

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель программы
аспирантуры
профессор А.М. Щипачёв

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТРАНСПОРТА И
ХРАНЕНИЯ НЕФТИ И ГАЗА**

Подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Область науки:	2. Технические науки
Группа научных специальностей:	2.8. Недропользование и горные науки
Научная специальность:	2.8.5. Строительство и эксплуатация нефтегазопроводов, баз и хранилищ
Отрасли науки:	Технические
Форма освоения программы аспирантуры:	Очная
Срок освоения программы аспирантуры:	4 года
Составитель:	к.т.н. В.В. Пшенин

Санкт-Петербург

I. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Рассмотрим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей.

В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы. В соответствии с этим рассмотрим два типа полей – скалярные и векторные.

1.1. Скалярные поля

1.1.1. Определение и примеры скалярных полей

Пусть Ω – некоторая область в пространстве. Мы говорим, что в этой области задано скалярное поле, если каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$.

Примерами скалярных полей могут служить поле температур внутри некоторого нагретого тела (в каждой точке M этого тела задана соответствующая температура $U(M)$), поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света. и т. д.

Важным примером скалярного поля служит поле плотности массы. Напомним это понятие. Пусть некоторая пространственная область Ω заполнена непрерывно распределенной массой. Сопоставив каждой области V , содержащейся в Ω , ту массу, которая находится в области V , мы получим аддитивную функцию области $\mu(V)$. Если в каждой точке существует производная от $\mu(V)$ по объему, то эта производная называется плотностью массы, а значения этой производной образуют скалярное поле, называемое полем плотности массы. Аналогично, рассматривая некоторое непрерывное распределение зарядов по пространственной области Ω , мы приходим к скалярному полю плотности электрического заряда. Число подобных примеров можно было бы увеличить.

Наряду с полями, заданными в пространственных областях, часто приходится рассматривать и плоские скалярные поля. Примером такого поля может служить освещенность части плоскости, создаваемая каким-либо источником света.

1.1.2. Поверхности и линии уровня.

Если $U(M)$ – некоторое скалярное поле, то, введя в области, где задано поле, декартовы координаты можно представить это поле в виде функции $U(x, y, z)$ координат точки M .

Задание скалярного поля с помощью фиксированной системы координат и соответствующей функции $U(x, y, z)$ не всегда дает достаточно ясное представление о поведении этого поля. Для получения более наглядной картины, удобно пользоваться так называемыми поверхностями уровня. Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$

называется геометрическое место точек, в которых поле $U(M)$ имеет данное фиксированное значение C . Уравнение поверхности уровня имеет вид:

$$U(x, y, z) = C. \quad (1)$$

Ясно, что поверхности уровня (отвечающие различным C) заполняют всю область, в которой определено поле, и никакие две поверхности

$$U(M) = C_1 \text{ и } U(M) = C_2$$

не имеют общих точек. Задание всех поверхностей уровня с отметкой на них соответствующих значений C равносильно заданию самого поля $U(M)$. Взаимное расположение поверхностей, уровня в пространстве, дает наглядное представление о соответствующем скалярном поле.

Указанный способ изображения поля особенно удобен тогда, когда речь идет о поле, заданном, не в пространственной, а в плоской области. Такое поле описывается функцией



Рис. 1

двух переменных $U(x, y)$. Равенство вида $U(x, y) = C$ определяет, вообще говоря, некоторую кривую. Такие кривые называются линиями уровня плоского скалярного поля $U(M)$. С помощью линий уровня обычно изображается рельеф местности на топографических картах, а именно, на них проводятся линии, состоящие из точек, имеющих одну и ту же

высоту над уровнем моря; эти линии называются горизонталями (рис. 1). Распределение температур, давлений, количества осадков и т. п. обычно также изображается на специальных картах с помощью соответствующих линий уровня (называемых изотермами в случае температур, изобарами, когда речь идет о давлениях, и т. д.).

1.1.3. Различные типы симметрии полей.

Во многих физических задачах приходится иметь дело с полями, обладающими теми или иными специальными свойствами симметрии, облегчающими изучение таких полей. Укажем некоторые частные случаи.

а) Плоскопараллельное поле.

Если скалярное поле $U(M)$ в какой-либо декартовой системе координат можно описать функцией, зависящей не от трех, а только от двух координат, скажем, функцией вида $U(x, y)$, то такое поле называется плоскопараллельным (или двумерным). Иначе говоря, поле $U(M)$ называется плоскопараллельным, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $U(M)$ переходит само в себя. Поверхности уровня такого поля - это семейство цилиндрических поверхностей (рис. 2), в соответствующим образом выбранной системе координат они задаются уравнениями вида

$$U(x, y) = C.$$

б) Осесимметрическое поле.

Если для поля $U(M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат, в которой оно изображается функцией, зависящей только от переменных $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z (но не от угла φ), то это поле называется осесимметрическим. Иначе говоря, поле $U(M)$ осесимметрическое, если оно переходит само в себя при повороте пространства (на произвольный угол) вокруг некоторой фиксированной прямой - оси симметрии этого поля.

Поверхности уровня такого поля представляют собой, очевидно, поверхности вращения (рис. 3). Если эти поверхности вращения - круглые цилиндры (рис. 4) т.е. если

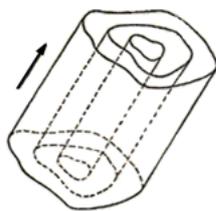


Рис. 2

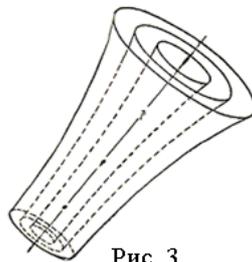


Рис. 3

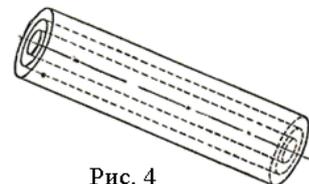


Рис. 4

поле $U(M)$ в соответствующей цилиндрической системе координат изображается функцией, зависящей лишь от одной координаты r (расстояния точки от оси симметрии поля), то $U(M)$ называется цилиндрическим полем.

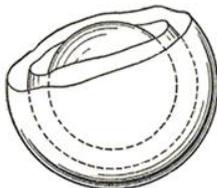


Рис. 5

в) Сферическое поле.

Если значения $U(M)$ зависят лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0 , то такое поле называется сферическим. Поверхности уровня сферического поля семейство концентрических сфер (рис. 5).

1.1.4. Производная по направлению.

При изучении скалярного поля методами анализа мы должны в первую очередь описать его локальные свойства, т. е. изменение величины $U(M)$ при переходе от данной точки M к близким точкам. Для этого мы используем производную поля по направлению. Напомним это понятие.

Пусть $U(M)$ - скалярное поле. Рассмотрим две близкие точки M и M' и составим отношение

$$\frac{U(M') - U(M)}{h} \quad (2)$$

где h - длина отрезка MM' .

Пусть точка M' приближается к M , причем направление отрезка MM' все время совпадает с направлением фиксированного единичного вектора λ . Если при этом

отношение (2) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется производной скалярного поля $U(M)$ в точке M по направлению λ и обозначается:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \lambda}$$

Производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ характеризует скорость изменения величины $U(M)$, в направлении λ .

Для вычисления $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ выберем некоторую систему координат и представим $U(M)$ в виде $U(x, y, z)$.

Пусть направление λ образует с осями координат углы α, β, γ . Тогда

$$MM' = h (i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma)$$

и

$$U(M') = U(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma), \quad (3)$$

а производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ совпадает с производной по h от сложной функции (3) при $h = 0$.

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \lambda} = \frac{\partial U(M')}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma \quad (4)$$

1.1.5. Градиент скалярного поля.

Выражение (6.4) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: единичного вектора

$$\lambda = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

определяющего направление, по которому берется производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ и вектора, имеющего компоненты

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

Этот вектор называется градиентом скалярного поля U и обозначается символом $\text{grad } U$.

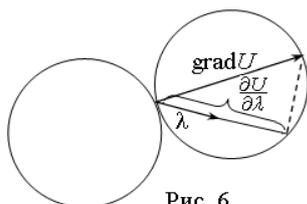


Рис. 6

Таким образом,

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (5)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\text{grad } U, \lambda) \quad (6)$$

Рис. 6 дает наглядную интерпретацию выражения производной по направлению как проекции $\text{grad } U$ на это направление.

Из формулы (6), которую можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cos \varphi$$

и (где φ - угол между $\text{grad } U$ и единичным вектором λ), видно, что в каждой точке, в которой $\text{grad } U \neq 0$, существует единственное направление, по которому $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение, т. е. единственное направление наибо́льшего возрастания функции U . Это

направление совпадает с направлением вектора $\text{grad } U$. Действительно, для этого направления $\varphi = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U|,$$

в то время как для всех других направлений

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cos \varphi < |\text{grad } U|$$

Итак, мы получили, что направление вектора $\text{grad } U$ - это направление наибо́льшего возрастания величины U , а длина вектора $\text{grad } U$ равна скорости возрастания величины U в этом направлении.

Однако ни направление наибо́льшего возрастания функции, ни величина ее производной в этом направлении не зависят, очевидно, от выбора системы координат. Мы установили, таким образом, что градиент скалярного поля зависит лишь от самого поля, но не от выбора системы координат (хотя из равенства (5), принятого нами за определение градиента, это сразу и не видно).

Производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ в данной точке M - это компоненты вектора, нормального к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, проходящей через эту точку. Таким образом, в каждой точке поля U градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Назовем линией градиента скалярного поля и всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $\text{grad } U$ в этой же точке. Таким образом, линии градиента поля - это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего.

Можно показать, что если функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, то через каждую точку области, в которой

задано поле U , проходит одна и только одна линия градиента. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

1.2.1. Определение и примеры векторных полей.

Мы говорим, что, в некоторой области Ω определено векторное поле, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие определенный вектор $A(M)$.

Один из важных примеров векторных полей - это поле скоростей стационарного потока жидкости. Оно определяется так: пусть область Ω заполнена жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью v , не зависящей от времени (но различной, вообще говоря, в разных точках); поставив в соответствие каждой, точке M из Ω вектор $v = v(M)$, мы получим векторное поле, называемое полем, скоростей.

Другой важный пример векторного поля - это поле тяготения. Пусть в пространстве распределена некоторая масса. Тогда на материальную точку с массой 1, помещенную в данную точку M , действует некоторая гравитационная сила. Эти силы, определенные в каждой точке, образуют векторное поле, называемое полем тяготения (отвечающим данному распределению масс) или гравитационным полем.

Если в пространстве распределены каким-либо образом электрические заряды, то на единичный электрический заряд, помещенный в точку M , эти заряды действуют с определенной силой $F(M)$. Образованное этими силами векторное поле называется электростатическим полем.

И поле тяготения, и электрическое поле представляют собой примеры силовых полей.

Если $A(M)$ - некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $A(M)$ как совокупность трех скалярных функций - компонент этого вектора.

1.2.2. Векторные линии и векторные трубки.

Пусть в области Ω задано векторное поле $A(M)$. Кривая L , лежащая в Ω , называется векторной линией если в каждой точке этой кривой направление (касательной к ней совпадает с направлением вектора A в этой же точке. В частности, если поле A есть поле скоростей стационарного потока жидкости, то его векторные линии - это траектории частиц жидкости.

В вопросах связанных с изучением полей, важную роль играет задача о нахождении векторной линии поля A , проходящей через данную точку M_0 .

Аналитически эта задача формулируется, очевидно, так: требуется найти вектор-функцию $r(t)$, удовлетворяющую условиям

$$r'(t) = \lambda A, \quad r(t_0) = r_0 \quad (7)$$

где r_0 - радиус-вектор начальной точки M_0 ,

t_0 - начальный момент времени,

λ - произвольная числовая величина.

Можно показать, что если компоненты P , Q , R вектора A непрерывно дифференцируемые функции координат ни в одной точке не обращающиеся в нуль одновременно, то условия (7) действительно определяют в той области, в которой задано поле A , одну и только одну векторную линию.

Ограниченная некоторой поверхностью Σ часть пространства, в котором задано векторное поле A , называется векторной трубкой, если в каждой точке поверхности Σ нормаль к Σ ортогональна вектору A в этой же точке. Иначе говоря, векторная трубка - это часть пространства состоящая из целых векторных линий; каждая векторная линия или целиком лежит внутри данной векторной трубки, или находится целиком вне ее. Можно сказать, что поверхность Σ , ограничивающая векторную трубку, соткана из векторных линий.

Если снова представить себе векторное поле A как поле скоростей движущейся жидкости, то векторная трубка - это та часть пространства, которую «заметает» при своем перемещении некоторый фиксированный объем жидкости.

1.2.3. Различные виды симметрии векторных полей.

Изучение векторного поля (как и скалярного) существенно облегчается, если это поле обладает теми или иными свойствами симметрии. Перечислим некоторые важнейшие частные случаи.

а) Плоскопараллельное поле.

Если для данного векторного поля A можно подобрать декартову систему координат, в которой компоненты поля A имеют вид $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ (т. е. не зависят от z), то поле A называется плоскопараллельным.

