

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

*Методические указания для самостоятельной
работы слушателей подготовительного отделения и
подготовительных курсов*

Санкт-Петербург

2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

*Методические указания для самостоятельной
работы слушателей подготовительного отделения и
подготовительных курсов*

Санкт-Петербург

2022

УДК 512.12 + 514.116 + 517(073)

МАТЕМАТИКА: Методические указания для самостоятельной работы/
Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: А.П. Господариков, Л.В. Бакеева,
Т.С. Обручева. СПб., 2022. 96 с.

В методических указаниях даны необходимые теоретические сведения и практические методы решения задач по основным разделам элементарной математики (прогрессии, тригонометрия, начала анализа).

Методические указания предназначены для аудиторной и самостоятельной работы слушателей подготовительного отделения и подготовительных курсов.

Табл. 3. Рис. 39. Библиогр.: 12 назв.

Научный редактор проф. А.П. Господариков
Рецензент проф. С.И. Перегудин (СПбГУ)

© Санкт-Петербургский горный
университет, 2022

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для слушателей подготовительных курсов и подготовительного отделения, содержат основные разделы элементарной математики: «Прогрессии. Тригонометрия. Начала анализа».

Цель указаний – повторение и систематизация знаний по элементарной математике, подготовка к экзаменам, дальнейшее изучение разделов курса высшей математики в вузе, где необходимы знания и навыки применения методов решения задач, формул и теорем.

В разделе «Прогрессии» приведены основные сведения о прогрессиях, подробно разобраны примеры. В разделе «Тригонометрия» изложены определения, свойства и графики тригонометрических функций, графики и свойства обратных тригонометрических функций, основные формулы тригонометрии, показаны примеры их использования. Изложены различные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. В разделе «Начала анализа» даны определения производной, первообразной, неопределенного и определенного интегралов, приведены примеры на вычисление производных и интегралов, основные теоремы применения производной к исследованию функций. Рассмотрены примеры вычисления площадей фигур с помощью определенного интеграла.

Методические указания содержат все необходимые определения и формулы, формулировки свойств. Особое внимание уделяется разнообразным приемам и методам решения задач, а также заданиям для самостоятельного решения (с ответами).

При повторении теоретического материала следует обращаться к школьным учебникам или учебным пособиям. Для тех разделов программы, на которые следует обратить особое внимание, даны более подробные теоретические пояснения.

Основные задачи методических указаний – овладение базовыми знаниями элементарной математики, формирование навыков применения математического аппарата для решения конкретных задач.

Список принятых обозначений.

$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел (вещественных),
числовая прямая;

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;

$D(y)$ – область определения функции;

$E(x)$ – множество значений функции;

$[a, b]$ – отрезок, замкнутый промежуток;

(a, b) – интервал, открытый промежуток;

$(-\infty, \infty)$ – бесконечный интервал, числовая прямая;

$\Rightarrow$ – символ следования;

$\Leftrightarrow$ – символ равносильности;

$\subset$ – символ включения (например, $C \subset D$ – множество C включено в множество D);

$\cup$ – символ объединения (например, $C \cup D$ – объединение множеств C и D);

$\{$ – символ системы, когда должны совместно (одновременно) выполняться все перечисленные в системе соотношения;

$[$ – символ совокупности, когда должно выполняться хотя бы одно из перечисленных соотношений;

$\{a, b, c\}$ – множество, состоящее из элементов a, b, c ;

$\emptyset$ – пустое множество;

$x \in R$ – x является элементом множества R ;

$x \notin R$ – x не является элементом множества R ;

ОФ – область определения функции;

ОДЗ – область допустимых значений функции.

$\forall$ – каждый, любой.

1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Если каждому натуральному числу n по некоторому правилу ставится в соответствие определенное

действительное число a_n , то множество действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется *бесконечной числовой последовательностью*. Другими словами, числовая последовательность – это функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Последовательность считается заданной, если указан способ, по которому можно найти ее член a_n с любым номером n . Обозначается последовательность символом $\{a_n\}, n \in N$.

Например, последовательность $\left\{a_n = \frac{n-1}{n+1}\right\}, n \in N$, имеет вид:

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5}, a_5 = \frac{2}{5}, \dots$$

Примером числовых последовательностей (конечных и бесконечных) могут быть прогрессии – арифметическая и геометрическая.

1.1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. *Арифметической прогрессией* называется конечная или бесконечная числовая последовательность, первый член которой равен a_1 , а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым постоянным числом d – *разность* прогрессии: $a_n = a_{n-1} + d, n = 2, 3, \dots$

Арифметическая прогрессия является *возрастающей*, если $d > 0$, и *убывающей*, если $d < 0$. Если же $d = 0$, то прогрессия является *постоянной* последовательностью.

Приведем основные формулы, справедливые для арифметической прогрессии.

Формула ***n-го члена*** арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, n \in N.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), n \in N, n \geq 2.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Если арифметическая прогрессия имеет конечное число членов $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$, то

$$a_k + a_{m-k+1} = a_1 + a_m, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

т.е. сумма членов, равноотстоящих от первого и последнего, постоянна и равна сумме крайних членов.

Пример 1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если ее четвертый член равен 0, а разность равна 2.

Решение. Применим формулу суммы десяти членов арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10, \quad S_{10} = 5(2a_1 + 9d).$$

Найдем первый член прогрессии a_1 . Для этого выразим a_4 через a_1 и d : $a_4 = a_1 + 3d$. По условию задачи $a_4 = 0$, $d = 2$, откуда $a_1 + 3 \cdot 2 = 0$, $a_1 = -6 \Rightarrow S_{10} = 5(-12 + 18) = 30$.

Ответ. $S_{10} = 30$.

Пример 2. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма семи первых членов равна -7 , а произведение третьего и шестого членов равно -20 , т.е. найти a_1 и d .

Решение. Запишем условие задачи с помощью формул:

$$S_7 = \frac{1}{2}(2a_1 + 6d) \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = -7;$$

$$a_3 \cdot a_6 = (a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 5d) = -20.$$

В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 + 3d = -1, \\ a_1^2 + 7a_1d + 10d^2 = -20. \end{cases}$$

Решим ее подстановкой:

$$\begin{cases} a_1 = -1 - 3d, \\ 1 + 6d + 9d^2 - 7d - 21d^2 + 10d^2 = -20; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -1 - 3d, \\ 2d^2 + d - 21 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 - 3d, \\ d = 3 \text{ или } d = -3,5. \end{cases}$$

Система имеет два решения.

