых точек модели	Минимальная высота, м	Максимальная высота, м	Площадь, м <sup>2</sup>
Антропогенный К					
К1	1 593 520	220 034	194	919	4 807 000
К2	467 090	45 484	150	1000	5 383 000
К3	2 574 901	281 215	150	950	4 415 000
К4	1 630 745	154 793	150	950	5 988 000
К5	1 511 152	120 802	150	950	4 296 000
К6	2 393 476	202 187	150	950	4 377 000
Антропогенный Р					
Р1	7 572 628	471 321	460	1040	1 964 000
Р2	4 470 403	552 644	540	980	617 000
Р3	5 090 251	474 015	460	1040	1 575 000
Р4	7 983 616	505 175	500	1040	1 478 000
Р5	5 152 907	576 107	520	1040	1 427 000
Р6	4 902 851	592 549	480	1040	1 093 000
Участки разовой съемки					
Горный участок	22 476 315	2 210 242	450	1750	28 910 000
Карьер	4 365 646	210 202	315	405	477 000
Участок шельфа	101 658	3 148	-32	-7	24 500
Равнинный участок	8 415 942	649 148	23	44	4 407 000

На всех исследуемых участках наблюдается значительное количество избыточных измерений, что позволяет выполнить оценку точности построений при помощи статистических оценок.

### 3.2 Построение математических поверхностей рельефа местности

Периодическая съемка

Построение цифровых моделей рельефа выполнялось в программе Surfer следующими методами пространственной интерполяции:

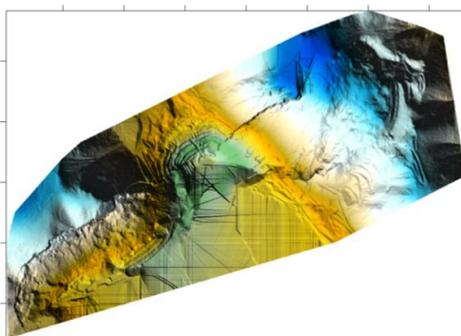
- 1) Обратное расстояние;
- 2) Кригинг:
  - а. кубическая вариограмма;
  - б. экспоненциальная вариограмма;
  - с. линейная вариограмма;
- 3) Минимальная кривизна;
- 4) Естественный сосед;
- 5) Радиальная базисная функция (РБФ):
  - а. кубический сплайн;
- 6) Триангуляция с линейной интерполяцией;
- 7) Предлагаемый метод.

Важно отметить, что точки для уточнения локальных поверхностей с использованием интерполяции на основе предлагаемого метода были получены с использованием разработанной программы (Приложение Б).

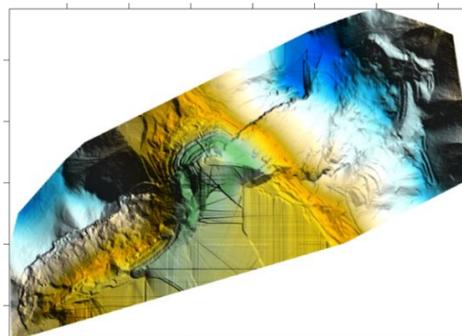
В программе Surfer реализован подход с использованием оценки в узлах регулярной сети (GRID). Одним из самых важных параметров для подхода с использованием регулярной сети является шаг (пространственное разрешение) между узлами. При построении цифровых моделей рельефа было использовано 3 шага:

- 1) 3 метра;
- 2) 5 метров;
- 3) 10 метров.

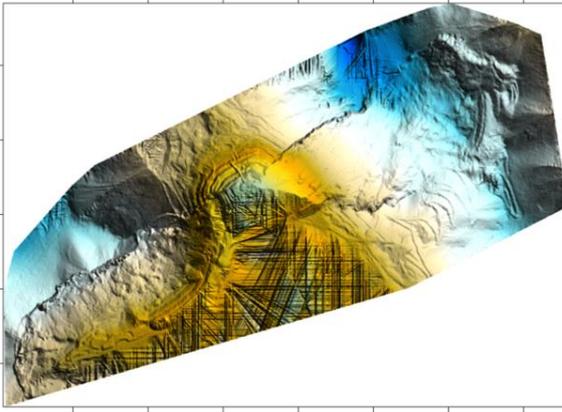
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К1 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.7.



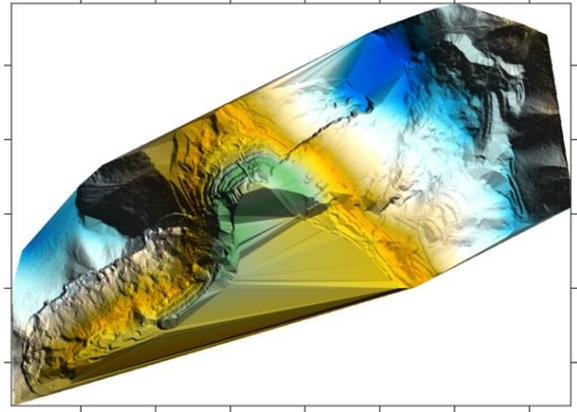
Кригинг (линейная вариограмма)



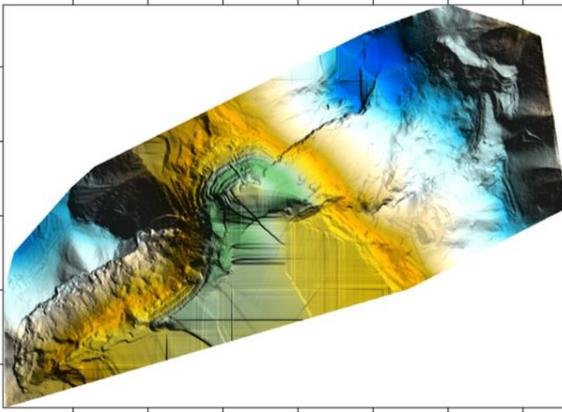
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



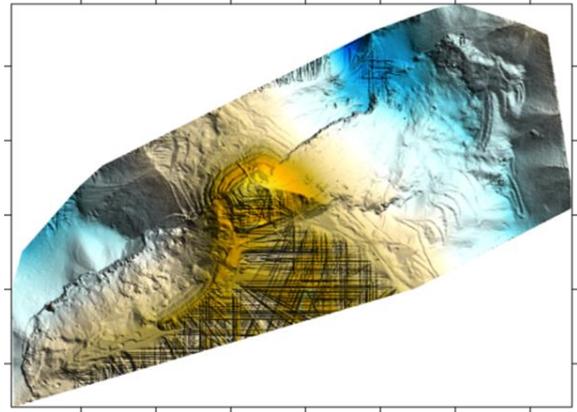
Кригинг (кубическая вариограмма)



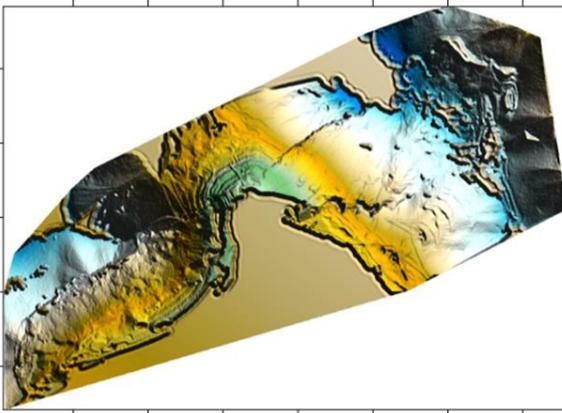
Триангуляция



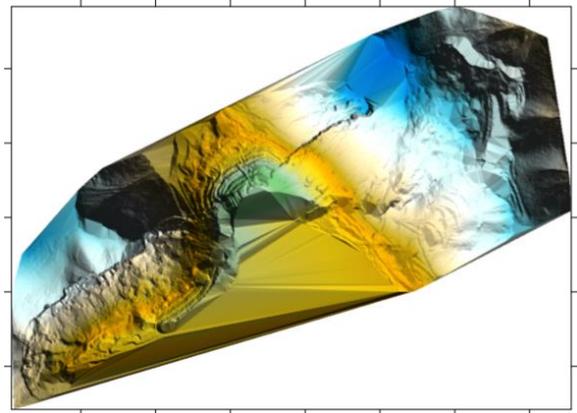
Обратное расстояние



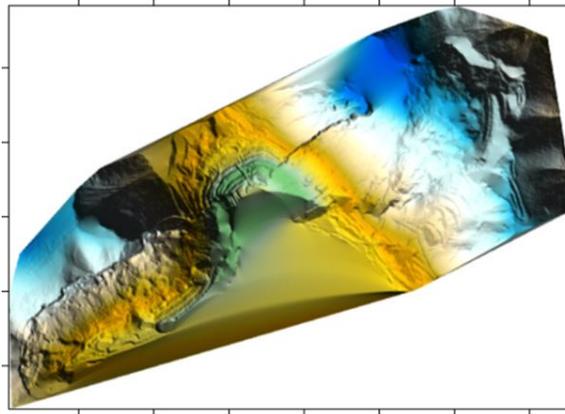
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.7 – Антропогенный К1 3м, отметки на осях через 500м  
(вид сверху)

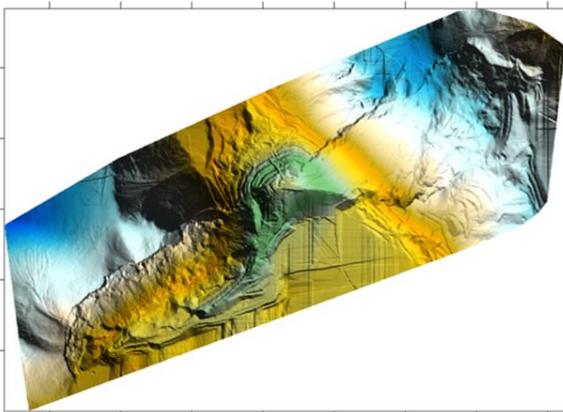
В центральной части участка К1 располагаются характерные для открытого типа разработки бровки и уступы, в верхней части наблюдаются следы оползания, а в нижней части – участок горного рельефа с дорожной сетью.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка К1 приведена на рисунке 3.8.

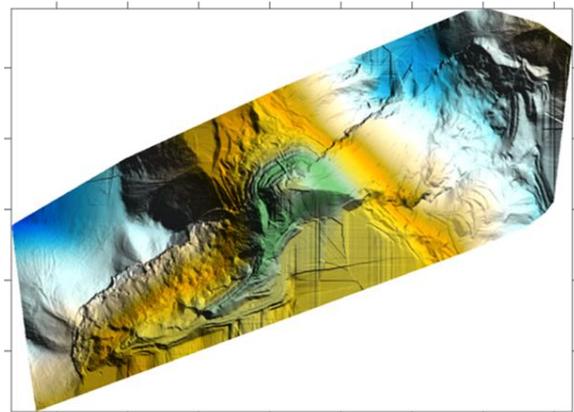


Рисунок 3.8 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков К1

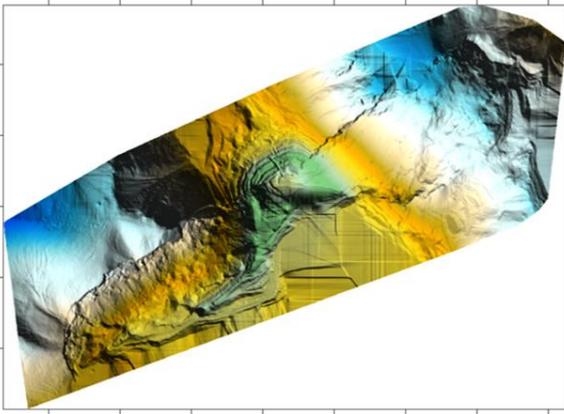
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К2 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.9.



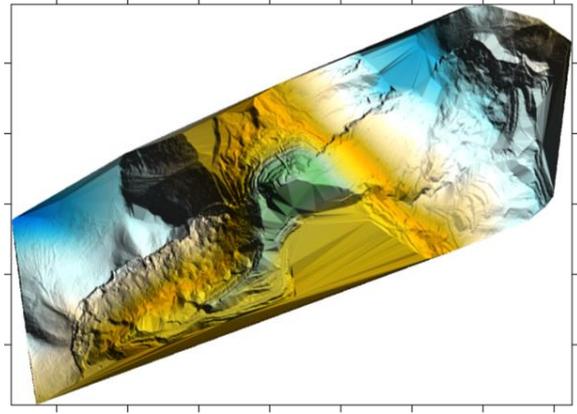
Кригинг (линейная вариограмма)



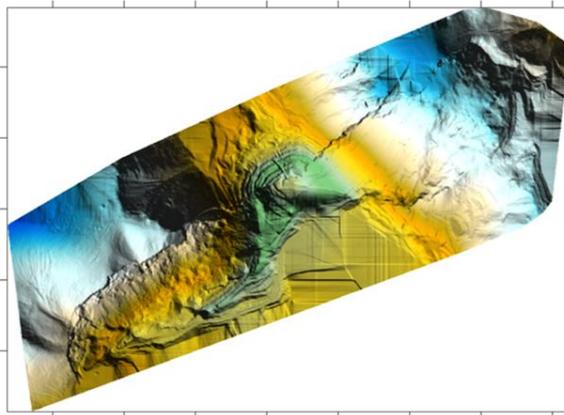
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



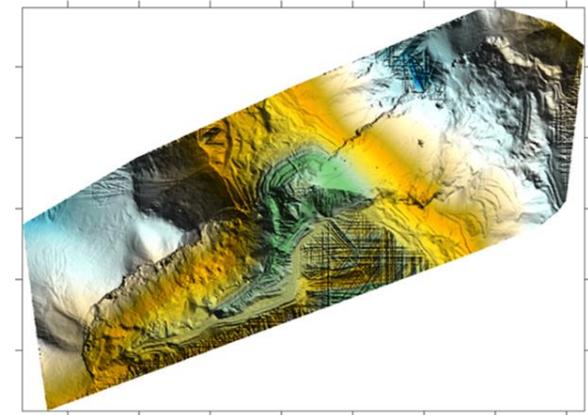
Кригинг (кубическая вариограмма)



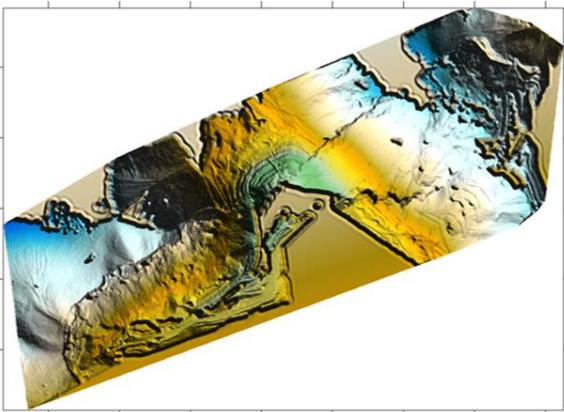
Триангуляция



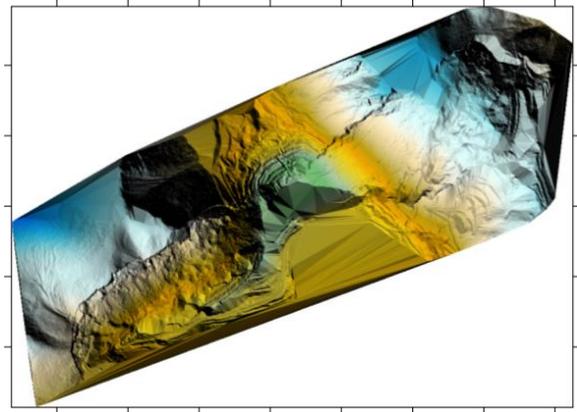
Обратное расстояние



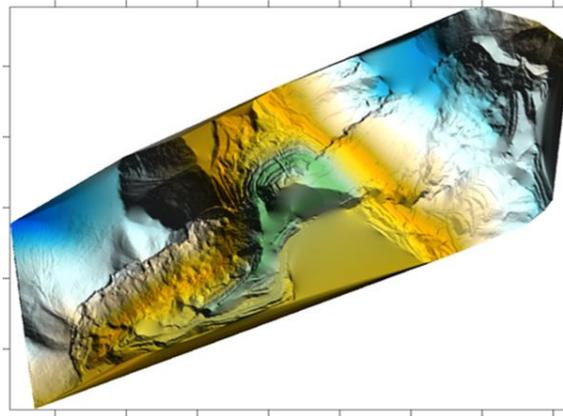
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.9 – Антропогенный К2 3м, отметки на осях через 500м  
(вид сверху)

В верхней части Антропогенного участка К2 видны углубившиеся трещины, вызванные оползанием породы, в нижней и центральной части наблюдаются локальные изменения кривизны поверхности.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенных участков К2, К3 приведена на рисунке 3.10.

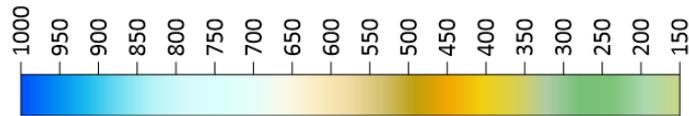
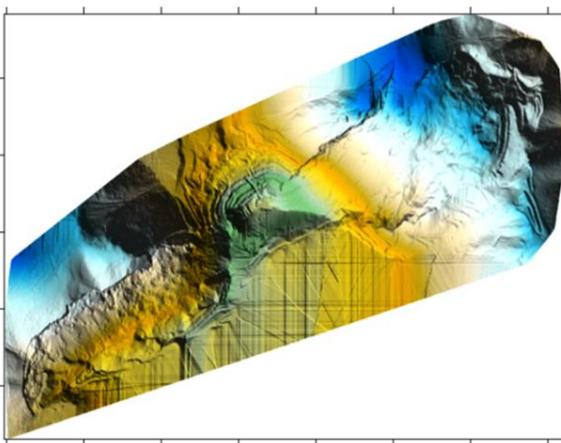
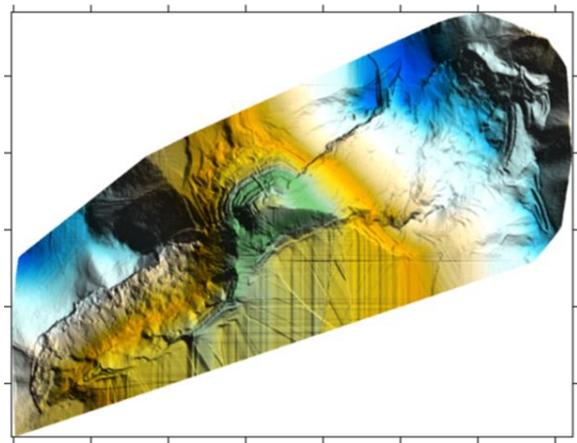


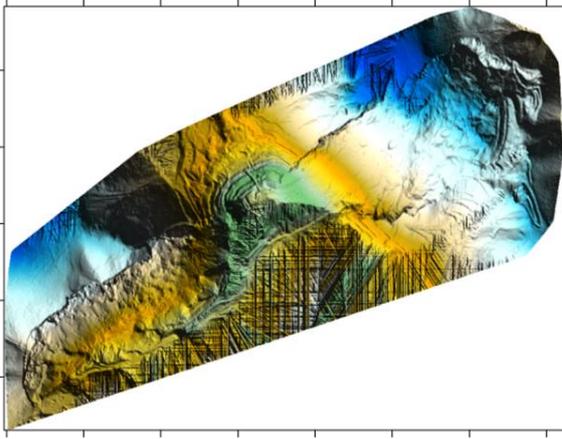
Рисунок 3.10 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков К2, К3

Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К3 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.11.

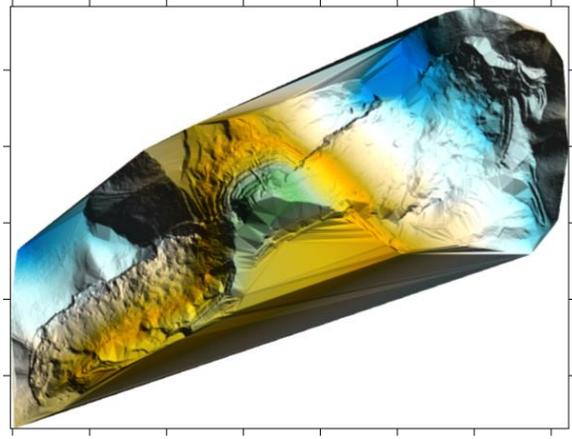


Кригинг (линейная вариограмма)

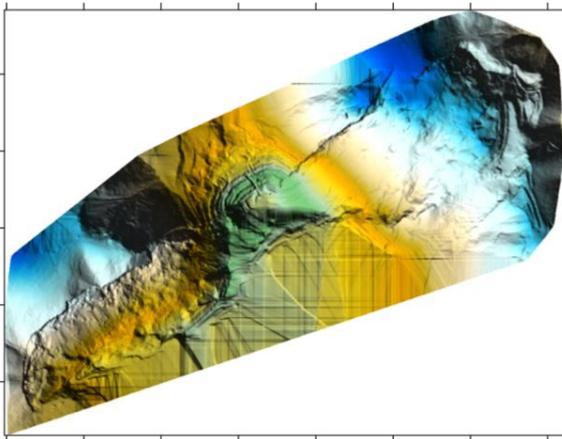
Кригинг (экспоненциальная  
вариограмма)



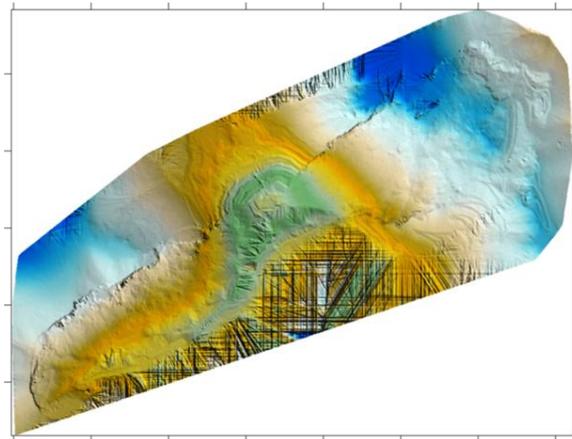
Кригинг (кубическая вариограмма)



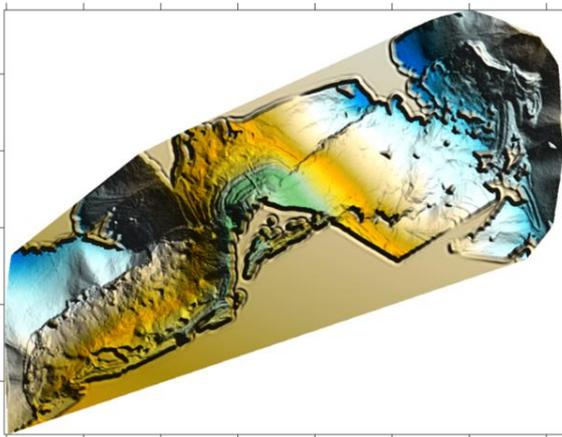
Триангуляция



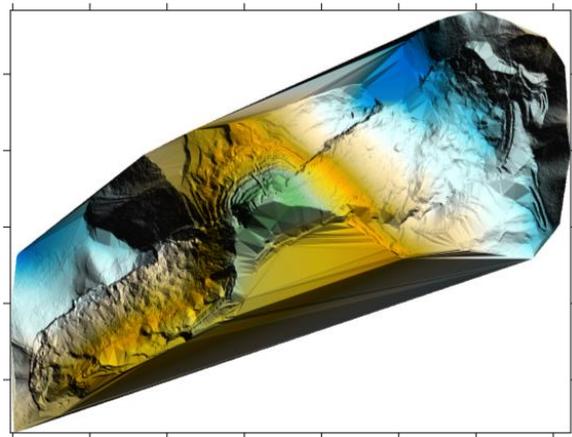
Обратное расстояние



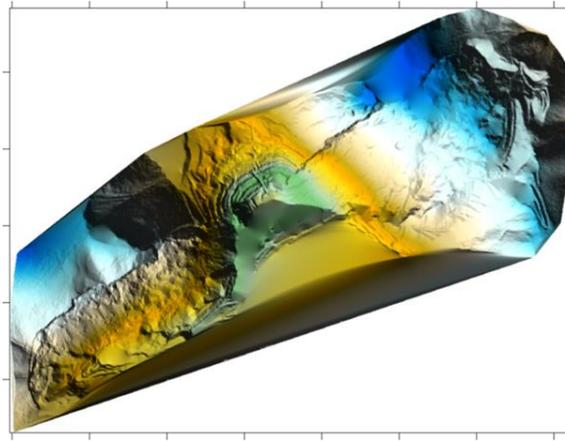
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод

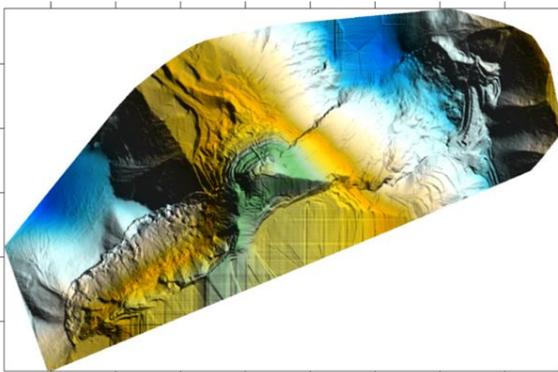


Естественный сосед

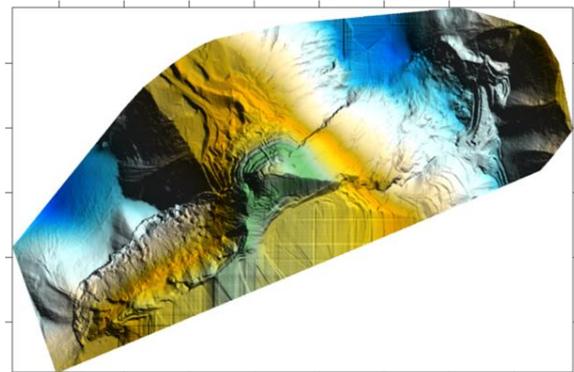
Рисунок 3.11 – Антропогенный КЗ 3м, отметки на осях через 500м  
(вид сверху)

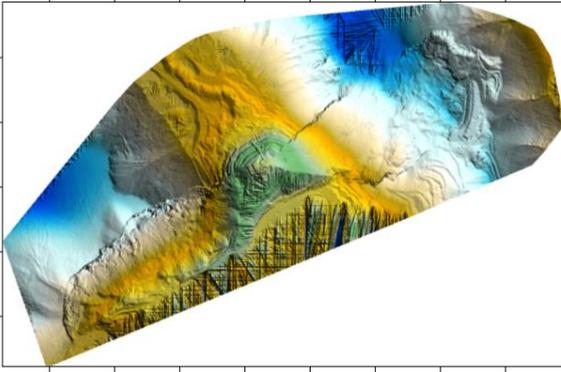
В верхней и центральной части Антропогенного участка К3 прослеживается развитие процессов оползания, при этом в верхней части отчетливо отмечается глубокая трещина.

Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К4 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.12.

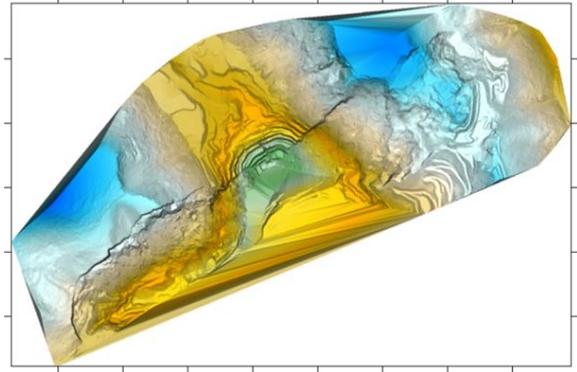


Кригинг (линейная вариограмма)

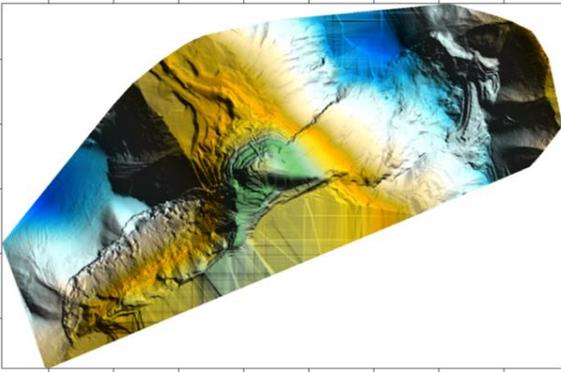
Кригинг (экспоненциальная  
вариограмма)



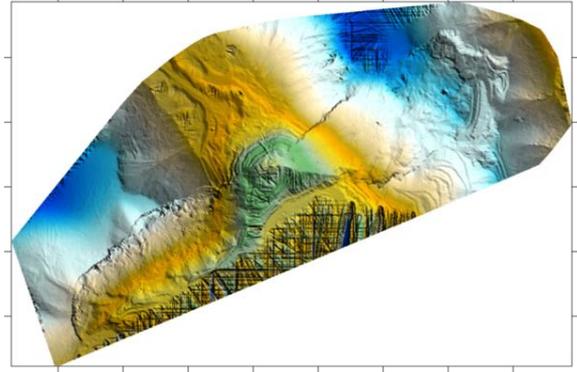
Кригинг (кубическая вариограмма)



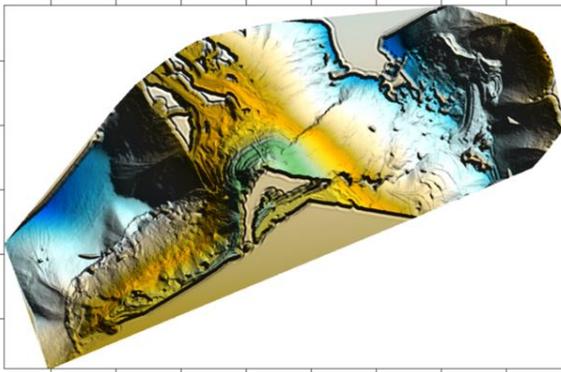
Триангуляция



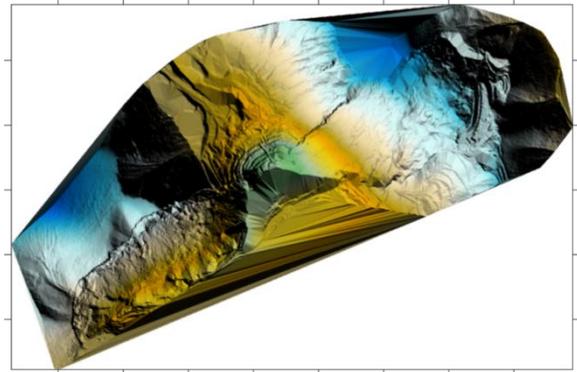
Обратное расстояние



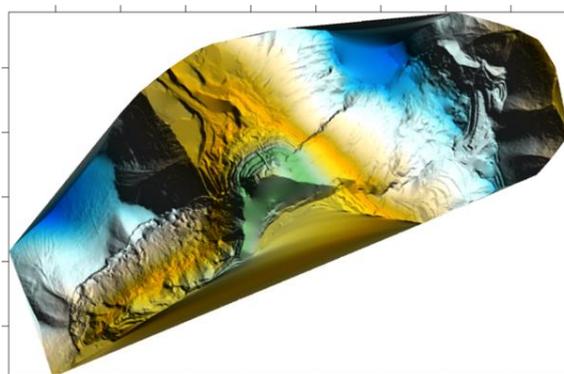
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.12 – Антропогенный К4 3м, отметки на осях через 50м  
(вид сверху)

В верхней части Антропогенного участка К4 наблюдается развитие процесса трещинообразования и продолжается процесс оползания, в центральной части отмечается увеличение глубины водостока.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка К4 приведена на рисунке 3.13.