Если при этом $R(x, y) = 0$, то поле A называется плоским. Примером такого поля может служить поле скоростей жидкости, скорости частиц которой параллельны некоторой фиксированной плоскости и не зависят от расстояния частицы до данной плоскости (плоский поток). Векторные линии такого поля - плоские кривые (одни и те же в каждой параллельной плоскости).

б) Осесимметрическое поле.

Векторное поле A называется осесимметрическим, если существует такая цилиндрическая система координат r, φ, z , что в каждой точке M вектор $A(M)$ зависит лишь от r и z , но не от φ . Иными словами такое поле переходит само в себя при повороте вокруг оси z .

Если вектор $A(M)$ зависит только от r , то поле называется цилиндрическим.

в) Одномерное поле.

Векторное поле называется одномерным, если существует такая декартова система координат, в которой компоненты этого поля имеют вид $P(x, y), 0, 0$. Векторные линии такого поля представляют собой, очевидно, совокупность всех прямых, параллельных оси x .

1.2.4. Поле градиента. Потенциальное поле.

Рассмотрим снова некоторое скалярное поле $U(M)$. Построив в каждой точке M вектор $\text{grad } U$, мы получим векторное поле - поле градиента скалярной величины U . Введем следующее:

Определение. Векторное поле $A(M)$ называется потенциальным, если его можно представить как (градиент некоторого скалярного поля $U(M)$):

$$A = \text{grad } U.$$

Само скалярное поле U называется при этом потенциалом векторного поля A .

Рассмотрим следующий пример.

Пусть $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (т. е. U - сферическое поле). Найдём $\text{grad } U$.

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial U}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f'(r) \frac{z}{r}.$$

Таким образом,

$$\text{grad } U = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{r} = xi + yj + zk. \quad (8)$$

Если векторное поле A имеет потенциал, то этот потенциал определяется полем A однозначно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Действительно, если скалярные поля U и V имеют один и тот же градиент, то

$$\text{grad } (U - V) \equiv 0.$$

Но тогда и производная от $U - V$ по любому направлению равна нулю в любой точке, откуда сразу следует, что

$$U - V = \text{const.}$$

Векторные линии потенциального поля A представляют собой, разумеется, линии градиента его потенциала U , т. е. линии наиболее быстрого изменения этого потенциала.

Естественно возникает вопрос об условиях, при которых данное векторное поле A потенциально. Действительно, выражение

$$P dx + Q dy + R dz$$

(где P, Q, R - непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные 1-го порядка) служит полным дифференциалом некоторой однозначной функции U (x, y, z) в том и только том случае, если P, Q, R удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (9)$$

Но если

$$P dx + Q dy + R dz = dU,$$

то

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

т. е. условие (9) как раз и означает, что поле (P, Q, R) потенциально.

Итак, для того чтобы векторное поле A = (P, Q, R), имеющее непрерывные и непрерывно дифференцируемые компоненты, было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (9).

Если A - потенциальное векторное поле, то фактическое нахождение его потенциала сводится к нахождению функции по ее полному дифференциалу

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz + C$$

а для двух переменных

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C$$

к понятию потенциального поля мы еще вернемся.

Пример. Пусть в начало координат O помещена масса t. Если теперь в некоторую точку M (x, y, z) поместить единичную массу, то на нее будет действовать сила притяжения равная

$$F = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Эти силы, определяемые в каждой точке пространства, образуют векторное поле - поле тяготения точечной массы t. Его можно представить как градиент скалярной величины

$$\frac{\gamma \cdot m}{r}$$

называемой ньютоновским потенциалом точечной массы t. В самом деле, воспользовавшись формулой (8), получаем

$$\text{grad} \frac{\gamma \cdot m}{r} = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

1.3. Поток векторного поля. Дивергенция

1.3.1. Поток векторного поля через поверхность.

Количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ равно интегралу

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma$$

Где A_n - нормальная составляющая вектора скорости $A = (P, Q, R)$.

Эту величину мы назвали потоком жидкости через поверхность Σ . Пусть теперь A - произвольное векторное поле и Σ - ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma$$

мы назовем потоком векторного поля, A через поверхность Σ . Таким образом, если A - скорость движения жидкости, то поток вектора A через некоторую поверхность равен количеству жидкости протекающей через эту поверхность за единицу времени. Для векторного поля иной природы поток имеет, конечно, другой физический смысл.

Пример. Пусть $U = U(x, y, z)$ - поле температур внутри некоторого тела, k - коэффициент теплопроводности и $A = \text{grad} U$. Согласно закону Фурье, количество тепла dQ , протекающее за единицу времени через элемент $d\sigma$ некоторой поверхности Σ , выражается формулой

$$dQ = -k \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma, \quad (10)$$

где $\frac{\partial U}{\partial n}$ - производная поля температур в направлении нормали к $d\sigma$. (Знак минус в правой части равенства (10) отвечает тому известному факту, что тепло течет от более нагретых частей тела к менее нагретым, т. е. в направлении убывания U .) Так как

$$\frac{\partial U}{\partial n} = (\text{grad} U)_n,$$

то равенство (10) можно переписать в виде

$$dQ = -k (\text{grad} U)_n d\sigma,$$

из которого следует, что количество тепла Q , протекающего за единицу времени через всю поверхность Σ , равно

$$Q = -\iint_{\Sigma} k (\text{grad} U)_n d\sigma. \quad (11)$$

Введя вектор

$$q = -k \operatorname{grad} U,$$

называемый вектором потока тепла, получаем

$$Q = \iint_{\Sigma} q_n d\sigma$$

Таким образом, количество тепла, протекающее через Σ за единицу времени, равно потоку вектора q через поверхность Σ (отсюда и название «вектор потока тепла»).

1.3.2. Дивергенция

Пусть A - некоторое векторное поле, которое мы снова будем представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости. Поскольку жидкость несжимаема, поток

$$P = \iint_{\Sigma} A_n d\sigma$$

вектора A через какую-либо замкнутую поверхность Σ равен, очевидно, количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах той пространственной области Ω , границей которой служит Σ . Назовем это количество суммарной мощностью источников (если $P > 0$) или стоков (если $P < 0$), расположенных в области Σ . Рассмотрим отношение

$$\frac{\iint_{\Sigma} A_n d\sigma}{V(\Omega)}$$

потока жидкости через поверхность Σ к объему области Ω , ограниченной этой поверхностью. Оно представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (исчезающей) за единицу времени в единице объема области Ω .

Рассмотрим, наконец, предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} A_n d\sigma}{V(\Omega)}$$

этого отношения, где знак $\lim_{\Omega \rightarrow M}$ означает предел при условии, что область Ω стягивается к некоторой фиксированной точке M . Этот предел можно назвать плотностью источников (стоков) в точке M . Он представляет собой скалярную величину и служит важной характеристикой исходного поля.

Рассмотрев этот пример, перейдем к общим определениям.

Пусть A - некоторое векторное поле. Поставим в соответствие каждой пространственной области Ω , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью Σ , величину

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma$$

- поток вектора A через внешнюю сторону Σ . Мы получим некоторую функцию области $\Phi(\Omega)$. Легко проверить, что эта функция аддитивна.

Определение. Производная функции $\Phi(\Omega)$ по объему, т.е. предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} A_n d\sigma}{V(\Omega)} \quad (12)$$

называется - дивергенцией векторного поля A и обозначается $\operatorname{div} A$.

Таким образом, введенная нами для поля скоростей несжимаемой жидкости плотность источников представляет собой дивергенцию

этого поля скоростей.

Теорема 1. Если $A = (P, Q, R)$ - векторное поле, определенное в области Ω и такое, что функции P, Q, R непрерывны в Ω вместе со всеми своими первыми производными, то $\operatorname{div} A$ существует во всех точках этой области и в любой декартовой системе координат выражается формулой

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (13)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

В силу теоремы о производной тройного интеграла по объему, производная по объему от правой части этого равенства существует и равна $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Следовательно, тому же самому выражению равна и производная по объему от левой его части. Но эта последняя и есть по определению $\operatorname{div} A$.

Замечание. Часто равенство

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

принимают за определение дивергенции. Однако это определение менее удобно, чем принятое нами, так как оно опирается на выбор той или иной системы координат, и мы должны еще доказывать, что сумма

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

от выбора системы координат не зависит.

A независимость от выбора системы координат выражения (12) очевидна.

Итак, каждому векторному полю A , компоненты которого непрерывны и имеют непрерывные частные производные, мы поставили в соответствие скалярную функцию $\text{div } A$. Пользуясь этим понятием, мы можем теперь формулу Остроградского записать так:

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } A dv \quad (14)$$

т. е. поток вектора A через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен интегралу от дивергенции поля A , взятому по области, ограниченной поверхностью Σ .

1.3.3. Физический смысл дивергенции для различных полей.

Примеры.

а) Для поля скоростей A несжимаемой жидкости, движущейся в некоторой пространственной области, выражение

$$\iiint_{\Omega} \text{div } A dv$$

представляет собой суммарную мощность источников расположенных в области Ω , а $\text{div } A$ - это плотность источников (т. е. их мощность, приходящаяся на единицу объема). В частности, если A - поле скоростей несжимаемой жидкости, у которой нет ни стоков, ни источников, то

$$\text{div } A = 0.$$

б) Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое некоторым распределением масс. Выясним, что представляет собой дивергенция такого поля. Рассмотрим сначала поле, создаваемое массой m_0 , сосредоточенной в точке (x_0, y_0, z_0) . В этом случае единичная масса, помещенная в точку (x, y, z) , притягивается с силой

$$\mathbf{F} = \left(\gamma \cdot m_0 \frac{x - x_0}{r^3}, \gamma \cdot m_0 \frac{y - y_0}{r^3}, \gamma \cdot m_0 \frac{z - z_0}{r^3} \right) \quad (15)$$

$$\left(r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right)$$

Здесь γ - постоянная тяготения, зависящая от выбора единиц. Впредь мы γ писать не будем, считая, что система единиц выбрана так, что $\gamma = 1$. Вычислим дивергенцию силового поля (15). В каждой точке, отличной от точки (x_0, y_0, z_0) , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(m_0 \frac{x - x_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^3 - 3(x - x_0)^2 r}{r^6} = m_0 \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5},$$

аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(m_0 \frac{y - y_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(m_0 \frac{z - z_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5}.$$

Складывая, получаем

$$\operatorname{div} F = m_0 \frac{3r^2 - 3(x-x_0)^2 - 3(y-y_0)^2 - 3(z-z_0)^2}{r^5} = 0$$

Однако в точке (x_0, y_0, z_0) приведенные выкладки теряют смысл и в этой точке значение $\operatorname{div} F$ вообще не определено. Поэтому и значение интеграла

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dv$$

не может быть получено непосредственным вычислением, если область Ω содержит точку (x_0, y_0, z_0) . Таким образом, выражение, стоящее в формуле Остроградского (14) справа, в нашем случае не определено. Однако мы легко можем найти величину, стоящую в этой формуле слева, т. е. поток вектора F через поверхность Σ , ограничивающую объем Ω . Сделаем это. Пусть сначала Σ - сфера некоторого радиуса a с центром в точке (x_0, y_0, z_0) . В каждой точке такой сферы направление вектора, (15) совпадает с направлением нормали к этой сфере. Поэтому проекция вектора (6.15) на нормаль в данном случае равна

длине этого вектора, т. е. постоянной величине $\frac{m_0}{a^2}$. Следовательно,

$$\iint_{\Sigma} F_n \, d\sigma = \frac{m_0}{a^2} 4\pi \cdot a^2 = 4\pi \cdot m_0$$

Заменив сферу Σ любой другой замкнутой поверхностью Σ_1 охватывающей точку (x_0, y_0, z_0) , мы получим тот же самый результат.

Действительно, выберем сферу Σ настолько малой, чтобы она целиком содержалась внутри Σ_1 . Тогда

$$\iint_{\Sigma_1} F_n \, d\sigma - \iint_{\Sigma} F_n \, d\sigma = 0$$

так как левая часть этого равенства представляет собой поток вектора F через границу пространственной области, в которой

$$\operatorname{div} F \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\iint_{\Sigma_1} F_n \, d\sigma = \iint_{\Sigma} F_n \, d\sigma$$

Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое несколькими точечными массами. Это поле равно сумме полей, создаваемых каждой массой в отдельности. Поток суммы полей через некоторую поверхность Σ равен, очевидно, сумме потоков слагаемых; отсюда вытекает, что поток через некоторую замкнутую поверхность поля тяготения, создаваемого системой материальных точек, равен сумме находящихся внутри этой поверхности масс, умноженной на 4π .