Ответ. а) $\begin{cases} d = 3, \\ a_1 = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} d = -3,5, \\ a_1 = 9,5. \end{cases}$

1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. *Геометрической прогрессией* называется конечная или бесконечная числовая последовательность, первый член которой равен b_1 , а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое число q — *знаменатель* прогрессии, отличное от нуля: $b_n = b_{n-1} \cdot q, n = 2, 3, \dots$.

Геометрическая прогрессия является *возрастающей*, если $b_1 > 0$, $q > 1$ или $b_1 < 0$, $0 < q < 1$; геометрическая прогрессия является *убывающей*, если $b_1 < 0$, $q > 1$, или $b_1 > 0$, $0 < q < 1$. Если $q = 1$, то геометрическая прогрессия является *постоянной* числовой последовательностью.

Приведем основные формулы, справедливые для геометрической прогрессии.

Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in N.$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \in N, n \geq 2.$$

Следствие: если $b_n > 0$ при любых $n \in N$, то

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, n \in N, n \geq 2.$$

Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ если } q \neq 1; S_n = nb_1, \text{ если } q = 1.$$

Если геометрическая прогрессия имеет конечное число членов: $b_1, b_2, \dots, b_m$, то

$$b_k \cdot b_{m-k+1} = b_1 \cdot b_m, k = 1, 2, \dots, m,$$

т.е. произведение членов, равноотстоящих от первого и последнего, постоянно и равно произведению первого и последнего.

Пример 3. Найти сумму первых 5 членов геометрической прогрессии, если третий член равен -12 , а знаменатель равен -2 .

Решение. Воспользуемся формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} = b_1 \cdot \frac{33}{3} = 11 \cdot b_1.$$

Зная b_3 , из формулы $b_3 = b_1 \cdot q^2$ найдем первый член прогрессии: $b_1 \cdot 4 = -12$, отсюда, $b_1 = -3$. Следовательно, $S_5 = 11 \cdot (-3) = -33$.

Ответ. $S_5 = -33$.

Пример 4. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна -14 , второй член равен 6.

Решение. Выразим условие задачи через первый член b_1 и знаменатель q . Предположив, что $q = 1$, придем к противоречию: $S_3 = 3 \cdot 6 = 18 \neq -14$, значит, $q \neq 1$. Следовательно,

$$S_3 = b_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q} = -14.$$

Второй член прогрессии $b_2 = b_1 \cdot q = 6$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q} = -14, \\ b_1 \cdot q = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(q^2 + q + 1) = -14, \\ b_1 = \frac{6}{q}. \end{cases}$$

Подставив b_1 в первое уравнение, в предположении, что $q \neq 0$, получим

$$\frac{6(q^2 + q + 1)}{q} = -14, \quad 3q^2 + 3q + 3 = -7q, \quad 3q^2 + 10q + 3 = 0.$$

Найдем корни уравнения $q_1 = -3, q_2 = -\frac{1}{3}$. Отсюда $b_1 = -2$ или $b_1 = -18$. Итак, система имеет два решения.

$$\text{Ответ. } q = -\frac{1}{3}, b_1 = -18; \quad q = -3, b_1 = -2.$$

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если $|q| < 1$ и она имеет бесконечное число членов.

Сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1 - q}$, где b_1 и q – соответственно первый член и знаменатель прогрессии.

Пример 5. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$.

Решение. Для этой прогрессии $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$S = \frac{1}{1 - 0,5} = 2.$$

$$\text{Ответ. } S = 2.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Произведение первого и четвертого членов арифметической прогрессии равно -8, сумма первых шести членов равна -3. Найти прогрессию.

$$\text{Ответ. } a_1 = -8, d = 3; a_1 = 5, d = -\frac{11}{5}.$$

2. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если сумма третьего и одиннадцатого членов равна 44, а сумма второго и одиннадцатого равна 41.

$$\text{Ответ. } 175.$$

3. Произведение первого и четвертого членов арифметической прогрессии равно 16, а суммы первых двух и первых семи членов равны между собой. Найти прогрессию.

Ответ. $a_1 = -8, d = 2; a_2 = 8, d = -2$.

4. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма первых двух членов равна 7, а их произведение равно 10.

Ответ. $a_1 = 5, d = -3; a_2 = 2, d = 3$.

5. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее второй член равен $-\frac{1}{2}$, а четвертый член этой прогрессии равен $-\frac{1}{8}$.

Ответ. $S_6 = -\frac{63}{32}, S_6 = \frac{21}{32}$.

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна -14. Второй член равен 6. Найти прогрессию.

Ответ. $b_1 = -18, q = \frac{1}{3}; b_1 = -2, q = -3$.

7. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии равна - 49, сумма второго и третьего членов равна 14. Найти прогрессию.

Ответ. $b_1 = -56, q = -\frac{1}{2}; b_1 = 7, q = -2$.

8. Первый член геометрической прогрессии равен 12, знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Сумма первых n членов равна $\frac{93}{4}$. Найти n .

Ответ. $n = 5$.

9. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее третий член равен $3\sqrt{2} - 4$, а знаменатель равен $\sqrt{2} - 1$.

Ответ. $S = \sqrt{2} + 1$.

10. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен $3 - \sqrt{3}$, а третий член равен $4\sqrt{3} - 6$.

Ответ. $S = 2\sqrt{3} + 3$.

11. Сумма восьми первых членов арифметической прогрессии 24, а ее третий член равен 0. Найти геометрическую прогрессию с положительными членами, у которой сумма первых двух членов равна 80, а третий член равен пятому члену арифметической прогрессии.

Ответ. $b_1 = 64, q = \frac{1}{4}$.

12. Сумма второго и третьего членов геометрической прогрессии с положительными членами равна 20, а ее четвертый член равен 1. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма второго и четвертого членов равна 0, а одиннадцатый член равен второму члену геометрической прогрессии.

Ответ. $a_1 = -4, d = 2$.

13. Сумма пяти первых членов арифметической прогрессии равна 40, ее шестой член равен 20. Найти геометрическую прогрессию, у которой знаменатель – число, обратное разности арифметической прогрессии, а разность между вторым и третьим членами равна четвертому члену арифметической прогрессии.

Ответ. $b_1 = 64, q = \frac{1}{4}$.

14. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами равна $\frac{256}{3}$, разность между первым и вторым ее членами равна 48. Найти арифметическую прогрессию, у которой второй член равен третьему члену геометрической прогрессии, а пятый член равен второму члену геометрической прогрессии.

Ответ. $a_1 = 0, d = 4$.

15. Сумма шести членов арифметической прогрессии равна 135, а ее одиннадцатый член равен 0. Найти геометрическую

прогрессию, у которой знаменатель – число, противоположное разности арифметической прогрессии, а четвертый член равен второму члену арифметической прогрессии.

Ответ. $b_1 = 1, q = 3$.