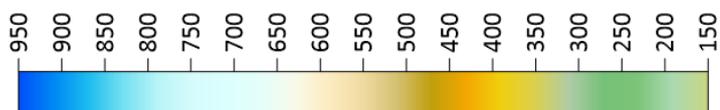
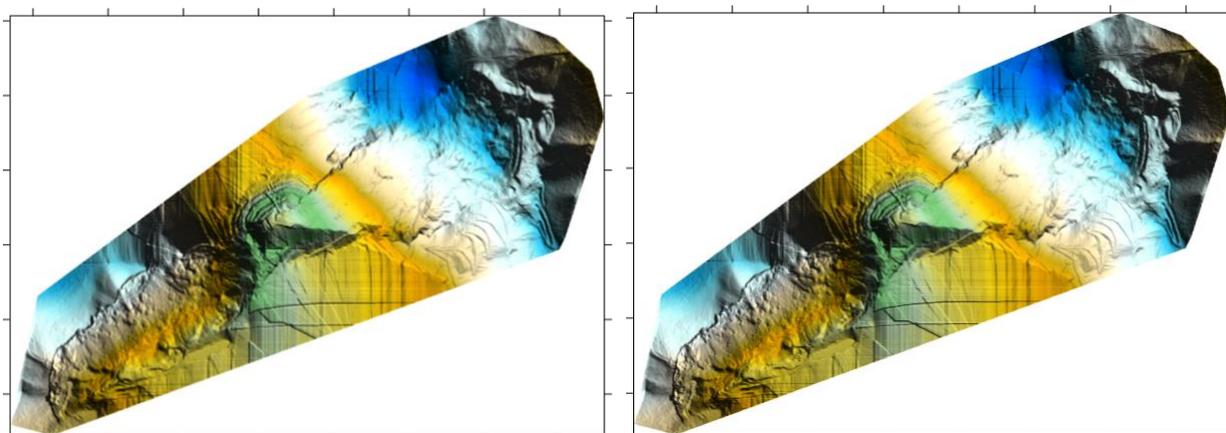


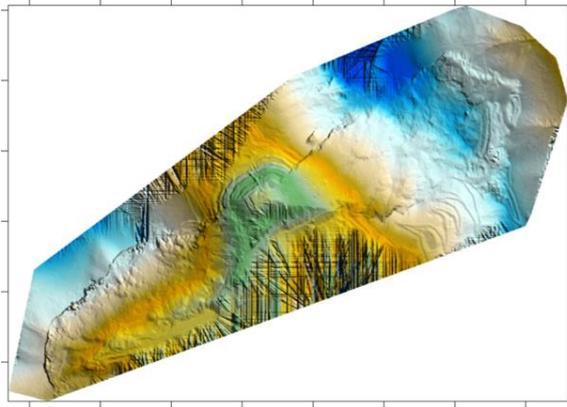
Рисунок 3.13 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков К4-6

Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К5 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.14.

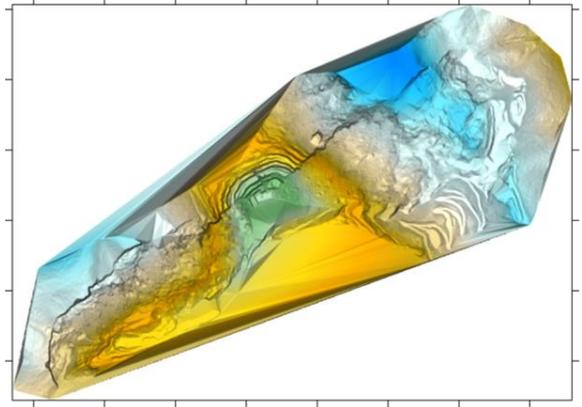


Кригинг (линейная вариограмма)

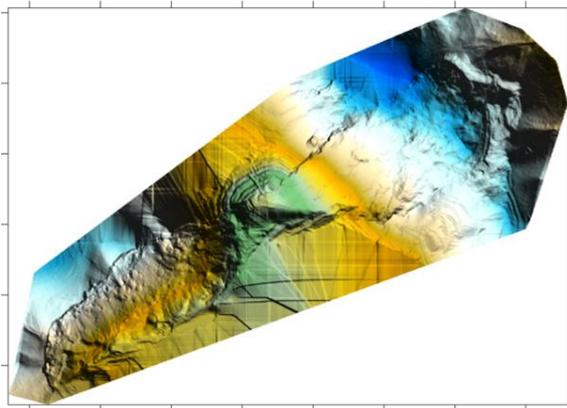
Кригинг (экспоненциальная  
вариограмма)



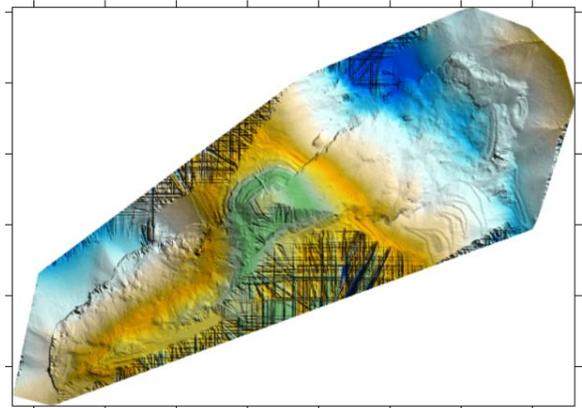
Кригинг (кубическая вариограмма)



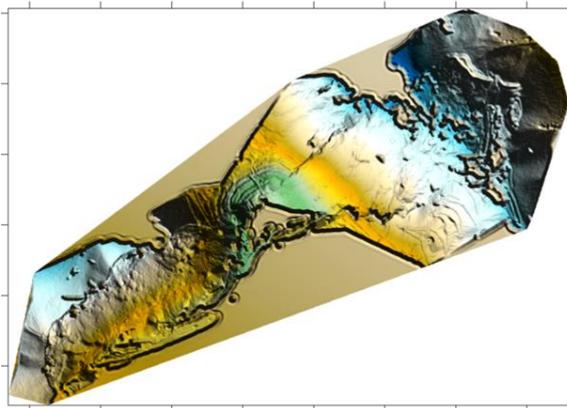
Триангуляция



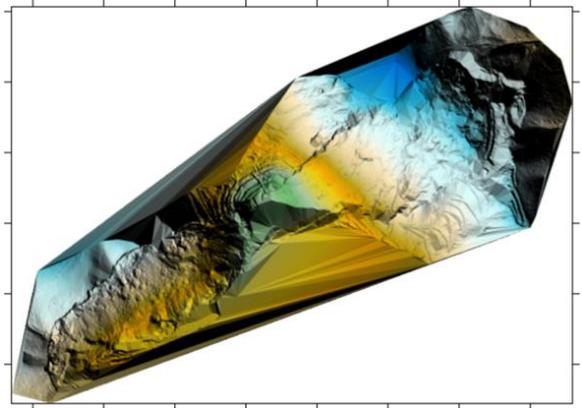
Обратное расстояние



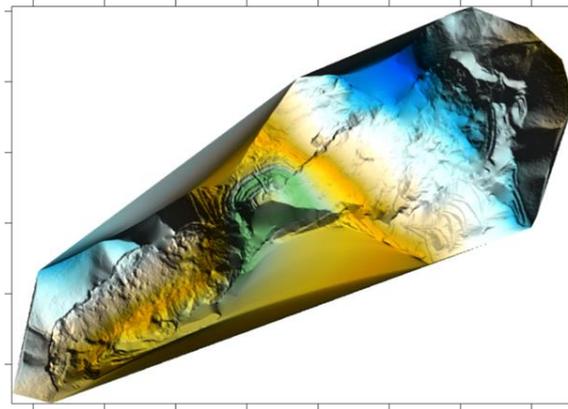
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод

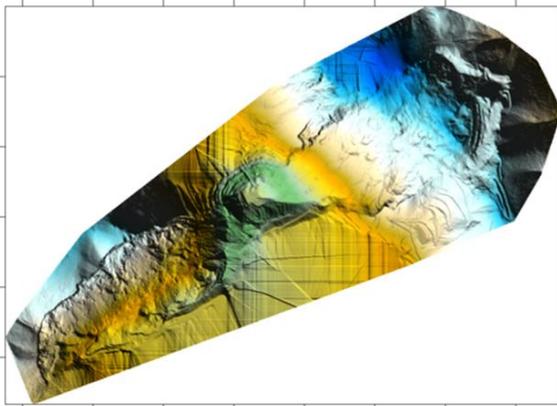


Естественный сосед

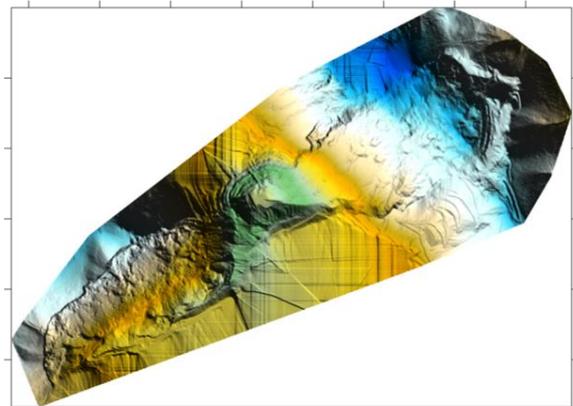
Рисунок 3.14 – Антропогенный К5 3м, отметки на осях через 500м  
(вид сверху)

В верхней части Антропогенного участка К5 продолжается процесс оползания скальной породы, а в центральной части наблюдается изменения морфометрических характеристик.

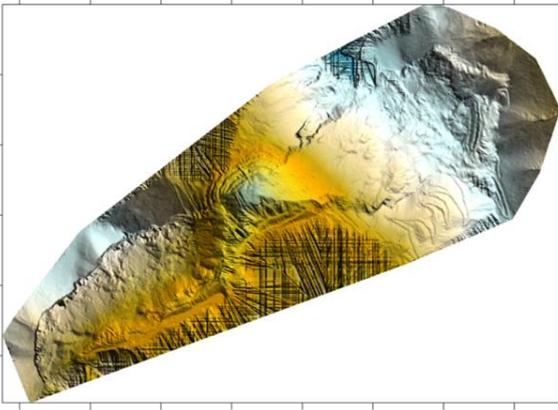
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка К6 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.15.



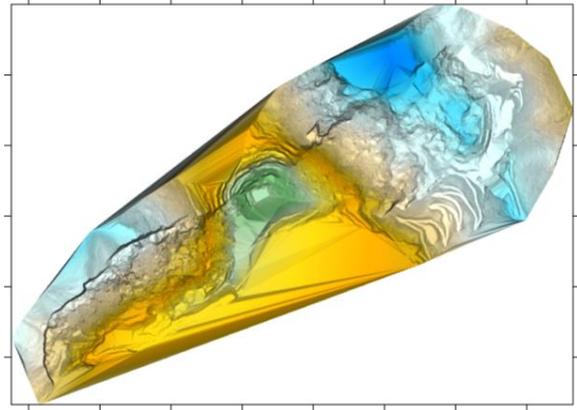
Кригинг (линейная вариограмма)



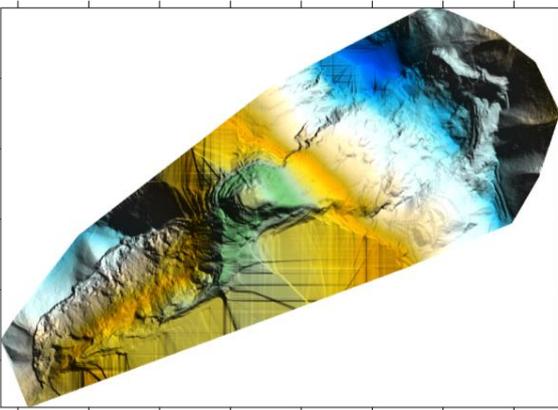
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



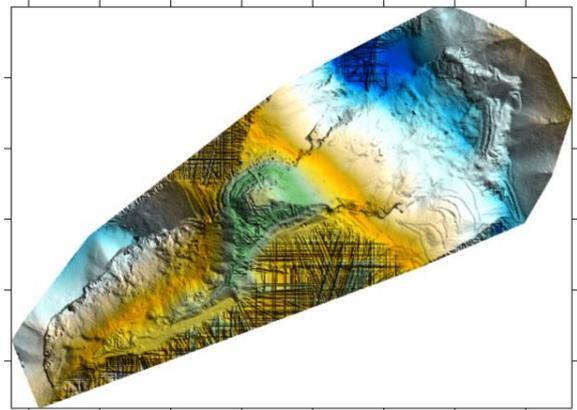
Кригинг (кубическая вариограмма)



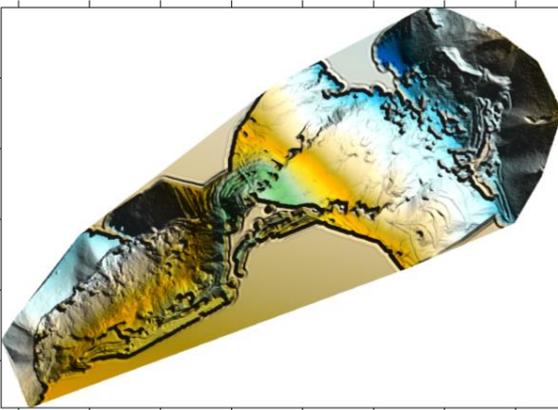
Триангуляция



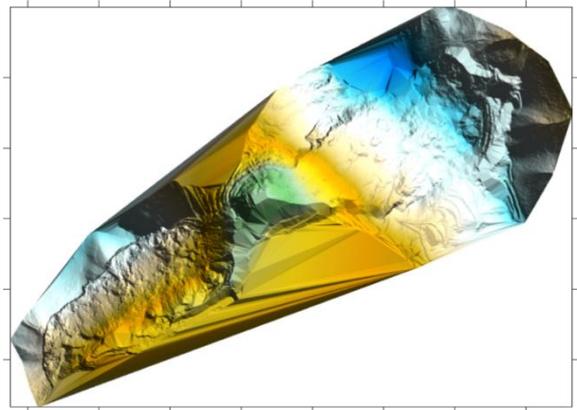
Обратное расстояние



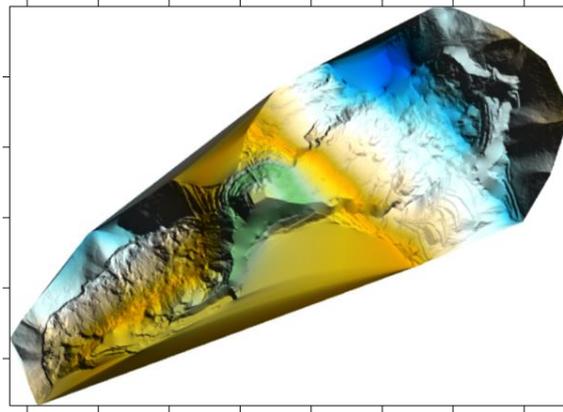
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод

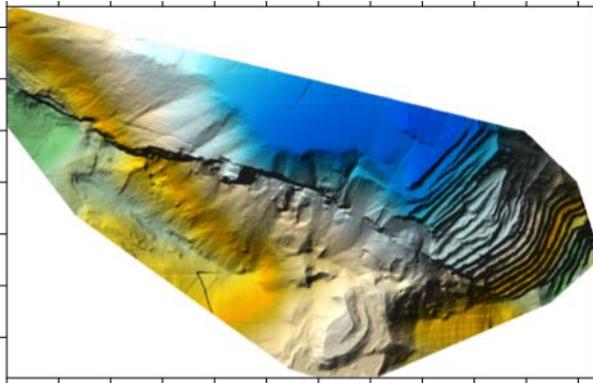


Естественный сосед

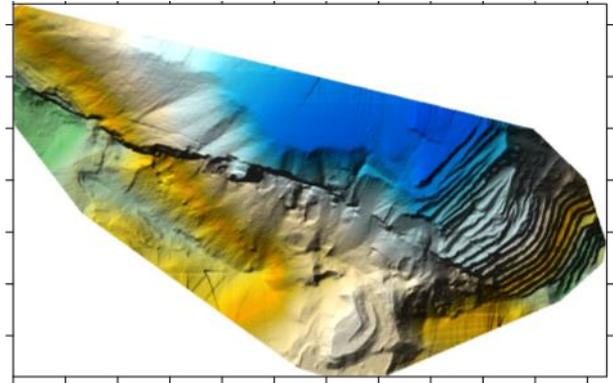
Рисунок 3.15 – Антропогенный Кб 3м, отметки на осях через 50м  
(вид сверху)

В верхней части Антропогенного участка Кб не наблюдается активное развитие процесса оползания, при этом в центральной части отмечаются локальные изменения кривизны поверхности.

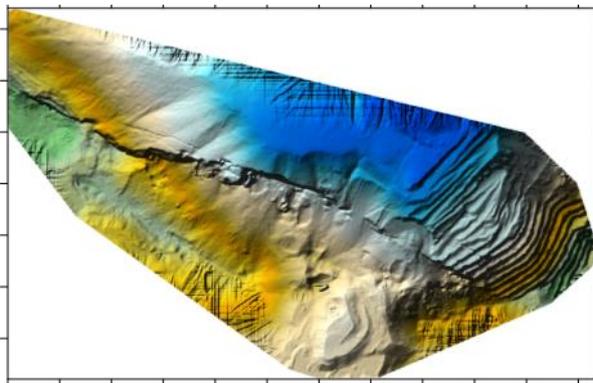
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка Р1 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.16.



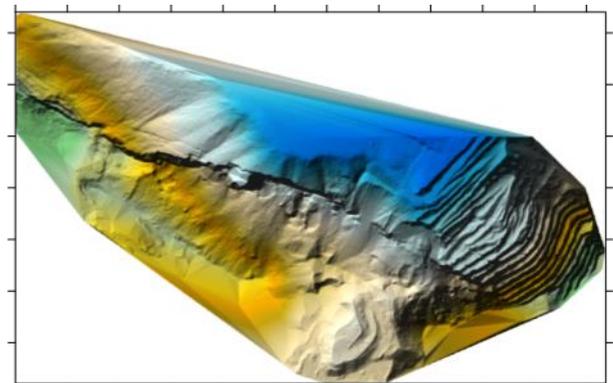
Кригинг (линейная вариограмма)



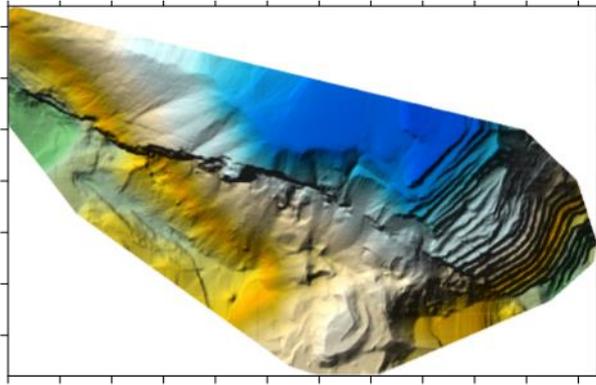
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



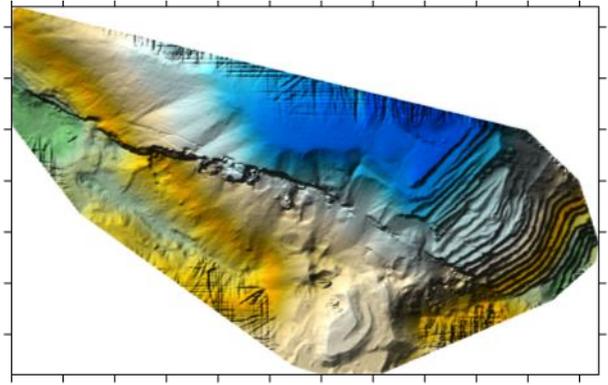
Кригинг (кубическая вариограмма)



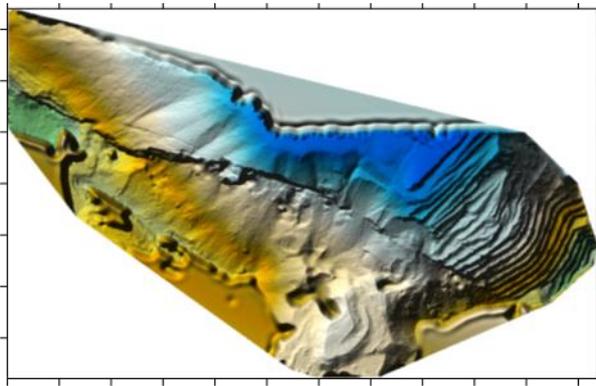
Триангуляция



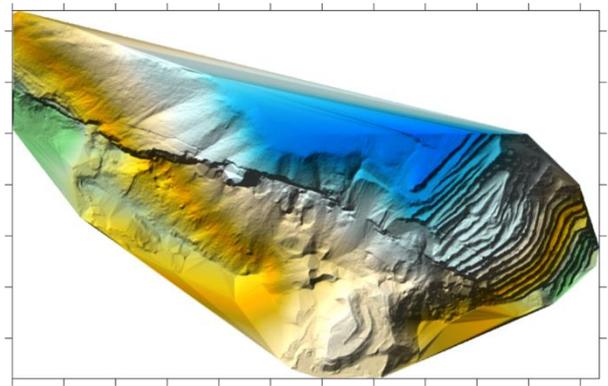
Обратное расстояние



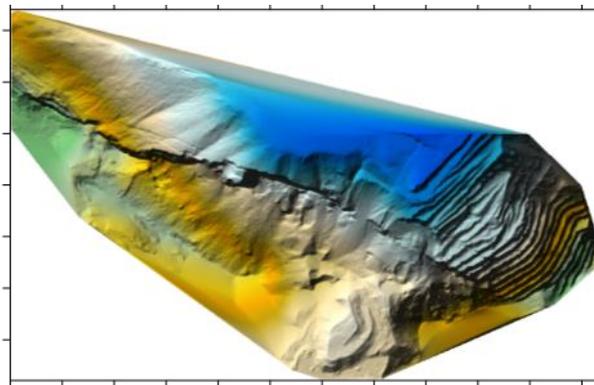
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.16 – Антропогенный P1 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

В центральной части Антропогенного участка P1 наблюдаются признаки процесса оползания скальной породы, в левой части расположены характерные для открытого типа разработки бровки и уступы.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка Р1 приведена на рисунке 3.17.

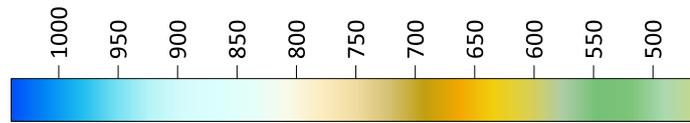
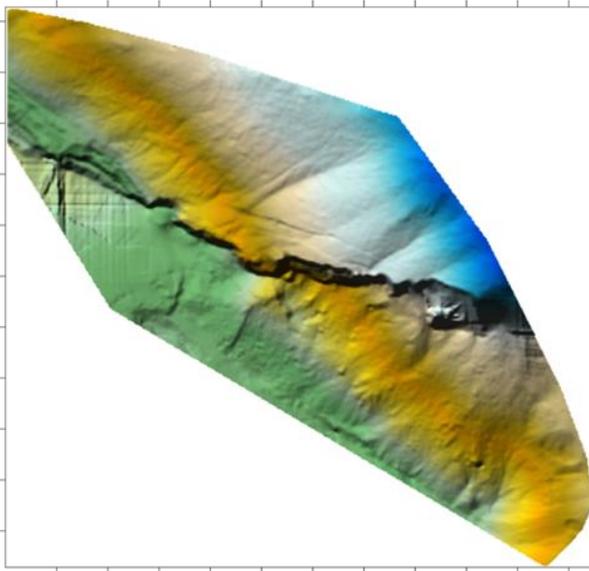
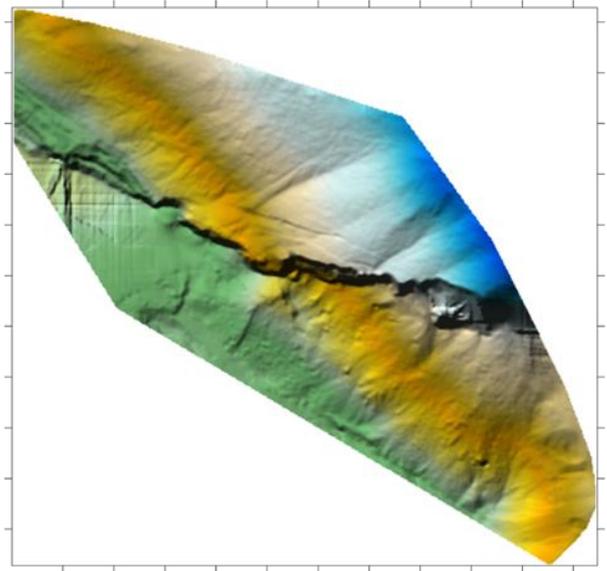


Рисунок 3.17 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков Р1

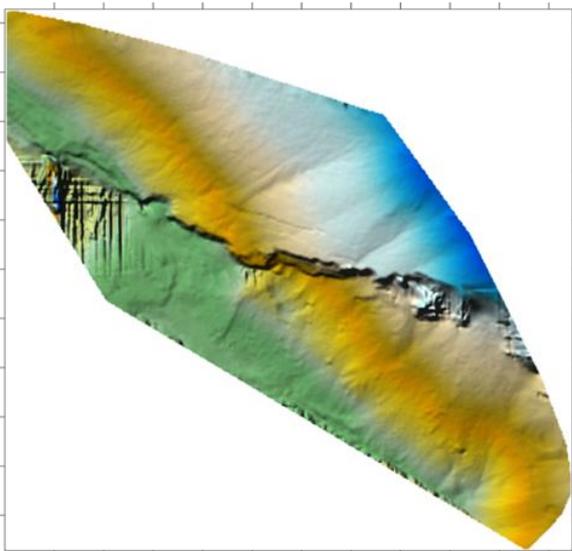
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка Р2 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.18.



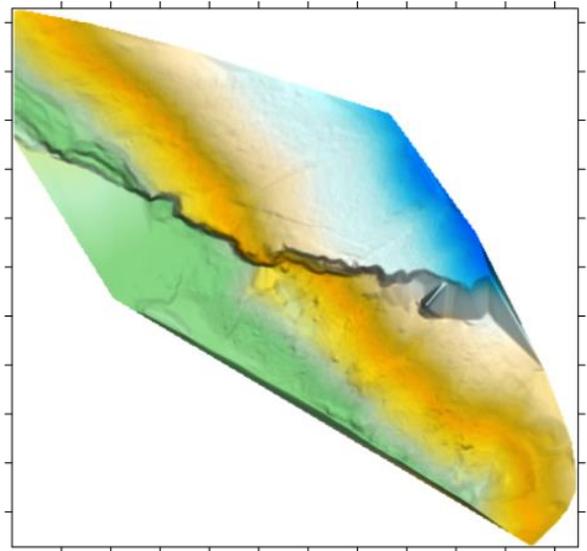
Кригинг (линейная вариограмма)



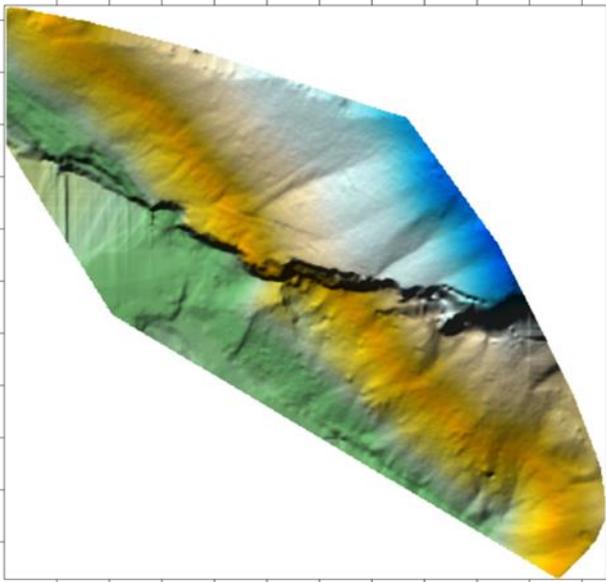
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



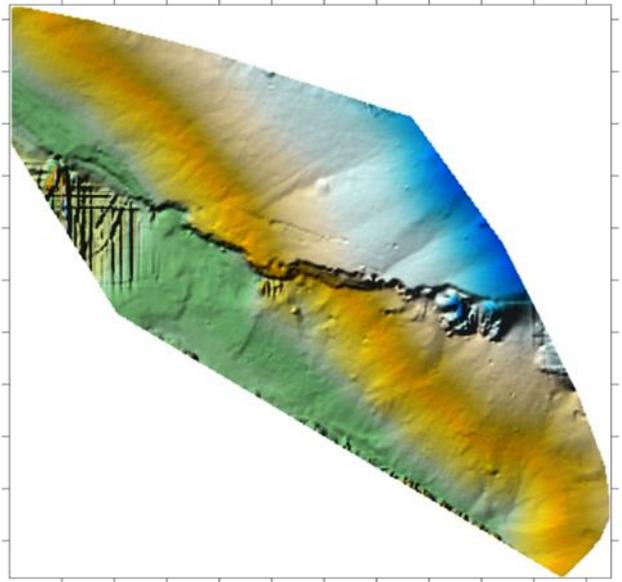
Кригинг (кубическая вариограмма)



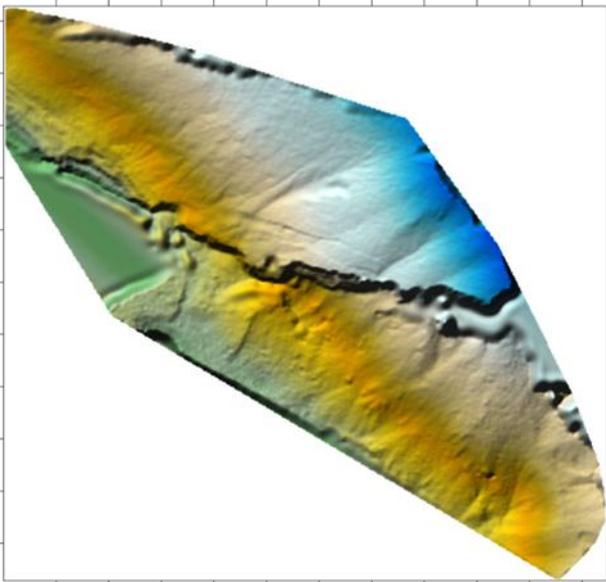
Триангуляция



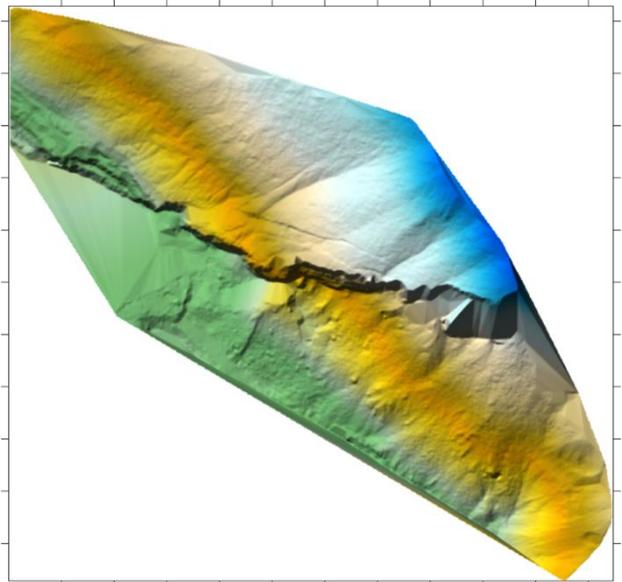
Обратное расстояние



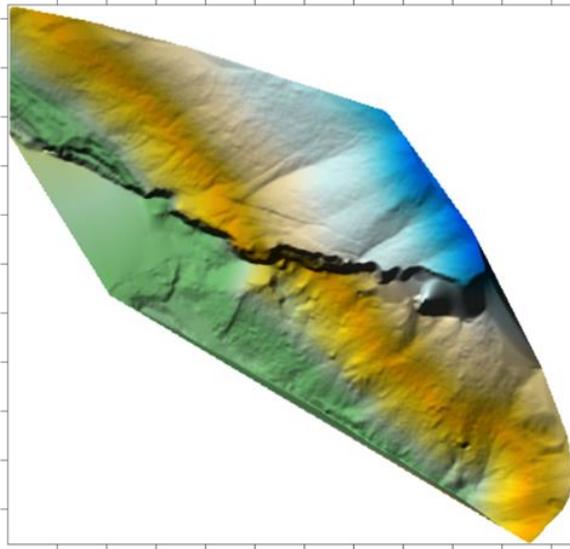
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.18 – Антропогенный P2 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

В центральной части Антропогенного участка P2 видны следы развития процесса оползания, что свидетельствует о значительных изменениях кривизны поверхности локальных участков.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка P2 приведена на рисунке 3.19.

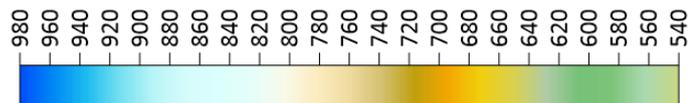
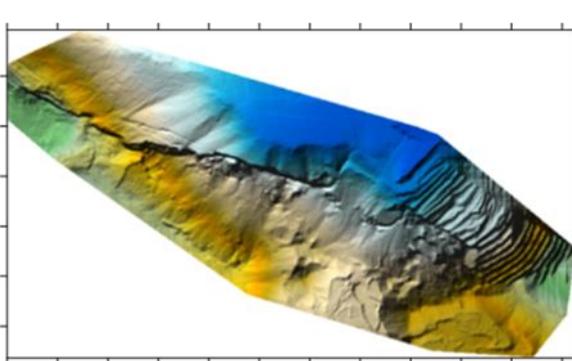
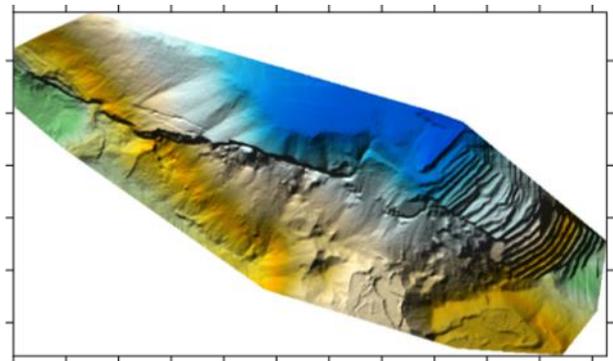


Рисунок 3.19 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков P2

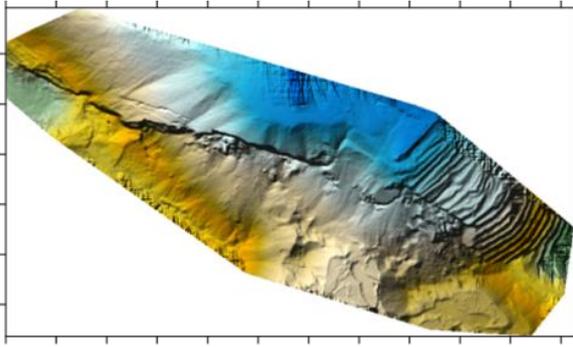
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка P3 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.20.