С помощью предельного перехода от системы материальных точек к массе, непрерывно распределенной по пространству с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, можно показать, что при непрерывном распределении масс поток гравитационного поля через замкнутую поверхность Σ равен заключенной внутри этой поверхности массе, умноженной на 4π . Но эта же масса может быть представлена как интеграл от плотности $\rho(x, y, z)$, взятый по объему Ω , ограниченному поверхностью Σ . Таким образом, обозначая по-прежнему символом $F(x, y, z)$ значение гравитационного поля в точке (x, y, z) , имеем

$$\iint_{\Sigma} F_n(x, y, z) d\sigma = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$$

откуда

$$4\pi\rho(x, y, z) = \lim_{\Omega \rightarrow (x, y, z)} \frac{\iint_{\Sigma} F_n d\sigma}{V(\Omega)},$$

стоящий здесь справа предел представляет собой дивергенцию векторного поля F . Итак, окончательно получаем: дивергенция гравитационного поля, создаваемого некоторым распределением масс, равна объемной плотности $\rho(x, y, z)$ этого распределения, умноженной на 4π .

в) Те же самые рассуждения, которые мы провели для поля тяготения, можно повторить и для электростатического поля и показать, что дивергенция такого поля равна плотности зарядов, умноженной на 4π . (Это утверждение, известное в электростатике под названием теоремы Гаусса, широко используется в различных задачах, связанных с электростатическими полями, например при вычислении напряженности поля в конденсаторах различной формы.)

1.3.4. Соленоидальное поле.

Векторное поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым. Примером соленоидального поля может служить, как мы рассматривали ранее, поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии стоков и источников, т.е. при условии, что ни в одной точке жидкость не исчезает и не возникает.

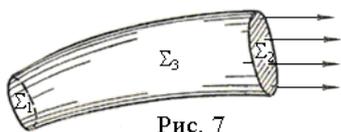


Рис. 7

Для соленоидальных полей имеет место так называемый закон сохранения интенсивности векторной трубки, состоящий в следующем. Пусть A - соленоидальное поле. Рассмотрим некоторую векторную трубку и возьмем ее отрезок, заключенный между двумя ее сечениями Σ_1 и Σ_2 (рис. 7). Эти сечения вместе с боковой поверхностью Σ_3 трубки образуют замкнутую поверхность Σ . Так как поле соленоидально, т.е. $\operatorname{div} A \equiv 0$, то, в силу формулы Остроградского,

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma = 0$$

Но

$$\iint_{\Sigma} A_n d\sigma = \iint_{\Sigma_1} A_n d\sigma + \iint_{\Sigma_2} A_n d\sigma + \iint_{\Sigma_3} A_n d\sigma, \quad (16)$$

причем в каждом из слагаемых имеется в виду внешняя сторона поверхности. Третье из стоящих справа слагаемых равно нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Σ_3 направление векторного поля A перпендикулярно направлению нормали к этой поверхности, т. е. на Σ_3

$$A_n \equiv 0.$$

Если мы теперь на сечении Σ_1 направление нормали изменим на противоположное, то равенство (16) переписется в виде

$$\iint_{\Sigma_1} A_n d\sigma = \iint_{\Sigma_2} A_n d\sigma, \quad (17)$$

т. е. поток вектора A через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Если поле вектора A представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии источников и стоков, то равенство (17) означает: количество жидкости, протекающей за единицу времени через сечение векторной трубки, одно и то же для всех сечений этой трубки.

1.3.5. Уравнение неразрывности.

В качестве применения изложенных ранее понятий дадим вывод одного из основных уравнений движения жидкости, так называемого уравнения неразрывности. Пусть A - поле скоростей движущейся жидкости. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области жидкость не исчезает и не возникает. Мы будем предполагать эту жидкость сжимаемой, т. е. считать плотность ρ некоторой функцией координат x, y, z и времени t . Выясним, как связана скорость движения такой жидкости с изменением ее плотности. Для этой цели рассмотрим некоторый замкнутый объем Ω и подсчитаем двумя способами изменение ΔQ количества жидкости внутри этого объема за время Δt . Пусть $\rho(x, y, z)$ - плотность жидкости в момент t в точке x, y, z . Тогда, очевидно,

$$\Delta Q = \Delta t \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

с другой стороны, изменение количества жидкости внутри объема Ω равно умноженному на Δt потоку жидкости через поверхность Σ , ограничивающую этот объем, т.е. равно

$$-\Delta t \iiint_{\Omega} (\rho A)_n d\sigma,$$

где n - наружная нормаль (знак минус берется потому, что если скорость направлена наружу, то количество жидкости в объеме уменьшается). Преобразовав этот поверхностный интеграл с помощью формулы Остроградского в объемный, получим

$$\Delta Q = -\Delta t \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\rho A) dv$$

Приравняв друг другу два выражения для ΔQ и сократив на Δt , будем иметь

$$-\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\rho A) dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

так как это равенство должно иметь место для любой области Ω , то равны между собой и подынтегральные выражения, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho A) \quad (18)$$

Мы получили уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков. Оно называется уравнением неразрывности.

Если ввести вектор $J = \rho A$ - плотность потока жидкости, то уравнение неразрывности можно переписать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0 \quad (18')$$

1.3.6. Плоское течение жидкости.

Формула Остроградского на плоскости.

Рассмотрим плоское векторное поле, т. е. поле, компоненты которого в некоторой декартовой системе координат имеют вид

$$P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y), \quad R = 0 \quad (19)$$

Его можно представлять себе как поле скоростей жидкости, каждая частица которой движется параллельно фиксированной плоскости со скоростью, не зависящей от ее расстояния до этой плоскости (такое движение жидкости называется плоским течением).

Дивергенция такого поля равна

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Пусть Ω - цилиндр высоты единица, с основанием G , лежащим в плоскости xy , и боковой поверхностью Σ (рис. 8). Напишем для области Ω формулу Остроградского,

предварительно заметив, что тройной интеграл от $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ по Ω численно равен двойному интегралу от этого выражения по плоской области G , поток вектора (19) через поверхность Σ равен криволинейному интегралу

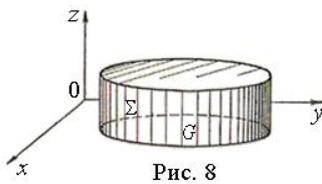
$$\int_L [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)] dl$$

где n - нормаль к контуру L , а поток через верхнее и нижнее основания цилиндра Ω равен нулю (последнее вытекает из того, что вектор (19) перпендикулярен оси z). В силу сказанного, формула Остроградского для плоскопараллельного поля A и цилиндрической области Ω имеет вид

$$\int_L [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)] dl = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \quad (20)$$

Отбросим теперь окончательно третью координату z , будем рассматривать (19) как

векторное поле, заданное в плоскости xu . Назовем криволинейный интеграл



$$\int_L [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)] dl \quad (21)$$

потоком этого векторного поля через контур L . Тогда формула (20), называемая формулой Остроградского для плоскости, означает, что двойной интеграл от дивергенции плоского поля A по некоторой области G равен потоку вектора A через границу этой области.

Легко убедиться в том, что формула (20) - просто эквивалент формулы Грина. Действительно, если мы, как обычно обозначим через α угол между касательной к кривой и положительным направлением оси x , то

$$\cos(n, x) = -\sin \alpha, \quad \cos(n, y) = \cos \alpha,$$

поэтому интеграл (21) можно записать так:

$$\int_L (Q \cos \alpha - P \sin \alpha) dl,$$

или

$$\int_L Q dx - P dy.$$

Преобразовав этот криволинейный интеграл в двойной с помощью формулы Грина, мы и получим равенство (20). Это рассуждение можно обратить, т. е. если равенство (20) установлено, то из него можно вывести формулу Грина.

Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

1. 4. Циркуляция. Ротор

1.4.1. Циркуляция векторного поля.

Пусть снова $A = (P, Q, R)$ - некоторое векторное поле и L - гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

или, короче,

$$\int_L A_\tau dl$$

где A_τ - тангенциальная составляющая поля A на контуре L , мы назовем циркуляцией векторного поля A вдоль кривой L .

Если $A = (P, Q, R)$ - силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой L представляет собой, работу этого силового поля вдоль пути L . Для полей иной природы циркуляция имеет, конечно, другой физический символ.

1.4.2. Ротор векторного поля.

Формула Стокса и ее запись в векторных обозначениях.

Если L - замкнутый контур, то криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

по этому контуру можно преобразовать в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx \quad (22)$$

взятый по некоторой поверхности Σ , натянутой на контур L . Правая часть равенства (22) представляет собой поток через поверхность Σ вектора

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (23)$$

Назовем этот вектор рота ром (или вихрем) векторного поля A и обозначим $\text{rot } A$. Таким образом, по определению

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (24)$$

Пользуясь понятием ротора, мы можем переписать формулу Стокса в следующем компактном виде:

$$\oint_L A_\tau dl = \iint_\Sigma (\text{rot } A)_n d\sigma \quad (25)$$

т. е. циркуляция векторного поля A вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

В нашем определении ротора участвует не только само векторное поле A , но и некоторая определенная система координат (x, y, z) . Однако на самом деле вектор $\text{rot } A$ не зависит от выбора координатной системы, а определяется лишь исходным векторным полем A . Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой Стокса (25), считая, что поверхность Σ - это некоторая плоская площадка, а L - ограничивающий ее контур. Применив к стоящему в равенстве (25) справа поверхностному интегралу теорему о среднем, получим

$$(\text{rot } A(M))_n = \frac{\oint A_r dl}{\sigma},$$

где M - некоторая точка, принадлежащая площадке Σ , а σ - площадь этой площадки. Будем теперь стягивать площадку Σ к некоторой фиксированной точке M так, чтобы направление нормали n к этой площадке оставалось все время одним и тем же. В пределе получим

$$(\text{rot } A(M))_n = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\oint A_r dl}{\sigma}. \quad (26)$$

Циркуляция вектора A вдоль контура не зависит от выбора координатной системы, поэтому из равенства (26) вытекает, что проекция $\text{rot } A$ на направление нормали n не зависит от выбора системы координат. Но направление нормали n мы могли выбрать произвольно, поэтому проекция вектора $\text{rot } A$ на любое направление, а следовательно, и сам вектор $\text{rot } A$ не зависят от выбора системы координат.

1.4.3. Символическая запись ротора.

Ротор векторного поля $A = (P, Q, R)$ удобно записывать в виде символического детерминанта

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (27)$$

где i, j, k - единичные векторы, направленные по осям координат, а под умножением символа $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial z}$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования (например, $\frac{\partial}{\partial x} Q$ означает $\frac{\partial Q}{\partial x}$).

Действительно, разложив детерминант (27) по элементам первой строки, получим, что

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

1.4.4. Физический смысл ротора.

Физический смысл ротора можно пояснить следующим образом. Рассмотрим векторное поле A как поле скоростей движущейся жидкости. Поместим в таком потоке, в определенной его точке, бесконечно малое колесико с лопастями, расположенными по окружности L этого колесика (рис. 9). Под воздействием потока жидкости такое колесико будет вращаться с некоторой скоростью, зависящей, вообще говоря, от направления оси колесика.

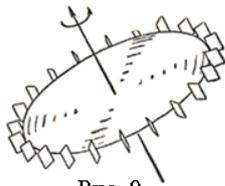


Рис. 9

Естественно считать, что линейная скорость каждой точки окружности L по величине будет равна среднему произведений проекций вектора A на направление касательной к L , т. е. будет выражаться формулой

$$v = \frac{1}{2\pi R} \oint_L A_t dl \quad (28)$$

По формуле Стокса (25) криволинейный интеграл (28) можно преобразовать в поверхностный интеграл

$$\frac{1}{2\pi R} \iint_{\Sigma} (\text{rot } A)_n d\sigma \quad (29)$$

взятый по площади Σ рассматриваемого колесика. Считая это колесико бесконечно малым, мы можем записать интеграл $\iint_{\Sigma} (\text{rot } A)_n d\sigma$ в виде произведения площади колесика на значение $(\text{rot } A)_n$ в его центре, т. е. в виде

$$\pi R^2 (\text{rot } A)_n$$

В результате равенство (28) принимает вид

$$v = \frac{R}{2} (\text{rot } A)_n$$

Максимально возможное значение проекции вектора на какое-либо направление есть модуль этого вектора. Поэтому, если направление оси колесика выбрать так, чтобы его скорость v была максимальной (это направление, очевидно, совпадает с направлением $\text{rot } A$), то мы получим

$$v_{\max} = \frac{R}{2} |\text{rot } A|_n$$

или

$$|\text{rot } A| = \frac{2v_{\max}}{R}$$

Но $\frac{v}{R}$ - это величина угловой скорости ω колесика. Итак, мы получили следующий результат: если колесико с лопастями ориентировано так, что скорость его вращения максимальна, то его угловая скорость равна половине $|\text{rot } A|$, а направление оси совпадает с направлением вектора $\text{rot } A$.

Таким образом, $\text{rot } A$ характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей; он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости.

Примеры. 1. Рассмотрим векторное поле с компонентами

$$P = -y\omega, \quad Q = x\omega, \quad R = 0.$$

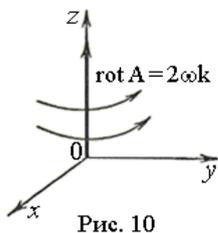


Рис. 10

Это поле можно рассматривать как поле скоростей, отвечающее вращению всего пространства вокруг оси z с угловой скоростью ω . Ротор этого векторного поля равен, как легко проверить, $2\omega k$, т. е. он направлен по оси вращения, а по величине равен удвоенной угловой скорости (рис. 10).