16. Сумма двух первых членов геометрической прогрессии с положительными членами равна 4, а сумма четырех первых членов равна 40. Найдите арифметическую прогрессию, разность которой – число, противоположное знаменателю геометрической прогрессии, а сумма пяти членов – на единицу меньше суммы пяти членов геометрической прогрессии.

Ответ. $a_1 = 30, d = -3$.

17. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 120, а ее первый член в два раза больше шестого. Найти геометрическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 39, а первый член равен второму члену арифметической прогрессии.

Ответ. $b_1 = 27, q_1 = -\frac{4}{3}, q_2 = \frac{1}{3}$.

18. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами больше суммы ее первых четырех членов на $\frac{1}{2}$, третий член прогрессии равен 3. Найти арифметическую прогрессию, у которой второй член равен первому члену геометрической прогрессии, а разность – число, противоположное третьему члену геометрической прогрессии.

Ответ. $a_1 = 30, d = -3$.

19. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 75, а ее седьмой член равен 30. Найти возрастающую геометрическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 31, а второй член равен второму члену арифметической прогрессии.

Ответ. $b_1 = 1, q = 5$.

20. Сумма первых двух членов геометрической прогрессии с положительными членами равна 30, а ее третий член равен 1. Найти арифметическую прогрессию, у которой второй член равен второму

члену геометрической прогрессии, а шестой член – число, обратное пятому члену геометрической прогрессии.

Ответ. $a_1 = 0, d = 5$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.1. Радианное измерение углов и дуг

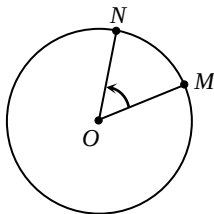


Рис.1

В тригонометрии угол (линейный) рассматривается как мера вращения, при котором одна сторона OM угла $\angle MON$, (рис.1), вращаясь вокруг вершины угла O против движения часовой стрелки (положительное направление), переходит в положение другой его стороны ON . Движение по часовой стрелке считается отрицательным. При этом могут быть сделаны один или несколько оборотов. Поэтому говорят, что задание начальной стороны угла и конечной

стороны угла определяют угол неоднозначно или с точностью до величины, кратной 360° .

Определение 1. *Центральный угол* – это угол $\angle MON$, образованный двумя радиусами OM и ON , где точка O – центр круга (рис.1). Угол измеряется в градусах или в радианах.

Определение 2. Углом в 1 *радиан* (1 рад) называется угол, под которым видна из центра окружности дуга, длина которой равна радиусу этой окружности : $\angle MON = 1 \text{ рад}$, $MN = OM$,

$$1 \text{ рад} = 180^\circ / \pi \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$1^\circ = \pi / 180^\circ \approx 0,01745 \text{ рад}.$$

Для перехода от радианной меры угла к градусной, нужно число радианов, содержащихся в угле, умножить на $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Чтобы перейти от градусной меры угла к радианной, нужно число градусов, содержащихся в угле, умножить на $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Длина дуги окружности вычисляется по формуле $l = \frac{\pi n}{180^\circ}$,

где n - величина центрального угла в градусах, r - радиус окружности; $l = r\alpha$, $\alpha = \frac{\pi n}{180^\circ}$ рад.

- Пример 1.** 1) Найти градусную меру угла, содержащего 1,5 рад.
2) Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна 3.

Решение. Умножая данное значение угла на множитель $\frac{180^\circ}{\pi}$, получим

$$1) \alpha^\circ = 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 1,5 \cdot 57^\circ 17' 44,8'' = 85^\circ 56' 37,2''$$

$$2) \alpha^\circ = 3 \cdot 180^\circ / \pi \approx 3 \cdot 57^\circ 17' 45'' \approx 171^\circ 53' 15''.$$

Ответ. $85^\circ 56' 37,2''$; $171^\circ 53' 15''$.

Пример 2. Найти радианную меру угла, содержащего 17° .

Решение. Умножим α на множитель $\pi/180$, получим

$$17 \frac{\pi}{180^\circ} = 17 \cdot 0,01745 = 0,29665 \text{ рад.}$$

Пример 3. Найти радианную меру угла $\alpha = 225^\circ$ с точностью до 10^{-2} .

Решение. Умножая α на множитель $\frac{\pi}{180}$, получим

$$\alpha = 225\pi/180 = 5/4\pi = 5 \cdot 3,14/4 \approx 3,92 \text{ рад.}$$

Ответ. 3,92 рад.

2.2. Определение тригонометрических функций

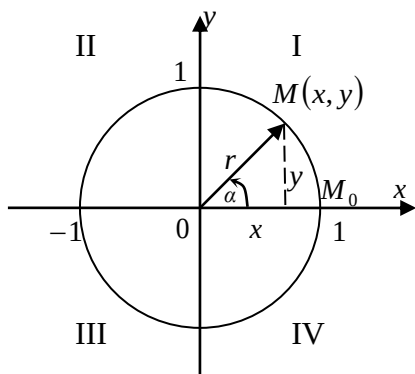


Рис.2

Рассмотрим окружность радиуса r (рис.2) с центром в начале координат. Радиусом-вектором точки M относительно начала координат называется вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с точкой $M(x, y)$, длина $|\overrightarrow{OM}| = r$.

Обозначим $\angle M_0OM = \alpha$.

Определение 1. *Синус* угла α $\sin \alpha$, есть отношение ординаты конца радиуса r , образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса; *косинус* угла α $\cos \alpha$, есть отношение абсциссы конца радиуса r к длине этого радиуса; *тангенс* угла α $\operatorname{tg} \alpha$, есть отношение ординаты к абсциссе; *котангенс* угла α $\operatorname{ctg} \alpha$ – величина, обратная *тангенсу*, т.е. справедливы формулы:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \cos \alpha = \frac{x}{r}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Если радиус окружности $r=1$, то получим следующие определения тригонометрических функций, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение 2. *Синус* угла α есть проекция радиуса–вектора $\overrightarrow{OM}$ ($|\overrightarrow{OM}| = r = 1$), образующего угол α с осью абсцисс, на ось ординат; *косинус* угла α есть проекция радиуса–вектора $\overrightarrow{OM}$, на ось абсцисс, т.е.