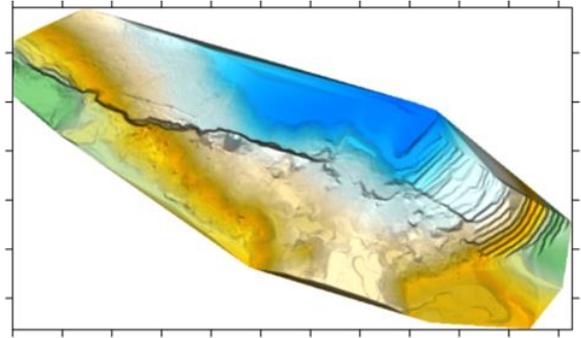
Кригинг (линейная вариограмма)



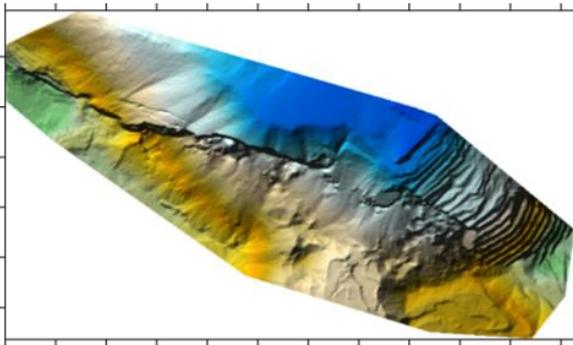
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



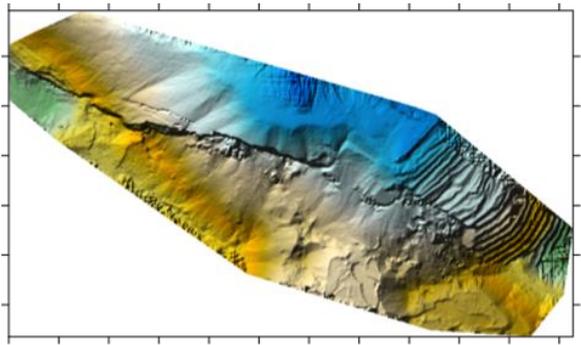
Кригинг (кубическая вариограмма)



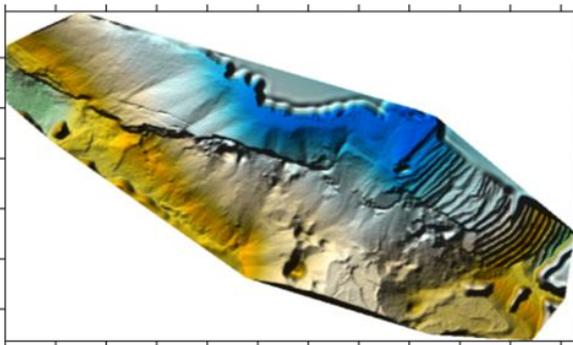
Триангуляция



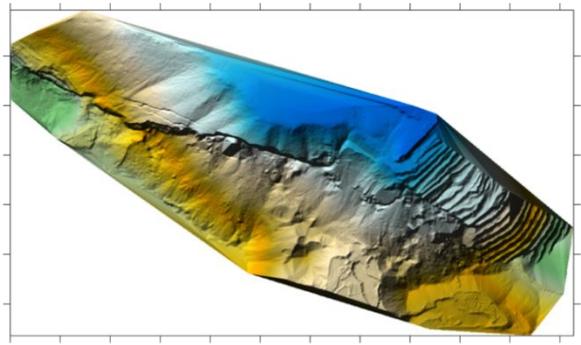
Обратное расстояние



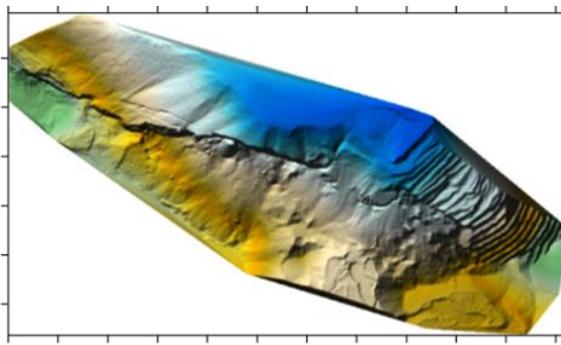
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.20 – Антропогенный РЗ 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

На Антропогенном участке Р3 наблюдается углубление трещин в центральной и левой части, а также следы сползания по склону, при этом в правой части в районе перехода склона в систему уступов наблюдаются следы обрушения.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка Р3 приведена на рисунке 3.21.

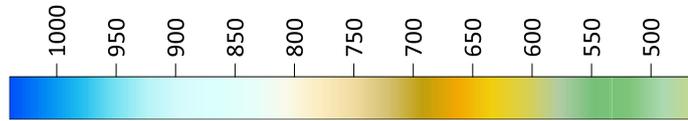
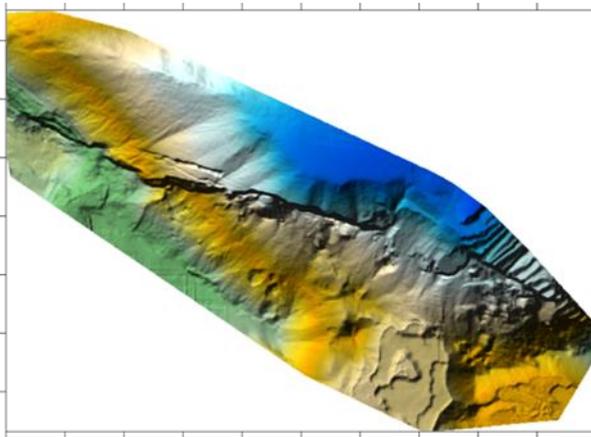
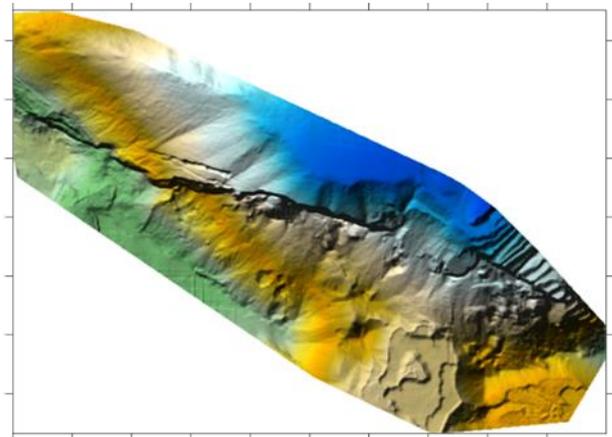


Рисунок 3.21 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков Р3

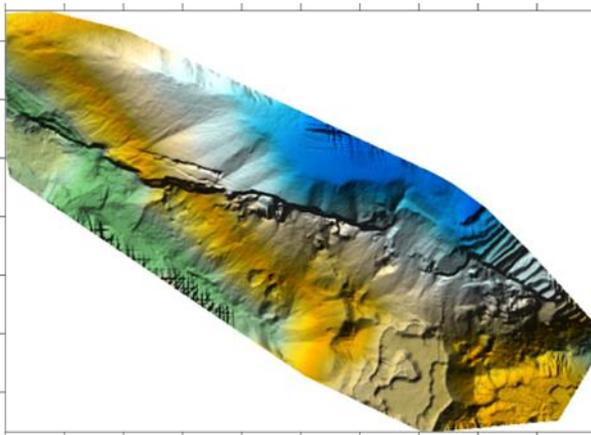
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка Р4 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.22.



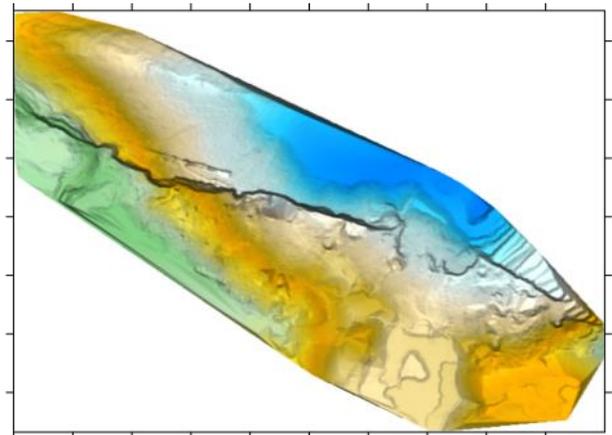
Кригинг (линейная вариограмма)



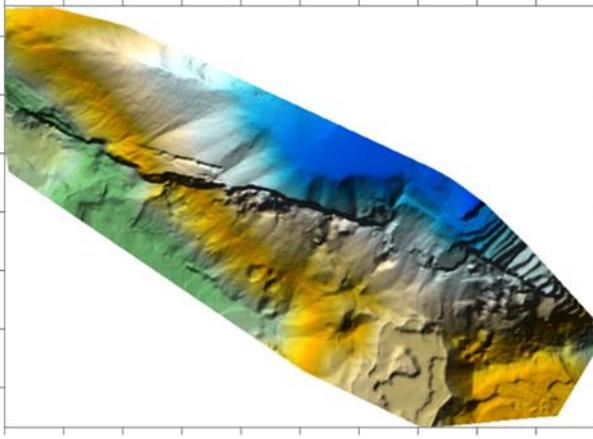
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



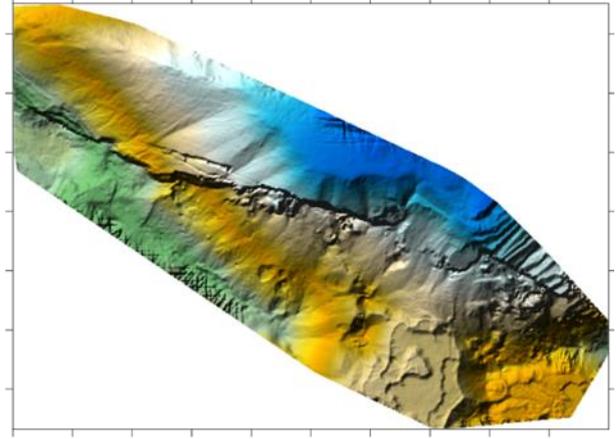
Кригинг (кубическая вариограмма)



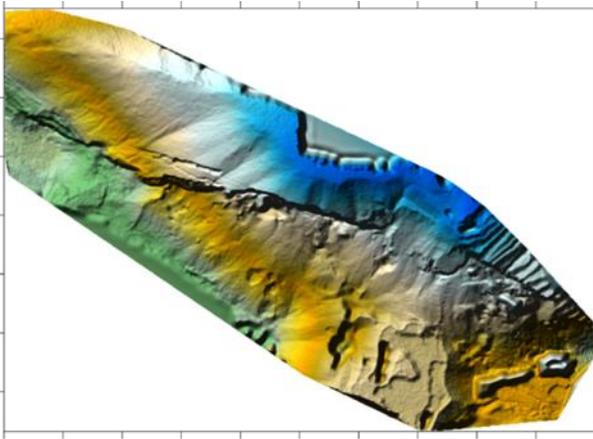
Триангуляция



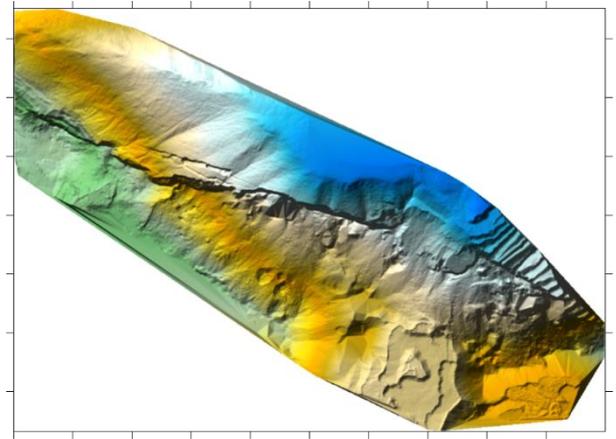
Обратное расстояние



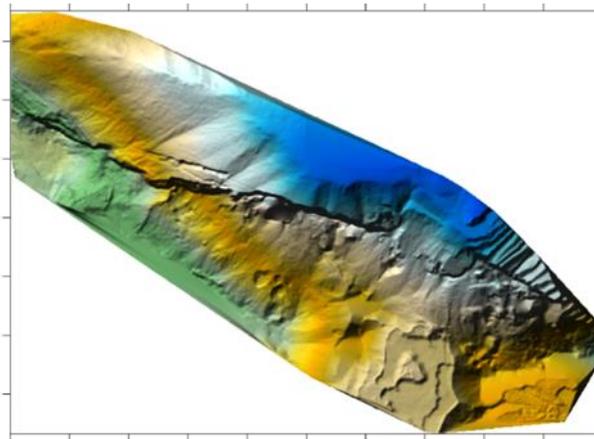
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.22– Антропогенный Р4 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

В левой части Антропогенного участка Р4 наблюдается расширение системы трещин, в центральной и правой части видны признаки продолжающегося оползания скальной породы.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка Р4 приведена на рисунке 3.23.

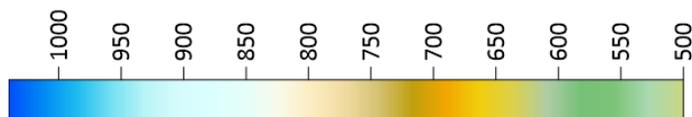
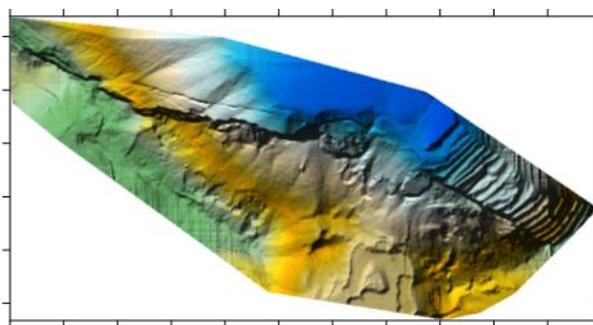
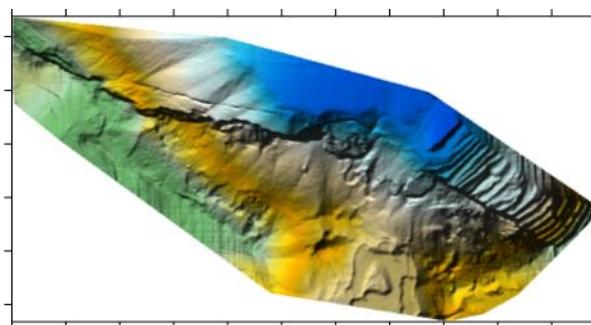


Рисунок 3.23 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков Р4

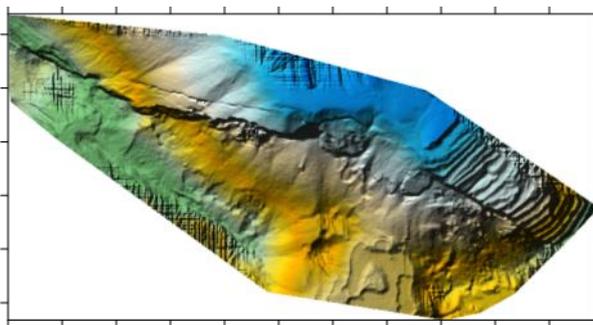
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка Р5 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.24.



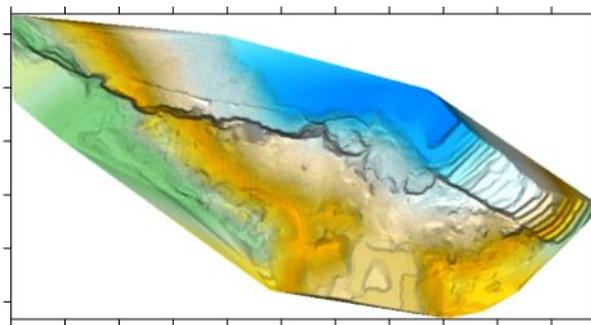
Кригинг (линейная вариограмма)



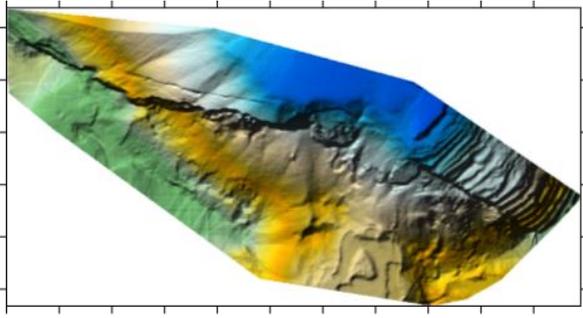
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



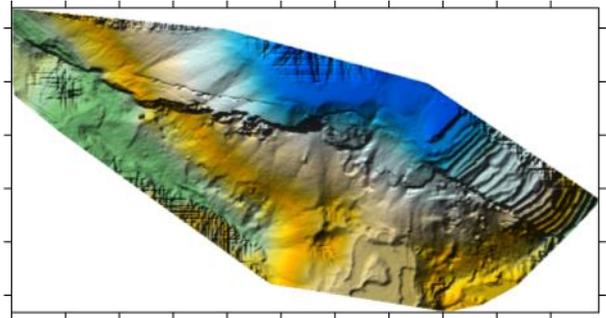
Кригинг (кубическая вариограмма)



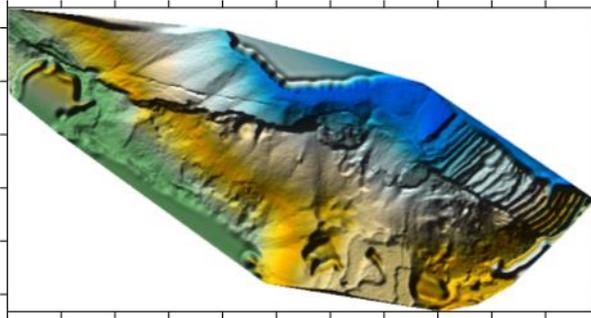
Триангуляция



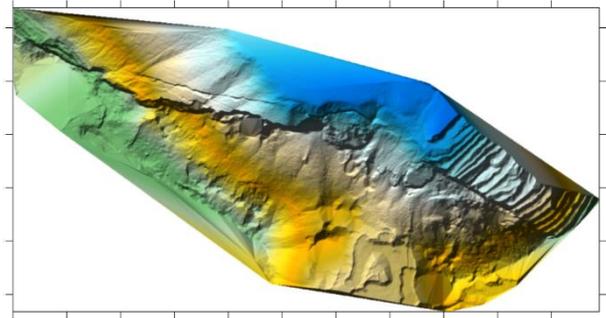
Обратное расстояние



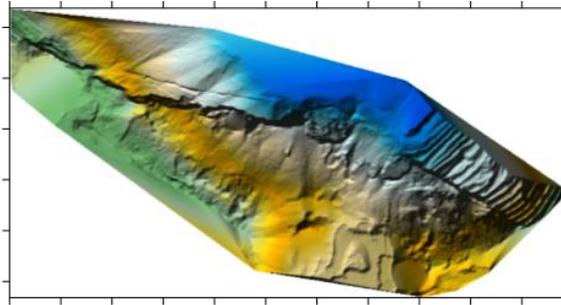
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.24 – Антропогенный P5 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

На Антропогенном участке P5 в левой части визуально определяется продолжение развития системы трещины, в правой и центральной части отмечаются локальные изменения кривизны поверхности.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка P5 приведена на рисунке 3.25.

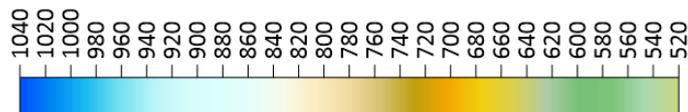
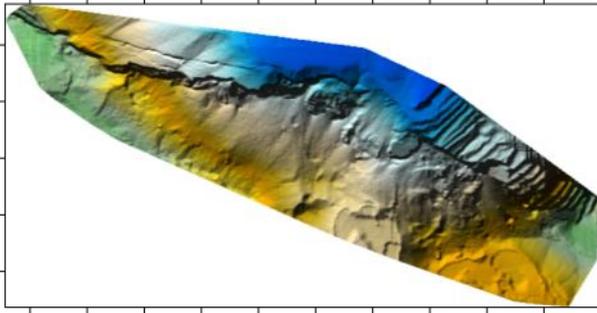
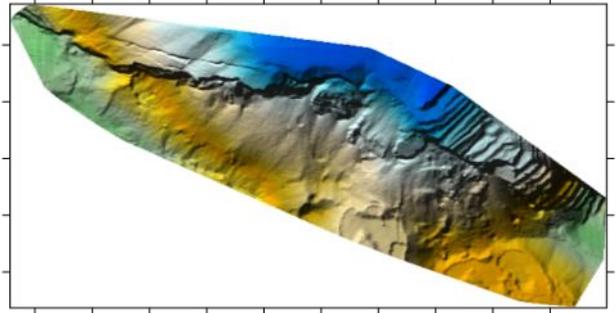


Рисунок 3.25 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков P5

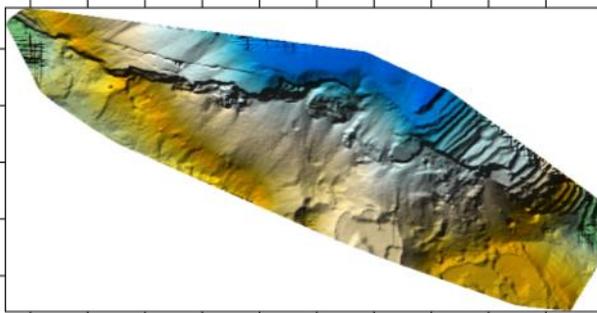
Построенные цифровые модели рельефа для Антропогенного участка Р6 с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.26.



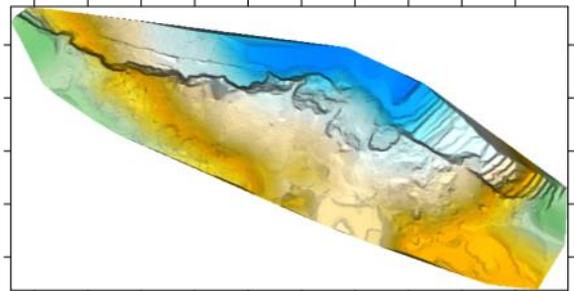
Кригинг (линейная вариограмма)



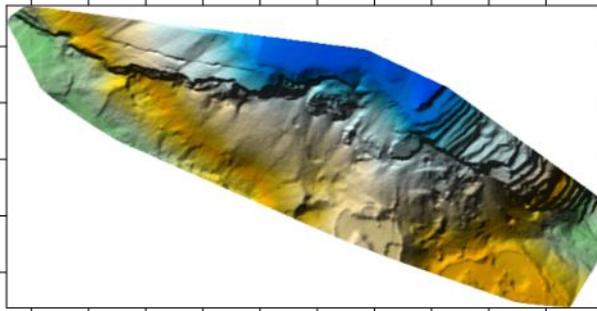
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



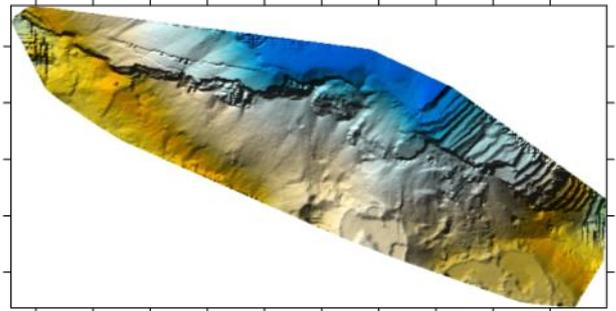
Кригинг (кубическая вариограмма)



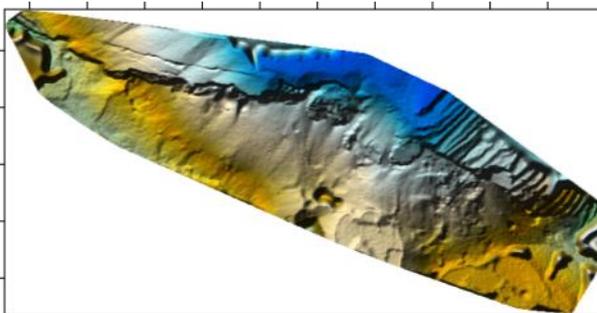
Триангуляция



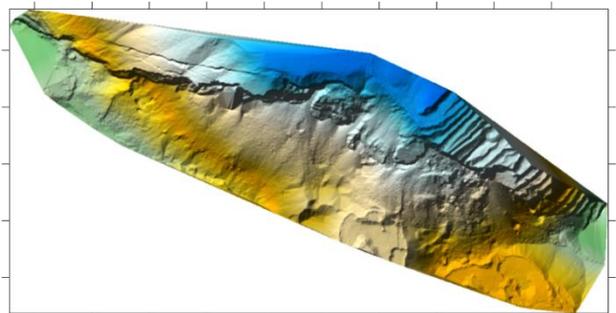
Обратное расстояние



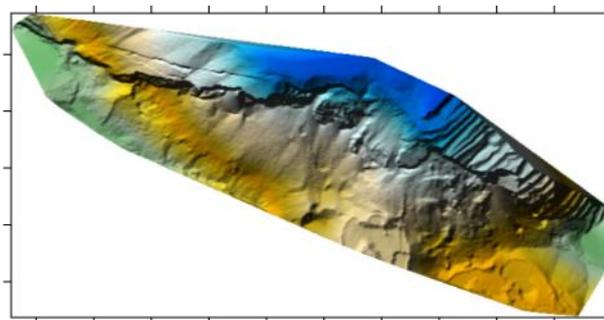
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.26 – Антропогенный Р6 3м, отметки на осях через 200м  
(вид сверху)

Левая часть Антропогенного участка Р6 содержит следы незначительного развития системы трещин, в центральной и правой части значительных участков с изменениями кривизны поверхности не обнаруживается.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Антропогенного участка Р6 приведена на рисунке 3.27.

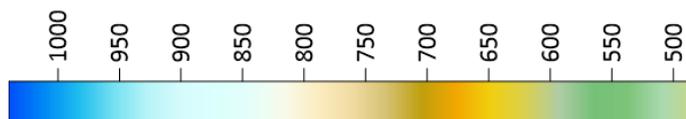


Рисунок 3.27 – Цветовая шкала высот Антропогенных участков Р6

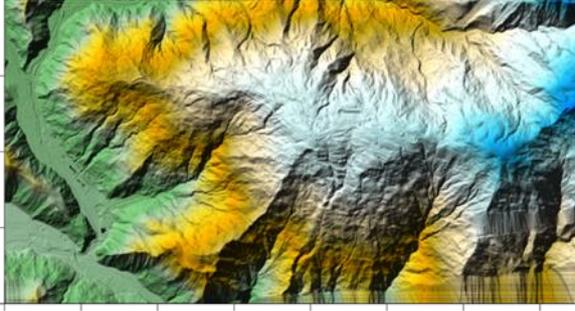
Обобщенная визуальная оценка построений, выполненных с помощью методов пространственной интерполяции для участков с периодической съемкой:

1. Методы Кригинг (кубическая вариограмма) и Радиальная Базисная функция привели к появлению схожих линейных паттернов в заполнении пропущенных значений;
2. Методы Кригинг с линейной и экспоненциальной вариограммой, а также метод Обратное расстояние привели к образованию линейных паттернов на участках с пропущенной геопространственной информацией, при этом частота возникновения линейных паттернов ниже, чем у метода Кригинг (кубическая вариограмма) и Радиальная Базисная функция;
3. Метод Триангуляция при заполнении пропусков привел к образованию плоских участков, сильно отличающихся от кривизны поверхности смежных участков;
4. Использование метода Естественный сосед привело к качественно более интерпретируемому заполнению пропущенных геопространственных данных, но гладкость локальных участков. методом визуальных оценок, представляется избыточной;
5. Метод Минимальная кривизна не выполняет интерполяцию участков с пропущенными значениями;

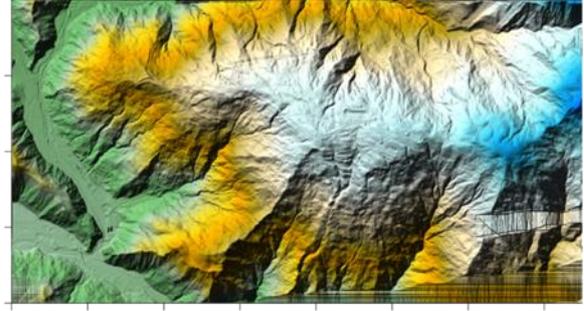
б. Разработанный метод выполнил восстановление связей между геопространственными данными без искажений с определением сложных пространственных зависимостей.

Единичная съемка

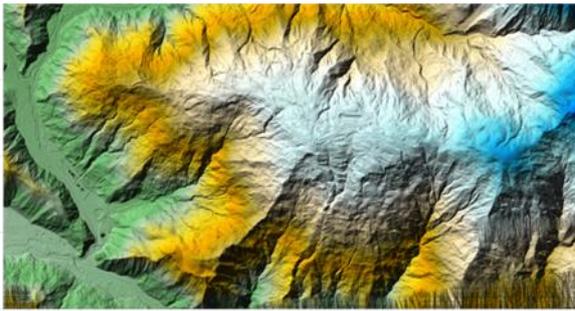
Построенные цифровые модели рельефа для Горного участка с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.28.



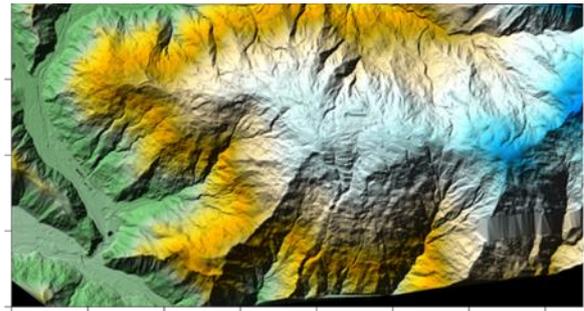
Кригинг (линейная вариограмма)



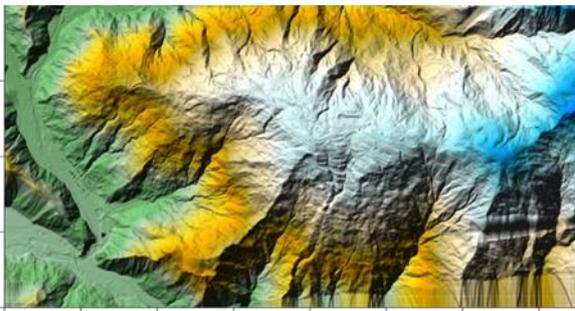
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



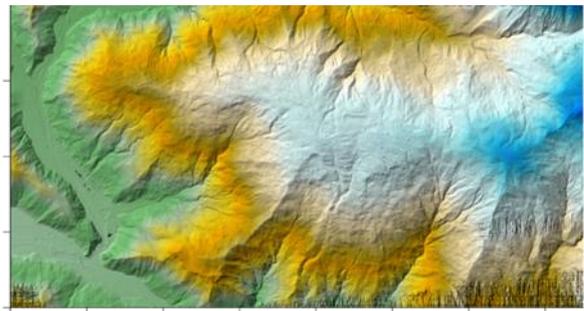
Кригинг (кубическая вариограмма)



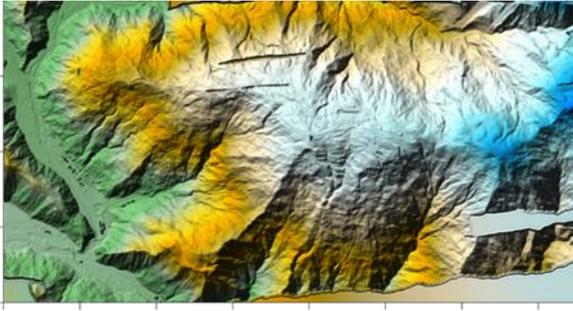
Триангуляция



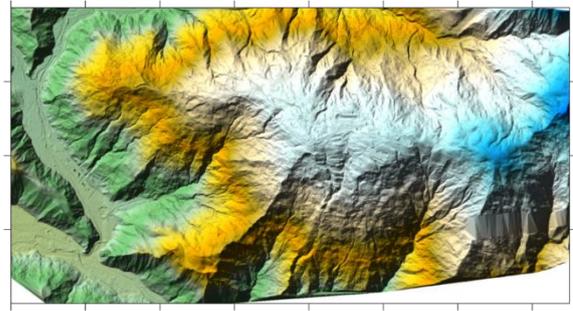
Обратное расстояние



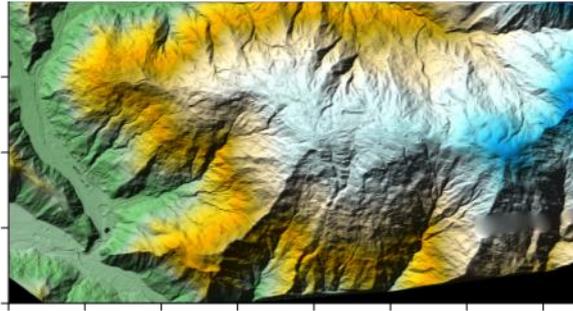
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.28 – Горный участок 3м, отметки на осях через 1000м  
(вид сверху)

Горный участок содержит в левой части условно плоские участки, переходящие в центральной и правой части в наклонную поверхность, представленную горным рельефом с водостоками и неровностями. Результаты обобщенной визуальной оценки Горного участка следующие:

1. Методы Кригинг (кубическая, экспоненциальная и линейная вариограмма), Обратное расстояние и Радиальная Базисная функция привели к появлению схожих линейных паттернов в заполнении пропущенных значений, при этом метод Радиальная Базисная функция привел к образованию наиболее частых линейных элементов;
2. При использовании метода Триангуляция участки с пропущенными геопространственными данными визуально определяются как кусочно-линейная поверхность с резким изменением кривизны в поверхности смежных граней;
3. Метод Естественный сосед привел к формированию избыточно гладкого локального участка с пропущенными значениями;
4. Метод Минимальная кривизна создал визуально определяемые линейные элементы в центральной;

5. Разработанный метод привел к визуально более достоверному восстановлению сложных пространственных зависимостей на участках с пропущенной пространственной информацией.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Горного участка приведена на рисунке 3.29.