Физический смысл этого результата заключается в следующем. Всякая частица жидкости при вращении вокруг оси z участвует в двух движениях: в мгновенном переносном движении со скоростью $V = (-y\omega, x\omega, 0)$ и в мгновенном вращательном движении. Легко видеть, что мгновенная угловая скорость вращения любой частицы совпадает с угловой скоростью ω всего макроскопического движения жидкости. Поэтому поле мгновенных угловых скоростей частиц оказывается постоянным и равным ω . Значит, и поле ротора также постоянно и равно 2ω . Вся жидкость как бы заполнена бесконечно малыми вихрями.

2. Рассмотрим жидкость, текущую в постоянном направлении с постоянной скоростью, т. е. предположим, что P, Q и R постоянны. В этом случае $\text{rot } A \equiv 0$.

3. Пусть $P = y, Q = 0, R = 0$. В этом случае

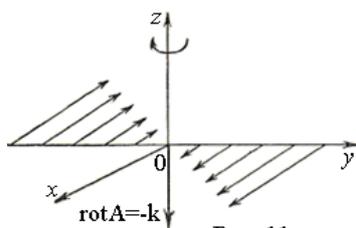


Рис. 11

$$\text{rot } A = -k.$$

В последнем примере ротор в каждой точке отличен от нуля, хотя все векторные линии - прямые, параллельные плоскости yz . Это может показаться противоречащим утверждению, что $\text{rot } A$ характеризует «вращательную компоненту» поля A . Но на самом деле это не так. Здесь «вращательная компонента» обусловлена не искривлением векторных линий, а изменением скорости движения при изменении расстояния от плоскости yz . Легко сообразить, что колесико с лопастями,

поставленное в поток жидкости, движущейся в каждой точке (x, y, z) со скоростью $(y, 0, 0)$, не будет находиться в покое, если только его ось вращения не перпендикулярна оси z .

4. Пусть векторное поле A имеет компоненты:

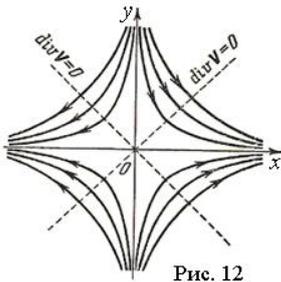


Рис. 12

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ Q &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ R &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Это поле можно рассматривать как поле скоростей жидкости, движущейся в плоскости xu по гиперболам $xu = C$ (рис. 12) так, что величина скорости в каждой точке равна 1. Найдем дивергенцию и ротор этого поля. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \operatorname{rot} A &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right] k = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} k \end{aligned}$$

Здесь дивергенция. положительна, когда $|y| > |x|$, и отрицательна при $|y| < |x|$. Физически это означает, что движение несжимаемой жидкости, описываемое полем (30), возможно лишь тогда, когда в тех областях, где $|y| > |x|$, имеются источники, а там, где $|y| < |x|$ имеют место стоки. Ротор поля (30), как и всякого плоскопараллельного поля, направлен в каждой точке по оси z , именно его направление совпадает с положительным направлением оси z во второй и четвертой четвертях и с отрицательным направлением оси z в первой и третьей. И дивергенция, и ротор поля (30) стремятся к нулю, когда $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, т. е. по мере удаления от начала координат.

1.4.5. Еще раз о потенциальных и соленоидальных полях.

Рассматриваемое понятие ротора, непосредственно связано с определениями потенциального и соленоидального полей, введенными ранее.

Мы назвали потенциальным векторное поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля, и показали, что векторное поле $A = (P, Q, R)$ потенциально в том и только том случае, если его компоненты удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Но эти три условия означают не что иное, как равенство нулю всех трех компонент ротора поля A . Таким образом:

Для того чтобы векторное поле A было потенциальным, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

$$\text{rot } A \equiv 0.$$

Понятие соленоидального поля, тоже связано с понятием ротора. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что для любого векторного поля A :

$$\text{div}(\text{rot } A) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

т. е. векторное поле, представимое в виде ротора какого-либо другого векторного поля, соленоидально. Можно показать (мы не будем этого делать), что верно и обратное, т. е. что всякое соленоидальное поле можно представить в виде ротора некоторого векторного поля. Иными словами, для всякого поля A , удовлетворяющего условию $\text{div } A = 0$, можно подобрать поле B так, что $A = \text{rot } B$. Это векторное поле B определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого вида $\text{grad } U$.

Если $A = \text{rot } B$, то поле B называется вектор p -потенциалом поля A . Хотя потенциальные и соленоидальные поля не исчерпывают всех векторных полей, любое векторное поле сводится к комбинации полей этих двух типов. Точнее говоря, можно доказать, что всякое векторное поле A представимо в виде:

$$A = B + C.$$

где B потенциально, а C соленоидально.

1.5. Оператор Гамильтона

1.5.1. Символический вектор ∇ .

Мы уже ввели понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $\text{grad } U$ можно рассматривать как некоторую операцию, во многом аналогичную по своим свойствам операции дифференцирования, с той, однако, разницей, что дифференцирование переводит скаляр в скаляр, в то время как здесь мы имеем переход от скаляра к вектору. Операцию перехода от U к $\text{grad } U$ часто обозначают, следуя Гамильтону, символом ∇ (читается «набла» и называют оператором «набла», или оператором Гамильтона. Таким образом, по определению:

$$\nabla U = \text{grad } U.$$

Оператор ∇ удобно трактовать как символический вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

а применение его к скалярной функции - как умножение скаляра на этот вектор.

С помощью вектора ∇ удобно записывать и остальные операции векторного анализа, а именно, если $A = (P, Q, R)$, то

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = (\nabla, A)$$

т. е. дивергенция векторного поля A есть скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора A . Аналогично

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial}{\partial y} R - \frac{\partial}{\partial z} Q \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} P - \frac{\partial}{\partial x} R \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right) \mathbf{k} = [\nabla, A]$$

т. е. ротор векторного поля A есть векторное произведение вектора ∇ на вектор A .

1.5.2. Действия с вектором ∇ .

Целесообразность введения символического вектора ∇ состоит в том, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа. Кроме того, сами эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. Вот простейшие примеры.

Раньше мы с помощью непосредственных вычислений получили следующие два равенства:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$$

и

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0.$$

Переписав их с помощью вектора ∇ , получим

$$[\nabla, \nabla U] = 0$$

и

$$(\nabla, \nabla, A) = 0.$$

Левая часть первого из этих равенств представляет собой «векторное произведение» (символическое) двух «векторов», отличающихся друг от друга лишь скалярным множителем, а во втором равенстве слева стоит «смешанное произведение» трех векторов, два из которых одинаковы. Следовательно, равенство нулю этих выражений находится в полном соответствии с основными законами векторной алгебры.

С помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что на вектор ∇ можно перенести многие из основных действий, известных для обычных векторов. Именно это обстоятельство и дает возможность получать с помощью вектора ∇ ряд формул векторного анализа, применяя аппарат векторной алгебры.

Следует, однако, иметь в виду, что аналогия между символическим вектором ∇ и «настоящими» векторами - не полная. Именно, формулы, содержащие символический вектор ∇ , аналогичны обычным формулам векторной алгебры в том случае, если они не

содержат произведений переменных величин (скалярных или векторных), т. е. до тех пор, пока нам не приходится применять входящие в ∇ операции дифференцирования к произведению переменных величин. Если же некоторое выражение содержит произведение двух или нескольких переменных сомножителей, то, применяя к этому выражению вектор ∇ , нельзя руководствоваться обычными правилами векторной алгебры. Для установления соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $U = U(x, y, z)$ - скалярное поле и $A = A(x, y, z)$ - векторное поле. Вычислим $\text{div}(UA)$, т. е. (∇, UA) .

Применение вектора ∇ сводится к применению входящих в него операций дифференцирования. Но, как известно, правило дифференцирования произведения состоит в том, что мы дифференцируем сначала первый сомножитель, а остальные рассматриваем как постоянные, затем дифференцируем второй сомножитель, считая остальные постоянными, и т. д. И берем сумму полученных таким образом выражений.

Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком «↓» тот сомножитель, к которому оператор ∇ должен применяться. Тогда, как легко проверить, выражение для $\text{div}(UA)$ можно записать так:

$$(\nabla, UA) = \left(\nabla, U \overset{\downarrow}{A} \right) + \left(\nabla, U \overset{\downarrow}{A} \right).$$

Множители, на которые ∇ не действует, можно «высвободить» из-под оператора ∇ . Таким образом, получаем

$$(\nabla, UA) = \left(\nabla, U \overset{\downarrow}{A} \right) + \left(\nabla, U \overset{\downarrow}{A} \right) = (\nabla U, A) + U(\nabla, A)$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\text{div}(UA) = (A, \text{grad } U) + U \text{div } A.$$

2. Рассмотрим выражение

$$\text{grad}(UV),$$

которое в символической записи имеет вид

$$\nabla UV.$$

Руководствуясь сказанным выше, имеем

$$\nabla UV = \nabla \overset{\downarrow}{U} V + \nabla U \overset{\downarrow}{V} = V \nabla U + U \nabla V,$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\text{grad}(UV) = V \text{grad } U + U \text{grad } V.$$

Из рассмотренных примеров ясны правила, которые надо применять, пользуясь оператором ∇ : в выражениях, содержащих одну переменную, с ним можно поступать, как

с обычным вектором, а к выражениям, содержащим произведения нескольких переменных, оператор ∇ применяется в соответствии с правилом дифференцирования произведения. Наконец, применение ∇ к сумме любых слагаемых всегда сводится к применению ∇ к каждому из слагаемых в отдельности.

Дадим в заключение сводку формул, связывающих операции взятия градиента, ротора и дивергенции с основными операциями векторной алгебры:

1. $\text{div} (U A) = (A, \text{grad } U) + U \text{div } A$;
2. $\text{grad} (UV) = V \text{grad } U + U \text{grad } V$; "
3. $\text{rot} (U A) = U \text{rot } A + [\text{grad } U, A]$;
4. $\text{div} [A, B] = (B, \text{rot } A) - (A, \text{rot } B)$;
5. $\text{rot} [A, B] = (B, \nabla)A - (A, \nabla)B + A \text{div } B - B \text{div } A$;
6. $\text{grad} (A, B) = (B, \nabla) A + (A, \nabla) B + [B, \text{rot } A] + [A, \text{rot } B]$;

в частности, положив в последней формуле $A = B$, получим

$$\text{grad} \frac{A^2}{2} = (A, \nabla)A + [A, \text{rot } A]$$

Первые две из этих формул были получены раньше. Остальные могут быть получены аналогичным образом с применением оператора ∇ (и соблюдением указанных раньше правил действия с ∇) и обычных формул векторной алгебры. В частности, для вычисления выражения $\text{rot} [A, B]$, которое в символической форме пишется как

$$[\nabla, [A, B]],$$

следует применить известную формулу двойного векторного произведения:

$$[a, [b, c]] = b (a, c) - c (a, b).$$

Выражение вида $(A, \nabla) B$, встречающееся в последних двух формулах, означает векторную величину:

$$\left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \text{ которую можно}$$

рассматривать как результат применения «скалярной» операции

$$(A, \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

к каждой из компонент вектора B .

1.6. Дифференциальные операции второго порядка.

Оператор Лапласа

1.6.1. Дифференциальные операции второго порядка.

В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые Операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Комбинируя символы grad, rot, div попарно, мы можем составить из них девять пар. Однако не все эти пары имеют смысл; например, операция

rot div

(т. е. взятие ротора от дивергенции) не имеет смысла ни для скалярного поля, ни для векторного.

Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей, в которой заштрихованы клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций:

	Скалярно е поле U	Векторное поле A	
	grad	div	rot
grad		grad div A	
div	div grad U	 	div rot A
rot	rot grad U ≡ 0	 	rot rot A ≡ 0

Мы видим, что применительно к скалярному полю имеют смысл две операции, а именно:

$$\text{rot grad } U,$$

$$\text{div grad } U.$$

Первое из этих выражений представляет собой ротор потенциального поля grad U, как мы видели, тождественно равно нулю.

Выражение div grad U, вообще говоря, не обязано быть нулем. Оно называется оператором Лапласа и обозначается ΔU. Воспользовавшись известными выражениями градиента и дивергенции в декартовых координатах, получаем:

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \text{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Так как и дивергенция, и градиент не зависят, как мы знаем, от выбора координатной системы, то и ΔU зависит лишь от самого поля U , но не от системы координат. К оператору Лапласа мы еще вернемся ниже.

Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора ∇ . Действительно,

$$(\nabla, \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \Delta,$$

т. е.

$$(\nabla, \nabla)U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Иногда приходится оператор Δ применять не к скалярной величине, а к вектору. При этом если

$$A = Ax_i + Ay_j + Az_k,$$

то под ΔA понимается вектор

$$\Delta Ax_i + \Delta Ay_j + \Delta Az_k.$$

Как мы увидим немного ниже, это выражение на самом деле зависит только от самого вектора A , но не от выбора системы координат.