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Определение 3. Предположим, что на координатной плоскости точка $M(x; y)$ получена вращением точки $M_0(1; 0)$ по единичной окружности с центром в начале координат *против часовой стрелки* на угол α (угол считается положительным) (рис.2). Тогда ее абсцисса и ордината называются *косинусом* и *синусом* угла α , соответственно:

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

При повороте *по часовой стрелке* определение сохраняется, но угол поворота считается отрицательным:

$$x = \cos(-\alpha), \quad y = \sin(-\alpha).$$

Из определений следует ряд *свойств* функций:

1) Функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ по абсолютной величине не превосходят единицу, $\operatorname{tg} \alpha \in R$, $\operatorname{ctg} \alpha \in R$:

$$|\sin \alpha| \leq 1; |\cos \alpha| \leq 1; -\infty < \operatorname{tg} \alpha < \infty; -\infty < \operatorname{ctg} \alpha < \infty.$$

2) Тригонометрические функции – *периодические*. Тангенс и котангенс имеют основной период равный $\pi = 180^\circ$; синус и косинус имеют основной период $2\pi = 360^\circ$.

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

3) Косинус – функция **четная**, а все остальные тригонометрические функции – **нечетные**:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Оси координат делят плоскость (рис.2) на четыре четверти.

В табл.1 приведены знаки тригонометрических функций по четвертям.

Таблица 1

Четверть Функция	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	—	—
$\cos \alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	—	+	—

В табл.2 приведены значения тригонометрических функций некоторых углов.

Таблица 2

Функция \ α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	—1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.

2.3. Графики тригонометрических функций

Будем обозначать независимую переменную (угол) через x , тогда, используя определения и свойства тригонометрических функций, построим графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (рис.3).

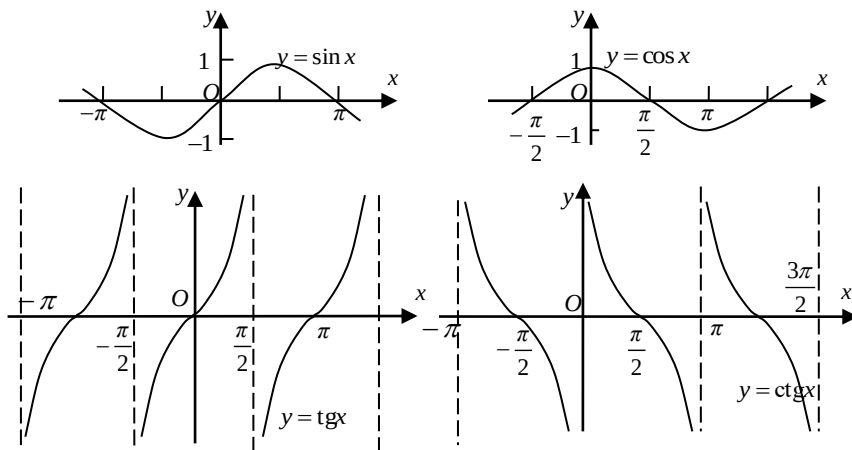


Рис. 3

2.4. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют перейти от тригонометрических функций любого угла к тригонометрическим функциям острого угла $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Практическое **правило** перехода формулируется так:

1) для углов $(2\pi \pm \alpha)$ и $(\pi \pm \alpha)$ название приводимой функции сохраняется;

2) для углов $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ название приводимой функции заменяется на сходное, т.е. синус заменяется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот;

3) полученной приведенной функции приписывается тот знак, который имеет приводимая (исходная) функция в заданной четверти.

Для решения примеров можно также пользоваться табл.3.

Таблица 3

Функция \ x	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

При решении примеров надо пользоваться также свойствами периодичности и четности (или нечетности) тригонометрических функций.

Пример 3. Упростить 1) $\sin 1135^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{5}\right)$.

Решение.

$$1) \sin 1135^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ + 55^\circ) = \sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg} \frac{33\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(6\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}.$$

$$\text{Или} \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(-7\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}.$$

Ответ. 1) $\cos 35^\circ$; 2) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$.

Пример 4. Определить знак разности $\sin 2,6 - \sin 3$.

Решение. Сравним значения углов 2,6 и 3 с $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ и $\pi \approx 3,14$.

Очевидно, что $1,57 < 2,6 < 3$ и $1,57 < 3 < 3,14$. Следовательно, углы принадлежат интервалу $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, где $\sin \alpha$ убывает. Поэтому $\sin 2,6 > \sin 3$ и разность $\sin 2,6 - \sin 3 > 0$.

Ответ. Знак положительный.

Пример 5. Определить знак разности $\operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{tg} 57^\circ$.

Решение. По формуле приведения $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ преобразуем $\operatorname{tg} 57^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 33^\circ) = \operatorname{ctg} 33^\circ$. Теперь сравним $\operatorname{ctg} 40^\circ$ и $\operatorname{ctg} 33^\circ$. На интервале $(0; \pi)$ котангенс убывает. Следовательно, $\operatorname{ctg} 40^\circ < \operatorname{ctg} 33^\circ$, т.е. $\operatorname{ctg} 40^\circ < \operatorname{tg} 57^\circ$ и разность $\operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{tg} 57^\circ < 0$.

Ответ. Знак отрицательный.

Пример 6. Упростить $\sin(-910^\circ)$.

Решение. Применим свойства нечетности и периодичности синуса, тогда имеем

$$\sin(-910^\circ) = -\sin 910^\circ = -\sin(910^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = -\sin 190^\circ.$$

Теперь используем формулу приведения: $\sin 190^\circ = \sin(180^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$.

Ответ. $\sin(-910^\circ) = \sin 10^\circ$.

Пример 7. Привести к сходным по названию функциям острого угла функции

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{8}\right) \text{ и } \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right).$$

Решение. Преобразуем по формулам приведения:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg} \frac{17\pi}{8} = -\operatorname{tg}\left(\frac{16\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{8};$$

$$\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}.$$

По формулам $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ найдем

$$-\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8}; \quad \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8}.$$

$$\text{Ответ. } \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{8}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{8}\right); \quad \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

2.5 Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (основное тригонометрическое тождество);

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ при } \alpha \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ при } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Значения одних тригонометрических функций, выраженные через значения других функций

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}};$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них

Пример 8. Вычислить $\cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$; $\operatorname{ctg} \alpha$, если известен $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества следует

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

По условию задачи угол α принадлежит второй четверти, где $\cos \alpha < 0$. Поэтому $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и, соответственно

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ. } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -2\sqrt{2}.$$

2.6. Формулы сложения и их следствия

2.6.1 Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Пример 9. Упростить выражение

$$\sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Решение. Применяем формулу произведения $\sin \alpha \cdot \cos \beta$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} - 15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} + 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \alpha = \\ & = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin 30^\circ) - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Замечание. При выводе приведенных формул рассматривают для острых положительных углов α и β , причем таких, что $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. На самом деле эти формулы верны при любых α и β , исключая те значения их, при которых левая часть приведенной формулы теряет смысл.

2.6.2. Формулы кратных углов

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; & \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; & \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}. \end{aligned}$$

2.6.3. Формулы половинных углов

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Знаки перед корнями нужно брать в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\frac{\alpha}{2}$.