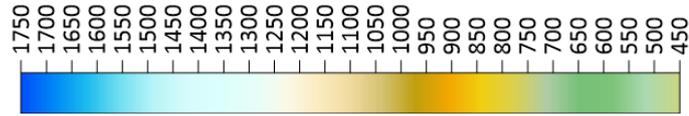
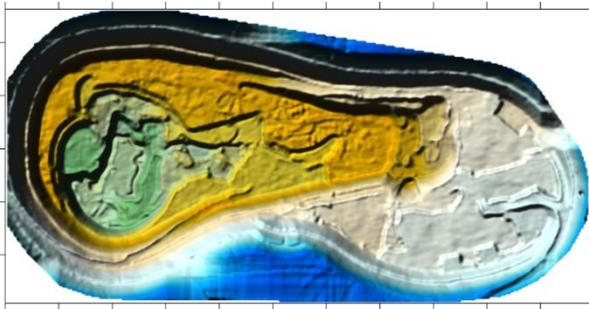
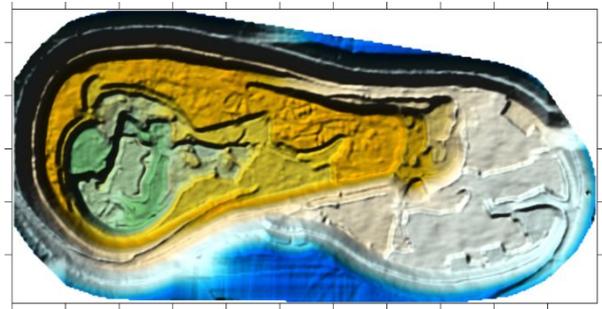


Рисунок 3.29 – Цветовая шкала высот Горного участка

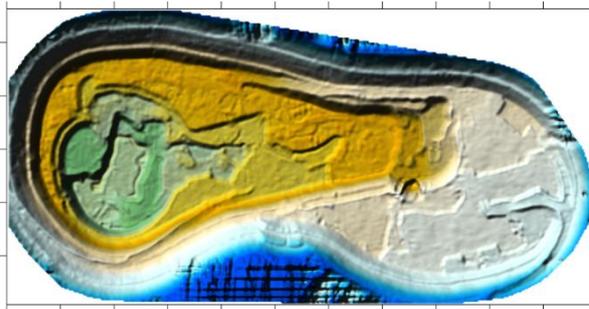
Построенные цифровые модели рельефа для участка Карьер с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.30.



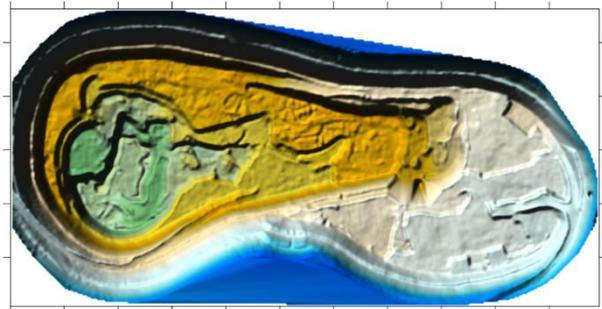
Кригинг (линейная вариограмма)



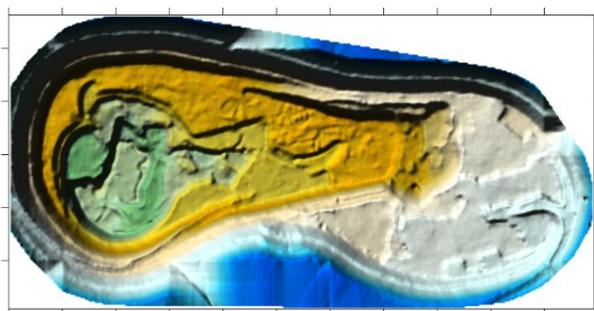
Кригинг (экспоненциальная  
вариограмма)



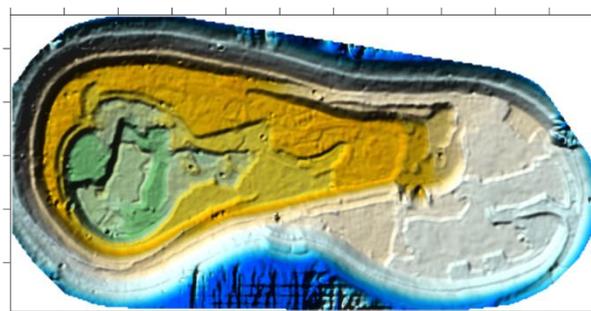
Кригинг (кубическая вариограмма)



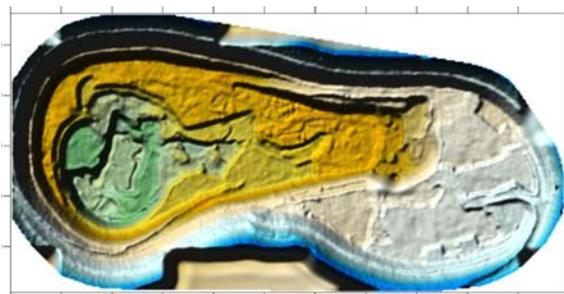
Триангуляция



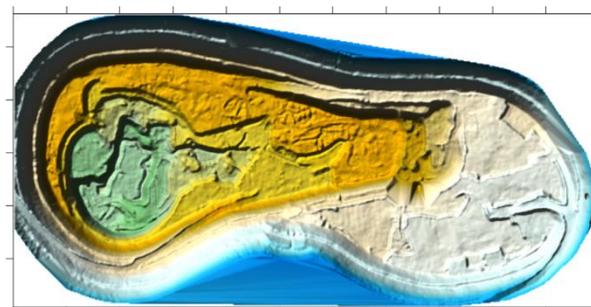
Обратное расстояние



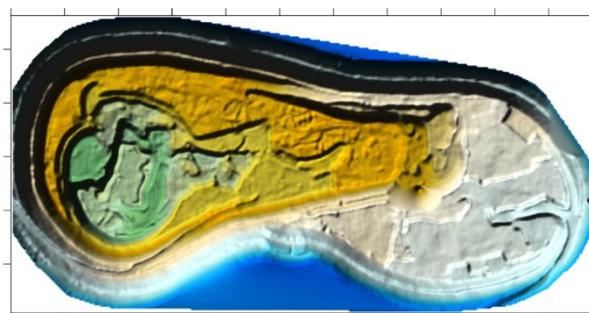
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.30 – Карьер 3м, отметки на осях через 100м  
(вид сверху)

Участок Карьер можно охарактеризовать как систему условно горизонтальных участков, перемежающихся границами с резким изменением кривизны поверхности. Исходя из визуальной оценки построенных цифровых моделей рельефа можно сделать следующие общие выводы:

1. Метод Радиальная базисная функция сформировал наиболее гладкую поверхность, что визуально определяется по локальным участкам и границам перехода кривизны поверхности;
2. Остальные методы пространственной интерполяции не привели к значительным визуальным изменениям в цифровых моделях рельефа - отличия касаются незначительных по площади локальных участков.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа участка Карьер приведена на рисунке 3.31.

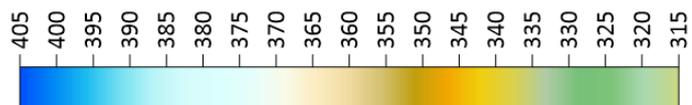
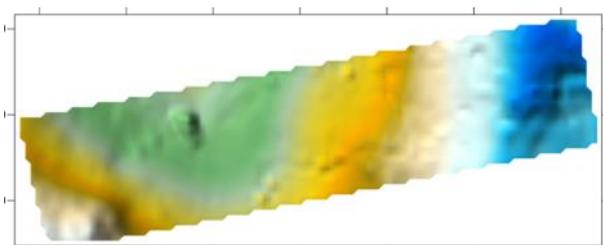
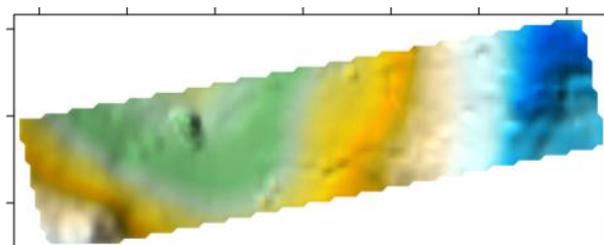


Рисунок 3.31 – Цветовая шкала высот участка Карьер

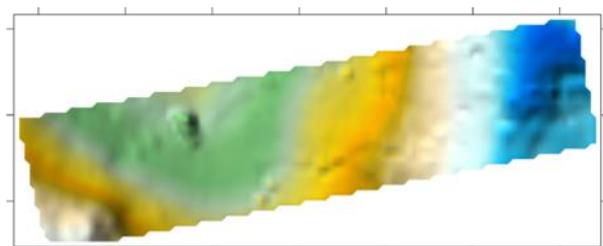
Построенные цифровые модели рельефа для участка Шельф с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.32.



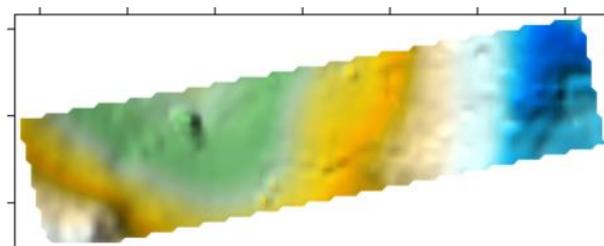
Кригинг (линейная вариограмма)



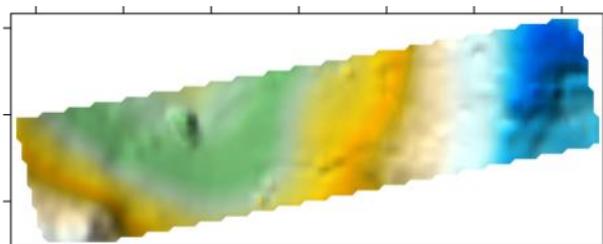
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



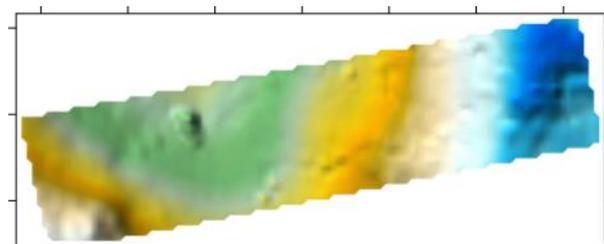
Кригинг (кубическая вариограмма)



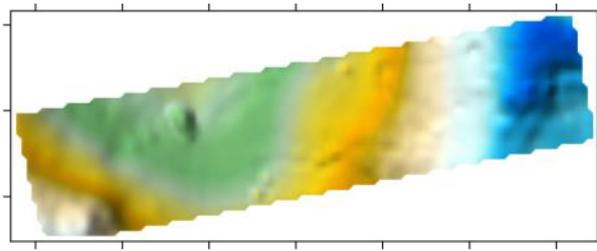
Триангуляция



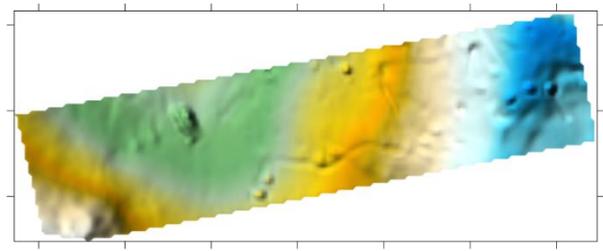
Обратное расстояние



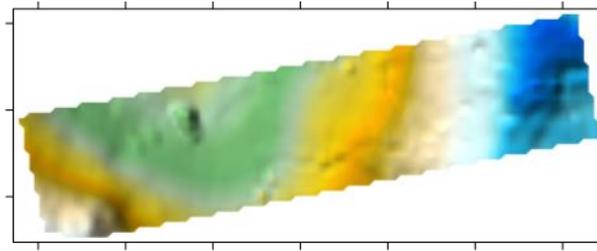
РБФ



Минимальная кривизна



Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.32 – Шельф 3м, отметки на осях через 50м  
(вид сверху)

Участок Шельф является гладкой поверхностью с небольшими следами антропогенного влияния. Значительные визуальные отличия в построенных цифровых моделях рельефа отсутствуют, наблюдаются незначительные изменения в интерполяции локальных участков с использованием разработанного метода в сторону большей детальности.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа участка Шельф приведена на рисунке 3.33.

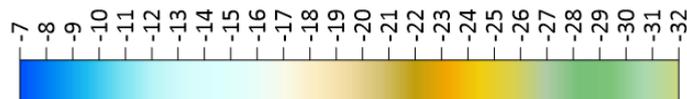
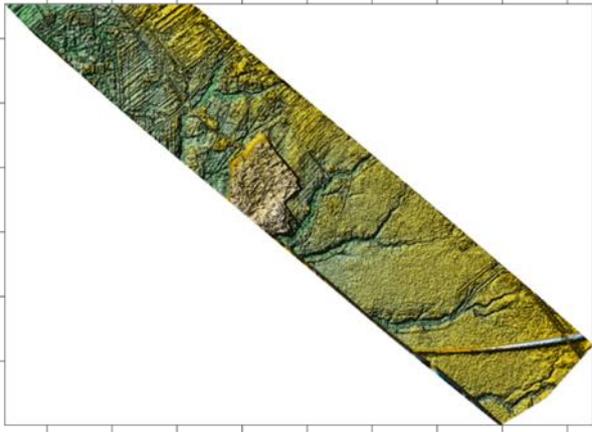
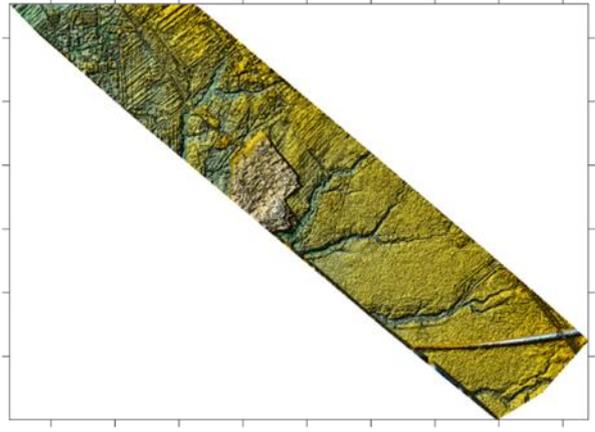


Рисунок 3.33 – Цветовая шкала высот участка Шельф

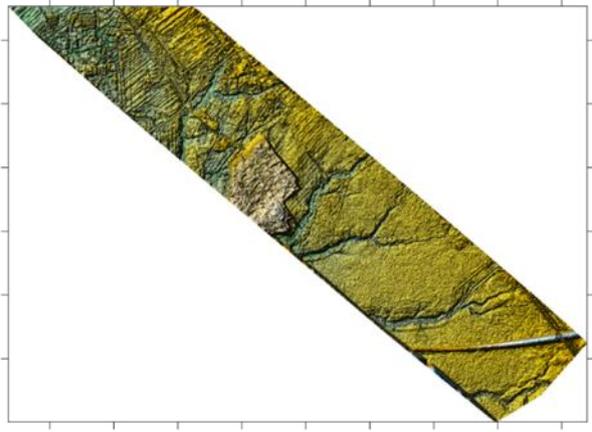
Построенные цифровые модели рельефа для Равнинного участка с пространственным разрешением 3м приведены на рисунке 3.34.



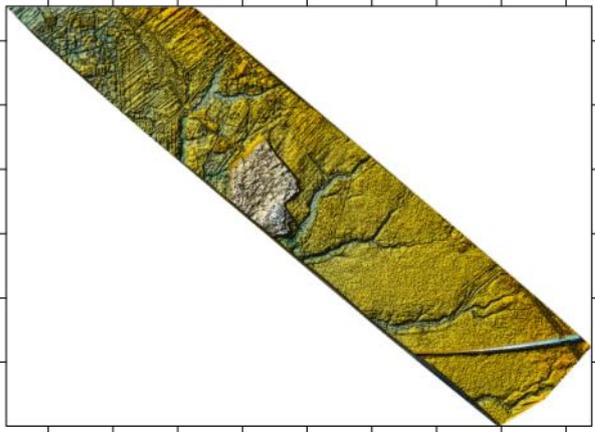
Кригинг (линейная вариограмма)



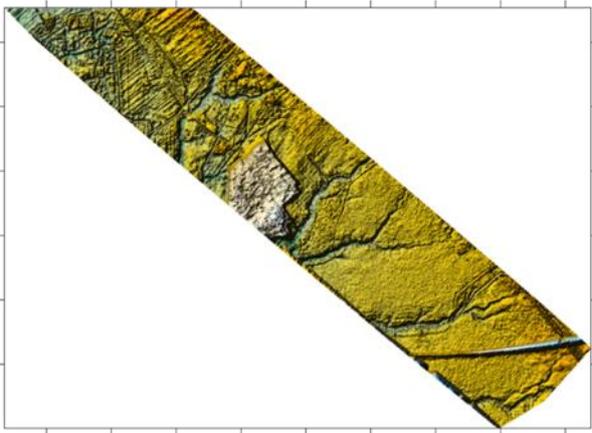
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)



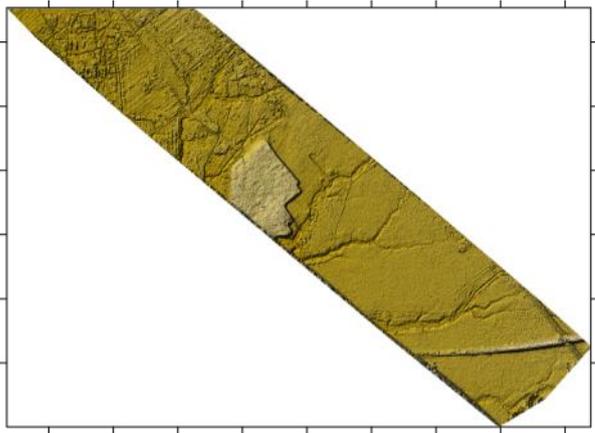
Кригинг (кубическая вариограмма)



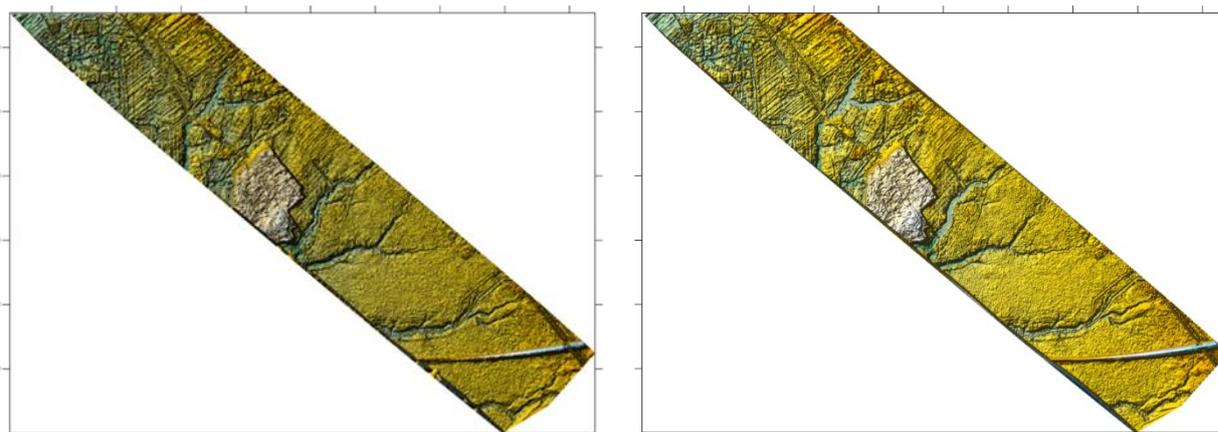
Триангуляция



Обратное расстояние

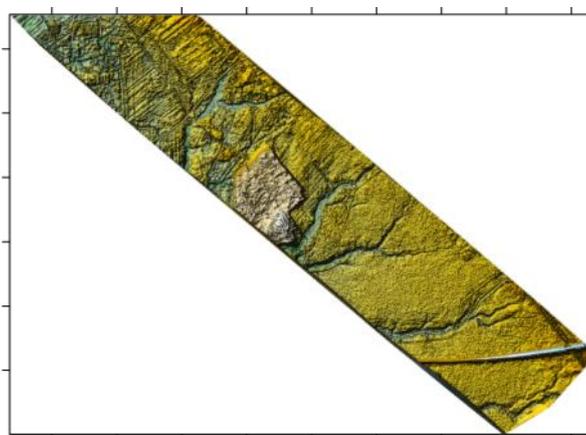


РБФ



Минимальная кривизна

Разработанный метод



Естественный сосед

Рисунок 3.34 – Равнинный участок 3м, отметки на осях через 500м  
(вид сверху)

На Равнинном участке отмечается низкая вариативность кривизны поверхности, изменяющаяся только в области водотоков и сельскохозяйственных угодий. Обобщая визуальную оценку цифровых моделей рельефа на Равнинном участке:

1. Методы Кригинг (кубическая, экспоненциальная и линейная вариограмма), Обратное расстояние и Радиальная Базисная функция привели к появлению схожих линейных паттернов в заполнении пропущенных значений, при этом метод Радиальная Базисная Функция привел к образованию наиболее частых линейных элементов;

2. При использовании метода Триангуляция участки с пропущенными геопространственными данными визуально определяются как кусочно-линейная поверхность с резким изменением кривизны в поверхности смежных граней;

3. Метод Естественный сосед привел к формированию избыточно гладкого локального участка с пропущенными значениями;

4. Метод Минимальная кривизна создал визуально определимые линейные элементы в центральной части;

5. Разработанный метод привел к восстановлению сложных пространственных зависимостей в области границ изменения кривизны поверхности без образования областей с избыточной осцилляцией на плоских участках.

Цветовая шкала высот цифровой модели рельефа Равнинного участка приведена на рисунке 3.35.



Рисунок 3.35 – Цветовая шкала высот Равнинного участка

### 3.3 Оценка точности построенных цифровых моделей рельефа

Оценка точности построенных цифровых моделей осуществлялось с использованием статистических оценок, адаптированных для работы с топографической поверхностью. В качестве метрик точности были использованы:

1. Среднеквадратическое отклонение (СКО) избыточных измерений от построенных цифровых моделей рельефа;
2. Отклонение точек  $> 1/3h$ , % - процент точек, отклонившихся от цифровой модели рельефа больше чем на треть высоты сечения рельефа;
3. Отклонение точек  $> h$ , % - процент точек, отклонившихся от цифровой модели рельефа больше чем на высоту сечения рельефа.

#### **Общий подход к оценке точности предлагаемого метода.**

В ходе оценки была разработана схема, при которой возможно сравнить, с определенными допущениями, предлагаемый метод уточнения поверхности локальных участков с методами пространственной интерполяции, реализованными в программном продукте Surfer и основанными на решении с использованием сети с регулярным шагом.

В качестве базовой поверхности для уточнения была использована триангуляционная нерегулярная поверхность (TIN). Подбор гиперпараметров уточняющей математической модели рельефа выполнялся методом полного перебора – прямой итеративный перебор всех параметров модели для поиска комбинации с наименьшими значениями оцениваемых параметров.

В каждую грань триангуляции были добавлены 7 точек, принадлежащих уточняющей локальной поверхности грани. Точки добавлялись согласно схеме, приведенной на рисунке 3.36.

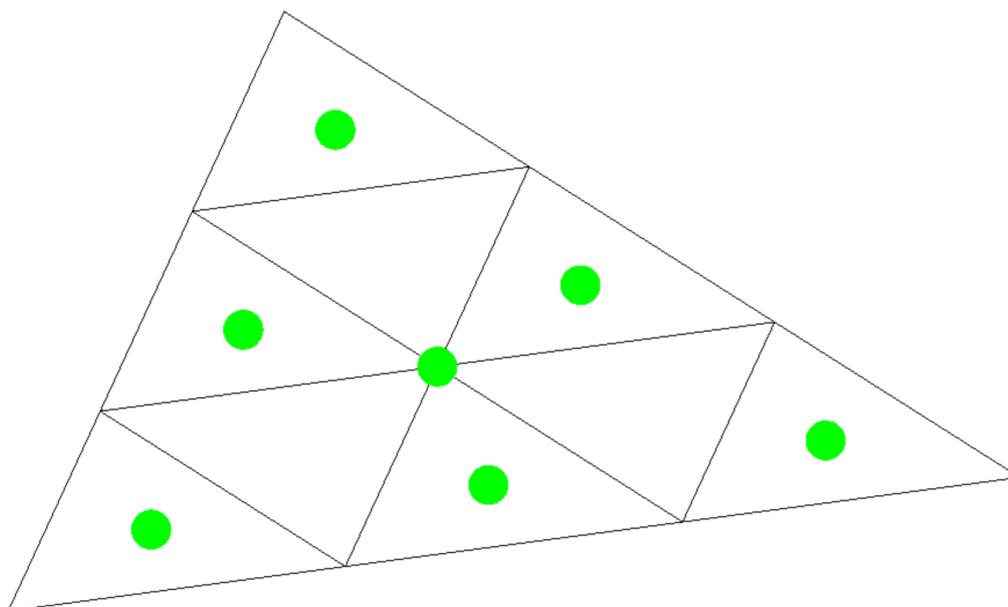


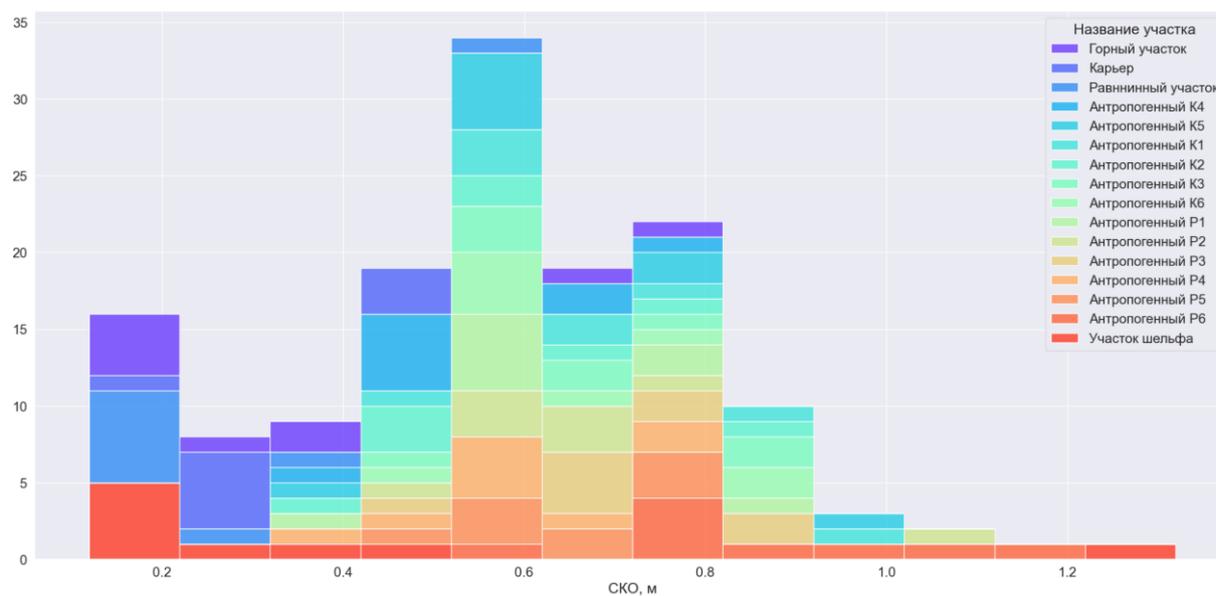
Рисунок 3.36 – Схема добавления точек, принадлежащих уточненной локальной поверхности

Таким образом уточняющие точки были добавлены в геометрический центр исходной грани триангуляции и всех полюсов характеристического многочлена 3-го порядка.

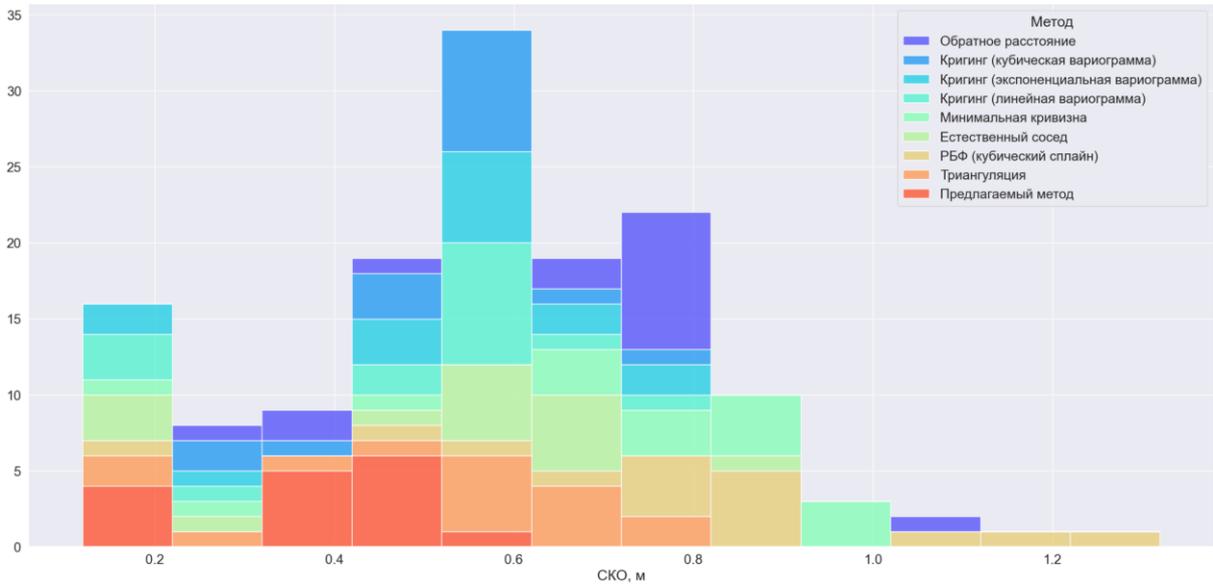
Высота сечения рельефа ( $h$ ) для Равнинного участка и участка Шельф была принята равной 1м, для всех прочих участков – 5м.

#### Оценка точности

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру СКО для пространственного разрешения 3м приведена на рисунке 3.37.