Рассмотрим теперь операции второго порядка для векторного поля. Применительно к векторному полю имеют смысл три операции второго порядка, а именно:

$$\text{grad div } A,$$

$$\text{rot rot } A,$$

$$\text{div rot } A.$$

С выражением вида $\text{div rot } A$ мы уже встречались при нахождении условий соленоидальности поля, что всегда

$$\text{div rot } A \equiv 0.$$

Напротив, выражения $\text{grad div } A$ и $\text{rot rot } A$ не обязаны обращаться в нуль. Они часто встречаются в различных вопросах механики и электродинамики.

Выведем формулу, связывающую эти величины. Рассмотрим для этого выражение

$$\text{rot rot } A,$$

которое в символической форме записывается так:

$$[\nabla, [\nabla, A]].$$

Воспользовавшись снова формулой для двойного векторного произведения, получим, что

$$[\nabla, [\nabla, A]] = \nabla (\nabla, A) - (\nabla, \nabla) A,$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A \quad (31)$$

Из этой формулы видно, в частности, что выражение ΔA , определенное ранее, действительно не зависит от выбора системы координат, поскольку величины $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A$ и $\operatorname{grad} \operatorname{div} A$ с выбором системы координат не связаны.

Так как в выражении (31) участвует только одна переменная величина, то мы, оперируя с ∇ , можем воспользоваться обычными формулами векторной алгебры.

1.6.2. Уравнение теплопроводности.

В качестве применения введенных понятий рассмотрим вывод уравнения для поля температур внутри некоторого нагретого тела. Пусть $U(x, y, z, t)$ - температура тела в точке (x, y, z) в момент t . Выделим в этом теле некоторый объем Ω , ограниченный замкнутой поверхностью Σ , и вычислим двумя способами изменение количества тепла внутри этого объема за малый промежуток времени dt . В каждом элементе объема

температура за время dt меняется на величину $\frac{\partial U}{\partial t} dt$, а масса этого элемента равна ρdv (где ρ - плотность). Следовательно, изменение количества тепла в элементе объема есть

$$c \frac{\partial U}{\partial t} dt \rho dv$$

(здесь c - удельная теплоемкость; величины c и ρ предполагаются постоянными), а изменение количества тепла за время dt во всем объеме Ω равно

$$dQ = dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} c \rho dv$$

С другой стороны, ту же самую величину dQ можно подсчитать как количество тепла, протекающего за время dt через поверхность Σ , ограничивающую объем Ω . Количество тепла, протекающего за время dt через элементарную площадку $d\sigma$, равно:

$$- dt k (\operatorname{grad} U)_n d\sigma,$$

а количество тепла, протекающего за это время через всю поверхность Σ , выразится интегралом

$$dt \iint_{\Sigma} k (\operatorname{grad} U)_n d\sigma$$

Преобразовав этот интеграл по формуле Остроградского в объемный, получим:

$$dt \iint_{\Sigma} k (\operatorname{grad} U)_n d\sigma = dt \iiint_{\Omega} k \operatorname{div} (\operatorname{grad} U) dv = dt \iiint_{\Omega} k \Delta U dv$$

Приравняв друг другу полученные выражения для ΔQ и сократив на dt , будем иметь:

$$dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} c \rho dv = dt \iiint_{\Omega} k \Delta U dv$$

Так как это равенство должно иметь место для любой пространственной области Ω , то отсюда следует:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right) \quad (32)$$

Мы получили уравнение, которому должна удовлетворять функция U , представляющая собой температуру некоторого тела, т. е. так называемое уравнение теплопроводности.

1.6.3. Стационарное распределение температур.

Гармонические поля.

Мы показали, что распределение температур внутри тела должно удовлетворять уравнению (32). Может, в частности, оказаться, что рассматриваемое нами тело находится в состоянии теплового равновесия, т. е. что ни на границе его, ни во внутренних точках

температура не меняется со временем. Тогда $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и уравнение (32) принимает вид

$$\Delta U = 0,$$

т. е. в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Состояние теплового равновесия можно представить себе следующим образом. Предположим, что на границе тела в каждой точке поддерживается некоторая фиксированная температура, не зависящая от времени (но разная, вообще говоря, в разных точках). Тогда то распределение температур, которое установится внутри тела через достаточно большой (строго говоря, бесконечно большой) промежуток времени, и будет тем равновесным распределением температур, которое соответствует заданному тепловому режиму на поверхности тела.

Уравнение

$$\Delta U = 0$$

называется уравнением Лапласа. С его помощью описывается не только стационарное распределение тепла. Уравнение Лапласа играет первостепенную роль при описании и других установившихся процессов, например равновесного распределения зарядов по поверхности проводника, установившегося движения несжимаемой жидкости в замкнутом сосуде и т. д. Скалярное поле $U(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta U = 0$, называется лапласовым или гармоническим полем. Стационарное распределение температур внутри некоторого тела представляет собой, согласно сказанному, гармоническое поле.

Один из важных примеров гармонического поля - это функция:

$$\frac{k}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k = \text{const}).$$

Эту функцию можно представлять себе как потенциал поля тяготения (или электростатического поля), создаваемого точечной массой (точечным зарядом) помещенной в начале координат. Проверим, что

эта функция - гармоническая (кроме начала координат, где она не определена). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{k}{r} = -\frac{kx}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{k}{r} = -k \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = k \frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{k}{r} = k \frac{3y^2 - r^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{k}{r} = k \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

откуда

$$\Delta \left(\frac{k}{r} \right) = 0.$$

Гармонической будет и функция $\frac{k}{|r - r_0|}$ при любом фиксированном r_0 , а следовательно, и любая линейная комбинация вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{|r - r_i|}$$

представляющая собой потенциал, создаваемый системой точечных масс. Предельный переход от точечного распределения масс к непрерывному с плотностью $\mu(x, y, z)$, естественный здесь с точки зрения физики, потребовал бы для своего математического обоснования применения теории интегралов, зависящих от параметра. Систематическое изложение всего круга вопросов, связанных с понятием потенциала, имеется в учебниках по математической физике.

1.7. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах

1.7.1 Постановка задачи.

Такие величины, как градиент, дивергенция, ротор и другие, часто встречаются в различных задачах теоретической и математической физики. Во многих случаях полезно уметь записывать эти величины не только в декартовых координатах, но и в тех или иных криволинейных системах координат. Предположим, например, что рассматривается поле, обладающее сферической симметрией, т. е. в каждой точке рассматривается величина, скалярная или векторная, зависящая только от расстояния этой точки до начала координат. Ясно, что все формулы, связанные с таким полем, должны значительно упроститься, если записывать их в сферических координатах, а не в декартовых. В других случаях могут оказаться удобными какие-либо иные системы координат.

Мы запишем в криволинейных координатах выражения для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа.

1.7.2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве.

Предположим что в трехмерном пространстве введена некоторая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 и пусть:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (33)$$

- формулы, связывающие декартовы координаты x, y, z с криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 .

Мы ограничимся простейшим и в то же время практически наиболее важным случаем ортогональных координат (система криволинейных координат называется ортогональной, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, ортогональны между собой). Свойством ортогональности обладают, в частности, такие употребительные в пространстве системы координат, как сферическая и цилиндрическая.

Найдем, прежде всего, выражения для элементов длины, площади и объема в ортогональных координатах. Для этой цели рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелепипед, вырезаемый тремя парами координатных поверхностей, отвечающих соответственно значениям параметров q_1, q_2, q_3 , равным q_1 и q_1+dq_1 ; q_2 и q_2+dq_2 , q_3 и q_3+dq_3 (рис. 13).

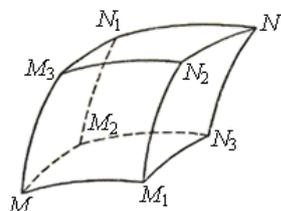


Рис. 13

Рассмотрим сначала ребро MM_1 . Точка M имеет криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) , а точка M_1 - криволинейные координаты $(q_1 + dq_1, q_2, q_3)$. Обозначив декартовы координаты точки M через $x, y,$

z, а декартовы координаты точки М1 - через $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, мы можем написать, что длина dl_1 вектора ММ1 равна

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Вдоль ребра ММ1 координаты x , y , z суть функции переменной q_1 , (q_2 и q_3 постоянны вдоль ММ1). Следовательно, в данном случае

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

и

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1$$

Аналогично для длин dl_2 и dl_3 ребер ММ2 и ММ3 получаем следующие выражения:

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2,$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3.$$

Введя обозначения

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2},$$

(34)

перепишем формулы для dl_1 , dl_2 и dl_3 так:

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3. \quad (35)$$

Множители H_1 , H_2 , H_3 называются параметрами Ламэ отвечающими криволинейным координатам q_1 , q_2 , q_3 ; их называют также масштабными множителями. Координатные линии, вдоль каждой из которых меняется только один параметр следует представлять себе как кривые, на которые нанесены шкалы значений этих параметров. Множители H_1 , H_2 , H_3 на этих кривых преобразуют «неестественные» параметры q_1 , q_2 , q_3 в «естественные» - длины дуг соответствующих линий.

Наша система координат ортогональная, поэтому площадь $d\sigma_1$ грани ММ2Н1М3 равна произведению dl_2 на dl_3 т. е.

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3;$$

аналогично для площадей $d\sigma_2$ и $d\sigma_3$ двух других граней $MM_1N_2M_3$ и $MM_1N_3M_2$ имеем:

$$d\sigma_2 = H_3 N_1 dq_3 dq_1 \quad \text{и} \quad d\sigma_3 = H_1 N_2 dq_1 dq_2 \quad (36)$$

Наконец, объем всего рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда равен:

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (37)$$

Введем в точке M ортогональный и нормированный базис состоящий из трех единичных векторов e_1, e_2, e_3 , касательных к координатным линиям, проходящим через точку M . Заметим, что в отличие от декартовой системы координат, определяемой тремя постоянными единичными векторами i, j, k , этот базис e_1, e_2, e_3 будет меняться от точки к точке, т. е. сами векторы e_1, e_2, e_3 представляют собой функции параметров q_1, q_2, q_3 . Это не мешает нам, однако, любой вектор, заданный в произвольной точке M (т. е. любое векторное поле), записать в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2, e_3 .

1.7.3. Цилиндрические и сферические координаты.

Вычислим параметры Ламэ для важнейших частных типов ортогональных криволинейных координат: цилиндрической и сферической систем. Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с декартовыми координатами формулами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Отсюда по формулам (34) получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \quad (38)$$

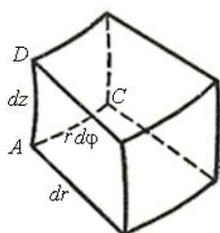


Рис. 14 B

Благодаря тому, что параметры Ламэ имеют непосредственный геометрический смысл, эти результаты нетрудно усмотреть геометрически без всяких вычислений. Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, ограниченный тремя парами координатных поверхностей, отвечающих значениям цилиндрических координат, соответственно равным r и $r+dr$, φ и $\varphi+d\varphi$, z и $z+dz$ (рис. 14). Длины dl_1, dl_2 и dl_3 ребер AB, AC и AD этого параллелепипеда соответственно равны $dr, r d\varphi$ и dz , откуда сразу следуют формулы (38).

Аналогично для сферических координат, задаваемых равенствами:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

вычисление дает

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = \rho \sin \theta. \quad (39)$$

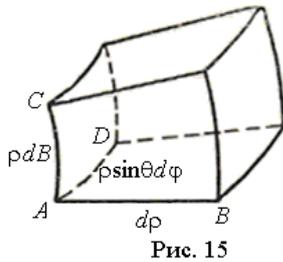


Рис. 15

Этот, результат тоже виден непосредственно из чертежа (рис. 15), так как длины dl_1 , dl_2 и dl_3 ребер AB , AC и AD параллелепипеда, ограниченного координатными поверхностями, отвечающими значениям сферически координат ρ и $\rho+d\rho$, φ и $\varphi+d\varphi$, θ и $\theta+d\theta$, соответственно равны:

$$d\rho, \quad \rho d\theta, \quad \text{и} \quad \rho \sin \theta d\varphi,$$

откуда сразу получаем (39).

1.7.4. Градиент.

Найдем выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах. Проекция градиента функции $U = U(q_1, q_2, q_3)$ на некоторое направление совпадает, как известно, с производной от U по этому направлению. Следовательно, для того чтобы вычислить компоненты вектора $\text{grad } U$ в базисе e_1, e_2, e_3 , нужно вычислить производные от U по направлениям, определяемым этими векторами. Пусть ΔU - разность значений функции U в точках M_1 и M . Тогда

$$(\text{grad } U, e_1) = \lim_{dl_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{dl_1} = \lim_{dq_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{H_1 dq_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Аналогично две другие компоненты градиента равны:

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Таким образом, окончательно,

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} e_3. \quad (40)$$

1.7.5. Дивергенция.