2.6.4 Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

2.6.5. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Пример 9. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$.

Решение. Возведем выражение $\sin \alpha + \cos \alpha$ в квадрат:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1.$$

По условию задачи $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$, тогда $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1,96$. Следовательно, $2 \sin \alpha \cos \alpha = 1,96 - 1 = 0,96$, а $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,96$.

Ответ. $\sin 2\alpha = 0,96$.

Пример 10. Упростить выражение $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right) \cos 4\alpha$.

Решение. Применим формулы приведения и тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Получим} \quad & \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos 4\alpha= \\ & =-\frac{1-\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg} 2\alpha}\cos 4\alpha=-\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)= \\ & =-\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2= \\ & =-(1-\sin 4\alpha)=\sin 4\alpha-1. \end{aligned}$$

Ответ. $\sin 4\alpha-1$.

Пример 11. Вычислить без таблиц данную сумму функций, используя приведенные ранее формулы.

Решение.

$$\begin{aligned} & \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \\ & = \left(\sin^2 \frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2 \frac{5\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2 \frac{7\pi}{16}\right)^2 = \\ & = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{7\pi}{8}\right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{4} \left[4 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{4} \left[4 - 2 \left(2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{8} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(4 + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{4} \left[4 + \frac{1}{2} \left(4 + 2 \cos \pi \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \pi \cos \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{4} \left[6 + \cos \pi \left(\cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

При решении использовано $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Пример 12. Доказать тождество

$$1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta = - \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Решение. Преобразуем выражение в левой части, применяя формулы косинуса суммы и разности углов:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta &= 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= - \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

2.7. Вычисление и упрощение тригонометрических выражений из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №9, 2016–20 гг.)

1. Найти $24 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$.

Решение. Воспользуемся формулой двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, тогда получим

$$24 \cos 2\alpha = 24(1 - 2 \sin^2 \alpha) = 24(1 - 2(-0,2)^2) = 24(1 - 0,08) = 22,08.$$

Ответ. 22,08.

2. Найти $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Решение. По формулам приведения

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Из основного тригонометрического тождества найдем

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-0,64}=\pm 0,6,$$

$$\text{но } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos\alpha < 0, \text{ т.е. } \cos\alpha = -0,6.$$

Ответ. 0,6.

$$3. \text{ Найти } 7\cos(\pi+\beta)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right), \text{ если } \cos\beta=-\frac{1}{3}.$$

Решение. Используем формулы приведения

$$7\cos(\pi+\beta)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-7\cos\beta-2\cos\beta=-9\cos\beta=-9\left(-\frac{1}{3}\right)=3.$$

Ответ. 3.

$$4. \text{ Найти } \frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}.$$

Решение. Воспользуемся формулой двойного угла $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, тогда получим

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{24(-\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = -24.$$

Ответ. - 24.

$$5. \text{ Найти } 36\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}.$$

$$\textbf{Решение.} \quad 36\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=36\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{36\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=36.$$

Ответ. 36.

$$6. \text{ Найти } -4\sqrt{3}\cos(-750^\circ).$$

Решение. Используем четность функции $y = \cos x$ и формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 -4\sqrt{3}\cos(-750^\circ) &= -4\sqrt{3}\cos 750^\circ = -4\sqrt{3}\cos(720^\circ + 30^\circ) = \\
 -4\sqrt{3}\cos 30^\circ &= -4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.
 \end{aligned}$$

Ответ. -2 .

7. Найти $\frac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

Решение. Функция $y = \sin x$ имеет период 2π , поэтому имеем

$$\frac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin(360^\circ + 49^\circ)}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin 49^\circ}{\sin 49^\circ} = 14.$$

Ответ. 14 .

8. Найти $\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$.

Решение. Используем формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ} &= \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2(180^\circ + 27^\circ)} = \\
 &= \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = \frac{12}{1} = 12.
 \end{aligned}$$

Ответ. 12 .

9. Найти $8\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

Решение. Используем формулу $2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, тогда получим

$$8\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = 4\sin \frac{5\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ. 2 .

10. Найти $\frac{2\sin(\alpha - 7\pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + \pi)}$.

Решение. Используем формулы приведения:

$$\frac{2\sin(\alpha - 7\pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-2\sin(7\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha + \pi)} =$$

$$= \frac{-2\sin\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha} = -1.$$

Ответ. -1 .

Задания для самостоятельной работы к разделам 2.1-2.7

Преобразовать данные функции с помощью формул приведения к функциям острого угла

1) $\sin \frac{20\pi}{3}$; 2) $\cos 289^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 840^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{47\pi}{18}$; 5) $2\sin 330^\circ + \operatorname{ctg} 405^\circ$.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 71^\circ$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$; 5) 0.

Вычислить с помощью формул приведения

1) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 2) $\cos 750^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$;

5) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;

6) $2\cos \frac{31\pi}{3} + \sin(-7\pi) - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$;

7) $\cos 945^\circ - \sin 495^\circ + \operatorname{tg} 1800^\circ$

8) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$

Ответ. 1) $-0,5$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 4) -1 ; 5) $-1,5$; 6) 2; 7) $-\sqrt{2}$; 8) -1 .

Определить знак разности:

1) $\sin 2,6 - \sin 3$; 2) $\operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{tg} 57^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 2 - (-1)$; 4) $\sin 1 - \cos 1$;

5) $\operatorname{tg} 7 - \operatorname{ctg} 7$; 6) $\sin 4 - \cos 4$; 7) $\operatorname{tg} 1,6 - \operatorname{tg} 1,5$; 8) $\cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{15}$.

Ответ. 1) $+$; 2) $-$; 3) $-$; 4) $+$; 5) $-$; 6) $+$; 7) $-$; 8) $+$.

Найти значения всех тригонометрических функций угла по одной из заданных:

1) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

Ответ. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$.

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

Ответ. $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}}$; $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{2}$.

3) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ответ. $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$.

4) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

Ответ. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -2\sqrt{2}$.

5) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Ответ. $\cos \alpha = -\frac{5}{7}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$.

Вычислить

1) $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$.

Ответ. 0.

2) $\cos \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) - \sin \frac{\pi}{4} \cos(-\frac{\pi}{4})$.

Ответ. - 1.

3) $\sin 32^\circ \cos 58^\circ + \cos 32^\circ \sin 58^\circ$.

Ответ. 1.

4) $\sin 167^\circ \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \sin 197^\circ$.

Ответ. 0,5.

5) $\cos 1^\circ \cos 121^\circ + \cos(-89^\circ) \cos 31^\circ$.

Ответ. - 0,5.

6) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

7) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

8) $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \dots \operatorname{tg} 88^\circ \operatorname{tg} 89^\circ$.

Ответ. 1.

9) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$.

Ответ. $\pm 0,28$.

10) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если известно, что $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Ответ. $\frac{23}{32}$

Упростить следующие выражения:

1. $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha) \sin(90^\circ + \alpha)}$.

2. $\frac{\sin(\alpha + \pi) \cos(2\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$.

Ответ. $\operatorname{ctg} \alpha$.

Ответ. $-\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.

3. $\frac{\sin^2(\pi - \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\alpha - \pi)} \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

Ответ. $\frac{1}{\cos \alpha}$.

4. $\frac{1 + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos(4\alpha + \pi) + \cos\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$.

Ответ. $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

5. $\sin 10\alpha \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \sin 6\alpha - \sin 4\alpha \sin 2\alpha$.

Ответ. $2 \cos 2\alpha \sin 6\alpha \sin 10\alpha$.

6. $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{\alpha}{4}\right)$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$.

Доказать тождества:

1. $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + 1) \sin 2\alpha + 1}{(\operatorname{tg} \alpha + 1)^2} - \frac{(\operatorname{ctg} \alpha + 1) \sin 2\alpha + 1}{(\operatorname{ctg} \alpha + 1)^2} = \cos 2\alpha$.

2. $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 1 + \operatorname{tg} 2\alpha.$
3. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}.$
4. $1 - 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = -4 \sin^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha.$
5. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha.$
6. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta).$
7. $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$
8. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$
9. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$

Найти тригонометрические выражения из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №9 2016–20 гг.)

1. Найти $26 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right),$

если $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right).$

Ответ. - 10.

2. Найти $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $5 \sin^2 \alpha + 13 \cos^2 \alpha = 6$

Ответ. 7.

3. Найти $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 3.$

Ответ. 8.

4. Найти $5 \sin(\alpha - 7\pi) - 11 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right),$

если $\sin \alpha = -0,25.$

Ответ. 4.

5. Найти $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}.$

Ответ. - 1,5.

6. Найти $\sqrt{3} - \sqrt{12} \sin^2 \frac{5\pi}{12}.$

Ответ. - 1,5.

7. Найти $\frac{12 \sin 11^\circ \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}.$

Ответ. 6.

8. Найти $2\sqrt{3} \operatorname{tg}(-300^\circ)$.

Ответ. 6.

9. Найти $24\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. - 12.

10. Найти $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

Ответ. - 4.

11. Найти $5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ$.

Ответ. - 5.

12. Найти $\frac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

Ответ. 12.

13. Найти $\frac{5\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ}$.

Ответ. 10.

14. Найти $12\sin 150^\circ \cos 120^\circ$.

Ответ. - 3.

15. Найти $\frac{3\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi/2 + \alpha)}{\cos(\alpha + 3\pi)}$.

Ответ. 2.

16. Найти $\frac{3\cos \alpha - 15\sin \alpha + 16}{5\sin \alpha - \cos \alpha + 4}$,

если $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$.

Ответ. 4.

17. Найти $\frac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)}$.

Ответ. -16.

2.8. Обратные тригонометрические функции и их графики

Связь между свойствами прямых и обратных тригонометрических функций поясним на примере функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$.

Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$:

1) функция определена при всех $x \in R$, т.е. область определения $D(y) = (-\infty, \infty)$;

2) область значений функции $E(x) = [-1, 1]$, т.е. $|\sin x| \leq 1$;

3) функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in R$;

4) функция периодическая, наименьший период $T = 2\pi$;
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ для всех $x \in R$.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает и однозначна, поэтому на этом отрезке эта функция обратима, т.е. имеет обратную функцию – арксинус.

Определение 1. Арксинус числа x – это угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, вычисленный в радианах, синус которого равен x , и обозначается $\arcsin x$, т.е. $\sin(\arcsin x) = x$ или $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ при $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Например, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$, тогда $\frac{\pi}{6} = \arcsin 0,5$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, т.к. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Основные свойства функции $y = \arcsin x$ (рис.4) следующие:

1) область определения $D(y) = [-1; 1]$, где функция непрерывна и монотонно возрастает;

2) область значений $E(x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, т.е. $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$;

3) функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

4) $\sin(\arcsin x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$;

5) $\arcsin(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Пример 13. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; б) $\arcsin\left(\sin \frac{3}{4}\pi\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Определение 2. Аналогично определяются функции:

функция $y = \arccos x$, $x = \cos y$ при $y \in [0; \pi]$, $-1 \leq x \leq 1$,

функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $-\infty < x < \infty$,

функция $y = \operatorname{arcctg} x$, $x = \operatorname{ctg} y$ при $y \in (0; \pi)$, $-\infty < x < \infty$.

Отметим некоторые важные свойства обратных тригонометрических функций:

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad |x| \leq 1;$
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1;$
3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$
4. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$
5. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leq 1;$
6. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$

Графики обратных тригонометрических функций изображены на рис.4.

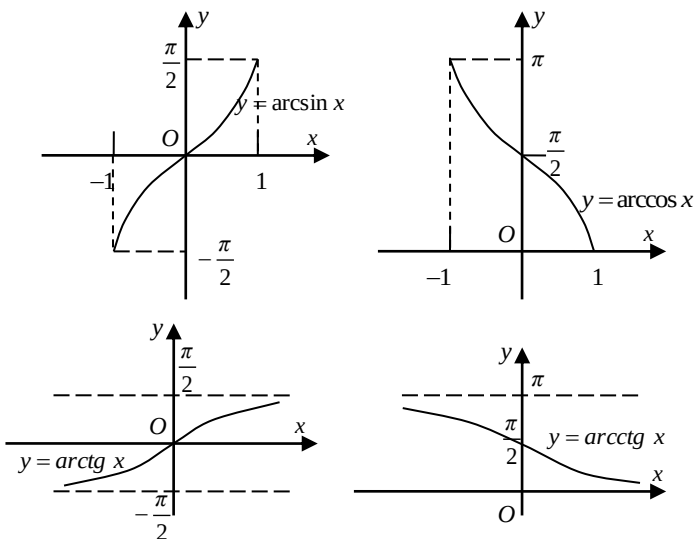


Рис. 4

Пример 14. Найти $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Обозначим $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, тогда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\sqrt{1 - \frac{9}{25}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

Ответ. $\frac{24}{25}$.

Пример 15. Найти $\operatorname{ctg}(\arccos \frac{2}{3})$.

Решение. Обозначим $\arccos \frac{2}{3} = \alpha$. Найдем $\operatorname{ctg} \alpha$ при условии, что $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Т.к. $0 \leq \arccos x \leq \pi$, то $\sin \alpha \geq 0$, поэтому имеем

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{2/3}{\sqrt{1 - 4/9}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Пример 16. Найти $\sin(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2})$.