а

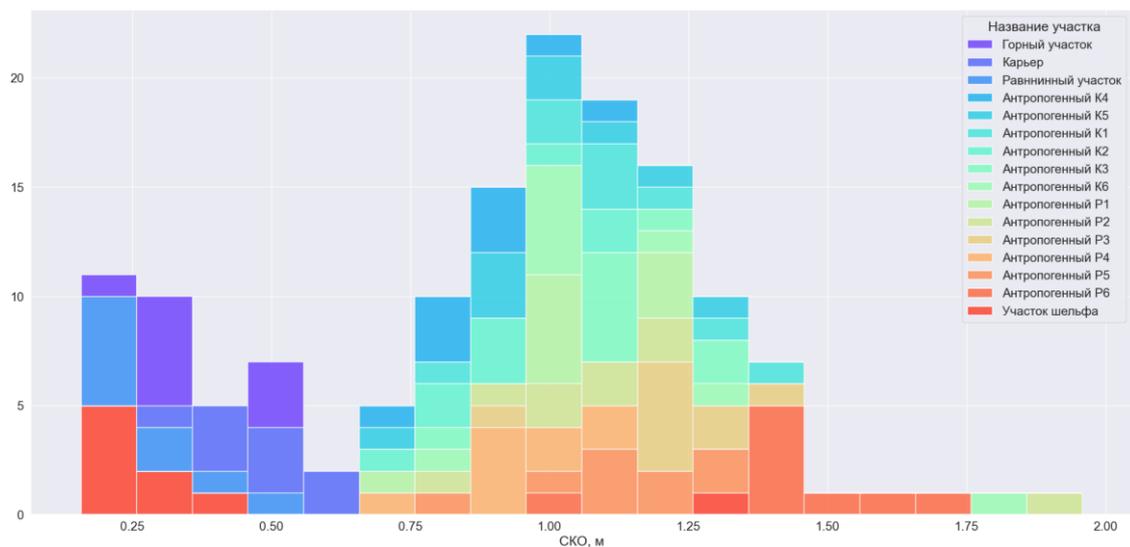


б

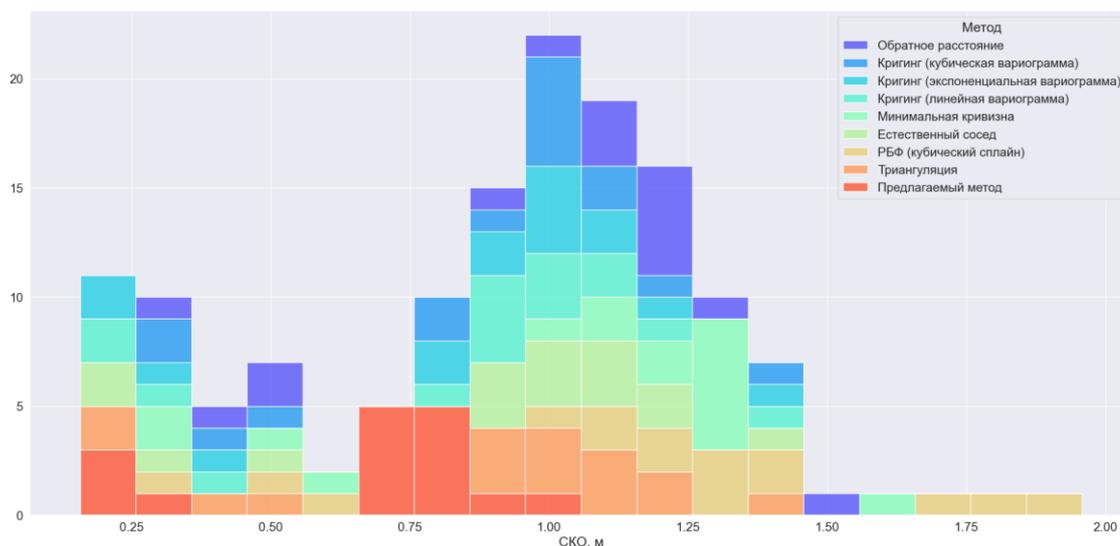
Рисунок 3.37 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру SKO с пространственным разрешением 3м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение SKO при пространственном разрешении 3м было получено, преимущественно, на горных участках со следами антропогенного воздействия, за исключением участка шельфа, который в единичном случае показал большое значение SKO. Наибольшее значение SKO было достигнуто при использовании метода Радиальная базисная функция (кубический сплайн), наименьшие значения SKO были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Естественный сосед.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «SKO» для пространственного разрешения 5м приведена на рисунке 3.38.



а

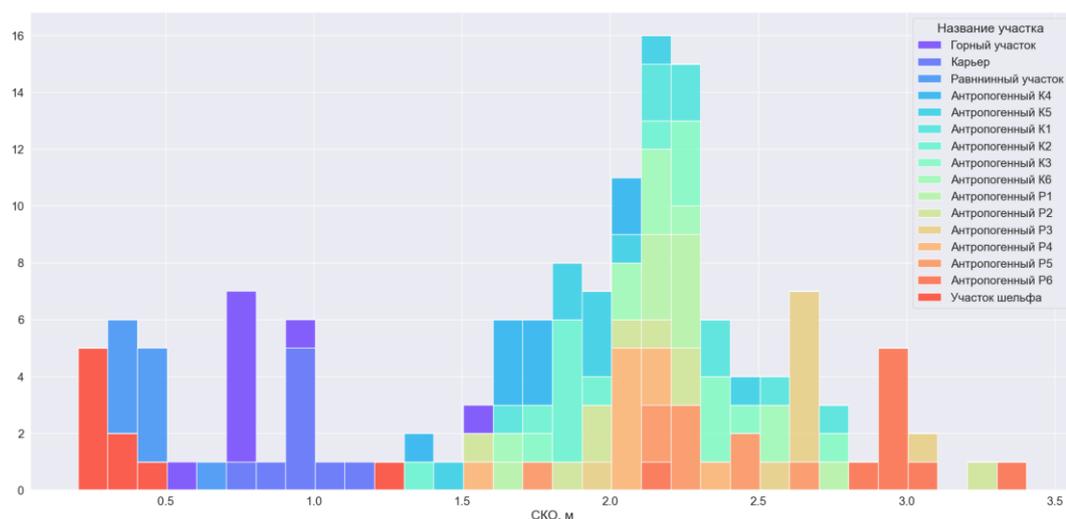


б

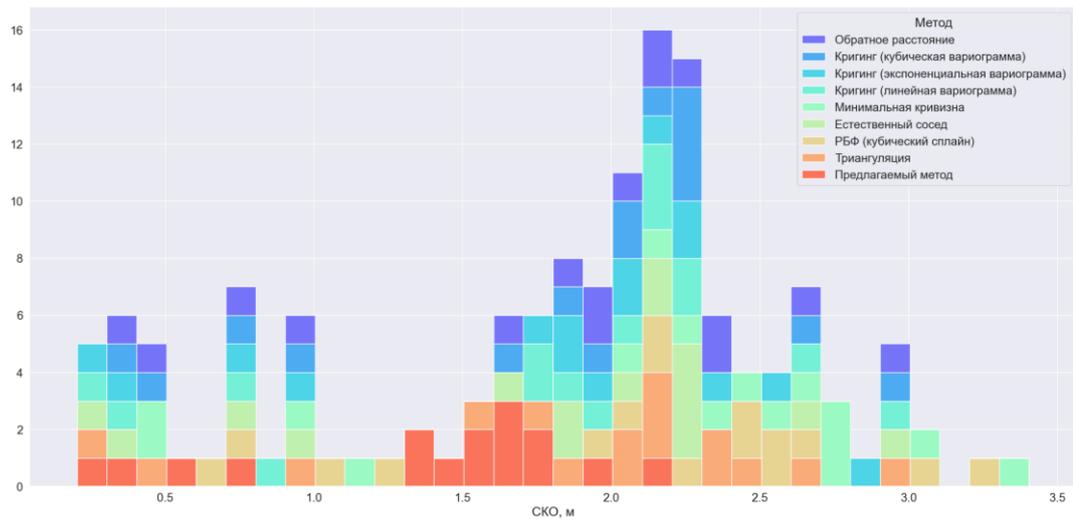
Рисунок 3.38 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру SKO с пространственным разрешением 5м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение SKO при пространственном разрешении 5м было получено на Антропогенных участках. Наибольшее значение SKO было достигнуто при использовании метода Радиальная базисная функция (кубический сплайн), наименьшие значения SKO были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Естественный сосед и Триангуляция.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «SKO» для пространственного разрешения 10м приведена на рисунке 3.39.



а

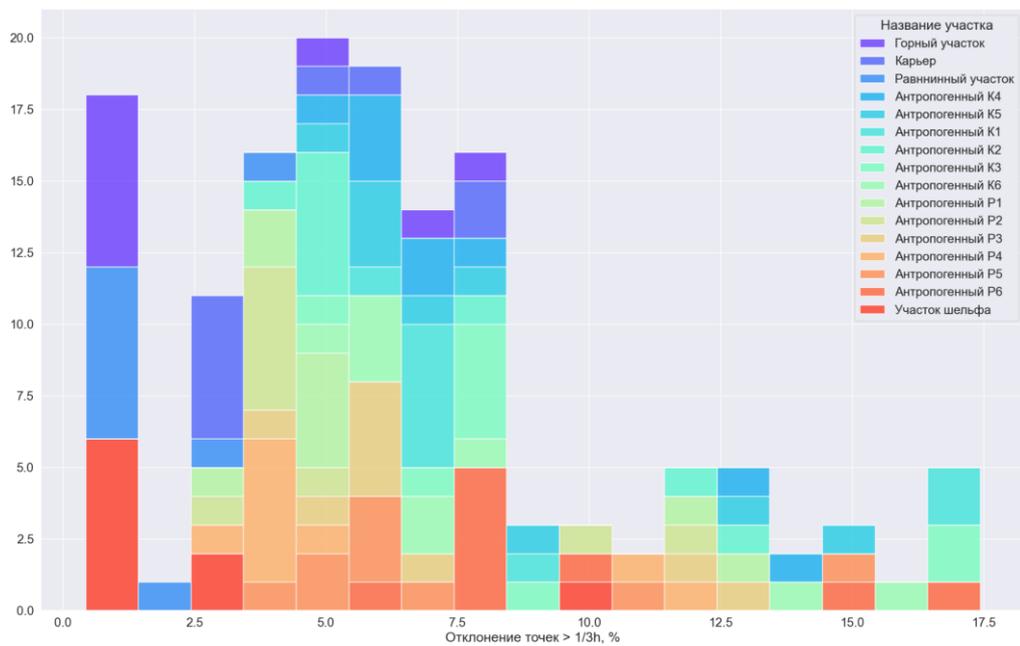


б

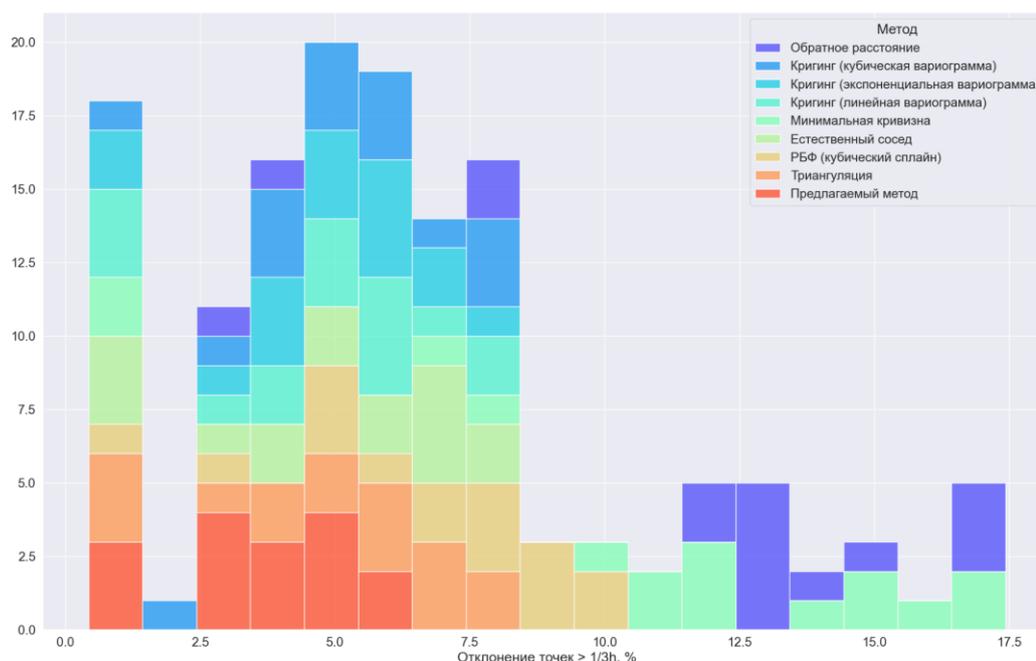
Рисунок 3.39 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «СКО» с пространственным разрешением 10м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение СКО при пространственном разрешении 10 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. Наименьшие значения СКО были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (экспоненциальная вариограмма), Естественный сосед и Обратное расстояние.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек > 1/3h, %» для пространственного разрешения 3м приведена на рисунке 3.40.



а

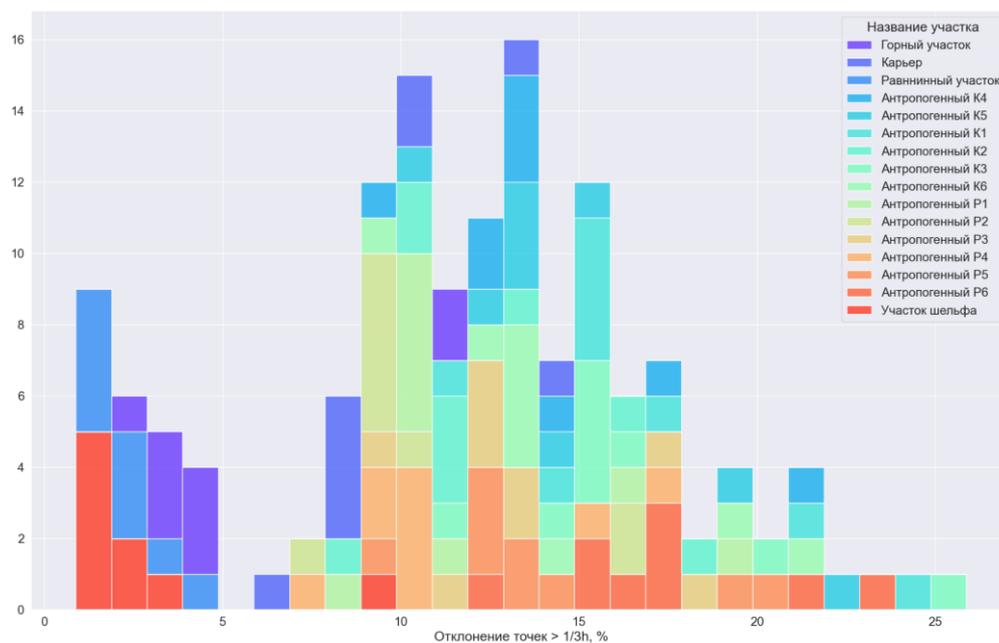


б

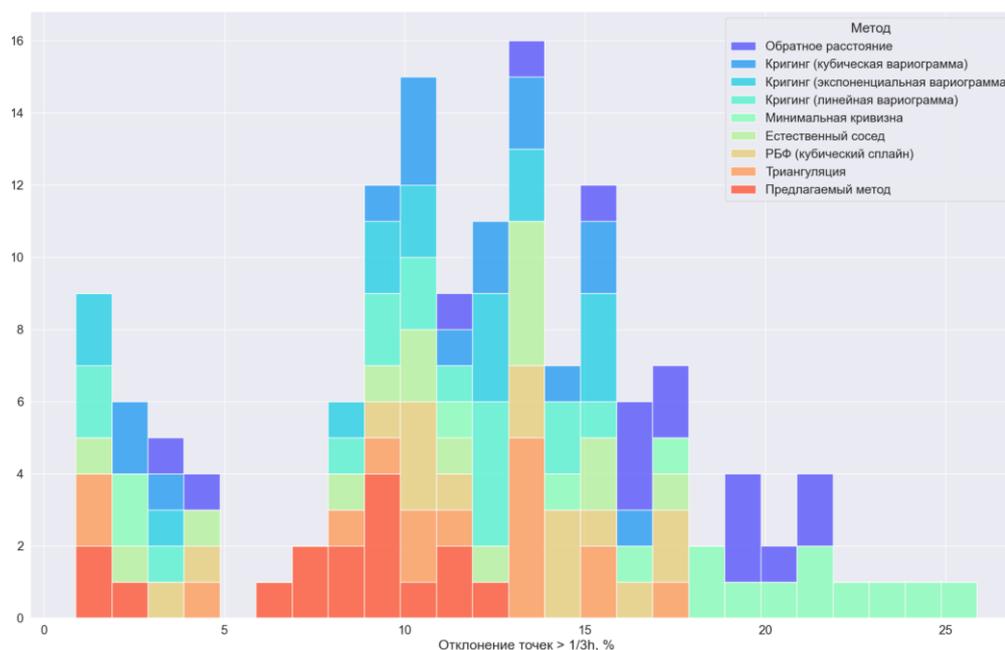
Рисунок 3.40 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек > 1/3h, %» с пространственным разрешением 3м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение «Отклонение точек > 1/3h» при пространственном разрешении 3 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. В сравнении с параметром «СКО» параметр «Отклонение точек > 1/3h» в большей степени описывает отклонения в математической модели рельефа, которые не являются экстремальными. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек > 1/3h» были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Триангуляция и Естественный сосед.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек > 1/3h, %» для пространственного разрешения 5м приведена на рисунке 3.41.



а

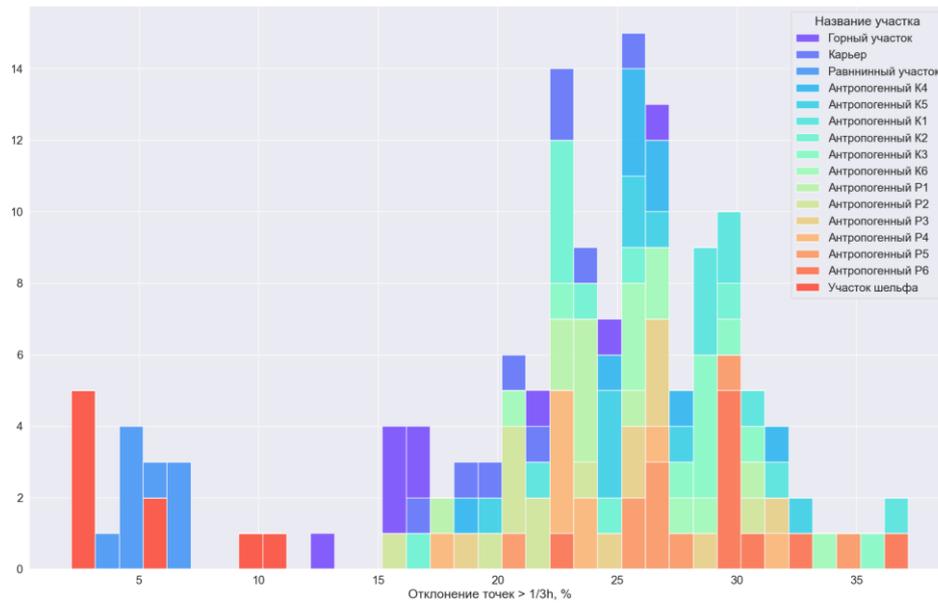


б

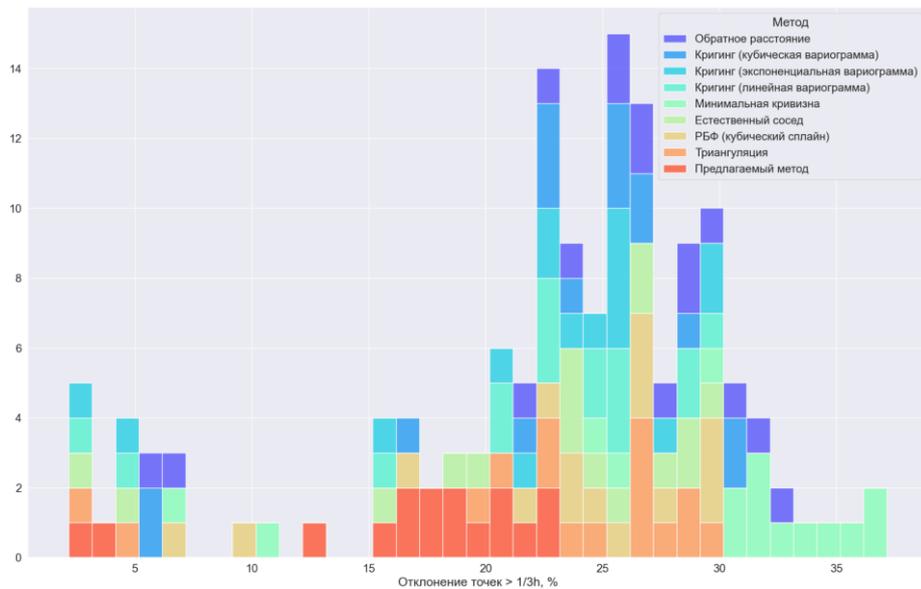
Рисунок 3.41 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> 1/3h$ , %» с пространственным разрешением 5м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение «Отклонение точек  $> 1/3h$ » при пространственном разрешении 5 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек  $> 1/3h$ » были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Триангуляция и Естественный сосед.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> 1/3h$ , %» для пространственного разрешения 10м приведена на рисунке 3.42.



а

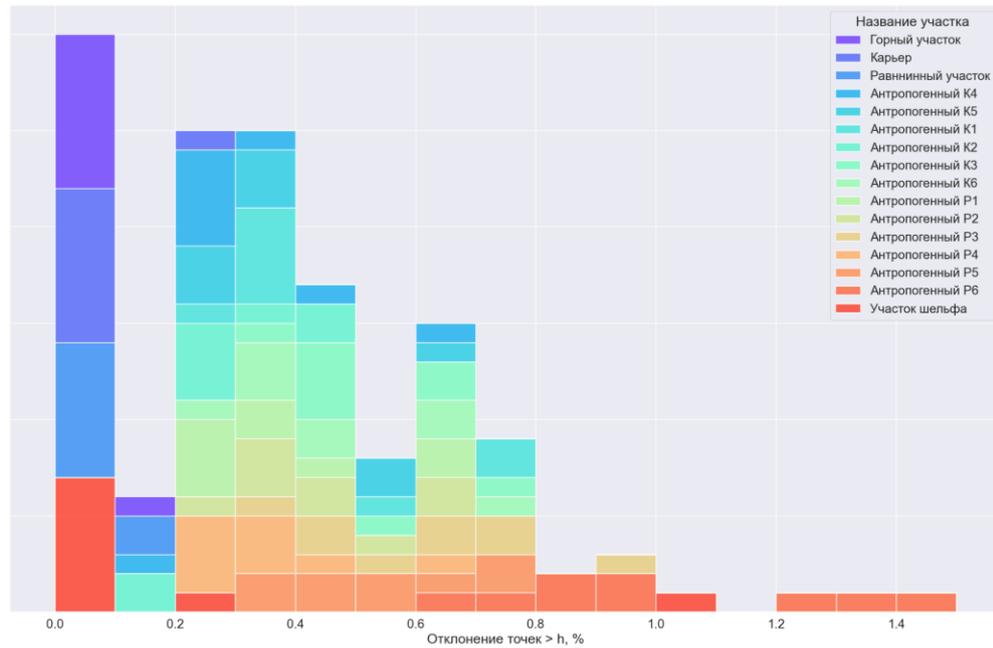


б

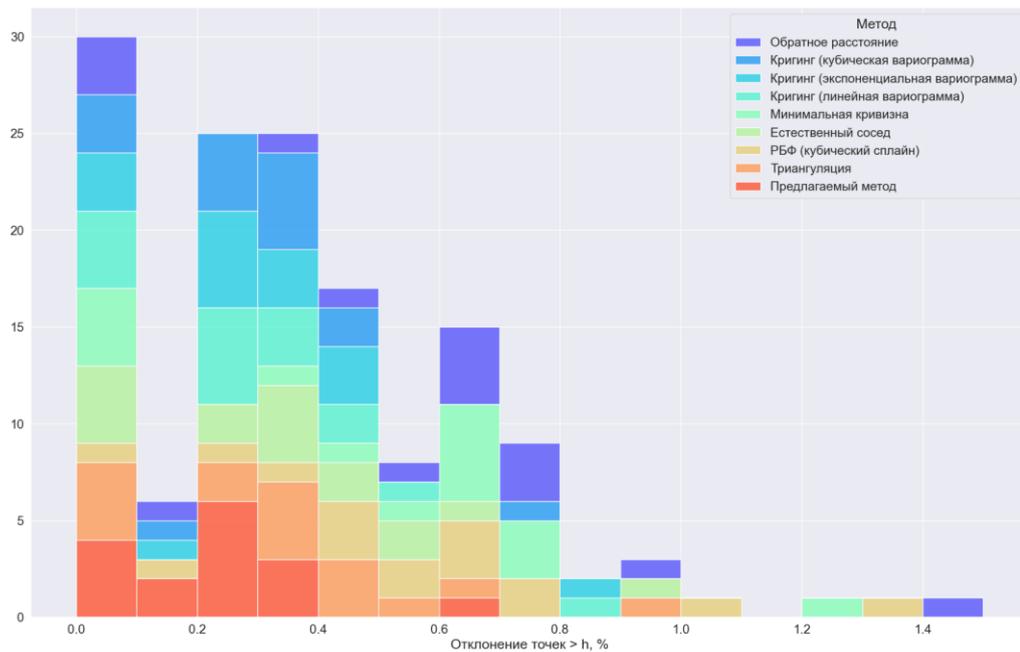
Рисунок 3.42 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> 1/3h$ , %» с пространственным разрешением 10м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение «Отклонение точек  $> 1/3h$ » при пространственном разрешении 10 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек  $> 1/3h$ » были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Естественный сосед и Триангуляция.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> h$ , %» для пространственного разрешения 3м приведена на рисунке 3.43.



а



б

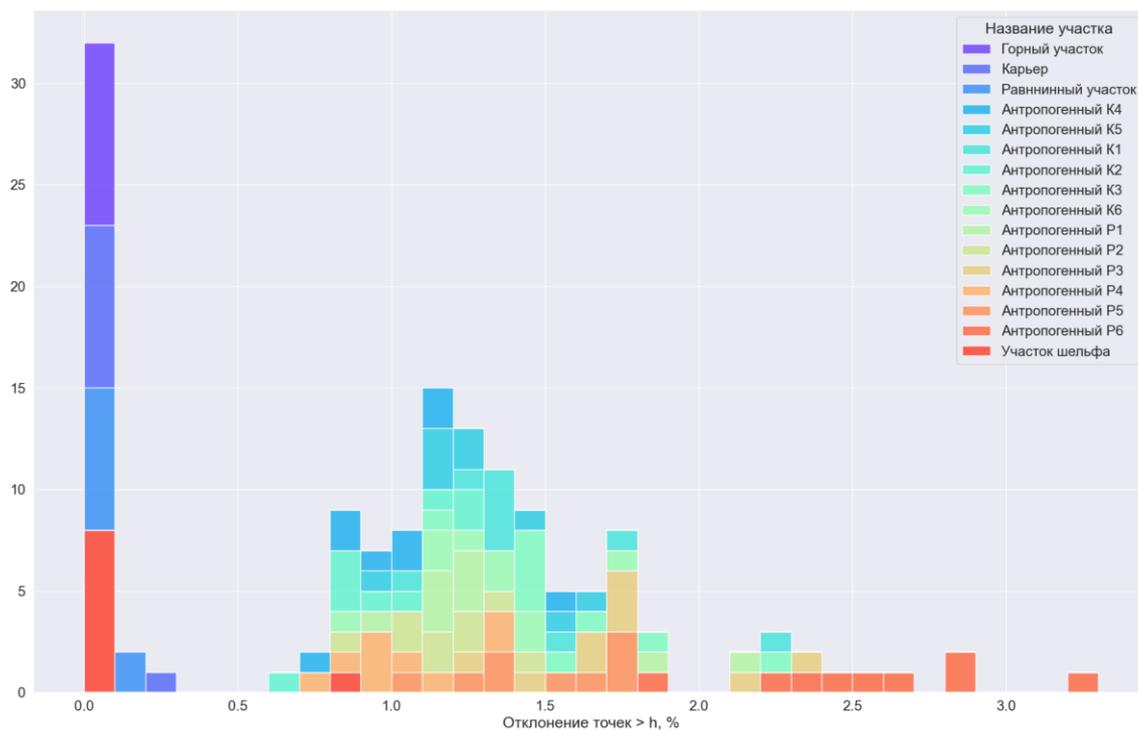
Рисунок 3.43 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> h$ , %» с пространственным разрешением 3м: а – по фрагментам, б – по методам

Параметр «Отклонение точек  $> h$ » в наибольшей степени связан со значительными отклонениями избыточных измерений от цифровой модели рельефа. Наибольшее значение «Отклонение точек  $> h$ » при пространственном разрешении 3 м было получено на

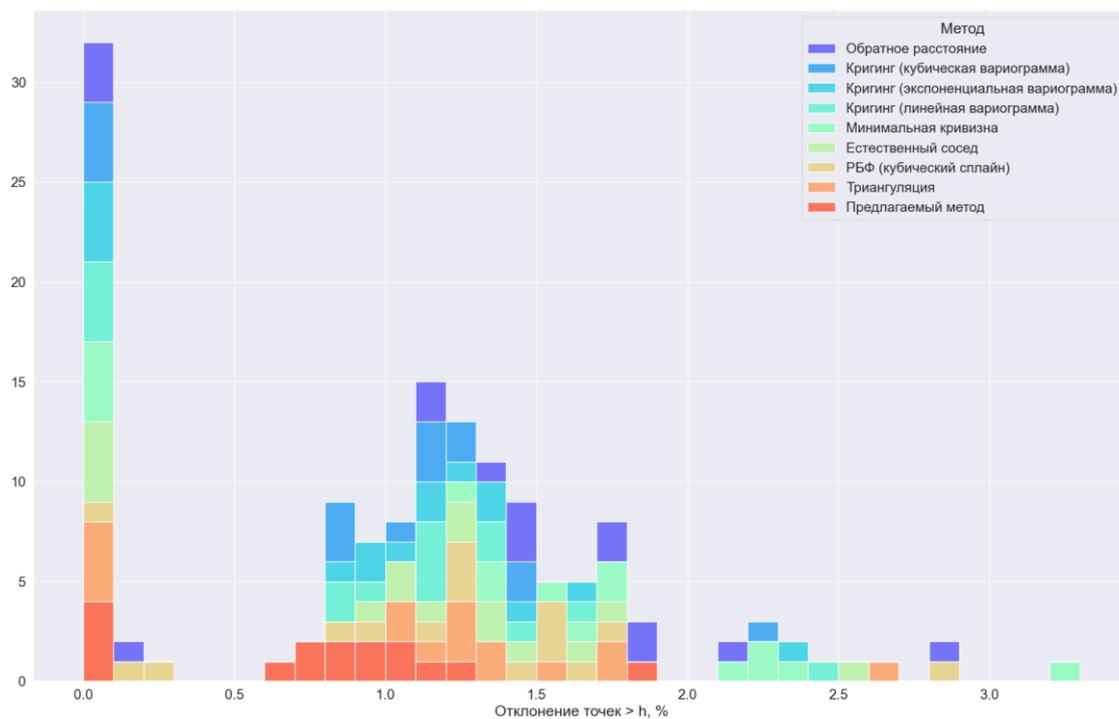
Антропогенном участке при использовании метода Обратное расстояние. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек  $> h$ » были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Естественный сосед и Триангуляция.

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> h$ , %» для пространственного разрешения 5м приведена на рисунке 3.44.

Наибольшее значение «Отклонение точек  $> h$ » при пространственном разрешении 5 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек  $> h$ » были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (кубическая вариограмма), Естественный сосед и Триангуляция.