Вычислим теперь дивергенцию некоторого векторного поля A в координатах q_1, q_2, q_3 . Мы определили $\text{div } A$ в точке M формулой

$$\text{div } A = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{v(\Omega)} \iint_{\Sigma} A_n d\sigma.$$

Следовательно, мы можем вычислить $\text{div } A$ в точке M как отношение потока вектора A через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, изображенного на рис. 13. к объему dv этого параллелепипеда. Обозначим, A_1, A_2, A_3 компоненты вектора A в базисе e_1, e_2, e_3 (т. е. положим $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$) и вычислим сначала поток этого вектора через две грани, перпендикулярные ребру MM_1 .

Внешняя нормаль к грани $MM_2N_1M_3$ совпадает с вектором $-\epsilon_1$ (вектор ϵ_1 направлен в сторону возрастания q_1 , а внешняя нормаль к рассматриваемой грани имеет противоположное направление). Следовательно, поток вектора A через эту грань равен (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dv):

$$(A, -\epsilon_1) d\sigma_1 = -A_1H_2H_3 dq_2 dq_3.$$

где величины A_1, H_2, H_3 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) ,

Противоположная грань $M_1N_3N_2$ отличается от рассмотренной тем, что на ней первая криволинейная координата равна $q_1 + dq_1$ (а не q_1); следовательно, значение величины $A_1H_2H_3$ на этой грани отличается от ее значения на грани $MM_2N_1M_3$ приращением

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)dq_1 \quad (41)$$

Кроме того, направление нормали к грани $M_1N_3N_2$ совпадает с направлением вектора ϵ_1 . Поэтому поток вектора A через грань $M_1N_3N_2$ равен:

$$\left(AH_2H_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)dq_1 \right), \quad (42)$$

Сложив выражения (41) и (42), получим, что поток вектора A через две параллельные между собой грани $MM_2N_1M_3$ и $M_1N_3N_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)dq_1dq_2dq_3.$$

Аналогично, рассматривая две другие пары параллельных между собой граней, получим следующие два выражения для потока вектора через эти пары граней:

$$\frac{\partial(A_2H_3H_1)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

складывая все эти три величины и деля на dv , получим:

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1H_2H_3} \left[\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (43)$$

1.7.6. Ротор.

Проекция $(\operatorname{rot} A)_n$ ротора векторного поля A в некоторой точке M на направление некоторого фиксированного вектора n представляется формулой:

$$(\operatorname{rot} A(M))_n = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \oint_L A_r dl,$$

где Σ - площадка, перпендикулярная вектору n , (σ - ее площадь и L - ее граница).

Следовательно, мы можем получить проекцию $\text{rot } A$ на направление вектора e_1 вычислив циркуляцию A вдоль контура $MM_2N_1M_3M$ (рис.13) и разделив ее на $d\sigma_1$. Представим эту циркуляцию в виде суммы четырех слагаемых, отвечающих отрезкам MM_2 , M_2N_1 , N_1M_3 и M_3M , и вычислим каждое слагаемое отдельно. Начнем с первого из них. Проекция вектора A на направление MM_2 равна A_2 , следовательно, циркуляция вектора A вдоль MM_2 равна (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно $d\sigma_1$)

$$A_2 dl_2 = A_2 H_2 dq_2, \quad (44)$$

где величины A_2 и H_2 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) . Циркуляция вдоль N_1M_3 отличается от только что полученного выражения тем, что на N_1M_3 третья координата равна $q_3 + dq_3$, а не q_3 , как на MM_2 , и, кроме того, направление отрезка N_1M_3 противоположно направлению e_2 . Поэтому циркуляция вдоль N_1M_3 равна:

$$-\left[A_2 H_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) dq_3 \right] dq_2. \quad (45)$$

Аналогично получаем для циркуляций вдоль M_2N_1 и N_3M выражения:

$$\left[A_3 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) dq_2 \right] dq_3 \quad (46)$$

и

$$- A_3 H_3 dq_3. \quad (47)$$

Сложив величины (44), (45), (46) и (47), получим, что циркуляция вектора A вдоль контура $MM_2N_1M_3M$ равна:

$$-\frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3} dq_2 dq_3 + \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 dq_3.$$

Деля полученное выражение на $H_2 H_3 dq_2 dq_3$, т. е. на площадь грани $MM_2N_1M_3$, получаем, что компонента $(\text{rot } A)_1$ вектора $\text{rot } A$ в направлении базисного вектора e_1 равна:

$$\frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}. \quad (48.1)$$

Аналогично вычисляются две другие компоненты:

$$(\text{rot } A)_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_1} \right\}, \quad (48.2)$$

$$(\text{rot } A)_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2} \right\}. \quad (48.3)$$

1.7.7. Оператор Лапласа.

Исходя из найденных выражений для $\text{grad } U$ и $\text{div } A$, мы можем написать выражение оператора Лапласа в координатах q_1, q_2, q_3 . Получаем:

$$\Delta U = \text{div grad } U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right\} \quad (49)$$

Эту формулу очень легко запомнить, если знать ее «происхождение». Множители Ламэ H_1, H_2, H_3 в знаменателях при $\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}$ возникли из-за градиента. Множители $H_2 H_3, H_3 H_1, H_1 H_2$ в числителях возникли из площадей тех площадок, через которые

вычисляется поток, множитель $\frac{1}{H_1 H_2 H_3}$ возник из-за того, что поток через грани параллелепипеда делится на объем параллелепипеда.

1.7.8. Запись основных формул в цилиндрических и сферических координатах.

Чтобы написать в этих системах координат формулы для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа, нужно лишь подставить эти параметры в полученные ранее общие формулы. Таким образом, находим:

а) для цилиндрических координат:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } A = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z,$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

б) для сферических координат:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

В задачах связанных с рассмотрением оператора Лапласа в сферических координатах, часто наряду с полным оператором Лапласа ΔU встречается выражение:

$$\frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

называемое «угловой частью» оператора Лапласа.

Мы систематически пользовались такими понятиями, как «бесконечно малый параллелепипед», «элемент объема» и т. д. Ясно, что здесь, как и в других подобных случаях, смысл этих выражений состоит в том, что мы рассматриваем сначала объекты конечных размеров, а затем совершаем предельный переход, стремя эти размеры к нулю. Мы полагаем, что при желании читатель может проделать самостоятельно все те предельные переходы, которые здесь лишь подразумевались, но не излагались.

2. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2.1. Введение и некоторые определения

Дифференциальные уравнения в частных производных составляют в настоящее время одну из наиболее быстро развивающихся отраслей численного анализа. Области науки и техники, где рассматриваются уравнения в частных производных, весьма многочисленны и важны; к ним относятся, например, ядерная физика, аэродинамика и т. п. Кроме того, возможности современных ЭЦВМ позволяют ставить на повестку дня также и задачи, решение которых просто невысказимо без использования вычислительных машин.

Конечно, невозможно дать полное описание предмета, однако мы рассмотрим здесь общий подход к решению уравнения в частных производных и проанализируем также некоторые численные методы, которые могут оказаться полезными во многих случаях.

Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$A_{xx} + B_{xy} + C_{yy} + D_x + E_y + F = G, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F, G являются функциями только от независимых переменных x и y . Зависимой переменной является u , индексы при x и y означают частные производные, например

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет целое семейство решений, причем нужное решение выбирается с помощью начального условия. Точно так же в случае уравнения в частных производных ему должна сопутствовать некоторая дополнительная информация, позволяющая выбрать определенное решение. Но теперь, поскольку у нас имеются две независимые переменные, условие выбора одного конкретного решения должно задаваться вдоль какой-то кривой в плоскости xy . Это условие может быть наложено на функцию u , на ее производную или на функцию u и на ее производную совместно. В некоторых случаях кривая, вдоль которой задано условие, будет замкнутой, в других случаях незамкнутой; это зависит от типа уравнения.

Мы будем подразделять уравнения на три типа (имеются в виду уравнения второго порядка):

1. Уравнение называется эллиптическим, если $B^2 - 4AC < 0$.
2. Уравнение называется параболическим, если $B^2 - 4AC = 0$.
3. Уравнение называется гиперболическим, если $B^2 - 4AC > 0$.

Уравнение может принадлежать к нескольким типам в зависимости от значений коэффициентов. Уравнение

$$u_{xx} + u_y = 0$$

является эллиптическим при $y > 0$, параболическим при $y = 0$ и гиперболическим при $y < 0$. Те уравнения, которые мы будем рассматривать, имеют постоянные коэффициенты и поэтому принадлежат каждое к одному какому-нибудь типу. Такие уравнения часто встречаются на практике.

2.2. Разностные уравнения

Классическое определение производной функций одной переменной записывается в виде

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Мы можем придать h некоторое малое, хотя и ненулевое значение и попытаться проверить, что приближение получается достаточно точным (проблема точности) и что ошибка не возрастает в ходе процесса вычислений (проблема устойчивости).

Этот метод сводится к тому, что мы производную заменяем разностью. Будем пытаться применить тот же самый метод к уравнениям в частных производных, приближенно заменяя производные разностями.

Поскольку теперь имеются две независимые переменные, то обе они должны участвовать в разностном уравнении. Мы, однако, начнем с того, что рассмотрим разности только в направлении x .

Вспомним, что разложение функции $u(x, y_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, y_0 можно записать в виде

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}u_{xx}(\xi, y_0),$$

где ξ лежит между x и x_0 . Если теперь положить $x = x_0 + h$, то после некоторых преобразований получаем

$$u_x(x_0, y_0) - \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = -\frac{h}{2}u_{xx}(\xi, y_0)$$

Другими словами, если попытаться приближенно представить их с помощью

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \quad (2)$$

то ошибка ограничения будет равна

$$E_T = -\frac{h}{2} u_{xx}(\xi, y_0); \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h.$$

Равенство (2) было получено с помощью подстановки в ряд Тейлора $x = x_0 + h$; результат называется правой разностью. Можно получить и другое равенство, называемое левой разностью, подставляя в ряд Тейлора $x = x_0 - h$. При этом получаем

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{h}. \quad (3)$$

Нам потребуются впоследствии и правая и левая разности, как мы сейчас убедимся при выводе разностной формулы для ихх. Сначала нам придется написать разностное приближение для ихх через их, а затем заменить их подходящими разностными приближениями. Напишем приближение для ихх, используя правую разность

$$u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u_x(x_0 + h, y_0) - u_x(x_0, y_0)}{h}. \quad (4)$$

Если в эту формулу подставить теперь правые разности для их, то весь окончательный результат окажется как бы «сдвинутым» вправо. Чтобы скомпенсировать этот эффект, используем левые разности для их. Левая разность для их (x_0, y_0) задается формулой (3) и, кроме того,

$$u_x(x_0 + h, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \quad (5)$$

(естественно, это выражение полностью совпадает с правой разностью для их (x_0, y_0)). Подставляя (3) и (5) в (4), получаем

$$u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2}. \quad (6)$$

Это весьма важный результат, которым мы будем ниже неоднократно пользоваться. Отметим симметрию формулы относительно x_0, y_0 .

Чтобы определить ошибку ограничения, возникающую при замене производных разностями, вспомним, что

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}u_{xx}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6}u_{xxx}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^4}{24}u_{xxxx}(\xi, y_0)$$

Теперь положим $x = x_0 + h$; $x = x_0 - h$, а затем сложим два получившихся равенства. При этом получается, что ошибка ограничения равна

$$E_T = -\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi, y_0) \quad x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h.$$

Мы рассматривали только производные в направлении x . Совершенно аналогичный анализ можно провести для производных в направлении y , где величину шага по y мы обозначим через k :

$$u_{yy}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2}. \quad (7)$$

Ошибка ограничения равна

$$E_T = -\frac{k^2}{12} u_{yyyy}(x_0, \eta) \quad y_0 - k \leq \eta \leq y_0 + k.$$

Теперь мы имеем разностные выражения для ихх и иуу. Разностное выражение для иу полностью аналогично (2). Используя эти выражения, можно полностью переписать дифференциальное уравнение в частных производных, получив из него уравнение в конечных разностях. Например, общеизвестное уравнение Лапласа

$$\text{ихх} + \text{иуу} = 0$$

можно переписать в виде

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2} = 0$$

2.3. Эллиптические уравнения

Типичным примером задачи, приводящей к эллиптическому уравнению, является, например, расчет напряжений, возникающих при упругом кручении длинного цилиндрического стержня. Сечение стержня может быть любой формы, например, как на рис. 1. Мы будем считать, что сечение стержня ограничено кривой C ; область, ограниченную этой кривой, мы будем обозначать через R .

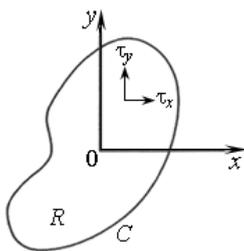


Рис. 1. Сечение цилиндра в задаче об упругом кручении

Предположим, что ось z параллельна оси цилиндра и проходит через центр тяжести сечения O . Таким образом, сечение цилиндра лежит в плоскости xu . Наконец, обозначим угол кручения на единицу длины через θ , т. е. Угол поворота плоскости $z = z_0$ относительно плоскости $z = 0$ будет равен $z_0 \cdot \theta$.