Решение. Пусть $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha$, тогда имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 0,25} = \frac{4}{5}$.

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Пример 17. Вычислить выражение $\cos\left(-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Решение.

$$\cos\left(-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(-\arcsin \frac{1}{2}\right) = \cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить

1. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{7}\right).$ *Ответ.* $\frac{33}{65}.$

2. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right).$ *Ответ.* $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

3. $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2}-3\arccos 0-\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)\right).$ *Ответ.* 0.

4. $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\left(\frac{-1}{3}\right)\right).$ *Ответ.* $\frac{\pi}{3}.$

5. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right).$ *Ответ.* $\frac{12}{13}.$

6. $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6).$ *Ответ.* $\frac{3}{4}.$

7. $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right).$ *Ответ.* $\frac{15}{17}.$

8. $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0,8)).$ *Ответ.* $-\frac{3}{4}.$

9. $\operatorname{arccctg}(-1)+\operatorname{arctg}(-1).$ *Ответ.* $\frac{\pi}{2}.$

10. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}).$ *Ответ.* $\frac{7\pi}{12}.$

11. $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}.$ *Ответ.* $\frac{\pi}{2}.$

12. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}).$ *Ответ.* $-\frac{\pi}{6}.$

13. Проверить равенство: $3\arcsin\frac{1}{4}+\arccos\frac{11}{16}=\frac{\pi}{2}.$

2.9. Тригонометрические уравнения

2.9.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида: $\sin x = a$, $|a| \leq 1$; $\cos x = a$, $|a| \leq 1$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Множество всех решений этих уравнений записывается формулами, которые следует запомнить:

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^k \arcsin a + k\pi; \text{ или}$$

$$x = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k; \end{cases}$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + k\pi;$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = k\pi; \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \cos x = 1, \quad x = 2k\pi;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad \cos x = -1, \quad x = (2k + 1)\pi;$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = k\pi; \quad \operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad \operatorname{ctg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad \operatorname{ctg} x = -1; \quad x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

При решении тригонометрических уравнений надо учитывать и использовать свойства тригонометрических функций, следить за

равносильностью преобразований, учитывать область определения всех входящих в уравнения функций.

Рассмотрим наиболее распространенные методы решения тригонометрических уравнений.

Пример 17. Решить уравнение $\sin 6x = \frac{1}{2}$.

Решение. $6x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi n}{6} + \frac{(-1)^n \pi}{36}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $\frac{\pi n}{6} + \frac{(-1)^n \pi}{36}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 18. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = -1$.

Решение. $3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Т.к. $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, то имеем $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 19. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$.

Решение. Используя формулы приведения, получим

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \quad 3x = \pi n + \frac{\pi}{2} - x,$$

$$4x = \frac{2n+1}{2} \pi, \quad x = \frac{2n+1}{8} \pi.$$

Ответ. $x = \frac{2n+1}{8} \pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2.9.2. Простейшие тригонометрические уравнения из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №5, 2016–20гг.)

1. Решить уравнение $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ записать наибольший отрицательный корень.

Решение. $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Отсюда, } x-7=\pm 1+6k \Rightarrow \begin{cases} x_1=8+6k, & x_1 < 0 \text{ при } k < -\frac{8}{6}, \\ x_2=6+6k, & x_2 < 0 \text{ при } k < -1, \end{cases}$$

но $k \in \mathbb{Z}$, поэтому вычислим значения x при $k=-2$:
 $x_1=-4, x_2=-6$. Т.о. наибольший отрицательный корень $x=-4$

Ответ. $x=-4$.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-6)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответ записать наименьший положительный корень.

Решение. $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-6)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\pi(x-6)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Отсюда получим

$$x-6=1+6k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=7+6k, \quad x > 0 \text{ при } k > -7/6,$$

но $k \in \mathbb{Z}$, поэтому вычислим значение x при $k=-1$: $x=1$. Т.о., наименьший положительный корень $x=1$.

Ответ. $x=1$.

2.9.3. Различные приемы решения тригонометрических уравнений

Сведение тригонометрического уравнения к квадратному алгебраическому путем соответствующей замены переменной. Один из самых простых типов тригонометрических уравнений – это уравнение, позволяющее заменой переменной свести его к квадратному уравнению.

Пример 20. Решить уравнение $2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, заменим в уравнении $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, тогда получим

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0.$$

Положим $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда имеем

$$2t^2 + t - 3 = 0; \quad t = 1; \quad t = -3/2.$$

Корень $t = -3/2$ не удовлетворяет условию $|t| = |\sin x| \leq 1$. Тогда имеем только один корень $t = 1$, т.е. $\sin x = 1$, откуда получим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 21. Решить уравнение $3 \cos 4x + 5 \sin 2x = -1$.

Решение. Применив формулу для косинуса двойного угла, $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, получим

$$3(1 - 2\sin^2 2x) + 5\sin 2x = -1.$$

Полагая $\sin 2x = t, \quad |t| \leq 1$, получим уравнение вида

$$6t^2 - 5t - 4 = 0, \quad \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2}; \\ t_2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Значение $t_2 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1, \quad |t| = -\frac{1}{2}$. Т.о. имеем

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}, \quad 2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n.$$

$$\text{Ответ. } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 22. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

Решение.

Найдем ОДЗ: $\{\sin x \neq 0, \cos x \neq 0\}; \{x \neq \pi, x \neq (2n+1)\pi\}$.

Выразим $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2$; $\operatorname{tg} x \neq 0$ учтено в ОДЗ.

Получим $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Введём замену $y = \operatorname{tg} x$.

$$y^2 - 2y + 1 = 0, \quad y_{1,2} = 1.$$

Отсюда $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Однородные уравнения первой степени относительно $\sin x$, $\cos x$. Однородными уравнениями относительно $\sin x, \cos x$ называются уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = 0, \quad \text{при } a \neq 0, b \neq 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos x$, при $\cos x \neq 0$, получим

$$a \operatorname{tg} x + b = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

Откуда имеем $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Потери корней не происходит, если $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества.

Пример 23. Решить уравнение $2 \sin x + 3 \cos x = 0$.

Разделив обе части уравнения на $\cos x$, при $\cos x \neq 0$, получим

$$2 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений с помощью преобразования суммы исходных функций в произведение и обратно. Довольно часто тригонометрическое уравнение удастся свести к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, эквивалентным первоначальному, преобразовав левую и/или правую части его в произведение функций или, наоборот, произведение функций преобразовав в их сумму или разность.