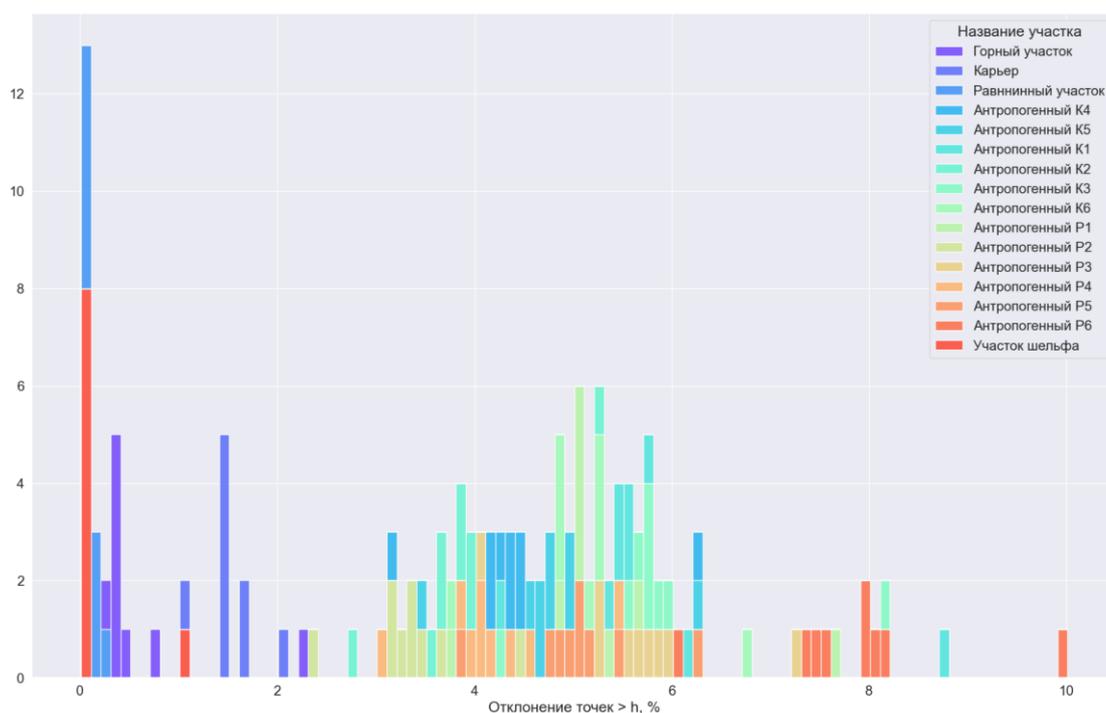
а



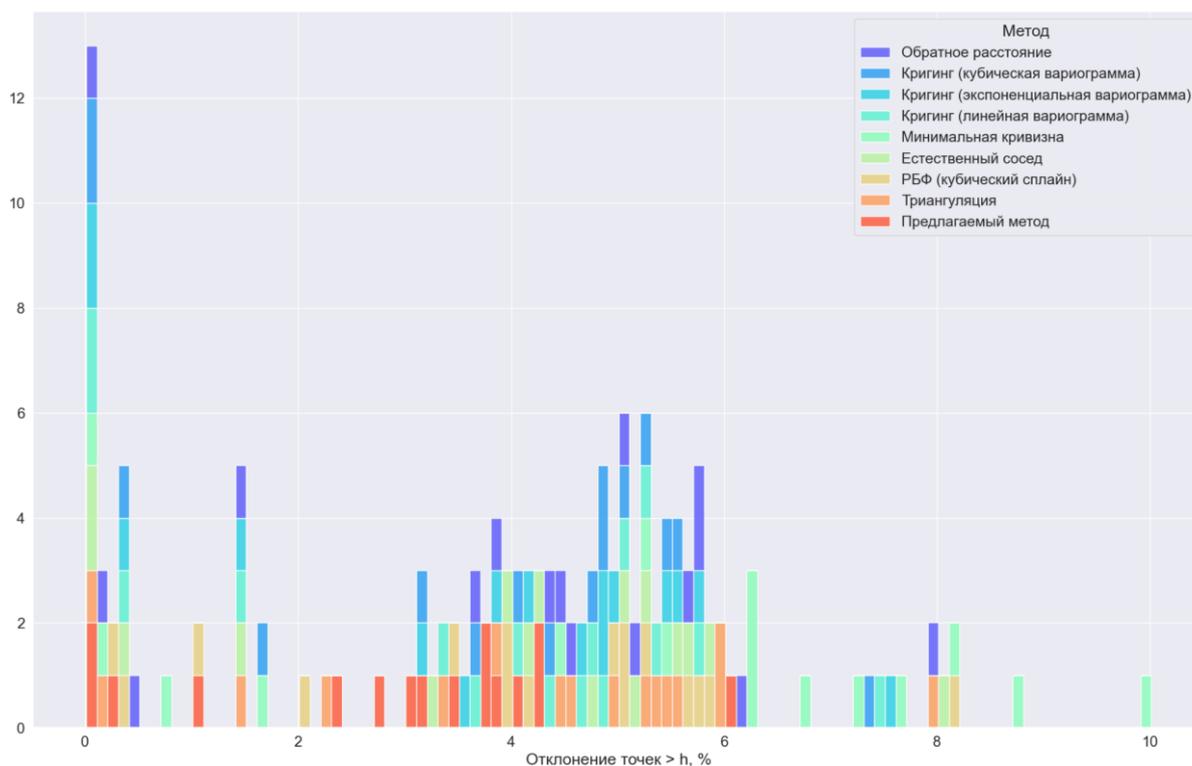
б

Рисунок 3.44 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек > h, %» с пространственным разрешением 5м: а – по фрагментам, б – по методам

Гистограмма точности цифровых моделей рельефа по параметру «Отклонение точек > h, %» для пространственного разрешения 10м приведена на рисунке 3.45.



а

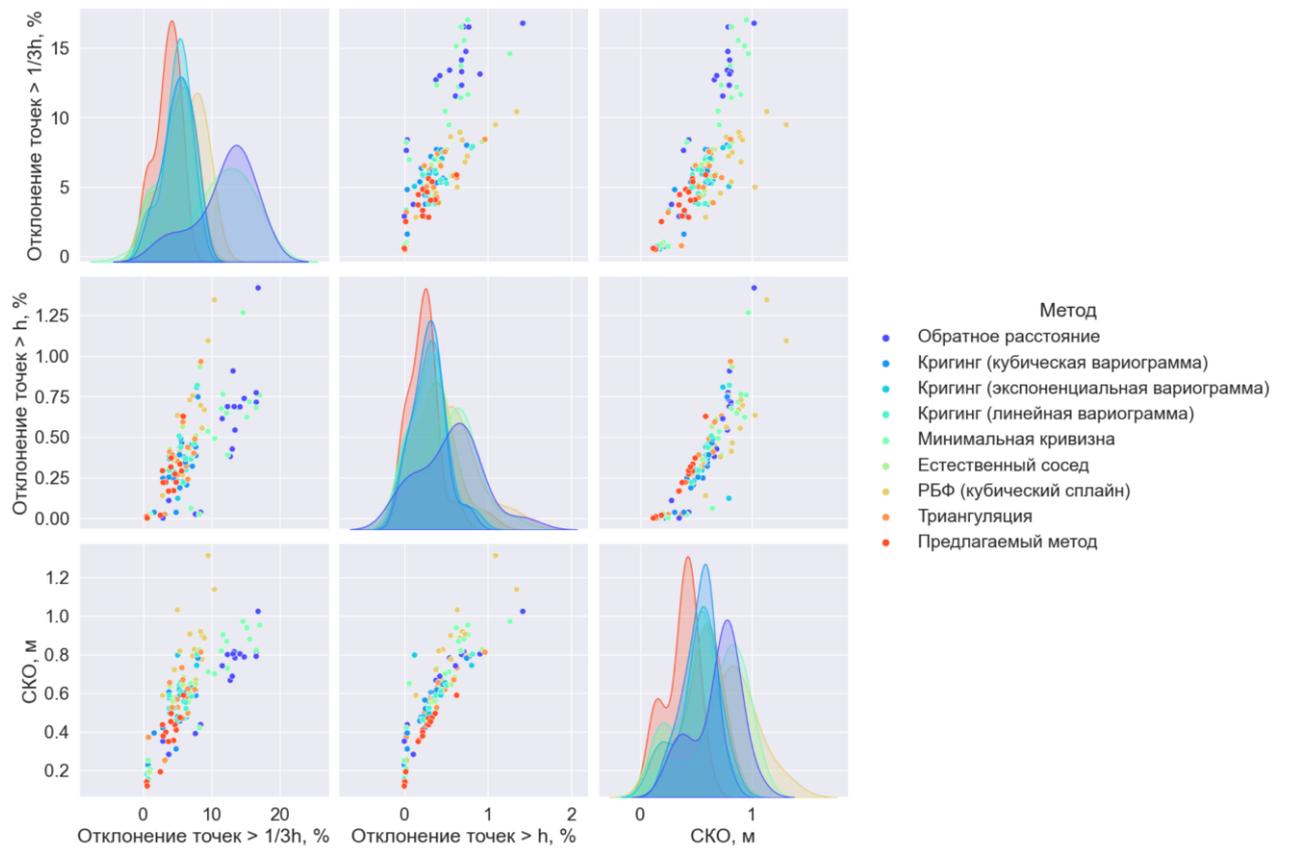


б

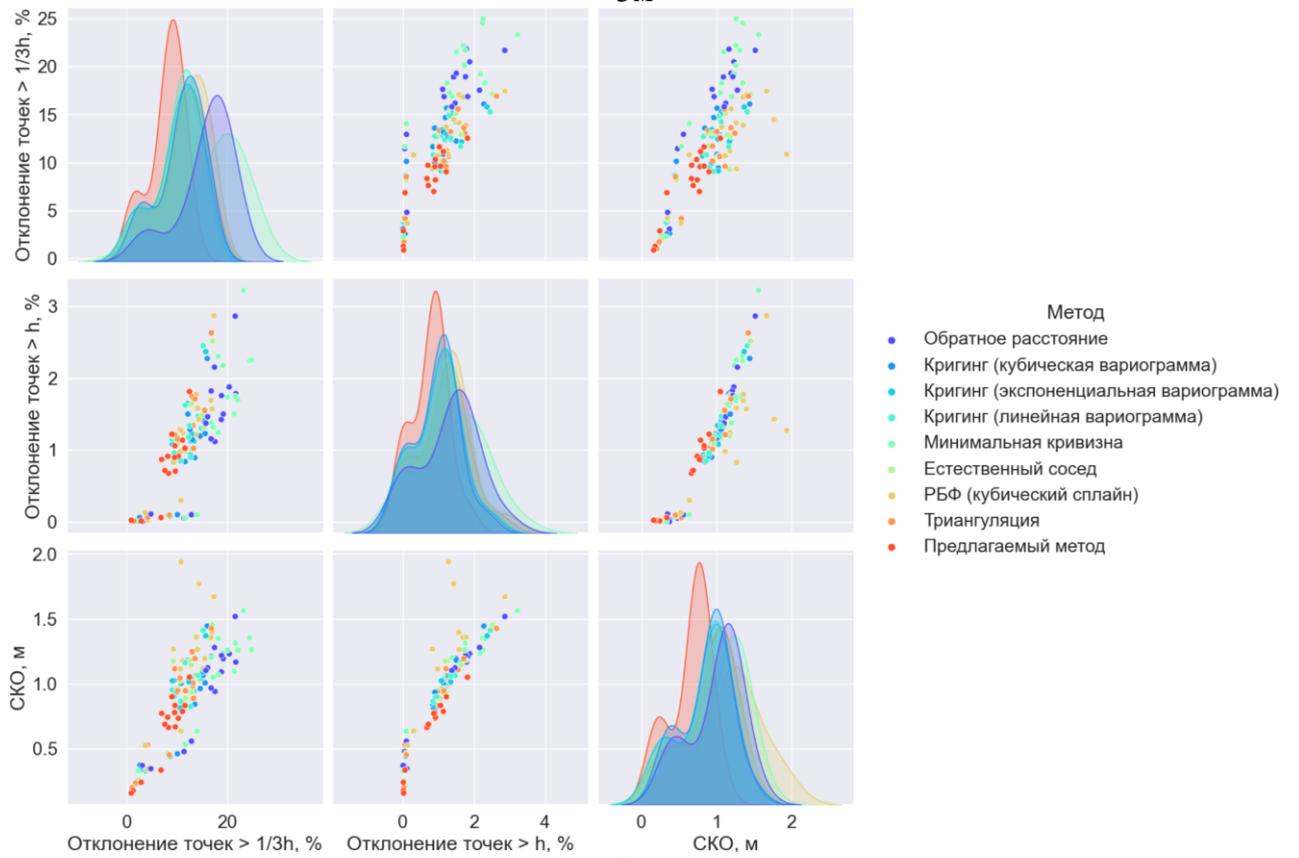
Рисунок 3.45 – Оценка точности математических моделей рельефа по параметру «Отклонение точек  $> h$ , %» с пространственным разрешением 10м: а – по фрагментам, б – по методам

Наибольшее значение «Отклонение точек  $> h$ » при пространственном разрешении 10 м было получено на Антропогенном участке при использовании метода Минимальная кривизна. Наименьшие значения параметра «Отклонение точек  $> h$ » были получены при использовании разработанного метода и методов Кригинг (линейная вариограмма), Естественный сосед и РБФ.

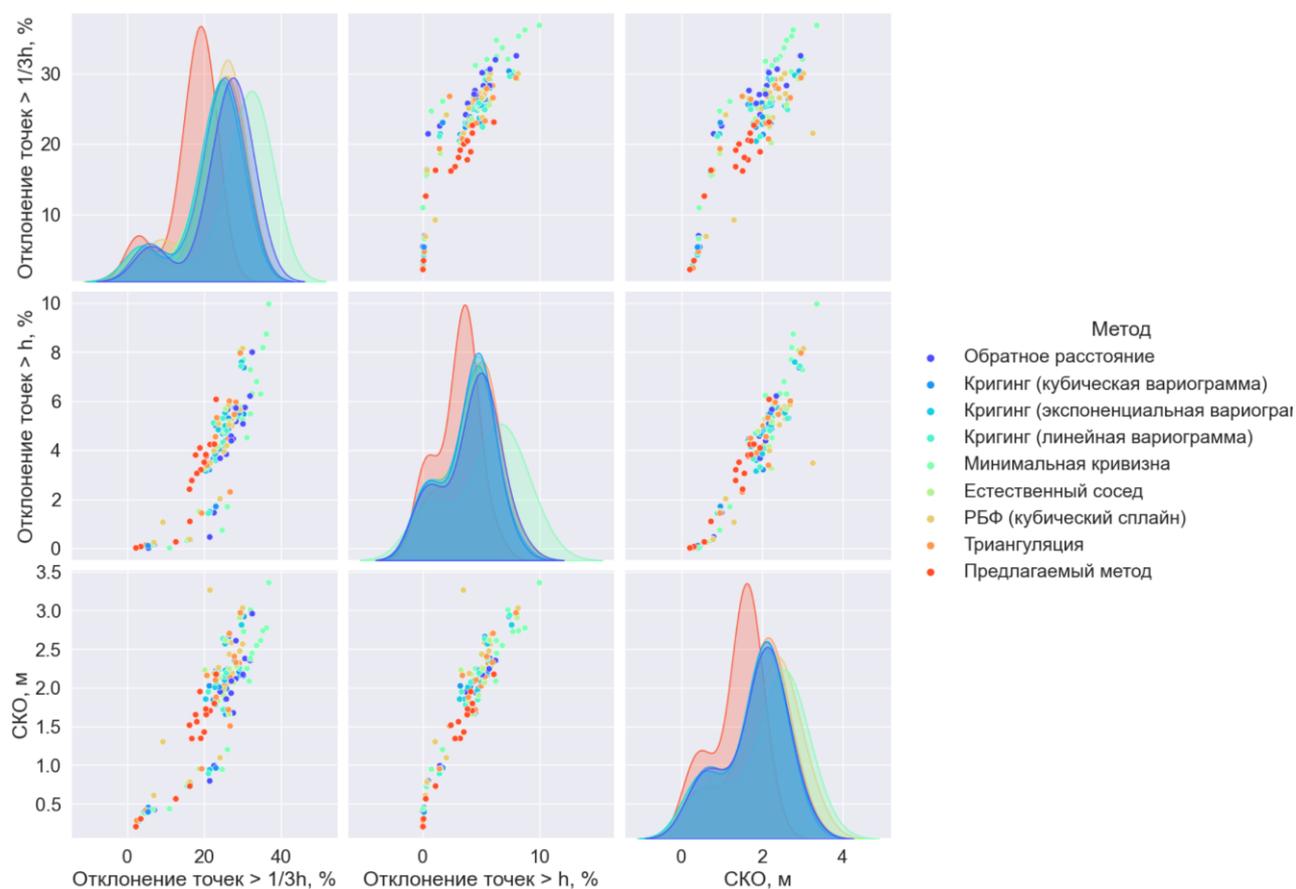
Графики распределения и диаграммы рассеяния оцениваемых параметров по методам приведены на рисунке 3.46.



3м



5м

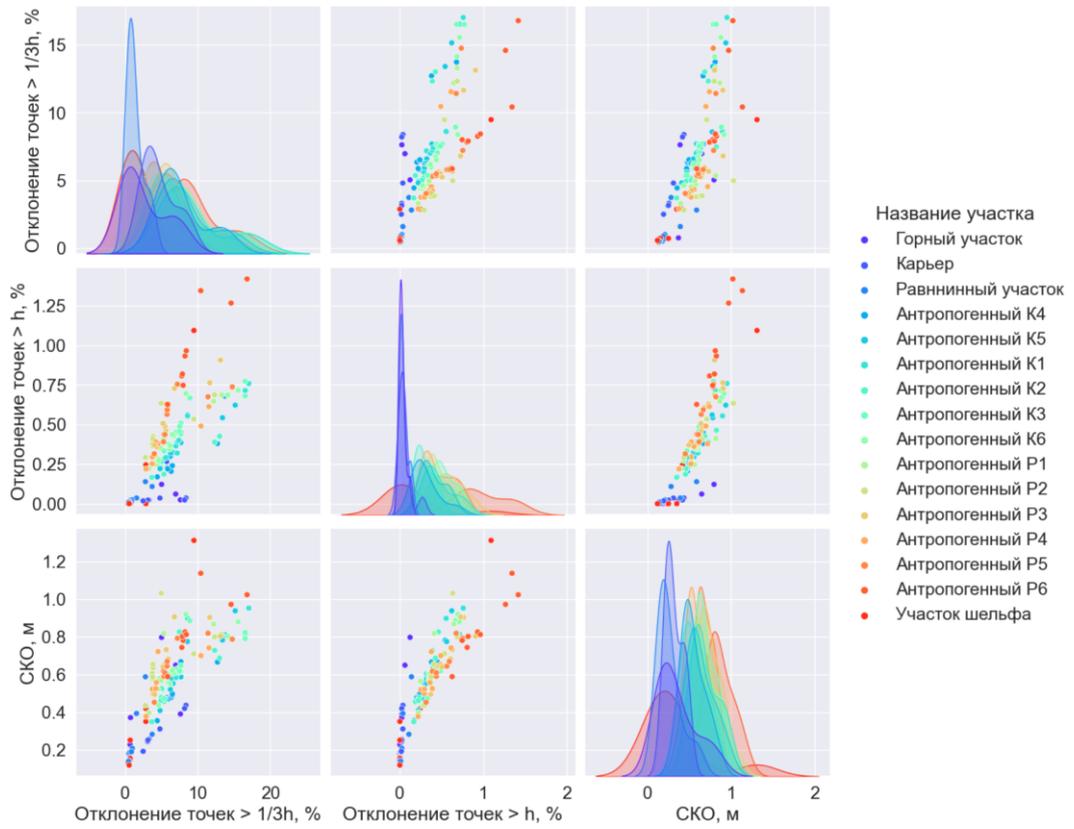


10м

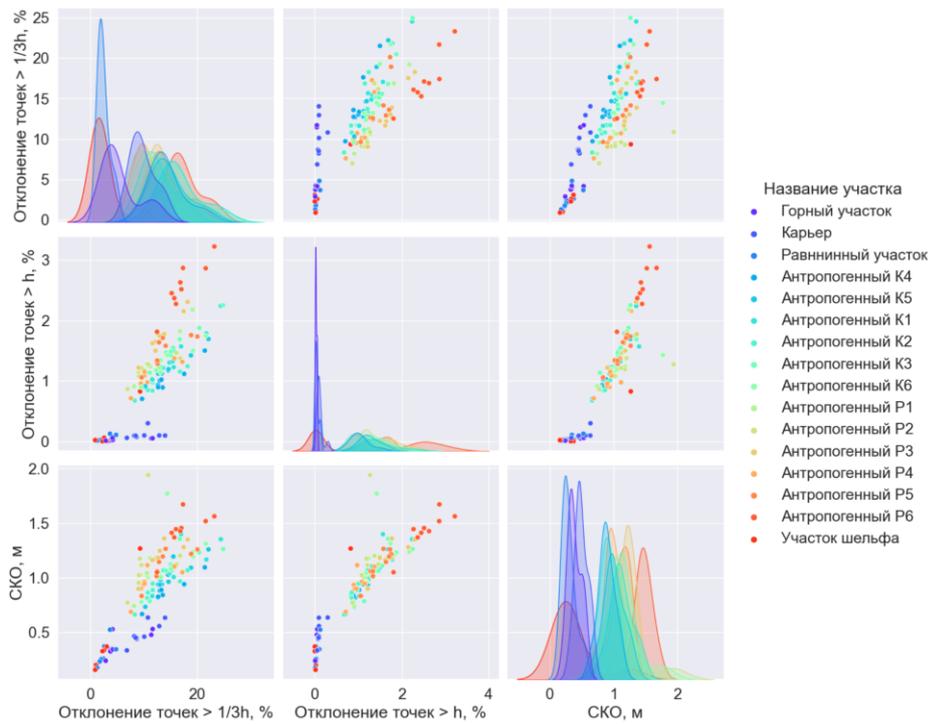
Рисунок 3.46 – Графики распределения и диаграммы рассеяния оцениваемых параметров по методам

Отмечен рост диверсификации в распределении параметров, при оценке по использованным для построения математической модели рельефа методам. Диаграммы рассеяния указывают на наличие простой функциональной зависимости между параметрами.

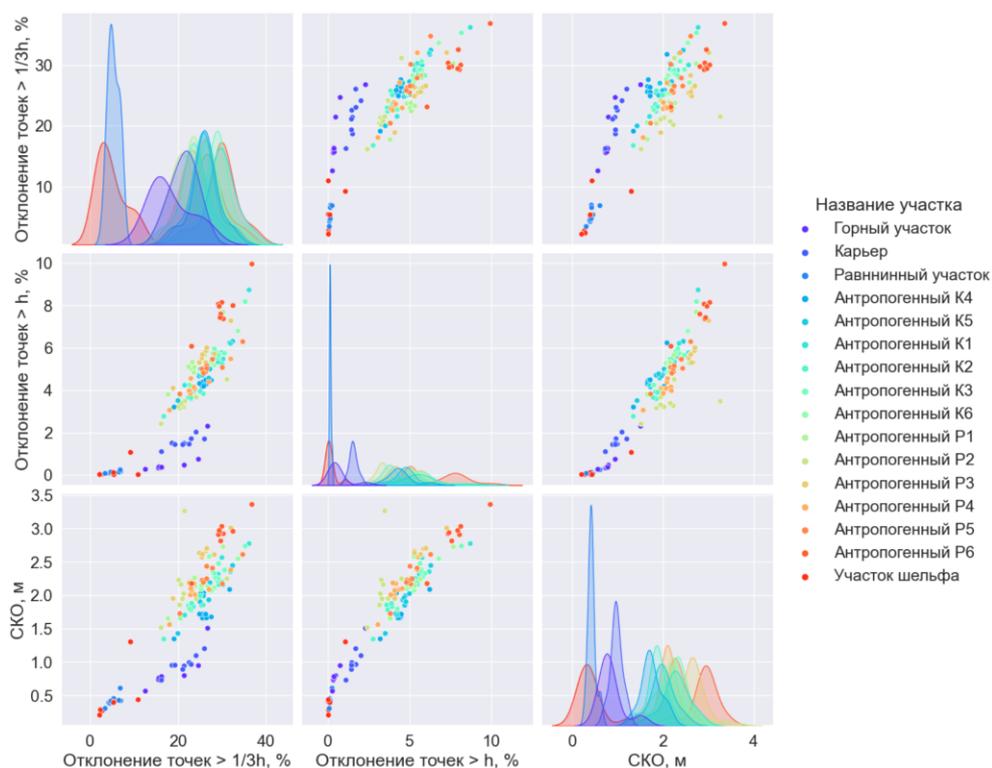
Графики распределения и диаграммы рассеяния оцениваемых параметров по исследуемым участкам приведены на рисунке 3.47.



3M



5M



10м

Рисунок 3.47 – Графики распределения и диаграммы рассеяния оцениваемых параметров по исследуемым участкам

Распределение параметров при оценке с учетом исследуемого участка указывает, на тенденцию к меньшему среднему значению и среднеквадратическому отклонению на равнинных участках и увеличение среднего значения при возрастании углов наклонов и антропогенного влияния. Важно отметить, что схожие по морфометрическим характеристикам участки обладают схожим распределением параметров. С ростом пространственного разрешения наблюдается возрастание диверсификации оцениваемых параметров для равнинных участков и горных участков с антропогенным влиянием.

### 3.4 Выводы по главе 3

Анализ методов пространственной интерполяции, использованных для восстановления связей между геопространственными данными, указывает на различную точность по оцениваемым параметрам на исследуемых участках. Точность методов зависела как от пространственного разрешения математической модели, так и от типа рельефа, но не обладала достаточной робастностью во время сравнительного анализа. В связи с этим, невозможно определить универсальный метод пространственной интерполяции для построения цифровых моделей рельефа с учетом оцениваемых параметров – наименьшие значения оцениваемых параметров были получены с использованием различных методов.

Отмечается рост различий в распределении параметров, по которым оценивалась точность построения математической модели рельефа в зависимости от метода пространственной интерполяции с ростом пространственного разрешения. Различия в оцениваемых параметрах от типа рельефа выражены: чем выше вариативность морфометрических характеристик и значения углов наклона, тем выше значения оцениваемых параметров точности.

Важно отметить, что разработанный метод и методы Кригинг, Естественный сосед и Триангуляция, привели к наименьшим значениям оцениваемых параметров в совокупности. Наблюдается явная тенденция к смещению среднего значения оцениваемых параметров и снижению вариативности при построении с использованием разработанного метода. Таким образом, при условии уточнения локальных участков математической модели с использованием предлагаемого метода, можно достичь большей точности, чем с использованием альтернативных методов пространственной интерполяции. Важно отметить, что с использованием разработанного метода не требуется выполнять переход от нерегулярной сети к регулярной, так как в работе данный переход выполнялся только для оценки точности в программе Surfer с общепринятыми методами.

## ГЛАВА 4 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА С ОБЩЕПРИНЯТЫМИ. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ

### 4.1 Сравнительный анализ результатов построения

Для сравнительного анализа исходные данные и все точки, полученные с использованием разработанного метода, были импортированы в программу Surfer и использованы для построения цифровых моделей рельефа с помощью метода Триангуляция с линейной интерполяцией в соответствующих пространственных разрешениях. В данном случае, точки, полученные с применением предлагаемого метода, используются как дополнительные для определения узловых координат, а не добавляются в математическую модель рельефа напрямую.

Данный этап необходим только для сравнительного анализа методов пространственной интерполяции и предлагаемого метода уточнения поверхности локальных участков.

Для оценки точности разработанного метода для уточнения поверхности локальных участков цифровой модели рельефа были использованы параметры, приведенные в главе 3. Сравнительный анализ выполнялся с использованием методов с наименьшими значениями оцениваемых параметров, которые в данной главе именуется базовыми, и предлагаемого. Оценка выполнялась по натурным данным для всех исследуемых участков с пространственным разрешением 3, 5 и 10 м.

Так как универсальный метод пространственной интерполяции для построения цифровой модели рельефа – дискуссионная тема, то в исследовании за базовый принимался метод, который показал наименьшие совокупные значения оцениваемых параметров точности. В случае спорных ситуаций предпочтение отдавалось методу с наименьшим значением СКО.

#### **Антропогенные участки К1-6**

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К1 приведены в таблице 4.1.

Разработанный метод привел к увеличению точности построения цифровой модели рельефа на участке К1 по параметру «СКО, м» в пределах от 20.14%, до 24.54% при всех рассматриваемых пространственных разрешениях. Значения двух параметров, связанных с высотой сечения рельефа и относящихся к топографическим критериям точности, снизились, в худшем случае, на 19.91%, что указывает на приближение поверхности к точкам, относящимся к земной поверхности.

Таблица 4.1 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>1</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	5,47	7,31	25,18
		Отклонение точек > h, %	0,28	0,36	21,73
		СКО, м	0,45	0,60	24,54
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	11,56	14,44	19,91
		Отклонение точек > h, %	1,00	1,32	23,91
		СКО, м	0,77	1,02	24,18
Естественный сосед	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	22,26	28,75	22,59
		Отклонение точек > h, %	4,20	5,61	25,03
		СКО, м	1,77	2,22	20,14
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			72,38		

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К<sub>2</sub> приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>2</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (кубическая вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	3,83	5,21	26,50
		Отклонение точек > h, %	0,14	0,19	25,79
		СКО, м	0,36	0,47	23,02
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	8,43	10,75	21,57
		Отклонение точек > h, %	0,66	0,86	23,45
		СКО, м	0,63	0,82	23,07
Кригинг (кубическая вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	17,54	22,95	23,57
		Отклонение точек > h, %	2,64	3,54	25,44
		СКО, м	1,37	1,76	22,46
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			80,53		

При использовании разработанного метода, точность создания цифровой модели рельефа на участке К<sub>2</sub> по параметру «СКО, м» увеличилась в диапазоне от 22.46% до 23.07% при всех исследованных пространственных разрешениях. При этом значения двух параметров, связанных с высотой сечения рельефа и относящихся к топографическим критериям точности, снизились, в худшем случае, на 21,57%, что указывает на корректность восстановления связей между геопространственными данными.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К<sub>3</sub> приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>3</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	5,53	7,06	21,66
		Отклонение точек > h, %	0,35	0,46	24,80
		СКО, м	0,48	0,61	21,24
Кригинг (кубическая вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	11,58	15,46	25,15
		Отклонение точек > h, %	1,14	1,42	19,90
		СКО, м	0,80	1,08	25,68
Триангуляция	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	21,95	29,94	26,70
		Отклонение точек > h, %	4,44	5,75	22,81
		СКО, м	1,69	2,23	24,37
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %				78,16	

Использование разработанного метода привело к возрастанию точности создания цифровой модели рельефа на участке К<sub>3</sub> по параметру «СКО, м» в диапазоне от 21.24% до 25.68%. При этом, значения двух параметров, связанных с высотой сечения рельефа и относящихся к топографическим критериям точности, уменьшились, в худшем случае, на 19.90%. В этой связи, наблюдается корректное восстановление связей между исходными данными на участке К<sub>3</sub>.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К<sub>4</sub> приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>4</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,55	5,95	23,54
		Отклонение точек > h, %	0,17	0,22	26,23
		СКО, м	0,36	0,46	22,59
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	9,59	12,44	22,87
		Отклонение точек > h, %	0,71	0,89	20,59
		СКО, м	0,66	0,83	21,33
	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	20,45	25,92	21,11
		Отклонение точек > h, %	3,20	4,13	22,51
		СКО, м	1,30	1,69	22,97
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			81,02		

Применение разработанного метода привело к увеличению точности моделирования рельефа на участке К<sub>4</sub> по параметру «СКО, м» в пределах от 21.33% до 22.97%, при увеличении точности по топографическим критериям минимум на 20.59%, что свидетельствует о применимости разработанного метода при уточнении поверхностей локальных областей цифровой модели рельефа на горных участках с антропогенным воздействием.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К<sub>5</sub> приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>5</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,82	6,05	20,34
		Отклонение точек > h, %	0,22	0,30	27,02
		СКО, м	0,42	0,54	22,13
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	10,36	12,63	17,94
		Отклонение точек > h, %	0,86	1,14	24,61
		СКО, м	0,70	0,89	21,56
Кригинг (кубическая вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	19,89	27,19	26,84
		Отклонение точек > h, %	3,54	4,81	26,38
		СКО, м	1,46	1,85	21,23
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			84,01		

Одним из показателей качества построения уточняющих поверхностей локальных участков цифровой модели рельефа выступает параметр «СКО, м», значение которого на участке К<sub>5</sub> снизилось на 21.23% в худшем случае, а также показатели «Отклонение точек > 1/3 h, %» и «Отклонение точек > h, %», которые находятся в диапазоне от 17.94% до 27.02%.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка К<sub>6</sub> приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке К<sub>6</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,73	6,09	22,45
		Отклонение точек > h, %	0,29	0,37	21,61
		СКО, м	0,45	0,55	18,97
Кригинг (кубическая вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	10,10	13,23	23,65
		Отклонение точек > h, %	0,90	1,14	21,20
		СКО, м	0,75	1,00	25,09
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	20,04	26,59	24,61
		Отклонение точек > h, %	3,81	4,64	17,96
		СКО, м	1,66	2,03	18,24
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			83,11		

Параметр «СКО, м» служит одним из критериев оценки точности построения уточняющих поверхностей локальных участков цифровой модели рельефа. На участке К<sub>6</sub> его значение в наихудшем случае снизилось на 18.24%. Кроме того, показатели «Отклонение точек > 1/3 h» и «Отклонение точек > h, %» были в пределах от 17.96% до 25.09%.