Единственными ненулевыми напряжениями в этой задаче являются напряжения сдвига τ_x и τ_y в направлениях осей x и y в плоскости xu . (Индексы здесь не означают дифференцирования.) Если определить функцию ψ с помощью соотношений

$$\tau_x = \frac{E\theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_y = \frac{E\theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8)$$

где E - модуль Юнга и ν - коэффициент Пуассона для материала стержня, то функция ψ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (9)$$

внутри области R , а на границе C этой области

$$\psi = \text{const.}$$

Поскольку интересующие нас физические величины зависят только от производных ψ , то величина константы не играет в данном случае никакой роли. Обычно принимают

$$\psi = 0 \quad (10)$$

на кривой C .

Уравнение (9) называется уравнением Пуассона. Его часто записывают в виде

$$\Delta \psi = -2$$

или

$$\nabla^2 \psi = -2.$$

Многие физические задачи приводят к уравнению Пуассона. Распределение потенциалов (или электрических напряжений) на проводящей плоскости при задании потенциала на границе также удовлетворяет уравнению Пуассона. Наконец, задача о стационарных потоках тепла в двумерном теле также сводится к уравнению Пуассона.

После такого краткого объяснения происхождения эллиптических уравнений обратимся к выводу разностных схем их решения. Рассмотрим классическую задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

в некоторой области R и

$$\psi = f(x, y) \quad (12)$$

на границе этой области, которой является кривая C . Уравнение (11), как уже об этом говорилось ранее, представляет собой уравнение Лапласа, частный случай уравнения Пуассона.

Ради простоты будем предполагать, что кривая C представляет собой отрезки прямых, параллельных осям x и y . Конечно, можно было бы и не ограничиваться таким узко специальным случаем и попытаться разработать программы для кривых более сложной формы, но, так как мы будем рассматривать только основы методов решения, такой большой общности нам не потребуется.

В частности, мы будем рассматривать прямоугольник ширины A и высоты B . Мы убедимся далее, что обобщение для случая любой области, ограниченной линиями, парал-

лельными осям x и y , достаточно просто, хотя и возникают некоторые затруднения в

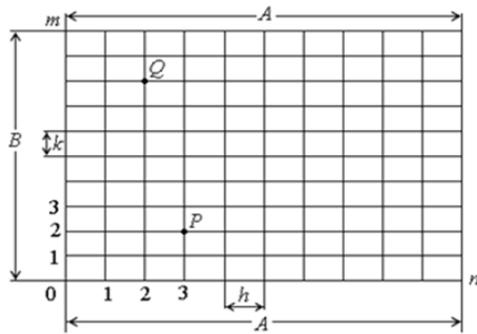


Рис.2. Построение сетки в прямоугольной области.

смысле программирования.

Разделим сначала ширину прямоугольника A на p интервалов, каждый размером

$$h = A/p;$$

точно таким же образом разделим высоту B на t частей размерами

$$k = B/t.$$

Внутри области получаются при этом $(p-1)(t-1)$

пересечений (углов) сетки. Мы запишем разностное соотношение для каждой внутренней точки и решим после этого получившуюся систему уравнений.

Прежде всего, договоримся о том, в каком порядке нумеровать точки пересечения. Мы начинаем нумерацию в горизонтальном направлении слева направо от нуля, крайняя правая точка будет при этом p -й. Аналогично в вертикальном направлении мы нумеруем точки снизу вверх от нуля до t . Узел с индексами i, j будет i -м слева и j -м снизу. Например, на рис. 2 узел P имеет индексы 3,2, узел Q индексы 2,8.

Пусть начало координат совпадает с точкой $0,0$. Обозначим

$$u(ih, jk) = u_{i,j}.$$

Аналогично запишем

$$f(ih, jk) = f_{i,j}.$$

При этой системе обозначений граничное условие (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= f_{i,0}; & i &= 0, 1, 2, \dots, p, \\ u_{i,t} &= f_{i,t}; & i &= 0, 1, 2, \dots, p, \\ u_{0,j} &= f_{0,j}; & j &= 0, 1, 2, \dots, t, \\ u_{p,j} &= f_{p,j}; & j &= 0, 1, 2, \dots, t. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть теперь точка i, j будет точкой x_0, y_0 в (6) и (7). Если теперь обозначить $\lambda = k/h$, то дифференциальное уравнение (11) сведется к разностному уравнению вида

$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) u_{i,j} = 0 \quad (14)$$

для

$$i = 1, 2, 3, \dots, p-1$$

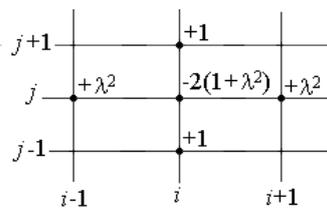
и

$$j = 1, 2, 3, \dots, t-1.$$

При $\lambda = 1$, т. е. при одинаковых величинах интервалов разбиения в горизонтальном и вертикальном направлениях, это соотношение означает, что значение $u_{i,j}$ является средним арифметическим из четырех соседних с ним.

Важно то, что мы теперь получили систему линейных алгебраических уравнений. Всего имеется $(t-1)(n-1)$ уравнений относительно $(t+1)(n+1)$ неизвестных. После того как $2(t+n)$ неизвестных будут исключены с помощью граничного условия (13), остается точно $(t-1)(n-1)$ уравнений относительно $(t-1)(n-1)$ неизвестных. Однако перед тем как браться за эту систему уравнений, посмотрим на нее внимательнее и постараемся найти некоторые ее свойства которые могли бы облегчить процесс вычисления решения.

Заметим, что уравнение (14) можно представить схематически, начертив, пять узлов разностного уравнения (14) и обозначив около каждого из них соответствующий коэффициент. Этот рисунок называется трафаретом. Трафарет геометрически иллюстрирует



разностную аппроксимацию дифференциального уравнения.

Ранее мы указывали, что при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ разностное уравнение приближается к дифференциальному уравнению.

Однако нас интересует в основном совсем другой вопрос: приближается ли при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ решение разностного уравнения к решению дифференциального уравнения? Для эллиптических уравнений на этот вопрос можно дать положительный ответ, хотя мы и не будем воспроизводить здесь доказательство. Далее мы, однако, увидим, что в случае параболических и гиперболических уравнений придется соблюдать некоторые ограничения, которые обеспечили бы такого рода сходимость.

2.4. Решение эллиптического разностного уравнения

Запишем подробно некоторые из уравнений (14). Для удобства примем $\lambda = 1$, т. е. $h = k$, но общность выводов нетрудно проверить при любом $\lambda > 0$.

Начнем с $i = 1, j = 1$ и при неизменном j пройдем значения $i = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n-1$:

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} = f_{1,0} + f_{0,1};$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{2,2} = f_{2,0};$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{3,2} = f_{3,0};$$

...

$$-u_{n-2,1} + 4u_{n-1,1} - u_{n-1,2} = f_{n-1,0} + f_{n,1};$$

Теперь увеличим j до 2 и снова пройдем значения $i = 1, 2, \dots, n-1$:

$$-u_{1,1} + 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{1,3} = f_{0,2};$$

$$-u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{2,3} = 0;$$

$$-u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{3,3} = 0;$$

...

$$-u_{n-2,1} - u_{n-3,2} + 4u_{n-2,2} - u_{n-1,2} - u_{n-2,3} = 0;$$

$$-u_{n-1,1} - u_{n-2,2} + u_{n-1,2} - u_{n-1,3} = f_{n,2}$$

Продолжим и дальше таким же образом, увеличивая каждый раз j и проходя значения $i = 1, 2, \dots, n-1$. Конечное значение j будет равно $t-1$.

Система обладает двумя важными свойствами, которые помогают выбрать для нее метод решения. Свойства эти следующие:

1. Подавляющая часть коэффициентов системы равна нулю.
2. В каждом уравнении один из коэффициентов равен $+4$. Если в уравнении имеется пять коэффициентов, отличных от нуля, то сумма остальных четырех коэффициентов равна -4 , если же количество ненулевых коэффициентов меньше пяти, то сумма остальных равна -2 или -3 .

Таким образом, в этой системе выполнены условия сходимости итерационного метода Гаусса - Зейделя (на основе ее второго свойства). Первое же свойство системы делает решение методом исключения весьма непривлекательным: исходная система с большим количеством равных нулю коэффициентов превратится после исключения неизвестных в полную треугольную систему. Учитывая, что t и p часто бывают довольно большими (несколько сотен), решение системы уравнений с помощью метода исключения нельзя признать целесообразным.

Поучительно написать некоторые уравнения в том виде, в котором с ними будут производиться итерации. Обозначая верхними индексами порядковый номер итерации и полагая, как обычно, $u_{i,j}^{(i)} = 0$ для всех i, j , получим следующий порядок решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{1,0} + f_{0,1} + u_{2,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)}] \\
 u_{2,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{2,0} + u_{1,1}^{(1)} + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}] \\
 u_{3,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{3,0} + u_{2,1}^{(1)} + u_{4,1}^{(0)} + u_{3,2}^{(0)}] \\
 &\dots \\
 u_{n-1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{n-1,0} + f_{n,1} + u_{n-2,1}^{(1)} + u_{n-1,2}^{(0)}] \\
 u_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{4} [f_{0,2} + u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)} + u_{1,3}^{(0)}] \\
 u_{2,2}^{(1)} &= \frac{1}{4} [u_{2,1}^{(1)} + u_{1,2}^{(1)} + u_{3,2}^{(0)} + u_{2,3}^{(0)}]
 \end{aligned}$$

2.5. Гиперболические уравнения

Как и ранее, изучение этого типа дифференциальных уравнений в частных производных мы начнем с краткого рассмотрения соответствующей физической задачи.

Имеется струна длиной L , натянутая между двумя точками оси x , точкой $x = 0$ и точкой $x = L$. Натяжение струны равно T . Если отклонить струну от положения равновесия и отпустить, то она начнет колебаться. Смещение каждой точки струны относительно положения равновесия зависит не только от координаты x этой точки, но и от времени t . Отклонение струны от положения равновесия описывается уравнением гиперболического типа, которое приводится без вывода

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0$$

для

$$0 \leq x \leq L \text{ и } t > 0.$$

Коэффициент a учитывает физические характеристики

$$a^2 = \frac{w}{Tg}.$$

Здесь w - вес струны на единицу длины, T - натяжение, g - ускорение силы тяжести.

Это уравнение обычно называется волновым уравнением. Для простоты мы будем принимать $a = 1$, так что наша задача выразится следующим образом:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0. \quad (15)$$

Такая формулировка задачи вовсе не означает потери общности, так как простая замена переменных сводит любое волновое уравнение к виду (15).

Поскольку концы струны закреплены, то имеем

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Начальными условиями являются начальное смещение

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq L. \quad (17)$$

и начальная скорость

$$u_t(x, 0) = g(x); \quad 0 < x < L. \quad (18)$$

Например, если мы оттянем струну за середину, как показано на рис. 4, и отпустим ее без придания ей начальной скорости,

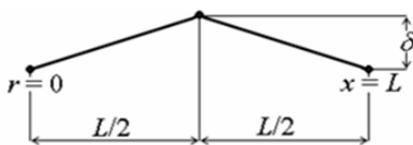


Рис. 4. Возможные начальные условия для колеблющейся струны, описываемой волновым уравнением.

то начальные условия запишутся в виде

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\delta}{L}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2\delta}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \quad 0 < x < L$$

Заметим, что мы назвали эти условия начальными, а не граничными. В действительности если задать для гиперболического уравнения граничные условия, то полученная задача не будет иметь единственного решения. Подобные задачи называются некорректно поставленными. Очень важно, чтобы дополнительные условия должным образом соответствовали каждому типу уравнений.

Чтобы найти разностные уравнения, соответствующие (15), воспользуемся снова равенствами (6) и (7), причем вместо u будем писать t . Снова начертим сетку, но теперь эта сетка простирается бесконечно в направлении положительных значений t ; мы можем искать решение для сколь угодно далекого момента времени. В направлении x мы примем шаг сетки равным h , в направлении t - равным k . Поэтому интервал L разделяется на $n = L/h$ малых интервалов h , а в направлении t может быть сколь угодно много интервалов k .

Если обозначить

$$u_{i,j} = u(ih, jk)$$

и

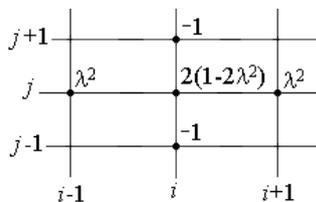
$$\lambda = \frac{k}{h}$$

то разностное уравнение запишется в виде

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2) u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad (19)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$ и для $j = 1, 2, \dots$.

Графический вид при этом выглядит так:



Граничное условие (16) легко записать в виде

$$u_{0,j} = u_{n,j} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Начальное условие (17) можно написать в виде

$$u_{i,0} = f(ih); \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (21)$$

Чтобы записать в разностном виде начальное условие (18), можно использовать равенство (2), откуда

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(ih)$$

После этого, используя (21), получаем

$$u_{i,1} = f(ih) + kg(ih). \quad (22)$$

2.6. Решение гиперболического разностного уравнения

Заметим теперь, что (21 и 22) дают значения u для первых двух строк: $j = 0$ и $j = 1$.