#### Антропогенные участки Р<sub>1-6</sub>

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка Р<sub>1</sub> приведены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке P<sub>1</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (линейная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	3,48	4,33	19,70
		Отклонение точек > h, %	0,21	0,28	23,73
		СКО, м	0,41	0,50	18,59
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	7,74	10,69	27,59
		Отклонение точек > h, %	0,88	1,14	23,03
		СКО, м	0,75	0,96	22,00
	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	17,15	23,38	26,61
		Отклонение точек > h, %	3,87	5,14	24,64
		СКО, м	1,66	2,11	21,03
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			87,55		

При интерполяции с помощью разработанного метода удалось улучшить точность моделирования рельефа на участке P<sub>1</sub> по показателю «СКО, м» в пределах от 18,59% до 22,00% при любых использованных пространственных разрешениях. Однако, стоит отметить, что два параметра, связанные с высотой сечения рельефа и являющихся топографическими критериями точности, в наихудшем случае, уменьшились на 19,70%.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка P<sub>2</sub> приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке P<sub>2</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (линейная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	2,75	3,77	26,92
		Отклонение точек > h, %	0,28	0,38	26,23
		СКО, м	0,44	0,55	21,29
	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	7,05	9,30	24,18
		Отклонение точек > h, %	0,83	1,13	26,78
		СКО, м	0,77	1,01	23,61
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	15,65	20,98	25,41
		Отклонение точек > h, %	2,56	3,34	23,48
		СКО, м	1,45	1,89	23,36
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			75,28		

Использование разработанного метода привело к улучшению точности построения цифровой модели рельефа на участке P<sub>2</sub> по показателю «СКО, м» в интервале от 21.29% до 23.36%. Вместе с тем, два параметра, связанные с высотой сечения рельефа и относящихся к топографическим критериям точности, в наихудшем случае, уменьшились на 21.29%.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка Р<sub>3</sub> приведены в таблице 4.9.

Таблица 4.9 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке Р<sub>3</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (линейная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,07	5,34	23,78
		Отклонение точек > h, %	0,37	0,48	23,15
		СКО, м	0,50	0,64	21,82
	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	9,23	12,10	23,69
		Отклонение точек > h, %	1,18	1,56	24,82
		СКО, м	0,89	1,16	23,60
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	19,06	25,35	24,80
		Отклонение точек > h, %	4,11	5,43	24,36
		СКО, м	2,08	2,53	17,97
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			81,38		

При использовании разработанного метода, точность формирования цифровой модели рельефа на участке Р<sub>3</sub> по показателю «СКО, м» улучшилась в диапазоне от 17.97% до 23.60%. При этом параметры «Отклонение точек > 1/3 h, %» и «Отклонение точек > h, %», в худшем случае уменьшились на 23.15%, что указывает на корректность построения поверхностей дискретных элементов на антропогенном участке периодической съемки.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка Р<sub>4</sub> приведены в таблице 4.10.

Таблица 4.10 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке Р<sub>4</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (кубическая вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	2,91	3,90	25,25
		Отклонение точек > h, %	0,22	0,27	16,61
		СКО, м	0,38	0,50	24,48
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	7,71	9,97	22,64
		Отклонение точек > h, %	0,72	0,93	22,11
		СКО, м	0,68	0,88	22,82
	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	18,13	23,31	22,22
		Отклонение точек > h, %	3,04	3,99	23,73
		СКО, м	1,53	2,02	24,02
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			87,34		

При оценке качества построения уточняющих поверхностей локальных участков цифровой модели рельефа использовался параметр "СКО, м". В худшем случае его значение на участке Р<sub>4</sub> снижается на 22,82%. Важными показателями также являются "Отклонение точек > 1/3 h, %" и «Отклонение точек > h, %», которые в наихудшем случае принимают значения 22,22% и 16,61% соответственно. Низкое значение параметра «Отклонение точек > h, %», при

уменьшении других показателей, указывает на то, что разработанный метод в большей степени адаптировался под точки с меньшими значениями абсолютных параметров, но с более высокой частотой возникновения.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка P<sub>5</sub> приведены в таблице 4.11.

Таблица 4.11 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке P<sub>5</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,22	5,34	21,06
		Отклонение точек > h, %	0,33	0,45	26,56
		СКО, м	0,45	0,58	22,93
	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	9,82	12,56	21,82
		Отклонение точек > h, %	1,01	1,37	26,12
		СКО, м	0,79	1,06	25,69
Кригинг (кубическая вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	18,56	20,81	25,55
		Отклонение точек > h, %	3,65	4,98	26,70
		СКО, м	1,65	2,17	23,96
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			77,64		

При построении уточняющих поверхностей дискретных элементов цифровой модели рельефа ключевым показателем качества является параметр «СКО, м». В худшем случае его

значение на участке P5, при использовании предлагаемого метода для интерполяции, снижается на 22.93%. Важно отметить, что показатели, отображающие качество построения в контексте топографических поверхностей, указывают на увеличение точности минимум на 21.06%.

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка P<sub>6</sub> приведены в таблице 4.12.

Таблица 4.12 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового на участке P<sub>6</sub>

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Кригинг (линейная вариограмма)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	6,13	7,87	22,21
		Отклонение точек > h, %	0,61	0,82	25,38
		СКО, м	0,59	0,76	22,20
	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	12,53	15,61	19,71
		Отклонение точек > h, %	1,76	2,33	24,48
		СКО, м	1,04	1,35	23,06
	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	23,15	29,84	22,44
		Отклонение точек > h, %	5,64	7,84	28,06
		СКО, м	2,20	2,81	21,60
	3, 5, 10	Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %	75,83		

Параметр «СКО, м» служит важным индикатором качества построения уточняющих поверхностей локальных участков цифровой модели рельефа. В наихудшем случае его значение на участке Р6 снижается на 21.60%., при снижении параметров "Отклонение точек > 1/3 h, %" и «Отклонение точек > h, %» на 19,71% и 24,48% соответственно.

### Горный участок

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для Горного участка приведены в таблице 4.13.

Таблица 4.13 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
РБФ (кубический сплайн)	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	0,52	0,62	15,33
		Отклонение точек > h, %	0,00	0,00	0,00
		СКО, м	0,14	0,18	21,46
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	2,76	3,76	26,76
		Отклонение точек > h, %	0,011	0,014	21,43
		СКО, м	0,24	0,32	24,16
	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	16,32	11,99	26,50
		Отклонение точек > h, %	0,33	0,26	19,97
		СКО, м	0,74	0,58	22,34
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			80,33		

При построении поверхностей локальных областей цифровой модели рельефа на Горном участке с использованием разработанного метода удалось увеличить общую точность по параметру «СКО, м» минимум на 21.43%. При этом параметры «Отклонение точек > 1/3 h, %» и «Отклонение точек > h, %» в худшем случае приняли значения 15.33% и 0.00% соответственно. Такое значение параметра «Отклонение точек > h, %» обусловлено тем фактом, что при пространственном разрешении 3м при округлении увеличить точность больше невозможно.

### Участок Карьер

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка Карьер приведены в таблице 4.14.

Таблица 4.14 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Триангуляция	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	2,55	3,28	22,38
		Отклонение точек > h, %	0,02	0,02	20,13
		СКО, м	0,19	0,25	24,88
Кригинг (линейная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	6,61	8,44	21,66
		Отклонение точек > h, %	0,05	0,07	27,34
		СКО, м	0,34	0,42	20,69
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	22,02	16,16	26,64
		Отклонение точек > h, %	1,41	1,10	21,63
		СКО, м	0,92	0,69	24,70
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			90,37		

Использование разработанного метода создания поверхностей рельефа в локальной области привело к повышению точности построения на участке Карьер по параметру «СКО, м» на 20.69% в самом худшем варианте. Параметры, относимые к топографическим поверхностям, привели к минимальному снижению погрешности построения на 20.13%.

### Участок Шельф

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка P<sub>5</sub> приведены в таблице 4.15.

Таблица 4.15 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Триангуляция	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	0,44	0,57	22,57
		Отклонение точек > h, %	0,00	0,00	0,00
		СКО, м	0,10	0,13	24,89
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	0,89	1,16	23,45
		Отклонение точек > h, %	0,00	0,00	0
		СКО, м	0,15	0,19	21,56
Кригинг (линейная вариограмма)	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	2,16	2,70	19,90
		Отклонение точек > h, %	0,00	0,00	0
		СКО, м	0,20	0,27	23,41
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			93,81		

При построении цифровых моделей рельефа на участке Шельф параметр «Отклонение точек  $> h$ , %» принял нулевое значение во всех рассматриваемых случаях. Значение параметра «СКО, м», при использовании разработанного метода для добавления уточняющих точек, снизилось, в худшем случае, на 21.56%, а значение «Отклонение точек  $> 1/3 h$ , %» на 19.90%.

### Равнинный участок

Процентные соотношения оцениваемых параметров точности предлагаемого метода относительно базовых для участка Р<sub>5</sub> приведены в таблице 4.16.

Таблица 4.16 – Процентные отношения параметра СКО предлагаемого метода относительно базового

Базовый метод	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %
Триангуляция	3	Отклонение точек $> 1/3 h$ , %	0,44	0,56	21,99
		Отклонение точек $> h$ , %	0,02	0,03	33,33
		СКО, м	0,13	0,15	15,48
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	5	Отклонение точек $> 1/3 h$ , %	1,29	1,56	17,12
		Отклонение точек $> h$ , %	0,04	0,05	20,00
		СКО, м	0,19	0,23	19,89
	10	Отклонение точек $> 1/3 h$ , %	3,46	4,34	20,24
		Отклонение точек $> h$ , %	0,06	0,08	26,68
		СКО, м	0,30	0,38	21,14
Снижение количества точек относительно объема избыточных измерений, %			84,57		

Значение параметра «СКО, м» при использовании разработанного метода было уменьшено на 15,48% при построении цифровой модели рельефа на Равнинный участок. Важно отметить, что при построении с применением разработанного метода и общепринятых параметры «Отклонение точек  $> 1/3 h$ , %» и «Отклонение точек  $> h$ , %» уменьшились минимум на 17.12% и 20.00% соответственно.

#### 4.2 Общие рекомендации

При использовании разработанных методов для построения цифровых моделей рельефа по облакам точек следует придерживаться следующих правил:

1. Метод построения с использованием теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса следует применять для восстановления сложных пространственных зависимостей с определением связанной области, влияющей на поверхность дискретного элемента и стремлении к адаптации линейных моделей к нелинейным зависимостям;

2. Поиск параметров для использования разработанного метода для большей контролируемости построения стоит выполнять полносвязным поиском (итеративный перебор параметров);

3. Для управления регуляризацией (консервативностью области поиска) модели при использовании разработанного метода восстановления связей следует использовать предельный ограничивающий угол, который позволяет определить подход к обработке смежных дискретных элементов, вплоть до полного исключения смежных граней из определения положения полюсов характеристического многочлена. Так с увеличением предельного угла будет расти пространственная область поиска и наоборот;

4. Использовать обратный переход от барицентрических координат определяемой точки к координатам полюсов при интерполяции разработанным методом для исключения смещения при выполнении операции снижения индекса.

В ходе анализа сечений цифровых моделей рельефа, построенных разработанным методом, базовым по ключевым точкам и базовым по всем точкам, включая избыточные измерения, была определена применимость предлагаемого метода при восстановлении сложных зависимостей, в том числе в горных условиях с антропогенным влиянием.

Для дополнительной валидации разработанного метода были выполнены построения продольных и поперечных сечений цифровых моделей рельефа на участках с наиболее сложной конфигурацией, как это указано на рисунке 4.1.

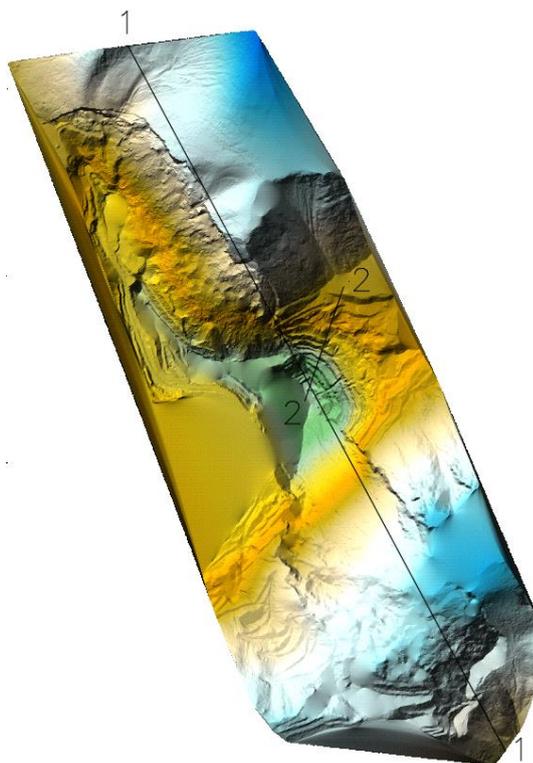


Рисунок 4.1 – Пример продольных и поперечных сечений ЦМР

На рисунке 4.2 показано продольное сечение P1-1 вдоль линии протяжённостью около 4.5 км, а на рисунке 4.3 поперечное сечение P2-2. Красная линия принадлежит базовой поверхности построенной по ключевым точкам, зеленая – базовой поверхности, построенной по всем точкам, принадлежащим земной поверхности и является эталонной, так как содержит всю доступную геопространственную информацию, синяя линия принадлежит поверхности, построенной с использованием разработанного метода по ключевым точкам. Черные линии указывают на локальные участки для которых выполнено приближение, чтобы оценить отклонение сечений, принадлежащих трем сравниваемым поверхностям.

Важно отметить, что сравнение выполнялось в программе Surfer с пространственным разрешением 3м, как наиболее детальном из рассматриваемых. Вследствии того, что программа выполняет построения сети с постоянным шагом, то наблюдается аппроксимация поверхности в узлах, что видоизменяет общую геометрию модели, однако это является особенностью перехода от облака точек к GRID и необходимо для сравнения большого количества методов в едином пространстве.

## P1-1

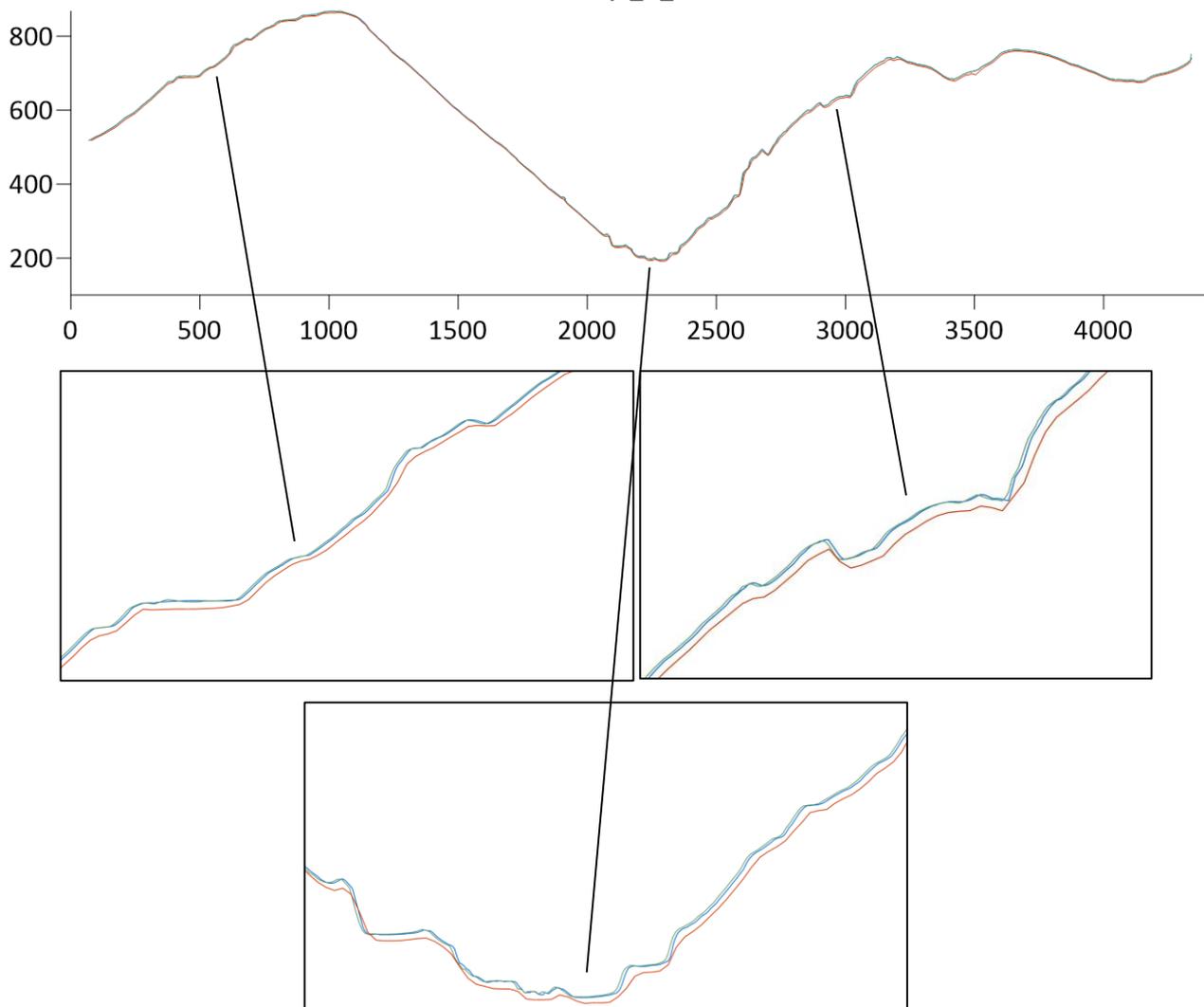


Рисунок 4.2 – Продольное сечение P1-1

Анализируя сечение P1-1 можно сделать вывод, что структурные элементы, восстановленные с использованием разработанного метода приближаются к эталонной поверхности сильнее, чем при использовании базового метода и ключевых точек, что свидетельствует о применимости предлагаемого метода при восстановлении сложных геопространственных связей.

После анализа сечения P2-2, отображенного на рисунке 4.3, можно сделать аналогичные выводы, что и рассматривая сечение P1-1, что также свидетельствует о применимости предлагаемого метода при восстановлении сложных связей. Стоит отметить, что при приближении поверхности к плоскости линии сечений могут значительно приближаться друг к другу, что подтверждает тот факт, что поверхность, построенная предлагаемым методом не склонна к избыточной осцилляции на плоских участках за счет использования ограничивающего угла, как метода, обеспечивающего управление аппроксимирующими кривыми.

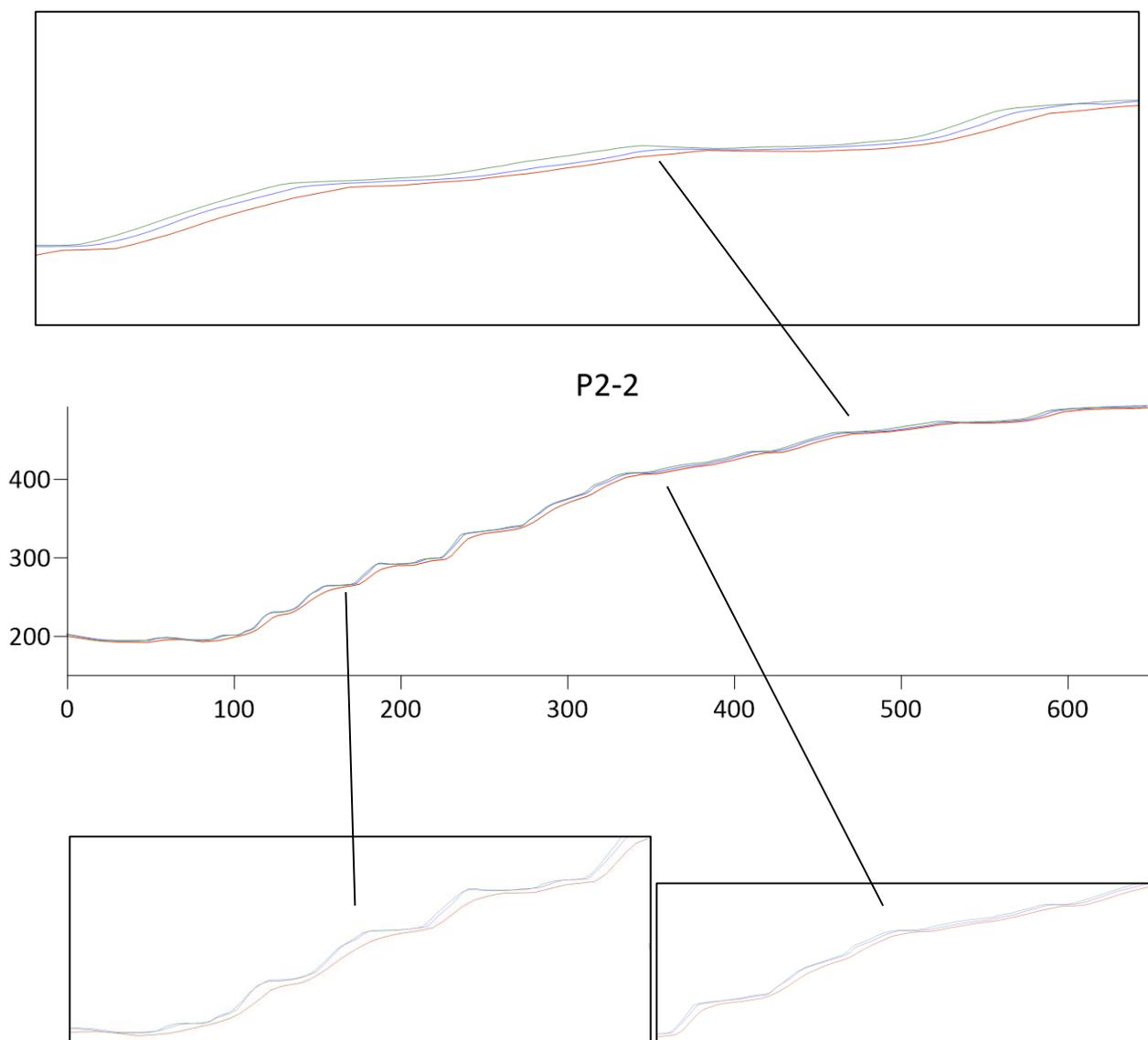


Рисунок – 4.3 Поперечное сечение P2-2

#### 4.3 Выводы по главе 4

Из сравнительного анализа методов пространственной интерполяции с разработанным можно сделать выводы, что разработанный метод позволяет адаптировать кусочно-линейную поверхность для восстановлений сложных нелинейных зависимостей в геопространственных данных, что подтверждается увеличением точности построения в сравнении с базовой поверхностью более чем на 15%.

Важно отметить, что при этом не отмечается избыточная осцилляция на условно плоских участках цифровых моделей рельефа, что указывает на возможность разработанного метода не вносить значительные искажения в линейные зависимости между исходными данными.

Дополнительная валидация подтверждает применимость разработанного метода при построении цифровых моделей рельефа со сложной пространственной структурой, вызванной, в том числе, антропогенным влиянием при ведении отработки полезных ископаемых.

Разработанные общие рекомендации для построения цифровых моделей рельефа с применением интерполяции с помощью разработанного метода можно считать основой методики для решения прикладных и научных задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена актуальная научная задача разработки метода повышения точности построения цифровой модели рельефа, имеющая важное значение для геодезии.

По результатам выполнения диссертационной работы сделаны следующие выводы:

1. На основе выполненных исследований, включающих совместное использование теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса по натурным измерениям и компьютерного моделирования, разработан метод построения цифровой модели рельефа с уточнением поверхностей локальных участков за счет добавления новых точек, принадлежащих нелинейной поверхности.

2. Сравнительный анализ разработанного метода построения цифровой модели с аналогами, в том числе методами кригинга, естественного соседа, триангуляции, радиальной базисной функции, минимальной кривизны, обратного расстояния показал, что использование разработанного метода при построении цифровых моделей рельефа приводит к повышению точности более чем на 15%

3. На основе полученных результатов выполнено обоснование использования предельного ограничивающего угла при интерполяции с использованием разработанного метода, обеспечивающего регуляризацию математической модели рельефа и управление аппроксимирующими кривыми с помощью изменения области поиска при исключении из обработки смежных граней, морфометрические характеристики которых отличаются от интерполируемой.

4. Усовершенствован метод определения высотного положения интерполируемой точки с обратным использованием барицентрических координат для расширения классического подхода к операции снижения индекса полюсов и исключения смещения при определении высотного положения определяемой точки.

5. Разработаны общие рекомендации по применению предлагаемого метода при построении цифровых моделей рельефа, которые являются основой инженерной методики для решения прикладных задач с использованием интерполяции с помощью разработанного метода.

Дальнейшее развитие темы диссертации предполагает проведение исследований, направленных на разработку методики построения цифровых моделей рельефа для горнотехнических объектов и нормативной документации по их использованию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдумуминов, Б. Анализ сегментации при проектировании цифровой модели рельефа/ Б. Абдумуминов, Д. Назирова, Р. Миртолипов // Вопросы науки и образования. – 2020. – № 15 (99). – С. 103-108.
2. Бахарев, Ф. С. Современные структуры баз данных цифровых моделей рельефа / Ф. С. Бахарев // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 5. – С. 82-85.
3. Быков, В. Л. Совершенствование способов автоматического построения цифровых моделей рельефа по материалам космической съемки / В. Л. Быков, О.Н. Пушак, М.В. Новородская, С.И. Шерстнева // Геодезия, землеустройство и кадастры: проблемы и перспективы развития: Сборник материалов II Международной научно-практической конференции, Омск, 26 марта 2020 года. – Омск: Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина, 2020. – С. 32-36.
4. Вальков, В.А. Создание растров высокой информативности по данным лазерного сканирования и аэрофотосъемки/ В.А. Вальков, К.П. Виноградов, Е.О. Валькова, М.Г. Мустафин // Геодезия и картография. – 2022. – Т. 83. – № 11. – С. 40-49. DOI: 10.22389/0016-7126-2022-989-11-40-49.
5. **Васильев, Б.Ю.** Исследование точности построения цифровых моделей рельефа различными методами пространственной интерполяции / **Б. Ю. Васильев** // Сборник материалов XXI Международной научно-практической конференции «Современные методы и технологии управления Социально-экономическими и инженерными Системами и процессами» / Белорусский национальный технический университет. – Минск: БНТУ, 2022. С 196.
6. **Васильев, Б. Ю.** Анализ и оптимизация цифровых моделей рельефа горнопромышленного объекта с открытым типом разработки / **Б. Ю. Васильев**, М. Г. Мустафин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 9. – С. 141–159. – DOI: 10.25018/0236\_1493\_2023\_9\_0\_141.
7. Гусев, В.Н. Исследование комплекса факторов, оказывающих влияние на погрешность реализации маркшейдерской съемки горных объектов с применением геодезического квадрокоптера / В.Н. Гусев, А.А. Блищенко, А.П. Санникова // Записки Горного института. – 2022. – Т. 254. – С. 173-179. – DOI: 10.31897/PMI.2022.35
8. Жалковский, Е. А. Прогрессивные технологии картографо-геодезического обеспечения Российской Федерации / Е. А. Жалковский // Геодезия и картография. – 1994. – № 3. – С. 8-13.

9. Жданов, Н. Д. О концепции перехода топографо-геодезического производства на автономные методы спутниковых координатных определений / Н. Д. Жданов, Н. Л. Макаренко // Геодезия и картография. – 1998. – № 3. – С. 1-5.
10. Жерлыгина, Е. С. Методика определения линейных параметров процессов сдвижений по цифровым моделям рельефа при разработке хибинских месторождений апатит-нефелиновых руд / Е. С. Жерлыгина, М. Г. Мустафин, **Б. Ю. Васильев**, Р. В. Николаев // Горный журнал. – 2023. – № 5. – С. 97–103. – DOI: 10.17580/gzh.2023.05.14.
11. Жермен-Лакур, П. Математика и САПР: в 2-х кн. Кн. 2. Вычислительные методы. Геометрические методы/ П. Жермен-Лакур, П. Л. Жорж, Ф. Пистр и др. // Перевод с фр. В. В. Коваленко, С. Д. Чигиря. – Москва : Мир. – 1989. – 260 с.
12. Задорин, А. И. Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках / А. И. Задорин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2015. – Т. 18. – № 3. – С. 289-303.
13. Кафтан, В. И. О форме и содержании понятия "инфраструктура пространственных данных" / В. И. Кафтан, В. Я. Цветков // Геодезия и картография. – 2013. – № 6. – С. 46-50.
14. Климанова, Д. А. Содержание цифровых моделей местности, используемых в геодезии / Д. А. Климанова, М. В. Быкова // Математическое моделирование и информационные технологии при исследовании явлений и процессов в различных сферах деятельности: Сборник материалов III Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов, Краснодар, 20 марта 2023 года / Отв. за выпуск Н.В. Третьякова. – Краснодар: Новация, 2023. – С. 190-194.
15. Комиссаров, А. В. Мониторинг мелиорируемых земель в Республике Башкортостан / А. В. Комиссаров, Ю. А. Ковшов, М. Г. Ишбулатов // Землеустройство, кадастр и мониторинг земель. – 2011. – № 10. – С. 056-061.
16. Костюк, Ю. Л. Предварительная обработка исходных данных для построения цифровой модели рельефа местности / Ю. Л. Костюк, А. Л. Фукс // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 281-285.
17. Кочнева, А. А. Методика построения цифровых моделей рельефа по данным воздушного лазерного сканирования / А. А. Кочнева // Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22. – № 2. – С. 44-54.
18. Кузьмин, С. Б. Цифровые модели рельефа: методика построения и возможности использования при геоморфологическом анализе/ С. Б. Кузьмин, Л. В. Данько, Е. А. Черкашин, Э. Ю. Осипов // Геоморфология. – 2007. – № 4. – С. 33-41.

19. Леонтьев, В. А. Электронные карты и экспертные системы в цифровой геоинформатике / В. А. Леонтьев, А. И. Майданич, Е. А. Стрелец // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1996. – № 5-6. – С. 166-170.
20. Лурье, И. К. Структура и содержание базы пространственных данных для мультимасштабного картографирования / И. К. Лурье, Т. Е. Самсонов // Геодезия и картография. – 2010. – № 11. – С. 17-23.
21. Майоров, А. А. Геоинформатика как важнейшее направление развития информатики / А. А. Майоров, В. Я. Цветков // Информационные технологии. – 2013. – № 11. – С. 2-7.
22. Мальцев, К. А. Использование цифровых моделей рельефа для автоматизированного построения границ водосборов / К. А. Мальцев, О. П. Ермолаев // Геоморфология. – 2014. – № 1. – С. 45-53.
23. Мартыненко, А. И. Методика обновления системы электронных автодорожных карт на основе многоуровневой модели базы пространственных данных / А. И. Мартыненко, И. П. Карачевцева // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2006. – № 1. – С. 161-165.
24. Медянцеv, А. Н. Расчет сдвижений и деформаций земной поверхности по площади при маркшейдерском обеспечении городских кадастров / А. Н. Медянцеv, И. Ю. Иванов, А. Н. Архипов, Л. И. Архипова // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2000. – Т. 6. – С. 42-44.
25. Минеев, А. Л. Подготовка цифровой модели рельефа для исследования экзогенных процессов северных территорий Российской Федерации / А. Л. Минеев, Ю. Г. Кутинов, З. Б. Чистова, Е. В. Полякова // Пространство и время. – 2015. – № 3. – С. 270-277.
26. Мустафин, М. Г. Развитие методов построения цифровой модели рельефа по данным многоточечных маркшейдерско-геодезических измерений / М. Г. Мустафин, **Б. Ю. Васильев**, В. В. Глазунов // Маркшейдерский вестник. – 2022. – №2. – С. 33-40.
27. Мустафин, М. Г. Диагностирование и определение аномальных зон магистральных трубопроводов на подводных переходах с использованием цифровой модели рельефа / М. Г. Мустафин, Н. С. Павлов, В. А. Вальков, **Б. Ю. Васильев** // Вестник СГУГиТ (Сибирского государственного университета геосистем и технологий). – 2023. – Т. 28. – № 1. – С. 33 – 44. – DOI: 10.33764/2411-1759-2023-28-1-33-44.
28. Мустафин, М.Г. Анализ точности построения цифровых моделей рельефа на основе данных периодического воздушного лазерного сканирования горнопромышленного объекта / М.Г. Мустафин, А. А. Кологривко, **Б.Ю. Васильев** // Горный журнал. – 2023. – № 2. – С. 56-62. – DOI: 10.17580/gzh.2023.02.09.

29. Новаковский, Б. А. Геоинформационное моделирование наводнений по материалам космической съемки (на примере г. Бийск, Алтайский край) / Б. А. Новаковский, О. Н. Колесникова, А. И. Прасолова, Р. В. Пермяков // Геоинформатика. – 2015. – № 1. – С. 15-20.
30. Новаковский, Б. А. Цифровая наземная стереосъемка: возможности и перспективы / Б. А. Новаковский, Р. В. Пермяков // Геодезия и картография. – 2014. – № 10. – С. 37-41.
31. Павлова, А. И. Анализ методов интерполирования высот точек для создания цифровых моделей рельефа / А. И. Павлова // Автометрия. – 2017. – Т. 53. – № 2. – С. 86-94.
32. Павлова, А. И. Применение методов цифрового моделирования рельефа для картографирования эрозионных земель / Павлова А. И. // Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture. – 2016. – № 2 (74). С. 159-169.
33. Подсадняя, Е. А. Способы получения цифровых моделей рельефа и методы их обработки / Е. А. Подсадняя, Е. А. Дрыгина // Геоинформационное картографирование в регионах России. – 2018. – С. 129-131.
34. Полянский, И. С. Баричесентрические координаты Пуассона—Римана / И. С. Полянский // Информатика и автоматизация. – 2016. – Т. 6. – № 49. – С. 32-48.
35. Сашурин, А. Д. Инновационная технология диагностики геодинамической активности геологической среды и оценки безопасности объектов недропользования / А. Д. Сашурин, А. Е., Балек, А. А. Панжин, С. В. Усанов // Горный журнал. – 2017. – № 12. – С. 16-20.
36. Середович, В. А. Особенности применения данных различных видов лазерного сканирования при мониторинге природных и промышленных объектов / В. А. Середович, М. А. Алтынцев, Р. А. Попов // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18. – С. 141-144.
37. Скворцов, А.В. Триангуляция Делоне и её применение/ А.В. Скворцов. – Томск: Издательство Томского университета. – 2002. – 128 с.
38. Сулимов, В. Д. Локальный поиск методом Хука-Дживса в гибридном алгоритме глобальной оптимизации / В. Д. Сулимов, П. М. Шкапов, С. К. Носачев // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2014. – № 6. – С. 107-123.
39. Тюшевский, Е. Ю. Геодезический мониторинг геодинамики активных разломов на территории Северо-Байкальского региона / Е. Ю. Тюшевский // Геодезия и картография. – 2009. – № 6. – С. 46-50.
40. Халугин, Е. И. Концептуальные основы создания и использования электронных карт / Е. И. Халугин, А. И. Майданич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 54-55.
41. Цирлин, А.М. Методы оптимизации для инженеров / А.М. Цирлин – Москва, Берлин: Директ-Медиа. – 2015. – 214 с.
42. Чернова, Л. И. Интерполяция поверхности по методу полюсов / Л. И. Чернова – Интерэкспо ГеоСибирь. – 2006. – Т. 1. – № 1. – С. 125-128.

43. Шенен, П. Математика и САПР: в 2 кн. Кн. 1. Основные методы. Теория полюсов / П. Шенен, М. Коснар, Гардан И.// пер. с фр. СД Чигирь. – 1988. – 208 с.
44. Agüera-Vega, F. Effects of point cloud density, interpolation method and grid size on derived Digital Terrain Model accuracy at micro topography level / F. Agüera-Vega, M. Agüera-Puntas, P. Martínez-Carricondo et al.// International Journal of Remote Sensing. – 2020. – Vol. 41, No. 21. – pp. 8281-8299. – DOI: 10.1080/01431161.2020.177178.8.
45. Ajvazi, B. A comparative analysis of different DEM interpolation methods in GIS: case study of Rahovec, Kosovo / B. Ajvazi, K. Czimber // Geodesy and Cartography. – 2019. – Vol. 45, No. 1 – pp. 43-48. – DOI: 10.3846/gac.2019.7921.
46. Akturk, E. Accuracy assesment of a low-cost UAV derived digital elevation model (DEM) in a highly broken and vegetated terrain / E. Akturk, A.O. Altunel // Measurement: Journal of the International Measurement Confederation. Elsevier B.V. – 2019. – Vol. 136. – pp. 382–386. – DOI: 10.1016/j.measurement.2018.12.101.
47. Alganci, U. Accuracy assessment of different digital surface models / U. Alganci, B. Besol, E. Sertel // ISPRS International Journal of Geo-Information. MDPI AG. – 2018. –Vol. 7, № 3. – DOI: 10.3390/ijgi7030114.
48. Alper, A. Evaluation of accuracy of dems obtained from uav-point clouds for different topographical areas/ A. Alper // International Journal of Engineering and Geosciences. –2017. – Vol. 2, No. 3. – pp. 110-117. – DOI: 10.26833/ijeg.329717.
49. Andrade, M. S. Airborne laser scanning for terrain modeling in the Amazon forest / M. S. Andrade, E. B. Gorgens, C. R. Reis et al. // Acta Amazonica. – 2018. – Vol. 48, No. 4. – pp. 271-279. – DOI: 10.1590/1809-4392201800132.
50. Arun, P. V. A comparative analysis of different DEM interpolation methods / P. V. Arun // The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science. – 2013. – Vol. 16, No. 2. – pp. 133-139. – DOI: j.ejrs.2013.09.001.
51. Behzadi, S. Introducing a novel digital elevation model using artificial neural network algorithm / S. Behzadi, A. Jalilzadeh // Civil Engineering Dimension. – 2020. – Vol. 22, No. 2. – pp. 47-51. – DOI: 10.9744/ced.22.2.47-51.
52. Boissonnat, J.D. The hierarchical representation of objects: the Delaunay tree. / J.D. Boissonnat, M. Teillaud //Association for Computing Machinery (ACM). – 1986. – pp. 260–268.
53. Boreggio, M. Evaluating the differences of gridding techniques for digital elevation models generation and their influence on the modeling of stony debris flows routing. A case study from rovina di cancia basin (North-eastern Italian alps) / M. Boreggio, M. Bernard, C. Gregoretti // Frontiers in Earth Science. – 2018. – Vol. 6. – pp. 89-115. – DOI: 10.3389/feart.2018.00089. 158.

54. Bui, L. K. Estimation of lidar-based gridded DEM uncertainty with varying terrain roughness and point density / L. K. Bui, C. L. Glennie // *ISPRS Open Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. – 2023. – Vol. 7. – pp. 100028-100041. – DOI: 10.1016/j.ojphoto.2022.100028.
55. Bui, L. K. Rigorous propagation of LiDAR point cloud uncertainties to spatially regular grids by a TIN linear interpolation / L. K. Bui, C. L. Glennie, P. J. Hartzell // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. – 2021. – Vol. 19. – pp. 1-5. – DOI: 10.1109/LGRS.2021.3134587.
56. Căţeanu, M. Accuracy of ground surface interpolation from airborne laser scanning (ALS) data in dense forest cover / M. Căţeanu, A. Ciubotaru // *ISPRS International Journal of Geo-Information*. – 2020. – Vol. 9, No. 4. – pp. 224-244. – DOI: 10.3390/ijgi9040224.
57. Cebulski, J. Reconstruction of landslide movements using Digital Elevation Model and Electrical Resistivity Tomography analysis in the Polish Outer Carpathians / J. Cebulski, B. Pasierb, D. Wierzchowski et al. // *CATENA*. Elsevier. – 2020. – Vol. 195. – P. 104758.
58. Cenanovic, M. Finite element procedures for computing normals and mean curvature on triangulated surfaces and their use for mesh refinement / M. Cenanovic, P. Hansbo, M.G. Larson // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. North-Holland. – 2020. – Vol. 372. – P. 113445.
59. Chaplot, V. Accuracy of interpolation techniques for the derivation of digital elevation models in relation to 159 landform types and data density / V. Chaplot, F. Darboux, H. Bourennane et al. // *Geomorphology*. – 2006. – Vol. 77, No. 1-2. – pp. 126–141. – DOI: 10.1016/j.geomorph.2005.12.010.
60. Chen, C. Robust Interpolation of DEMs from Lidar-Derived Elevation Data / C. Chen, Y. Li, N. Zhao et al. // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. – 2018. – Vol. 56, № 2. – pp. 1059–1068.
61. Chen, C. Effect of interpolation methods on quantifying terrain surface roughness under different data densities / C. Chen, Y. Bei, Y. Li, W. Zhou // *Geomorphology*. – 2022. – Vol. 417. – P. 108448. – DOI: 10.1016/j.geomorph.2022.108448.
62. Cheng, L. Registration of laser scanning point clouds: A review / L. Cheng, S. Chen, X. Liu et al. // *Sensors (Switzerland)*. MDPI AG. – 2018. – Vol. 18, № 5. – DOI: 10.3390/s18051641.
63. Cheng, M.L. Extracting three-dimensional (3D) spatial information from sequential oblique unmanned aerial system (UAS) imagery for digital surface modeling / M.L. Cheng, M. Matsuoka // *International Journal of Remote Sensing*. Taylor and Francis Ltd. – 2021. – Vol. 42, № 5. – P. 1643–1663. – DOI: 10.1080/01431161.2020.1842538.
64. Chymyrov, A. Comparison of different DEMs for hydrological studies in the mountainous areas / A. Chymyrov // *Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science*. Elsevier B.V. – 2021. – Vol. 24, № 3. – P. 587–594. – DOI: 10.1016/j.ejrs.2021.08.001.

65. Conforti, M. Morphological changes detection of a large earthflow using archived images, lidar-derived dtm, and uav-based remote sensing / M. Conforti, M. Mercuri, L. Borrelli // *Remote Sensing*. – 2020. – Vol. 13, № 1. – P. 120. – DOI: 10.3390/rs13010120.
66. Eker, R. Unmanned aerial vehicle (UAV)-based monitoring of a landslide: Gallenzerkogel landslide (Ybbs-Lower Austria) case study / R. Eker, A. Aydın, J. Hübl // *Environmental Monitoring and Assessment*. Springer International Publishing. – 2018. – Vol. 190, № 1. – DOI: 10.1007/s10661-017-6402-8.
67. Elkhrachy, I. Vertical accuracy assessment for SRTM and ASTER Digital Elevation Models: A case study of Najran city, Saudi Arabia / I. Elkhrachy // *Ain Shams Engineering Journal*. Ain Shams University. – 2018. – Vol. 9, № 4. – pp. 1807-1817. –DOI: 10.1016/j.asej.2017.01.007.
68. Erdede, S. B. Examining the interpolation methods used in forming the digital elevation models. / S. B. Erdede, S. Bektaş // *Celal Bayar University Journal of Science*. –2020. – Vol. 16, No. 2. – pp. 207-214.
69. Fernandez, A. Analysis of the behavior of three digital elevation model correction methods on critical natural scenarios / A. Fernandez, J. Adamowski, A. Petroselli // *Journal of Hydrology: Regional Studies*. Elsevier. – 2016. – Vol. 8. – pp. 304-315.
70. Forlani, G. Quality assessment of DSMs produced from UAV flights georeferenced with on-board RTK positioning / G. Forlani, E. Dall’Asta, F. Diotri et al.// *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2018. – Vol. 10, № 2. – p. 311 – DOI: 10.3390/rs10020311.
71. Gafurov, A. The methodological aspects of constructing a high-resolution DEM of large territories using low-cost UAVs on the example of the sarycum aeolian complex, Dagestan, Russia / A. Gafurov // *Drones*. – 2021. – Vol. 5, No. 1 – pp. 7-24. – DOI: 10.3390/drones5010007.
72. Gościewski, D. Adjusting the Regular Network of Squares Resolution to the Digital Terrain Model Surface Shape / D. Gościewski, M. Gerus-Gościewska // *ISPRS International Journal of Geo-Information*. – 2020. – Vol. 9, № 12. – p. 761. – DOI: 10.3390/ijgi9120761.
73. Grohmann, C.H. Dune migration and volume change from airborne LiDAR, terrestrial LiDAR and Structure from Motion-Multi View Stereo / C. H. Grohmann, G. P.Garcia, A. A. Affonso et al.// *Computers and Geosciences*. Elsevier Ltd. – 2020. – Vol. 143. – p. 104569.
74. Guan, L. The impact of horizontal errors on the accuracy of freely available Digital Elevation Models (DEMs) / L. Guan, H. Pan, S. Zou et al. // *International Journal of Remote Sensing*. Taylor and Francis Ltd. – 2020. –Vol. 41, № 19. – P. 7367-7383. – DOI: 10.1080/01431161.2020.1759840.
75. Guth, P. L. Digital elevation models: terminology and definitions / P. L. Guth, A. Van Niekerk, C. H. Grohmann et al. // *Remote Sensing*. – 2021. – Vol. 13, No. 18. – pp. 3581-3600. – DOI: 10.3390/rs13183581.

76. Habib, M. Impact of interpolation techniques on the accuracy of large-scale digital elevation model / M. Habib, Y. Alzubi, A. Malkawi et al. // *Open Geosciences*, De Gruyter Open Ltd. – 2020. – Vol. 12, No. 1. – pp. 190-202. – DOI: 10.1515/geo-2020-0012.
77. Habib, M. Evaluation of DEM interpolation techniques for characterizing terrain roughness / M. Habib // *Catena*. – 2021. – Vol. 198. – pp. 105072-105089. – DOI: 10.1016/j.catena.2020.105072.
78. Hashemi-Beni, L. Challenges and opportunities for UAV-based digital elevation model generation for flood-risk management: A case of princeville, north carolina / L. Hashemi-Beni, J. Jones, G.Thompson et al. // *Sensors (Switzerland)*. MDPI AG. – 2018. – Vol. 18, № 11. – p.3843. – DOI: 10.3390/s18113843.
79. Hastaoğlu, K.Ö. Monitoring 3D areal displacements by a new methodology and software using UAV photogrammetry / K. Ö. Hastaoğlu, Y. Gül, F. Poyraz et al. // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. Elsevier B.V. – 2019. – Vol. 83. – p.101916. – DOI: 10.1016/j.jag.2019.101916.
80. Helwig, Z.D. Development of a variogram procedure to identify spatial outliers using a supplemental digital elevation model / Z. D. Helwig, J.Guggenberger, A. C.Elmore et al. // *Journal of Hydrology X*. Elsevier. – 2019. – Vol. 3. – p. 100029.
81. Heritage, G. L. Influence of survey strategy and interpolation model on DEM quality/ G. L. Heritage, D. J. Milan, A. R. Large et al. // *Geomorphology*. – 2009. – Vol. 112, No. 3-4. – pp. 334-344. – DOI: 10.1016/j.geomorph.2009.06.024.
82. Hingee, K.L. Modelling discontinuous terrain from DSMs using segment labelling, outlier removal and thin-plate splines / K.L. Hingee, P. Caccetta, L. Caccetta // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. Elsevier. – 2019. – Vol. 155. – pp. 159–171.
83. Huang, C. Surface deformation monitoring in coal mine area based on PSI / C. Huang, H. Xia, J. Hu // *IEEE Access*. – 2019. – Vol. 7. – pp. 29672-29678.
84. Hui, Z. An improved morphological algorithm for filtering airborne LiDAR point cloud based on multi-level kriging interpolation / Z. Hui, Y. Hu, Y. Z. Yevenyo et al. // *Remote Sensing*. – 2016. – Vol. 8, No. 1. – pp. 35-50. – DOI: 10.3390/rs8010035.
85. Hui, Z. Automatic DTM extraction from airborne LiDAR based on expectation-maximization / Z. Hui, D. Li, S. Jin et al. // *Optics & Laser Technology*. – 2019. – Vol. 112. – pp. 43-55. – DOI: 10.1016/j.optlastec.2018.10.051.
86. Ikechukwu, M.N. Accuracy Assessment and Comparative Analysis of IDW, Spline and Kriging in Spatial Interpolation of Landform (Topography): An Experimental Study / M. N. Ikechukwu, E. Ebinne, U. Idorenyin et al. // *Journal of Geographic Information System*. Scientific Research Publishing, Inc. – 2017. – Vol. 09, № 03. – pp. 354–371.

87. Kang, Y. Topographic mapping on large-scale tidal flats with an iterative approach on the waterline method / Y. Kang, X. Ding, F. Xu et al. // *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. Academic Press. – 2017. – Vol. 190. – pp. 11–22.
88. Kochneva, A. A. Justification of quality estimation method of creation of digital elevation models according to the data of airborne laser scanning when designing the motor ways / A. A. Kochneva, A. I. Kazantsev // *Journal of Industrial Pollution Control*. – 2017. – Vol. 33, № 1. – pp. 1000-1006.
89. Kršák, B. Use of low-cost UAV photogrammetry to analyze the accuracy of a digital elevation model in a case study / B. Kršák, P. Blišťan, A. Pauliková et al. // *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*. Elsevier B.V. – 2016. – Vol. 91. – pp. 276-287.
90. Krzysztof, S. Comparison of various algorithms for DTM interpolation from LIDAR data in dense mountain forests / S. Krzysztof, M. Ciesielski, R. Bałazy et al. // *European Journal of Remote Sensing*. – 2016. – Vol. 49, No. 1. – pp. 599 - 621. – DOI: 10.5721/EuJRS20164932.
91. Li, H. High-resolution terrain modeling using airborne lidar data with transfer learning / H. Li, W. Ye, J. Liu et al. // *Remote Sensing*. MDPI. – 2021. – Vol. 13, № 17. – p.3448. – DOI: 10.3390/rs13173448.
92. Li, J. Digital Elevation Models for topographic characterisation and flood flow modelling along low-gradient, terminal dryland rivers: A comparison of spaceborne datasets for the Río Colorado, Bolivia / J. Li, Y. Zhao, P. Bates et al. // *Journal of Hydrology*. Elsevier B.V. – 2020. – Vol. 591. – p. 125617. – DOI: 10.1016/j.jhydrol.2020.125617.
93. Li, L. The effects of DEM interpolation on quantifying soil surface roughness using terrestrial LiDAR / L. Li, M. A. Nearing, M. H. Nichols et al. // *Soil and Tillage Research*. – 2020. – Vol. 198. – pp. 104520-104530. – DOI: 10.1016/j.still. 2019.104520.
94. Li, X. A novel semi-supervised method for airborne LiDAR point cloud classification / X. Li, C. Wen, Q. Cao et al. // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. Elsevier. – 2021. – Vol. 180. – pp. 117-129.
95. Lin, Y.C. Comparative analysis of different mobile LiDAR mapping systems for ditch line characterization / Y. C. Lin, R. Manish, D. Bullock et al. // *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2021. – Vol. 13, № 13. – p. 2485. – DOI: 10.3390/rs13132485.
96. Liu, Q. Analysis of the spatial differences in canopy height models from UAV LiDAR and photogrammetry / Q. Liu, L. Fu, Q. Chen et al. // *Remote Sensing*. – 2020. – Vol. 12, No. 18. – pp. 2884-2905. – DOI: 10.3390/rs12182884.
97. Liu, X. An Automated Processing Algorithm for Flat Areas Resulting from DEM Filling and Interpolation / X. Liu, N. Wang, J. Shao et al. // *ISPRS International Journal of Geo-Information*. – 2017. – Vol. 6. – p. 376. – DOI: 10.3390/ijgi6110376.

98. Majdisova, Z. Big geo data surface approximation using radial basis functions: A comparative study / Z. Majdisova, V. Skala // *Computers & Geosciences*. Pergamon. – 2017. – Vol. 109. – pp. 51-58.
99. Marsh, C.B. Multi-objective unstructured triangular mesh generation for use in hydrological and land surface models / C. B. Marsh, R. J. Spiteri, J. W. Pomeroy et al. // *Computers and Geosciences*. Elsevier Ltd. – 2018. – Vol. 119. – pp. 49-67.
100. McNabb, R. Sensitivity of glacier volume change estimation to DEM void interpolation / R. McNabb, C. Nuth, A. Kääb et al. // *Cryosphere*. Copernicus GmbH. – 2019. – Vol. 13, № 3. – pp. 895-910. – DOI: 10.5194/tc-13-895-2019.
101. McRoberts, R.E. Using genetic algorithms to optimize k-Nearest Neighbors configurations for use with airborne laser scanning data / R. E. McRoberts, G. M. Domke, Q. Chen et al. // *Remote Sensing of Environment*. Elsevier. – 2016. – Vol. 184. – pp. 387–395.
102. Meyer, T. H. The discontinuous nature of kriging interpolation for digital terrain modeling / T. H. Meyer // *Cartography and Geographic Information Science*. – 2004. – Vol. 31, No. 4. – pp. 209-216. – DOI: 10.1559/1523040042742385.
103. Mustafin, M. G. Topographic-geodetic and cartographic support of the Arctic zone of the Russian Federation / M. G. Mustafin, V. N. Balandin, M. J. Bryn et al. // *Journal of Mining Institute*. – 2018. – Vol. 232. – pp. 375-382. – DOI: 10.31897/pmi.2018.4.375.
104. O’Callaghan, J. F. The extraction of drainage networks from digital elevation data / J. F. O’Callaghan, D. M. Mark // *Computer vision, graphics, and image processing*. – 1984. – Vol. 28. – pp. 323-344.
105. Pakoksung, K. Assessment and comparison of Digital Elevation Model (DEM) products in varying topographic, land cover regions and its attribute: a case study in Shikoku Island Japan / K. Pakoksung, M. Takagi // *Modeling Earth Systems and Environment*. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH. – 2021. – Vol. 7, № 1. – pp. 465-484. – DOI: 10.1007/s40808-020-00891-x.
106. Pavlova, A.I. Analysis of elevation interpolation methods for creating digital elevation models / A.I. Pavlova // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. Allerton Press Incorporation. – 2017. – Vol. 53, № 2. – pp. 171-177.
107. Perumal, L. New approaches for Delaunay triangulation and optimisation / L. Perumal // *Heliyon*. Elsevier Ltd. – 2019. – Vol. 5, № 8.
108. Polat, N. An Experimental Analysis of Digital Elevation Models Generated with Lidar Data and UAV Photogrammetry / N. Polat, M. Uysal // *Journal of the Indian Society of Remote Sensing*. Springer. – 2018. – Vol. 46, № 7. – pp. 1135-1142. – DOI: 10.1007/s12524-018-0760-8.

109. Prakash Mohanty, M. Sensitivity of various topographic data in flood management: Implications on inundation mapping over large data-scarce regions / M. P. Mohanty, S. Nithya, A. S. Nair et al. // *Journal of Hydrology*. Elsevier B.V. – 2020. – Vol. 590. – DOI: 10.1016/j.jhydrol.2020.125523.
110. Putri, A.R.D. A New South Polar Digital Terrain Model of Mars from the High-Resolution Stereo Camera (HRSC) onboard the ESA Mars Express / A. R. D. Putri, P. Sidiropoulos, J. P. Muller et al. // *Planetary and Space Science*. Elsevier Ltd. – 2019. – Vol. 174. – pp. 43-55.
111. Quinn, P. The prediction of hillslope flow paths for distributed hydrological modelling using digital terrain models / P. Quinn, K. Beven, P. Chevallier et al. // *Hydrological Processes*. – 1991. – Vol. 5, № 1. – pp. 59-79.
112. Roostae, M. Effects of Digital Elevation Model Resolution on Watershed-Based Hydrologic Simulation / M. Roostae, Z. Deng // *Water Resources Management*. Springer. – 2020. – Vol. 34, № 8. – pp. 2433-2447. – DOI: 10.1007/s11269-020-02561-0.
113. Rusli, N. Accuracy Assessment of DEM from UAV and TanDEM-X Imagery / N. Rusli, M. R. Majid, N. F. Razali et al. // *Proceedings - 2019 IEEE 15th International Colloquium on Signal Processing and its Applications, CSPA 2019*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. – 2019. – pp. 127-131. – DOI: 10.1109/CSPA.2019.8696088.
114. Saraf, N. M. Data verification of lidar-derived DEM from different interpolation techniques / N. M. Saraf, K. N. Kamarolzaman, N. M. Saad et al. // *Charting the Sustainable Future of ASEAN in Science and Technology: Proceedings from the 3rd International Conference on the Future of ASEAN (ICoFA) 2019*, Springer Singapore. – 2020. – Vol. 2. – pp. 361-375. – DOI: 10.1007/978-981-15-3434-8\_31.
115. Saritha, G. Digital elevation model and terrain mapping using LiDAR / G. Saritha, T. Saravanan, K. Anbumani et al. // *Materials Today: Proceedings*. Elsevier. – 2021. – Vol. 46. – pp. 3979-3983.
116. Šašak, J. Combined use of terrestrial laser scanning and UAV photogrammetry in mapping alpine terrain / J. Šašak, M. Gally, J. Kaňuk et al. // *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2019. – Vol. 11, № 18. – DOI: 10.3390/rs11182154.
117. Schlögel, R. Optimizing landslide susceptibility zonation: Effects of DEM spatial resolution and slope unit delineation on logistic regression models / R. Schlögel, I. Marchesini, M. Alvioli et al. // *Geomorphology*. Elsevier. – 2018. – Vol. 301. – pp. 10-20.
118. Setiyoko, A. Minimax approach for semivariogram fitting in ordinary kriging / A. Setiyoko, T. Basaruddin, A. M. Arymurthy // *IEEE Access*. – 2020. – Vol. 8. – pp. 82054-82065. – DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2991428.

119. Sharma, M. Potential of airborne LiDAR data for terrain parameters extraction / M. Sharma, R. D. Garg, V. Badenko et al. // *Quaternary International*. Pergamon. – 2021. – Vol. 575. – pp. 317-327.
120. Shi, W. Z. Estimating the propagation error of DEM from higherorder interpolation algorithms / W. Z. Shi, Q. Q. Li, C. Q. Zhu // *International Journal of Remote Sensing*. –2005. – Vol. 26, No. 14. – pp. 3069-3084. – DOI: 10.1080/01431160500057905.
121. Sloan, S.W. A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane / S.W. Sloan // *Advances in Engineering Software*. Elsevier. – 1987. – Vol. 9, № 1. – pp. 34-55.
122. Smith, T. Determining the optimal grid resolution for topographic analysis on an airborne lidar dataset / T. Smith, A. Rheinwalt, B. Bookhagen // *Earth Surface Dynamics*. – 2019. – Vol. 7, No. 2. – pp. 475-489. – DOI: 10.5194/esurf-7-475-2019.
123. Štular, B. Airborne LiDAR-derived digital elevation model for archaeology / B. Štular, E. Lozić, S. Eichert // *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2021. –Vol. 13, № 9. – DOI: 10.3390/rs13091855.
124. Štular, B. Interpolation of airborne LiDAR data for archaeology / B. Štular, E. Lozić, S. Eichert // *Journal of Archaeological Science: Reports*. – 2023. – Vol. 48. – pp. 103840-103856. – DOI: 10.1016/j.jasrep.2023.103840.
125. Stupariu, M.S. Discrete curvatures of triangle meshes: From approximation of smooth surfaces to digital terrain data / M.S. Stupariu // *Computers and Geosciences*. Elsevier Ltd. – 2021. – Vol. 153.
126. Telling, J. Review of Earth science research using terrestrial laser scanning / J. Telling, A. Lyda, P. Hartzell et al. // *Earth-Science Reviews*. Elsevier B.V. – 2017. – Vol. 169. – pp. 35-68.
127. Tesema, T.A. Impact of identical digital elevation model resolution and sources on morphometric parameters of Tena watershed, Ethiopia / T.A. Tesema // *Heliyon*. Elsevier Ltd. – 2021. – Vol. 7, № 11. – DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e08345.
128. Tomková, M. Improvements to airborne laser scanning data filtering in sandstone landscapes / M. Tomková, M. Potůčková, J. Lysák et al. // *Geomorphology*. –2022. – Vol. 414. – article 108377. – DOI: 10.1016/j.geomorph.2022.108377.
129. Trier, O. D. Using deep neural networks on airborne laser scanning data: Results from a case study of semi-automatic mapping of archaeological topography on Arran, Scotland / O. D. Trier, D. C. Cowley, A. U. Waldeland // *Archaeological Prospection*. – 2019. – Vol. 26, No. 2. – pp. 165-175. – DOI: 10.1002/arp.1731.
130. Uuema, E. Vertical accuracy of freely available global digital elevation models (Aster, aw3d30, merit, tandem-x, srtm, and nasadem) / E. Uuema, S. Ahi, B. Montibeller et al.// *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2020. – Vol. 12, № 21. – pp. 1-23. – DOI: 10.3390/rs12213482.

131. van Nieuwenhuizen, N. Automated mapping of transportation embankments in fine-resolution lidar DEMs / N. van Nieuwenhuizen, J.B. Lindsay, B. de Vries // *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2021. – Vol. 13, № 7. – DOI: 10.3390/rs13071308.
132. Wang, J. Construction and optimization method of the open-pit mine DEM based on the oblique photogrammetry generated DSM / J. Wang, L. Wang, M. Jia et al. // *Measurement*. Elsevier. – 2020. – Vol. 152. – p. 107322.
133. Yan, W. Y. Scan line void filling of airborne LiDAR point clouds for hydroflattening DEM / W. Y. Yan // *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. – 2021. – Vol. 14. – pp. 6426-6437. – DOI: JSTARS.2021.3089288.
134. Yaquiu, Y. Mining Ground Surface Information Extraction and Topographic Analysis Using UAV Video Data. / Y. Yaquiu, J. Cunhao, L. Jing et al. // *E3S Web of Conferences*. – EDP Sciences. – 2020. – Vol. 194. – p. 05030. – DOI 10.1051/e3sconf/202019405030.
135. Zhang, K. Comparison of TanDEM-X DEM with LiDAR data for accuracy assessment in a coastal urban area / K. Zhang, D. Gann, M. Ross et al. // *Remote Sensing*. MDPI AG. – 2019. – Vol. 11, № 7. – p. 876. – DOI: 10.3390/rs11070876.
136. Zhang, T. Method of establishing an underwater digital elevation terrain based on kriging interpolation / T. Zhang, X. Xu, S. Xu // *Measurement*. Elsevier. – 2015. – Vol. 63. – pp. 287-298.
137. Zhao, M. An indirect interpolation model and its application for digital elevation model generation / M. Zhao // *Earth Science Informatics*. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH. – 2020. – Vol. 13, № 4. – pp. 1251-1264.
138. Zhao, P. Airborne multispectral LiDAR point cloud classification with a feature Reasoning-based graph convolution network / P. Zhao, H. Guan, D. Li et al. // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. Elsevier. – 2021. – Vol. 105. – p. 102634.
139. Zheng, X. An improved ANUDEM method combining topographic correction and DEM interpolation / X. Zheng, H. Xiong, L. Yue et al. // *Geocarto International*. Taylor and Francis Ltd. – 2016. – Vol. 31, № 5. – pp. 492-505.
140. Zhou, B. New high-fidelity terrain modeling method constrained by terrain semantics / B. Zhou, J. Xu, X. Zhang et al. // *PLoS ONE*. Public Library of Science. – 2018. – Vol. 13, № 6. – DOI: 10.1371/journal.pone.0198530.
141. Zhu, J. Classification of airborne laser scanning point cloud using point-based convolutional neural network / J. Zhu, L. Sui, Y. Zang et al. // *ISPRS International Journal of Geo-Information*. MDPI AG. – 2021. – Vol. 10, № 7. – p. 444.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Акт внедрения



labengi.com

ООО «Лаборатория инжиниринга»  
Россия, Санкт-Петербург, Афонская д.2  
тел. офиса: (812) 244-29-04  
эл. почта: info@labengi.com

Утверждаю  
Генеральный директор  
ООО «Лаборатория инжиниринга»  
О.С. Ануфриев

Дата «02» 10 2023 г.

## АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертации  
Васильева Богдана Юрьевича  
соискателя ученой степени кандидата технических наук по специальности  
1.6.22. Геодезия

Комиссия в составе:

Председатель: генеральный директор ООО «Лаборатория инжиниринга» – Ануфриев О.С.;  
Члены комиссии: секретарь Зубакина Д.А., заместитель генерального директора Братчиков А.В.,  
эксперт Парфенова П.В., составили настоящий акт о том, что результаты диссертации на тему:  
«Метод построения цифровой модели рельефа с применением интерполяции на основе теории  
полюсов и алгоритма Хука-Дживса» рассмотрены на заседании ООО «Лаборатория инжиниринга»  
от 02.10.2023 и внедрены в производственную деятельность, а именно использованы при создании  
цифровых моделей рельефа:

- математической модели рельефа на основе базовой триангуляционной поверхности с  
заполнением пропусков в дискретных элементах с использованием разработанного метода на  
основе теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса;
- экспериментального исследования точности построений по предлагаемым параметрам с  
использованием разработанной численной модели.

Использование указанных результатов позволило:

- увеличить точность построения цифровых моделей рельефа на 15%;
- уменьшить время на ручную доработку цифровых моделей рельефа на 50%;
- регулировать плотность заполнения дискретных элементов новым значениями;
- управлять гладкостью цифровой модели рельефа с использованием метода регуляризации.

Председатель комиссии:  
генеральный директор  
ООО «Лаборатория инжиниринга»

Члены комиссии:  
Секретарь

Заместитель генерального директора

Эксперт



О.С. Ануфриев

Д.А. Зубакина

А.В. Братчиков

П.В. Парфенова

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023660393

**Tri Optima (Оптимизация триангуляции)**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет» (RU)*

Авторы: *Васильев Богдан Юрьевич (RU), Мустафин Мурат Газизович (RU)*

Заявка № 2023619282

Дата поступления 12 мая 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 19 мая 2023 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

*Ю.С. Зубов*