Подставляя $j = 1$ в (19), получим

$$u_{i,2} = 2(1 - \lambda^2) u_{i,1} + \lambda^2(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) - u_{i,0}.$$

Все слагаемые в правой части этого уравнения включают значения u и только из первых двух строк сетки; но ведь все эти значения известны из начальных условий. Поэтому в

последнем уравнении имеется только одно неизвестное и все значения функции, соответствующие третьей строке, можно вычислить в явном виде. После этого можно вычислять значения функции в четвертой строке, исходя из значений во второй и в третьей строках, и т. д. столько раз, сколько потребуется. При этом даже не приходится решать систем уравнений.

Таким образом, (19) представляет собой явную схему решения волнового уравнения. Для сравнения вспомним, что при решении эллиптического уравнения (14) представляло собой схему, где в каждом уравнении было более чем по одному неизвестному; таким образом, этот метод можно было назвать неявным.

Рассмотрим теперь вопросы сходимости и устойчивости метода. Мы не будем приводить здесь доказательств, а ограничимся только формулировкой окончательных результатов. Можно утверждать, что решение (19) сходится к решению (15) (имеется в виду, что при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ решение разностного уравнения асимптотически приближается к решению дифференциального уравнения), если

$$\lambda < 1,$$

или, что то же самое,

$$k < h. \quad (23)$$

Это условие является достаточным для сходимости; но оно не является необходимым. Другими словами, существуют уравнения и величины интервалов, при которых (23) не выполняется, но все же получается правильный результат. Все дело в том, что тогда нельзя гарантировать сходимость. В общем случае, конечно, желательно обеспечить сходимость наверняка, и поэтому мы будем соблюдать условия (23).

Таким образом, как только выбрана величина интервала разбиения h в направлении x , то появляется ограничение на величину интервала по времени. Если необходимо произвести вычисления для большого отрезка t , то может потребоваться большое количество шагов по времени.

Другим столь же важным обстоятельством является то, что при $\lambda > 1$ метод становится неустойчивым, как в абсолютном, так и в относительном смысле. Это означает, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, что любые ошибки возрастают в ходе вычисления решения.

Поэтому при решении уравнения (15) явными методами условие (23) обязательно должно выполняться. Отличительная особенность всех явных методов заключается в том, что при их использовании должно соблюдаться некоторое условие типа (23), обеспечивающее сходимость и устойчивость метода.

Существуют также неявные методы решения гиперболических уравнений, не подверженные неустойчивости.

2.7. Параболические уравнения

В качестве примера физической задачи, приводящей к уравнению этого типа, рассмотрим процесс теплопередачи по длинному стержню, лежащему вдоль оси x от $x = 0$ до $x = L$. Предположим, что в точке $x = 0$ температура поддерживается на уровне T_0 , а в точке $x = L$ температура поддерживается на уровне T_L . Предположим также, что в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня задавалось функцией $f(x)$. Тогда распределение температуры вдоль стержня во все последующие моменты времени дается решением уравнения

$$u_{xx} = a u_t, \quad (24)$$

где u - температура стержня в данной точке в данный момент времени,

a постоянная $a = c\rho/k$,

где c - теплоемкость материала стержня,

ρ - плотность материала стержня

k - его теплопроводность.

Для простоты положим $a = 1$, так что уравнение сведется к следующему виду:

$$u_{xx} = u_t \quad (25)$$

Граничными условиями для этого уравнения являются

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_0 \\ u(L, t) &= T_L \end{aligned} \quad (26)$$

и начальным условием является

$$u(x, 0) = f(x) \quad (27)$$

Уравнение (25) представляет собой параболическое дифференциальное уравнение в частных производных, известное под названием уравнения теплопередачи или уравнения диффузии.

Многие другие важные задачи также приводят к параболическим уравнениям. Например, уравнения, которыми описываются длинные линии связи, так называемые телеграфные уравнения, также являются параболическими.

При записи в разностной форме граничные условия (26) запишутся так:

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= T_0; \quad j = 1, 2, \dots \\ u_{n,j} &= T_L; \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Начальное условие (27) запишется в виде

$$u_{i,0} = f(ih) \quad (29)$$

Чтобы преобразовать в разностную форму (25), снова представим себе сетку, охватывающую область $0 \leq x \leq L$ и $t > 0$ с интервалом разбиения h в направлении x и интервалом разбиения k в направлении t . Используя (2) и (6), получаем

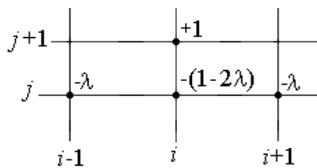
$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j} \quad (30)$$

где

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \quad (31)$$

и индекс i изменяется от 1 до $n - 1$, а индекс j - от 1 до ∞ . Обратите внимание на новое определение λ .

Трафарет этого метода можно представить себе так:



Верхний предел ошибки ограничения выражается соотношением

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda(6\lambda - 1)}{12} M h^4 \quad (32)$$

где

$$|u_{xxxx}| < M$$

при условии $\lambda \neq \frac{1}{6}$ так как тогда это выражение обращается в нуль. При $\lambda = \frac{1}{6}$ верхний предел ошибки ограничения выглядит так:

$$|T_{i,j}| \leq \frac{N}{810} h^6 \quad (33)$$

где

$$|u_{xxxxxx}| < N$$

Очевидно, что с точки зрения наименьшей ошибки ограничения целесообразно было бы выбирать

$$k = \frac{1}{6} h^2 \quad (34)$$

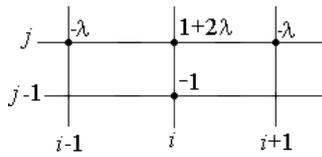
Это не всегда оказывается удобным. Может сложиться впечатление, что преобразовать дифференциальное уравнение в разностное можно только единственным способом. Дело, однако, обстоит вовсе не так. Далее мы рассмотрим другие способы построения разностных схем для параболического уравнения и укажем на их преимущества и недостатки. Конкретно мы рассмотрим два способа.

Тот метод, который привел к уравнению (30), был основан на использовании правых разностей (2). Если использовать левые разности (3), то разностное уравнение запишется в следующем виде:

$$-\lambda u_{i+1,j} + (1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1} \quad (35)$$

где λ означает то же, что и в (31).

Трафарет этого метода выглядит так:



Верхний предел ошибки ограничения дается формулой

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda(6\lambda+1)}{12} Mh^4 \quad (36)$$

где по-прежнему

$$|u_{xxxx}| < M$$

Этот предел больше, нежели (32); кроме того, нельзя свести ошибку ограничения к 0 (h6) специальным выбором параметра λ .

Рассмотрим еще один способ построения разностного уравнения, эквивалентного (25).

Вспомним, что, согласно (6), в точке i, j

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Аналогично в точке $i, j+1$

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

Усредняя эти два приближения, получим

$$u_{xx} \approx \frac{1}{2h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

Если теперь для вычисления u_t воспользоваться правыми разностями, то

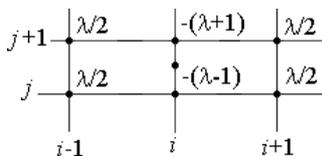
$$u_t \approx \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j})$$

и разностное уравнение, эквивалентное (25), запишется в виде

$$\frac{\lambda}{2} u_{i-1,j+1} - (\lambda+1)u_{i,j+1} + \frac{\lambda}{2} u_{i+1,j+1} = -\frac{\lambda}{2} u_{i-1,j} + (\lambda-1)u_{i,j} - \frac{\lambda}{2} u_{i+1,j} \quad (37)$$

Этот способ построения разностного уравнения часто называют методом Кранка - Никольсона.

Трафарет для (37) имеет вид.



Верхний предел ошибки ограничения дается формулой

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda}{12} Mh^4$$

где

$$|u_{xxxx}| < M \quad (38)$$

Этот верхний предел в $6\lambda+1$ раз меньше, чем (36).

Поскольку предел ошибки ограничения (38) меньше, чем (36), то по этой характеристике разностное уравнение (37) предпочтительнее, нежели (35).

2.8. Решение параболического разностного уравнения

Мы рассмотрели три различных способа разностного представления дифференциального уравнения $ixx = ut$, а именно формулы (30), (35) и (37). Рассмотрим теперь методы решения каждого из этих разностных уравнений и сопоставим их достоинства и недостатки. Во всех случаях будем считать, что граничные и начальные условия заданы в виде (28) и (29).

Первый способ, определяемый формулой (30), представляет собой явную систему уравнений для $u_{i,j+1}$ в том же самом смысле, в котором (19) являлось явной системой для случая гиперболического уравнения. Имея на основании начальных и граничных условий первую строку решения, мы можем вычислить вторую строку, $j = 1$, непосредственно из (30), положив $j = 0$. Вычислив вторую строку, мы можем таким же образом вычислить третью строку, положив на этот раз $j = 1$. Таким же способом можно продолжать вычислять решение столь далеко по оси времени, сколь в этом есть необходимость.

Эта ситуация полностью аналогична той, с которой мы столкнулись при рассмотрении гиперболических уравнений. Поэтому естественно ожидать, что для параболических уравнений должны возникнуть те же вопросы сходимости и устойчивости. Так это и есть в действительности: процесс вычисления решения сходится и устойчив, если

$$\lambda < \frac{1}{2}$$

или, что то же самое, при

$$k < \frac{h^2}{2}$$

Тем самым накладываются довольно серьезные ограничения на выбор шага по времени, гораздо более серьезные, нежели в случае гиперболического уравнения. Именно это и заставляет искать возможности решения уравнения другими способами, в частности (35) и (37).

И (35), и (37) представляют собой неявные методы решения, аналогичные тому, который был применен для эллиптических уравнений (14). Рассмотрим сначала (35). Мы можем выписать уравнения для первой строки решения $j = 1$, используя начальные и граничные условия (28) и (29):

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda)u_{1,1} - \lambda u_{2,1} &= f(h) + \lambda T_0 \\ -\lambda u_{1,1} + (1 + 2\lambda)u_{2,1} - \lambda u_{3,1} &= f(2h) \\ -\lambda u_{2,1} + (1 + 2\lambda)u_{3,1} - \lambda u_{4,1} &= f(3h) \\ &\dots \\ -\lambda u_{n-2,1} + (1 + 2\lambda)u_{n-1,1} &= f(nh - h) + \lambda T_L \end{aligned}$$

Всего получается $p - 1$ линейных уравнений с $p - 1$ неизвестными для $i = 1, 2, \dots, p - 1$. Эти уравнения можно решить методом исключения; кроме того, что подавляющее большинство коэффициентов равно нулю, сам вид системы делает решение методом исключения довольно простой задачей.

Дело в том, что единственные ненулевые коэффициенты расположены в трех диагональных рядах симметрично относительно главной диагонали. Система уравнений этого типа называется тридиагональной. Можно решать эту систему и с помощью итерационного метода Гаусса - Зейделя, так как диагональный коэффициент в каждом уравнении равен $1 + 2\lambda$, а сумма недиагональных равна -2λ , что обеспечивает сходимость. Для ускорения сходимости можно воспользоваться экстраполяцией.

Найдя решение для первой строки, т. е. для $t = k, j = 1$, можно записать систему уравнений для второй строки и снова получить тридиагональную систему из $p - 1$ уравнений. После решения этой системы можно переходить к третьей строке и так далее. Для вычисления одной строки решения каждый раз приходится решать систему из $p - 1$ линейных алгебраических уравнений.

Поскольку трудоемкость этого способа гораздо больше, чем для явных формул (30), можно задать себе вопрос, имеет ли смысл вообще когда-либо прибегать к такому способу? Ответ на этот вопрос заключается в том, что (35) устойчиво и сходится для всех $\lambda > 0$. Поэтому, пользуясь методом (35), можно брать гораздо большую величину шага по времени. Попробуем определить, можно ли действительно добиться экономии машинного времени.

Приблизительно можно считать, что при использовании метода (35) затраты машинного времени на вычисление одной строки решения будут вдвое больше, чем при использовании метода (30). Если взять $\lambda = 1$, то общая затрата времени на расчет решения до определенного момента будет вдвое меньше. Правда, нужно учесть, что ошибка ограничения круто возрастает с ростом шага по времени, так что определяющим фактором может явиться именно максимально допустимая ошибка.

Последняя разностная формула (37) является другим неявным методом и для вычисления одной строки также требует решения тридиагональной системы из $p - 1$ уравнений.

Затраты машинного времени при использовании этой формулы будут, следовательно, такими же, как и для (35). Этот метод также устойчив для всех λ .

Заметим, что при удвоении λ в формуле (37) ошибка ограничения удваивается, в то время как в (35) ошибка ограничения учетверялась. Поэтому метод (37) (метод Кранка - Никольсона) предпочтительнее, нежели (35).

Нужно отметить, однако, что для других параболических уравнений этот метод устойчив не при всех λ и поэтому иногда приходится прибегать к (35).

Существует еще много различных разностных методов и явных, и неявных. Мы рассмотрели только самые простые из них. Как обычно, мы заканчиваем указанием, что изложенные методы позволяют решать множество практически важных задач.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970.
3. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.