Пример 24. Решить уравнение $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Решение. Применив формулу

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

тогда получим $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2}.$

$$\cos 2x - \cos 4x = 1, \cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0,$$

$$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0, \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Отсюда имеем $\cos 2x = 0, 2x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}, x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}, n \in Z,$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, x = \pi k \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z.$$

Ответ. $x_1 = \pi n \pm \frac{\pi}{4}; x_2 = \pi k \pm \frac{\pi}{6}, k, n \in Z.$

Пример 25. Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2} \cos x.$

Решение. Применив формулу

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \text{ тогда получим}$$

$$\frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2} \cos x, \cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

Пример 26. Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x.$

Решение. Применив формулу

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \text{ тогда получим}$$

$$\frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) = \cos 3x, \cos x - \cos 3x = 0.$$

Применив формулу разности косинусов

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

получим уравнение

$$2 \sin 2x \cdot \sin x = 0.$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x_1 = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что решение $x = \pi k$ содержится в решении $x = \frac{\pi n}{2}$ при четном n .

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 27. Решить уравнение $\sin 6x = \sin 4x$.

Решение. Используя формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ тогда получим уравнение}$$

$2 \sin x \cos 5x = 0$. Отсюда имеем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \quad x_1 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos 5x = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{10}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \pi k; \quad x_2 = \frac{\pi}{10}(2n+1), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 28. Решить уравнение $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

Решение. Применив формулы $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$

и $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, получим

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2}x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2},$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0.$$

Уравнение распадается на равносильно совокупности двух тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x}{2} = \pi k, \quad k \in Z, \\ \sin \frac{x}{2} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

При решении второго уравнения используем формулу приведения и формулу $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in Z, \\ 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in Z, \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \\ \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in Z, \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in Z, \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in Z, \\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z, \\ x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = \frac{2\pi k}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \quad k, n, m \in Z.$

Пример 29. Решить уравнение $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.

Решение. Перегруппируем слагаемые в уравнении и применим формулы преобразования суммы синусов и разности косинусов в произведение. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sin 8x + \sin 2x &= \cos 3x - \cos 7x, \quad 2 \sin 5x \cos 3x = 2 \sin 5x \sin 2x, \\ \sin 5x (\cos 3x - \sin 2x) &= 0. \end{aligned}$$

В уравнении $\cos 3x - \sin 2x = 0$ заменив $\sin 2x = \cos(\pi/2 - 2x)$. Тогда получим

$$\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Итак, получим равносильную совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0, \\ \sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 5x = k\pi, \\ \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4} = m\pi, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = n\pi, \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{k\pi}{5}, \\ x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi m}{5}, \\ x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{array} \right. \quad k, m, n \in \mathbb{Z}; \quad k, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{k\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi m}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad k, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнений вида $a \cos x + b \sin x = c$. Считаем, что коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль, т.е. $a^2 + b^2 > 0$. Разделив обе части данного уравнения почленно на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Найдем угол φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или с учетом формулы $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ уравнению:

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Это уравнение имеет решение только в том случае, если $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда решение рассматриваемого уравнения определяется по формуле:

$$x = \varphi \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Во всех остальных случаях, если $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, данное уравнение не имеет решений.

Пример 30. Решить уравнение $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2$, получим

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2}.$$

Найдем угол φ такой, что $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, а $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Получим, что $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Тогда имеем

$$x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x_1 = 2\pi k, \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 2\pi k$; $x_2 = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 31. Решить уравнение $\cos x + \sin x = c$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Найдем угол φ такой, что $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

т.е. $\varphi = \pi/4$. Получим, что $\cos(x - \pi/4) = c/\sqrt{2}$.

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{при } |c| \leq \sqrt{2}.$$

Однородные уравнения второй степени относительно $\sin x$, $\cos x$. Это уравнения вида

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = 0.$$

В общем случае, если коэффициенты $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то обе части уравнения делят на $\cos^2 x$ и производят замену $t = \operatorname{tg} x$. Потери корней при делении на $\cos^2 x$ не происходит, если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Пример 32. Решить уравнение

$$\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ и сделав замену переменной $t = \operatorname{tg} x$, получим

$$t^2 - \sqrt{3}t - 6 = 0, \quad t_1 = -\sqrt{3}; \quad t_2 = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Если } t = -\sqrt{3}, \text{ то } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \quad x_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Если } t = 2\sqrt{3}, \text{ то } \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}, \quad x_2 = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x_2 = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнений с помощью подстановки $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$.

Поскольку имеют место формулы:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

то многие тригонометрические уравнения удается решить подстановкой $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$, сводящей тригонометрическое уравнение к

алгебраическому. При этом нужно помнить, что выражение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ при $x = \pi + 2\pi k$ не определено, поэтому можно потерять часть решений. Ввиду сказанного при решении уравнений с помощью подстановки $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ нужно проверять те значения, при которых $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ не определен, т.е. при $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 33. Решить уравнение $\sin x + 7 \cos x = 5$.

Решение. Введем $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, убедившись предварительно, что $x = \pi + 2\pi k$ не является решением данного уравнения и потери корней не произойдет. Получим уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{7\left(1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 5, \quad 6t^2 - t - 1 = 0,$$

$$t = \begin{cases} t = \frac{1}{2}, & \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}, & x_1 = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ t = -\frac{1}{3}; & \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}; & x_2 = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } x_1 = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad x_2 = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение тригонометрических уравнений с помощью понижения степени. Если в тригонометрическое уравнение функции $\sin x$ и $\cos x$ входят в степени выше 2, то полезно, если это возможно, понизить степень тригонометрического уравнения. Для понижения степени уравнения можно использовать формулы:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 34. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 3\sin 2x + \frac{5}{2}\sin^2 2x = 0.$$

Решение. Используя формулы понижения степени через косинус двойного угла, получим уравнение:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 - 3\sin 2x + \frac{5}{2}\sin^2 2x = 0,$$

$2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1 = 0$. Положив $t = \sin 2x$, ($t \leq 1$), получим

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \quad \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Пример 35. Решить уравнение $2\arcsin x = \pi$.

$$\text{Решение. } \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \sin \frac{\pi}{2}, \quad x = 1.$$

$$\text{Ответ. } x = 1.$$

Пример 36. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x.$$

Решение. Вычислим тангенс от обеих частей уравнения

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x).$$

Используя формулу $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, тогда получим

$$\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{3x-x}{1+3x \cdot x}, \quad \text{отсюда имеем } 4x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Легко проверить, что найденные значения x удовлетворяют данному уравнению.

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

**2.10. Решение тригонометрических уравнений из
открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №13, 2016–20 гг.)**

Пример 1. а) Решить уравнение $4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Воспользуемся формулами приведения и основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad 4(1 - \cos^2 x) - 8\cos x + 1 = 0,$$

$4\cos^2 x + 8\cos x - 5 = 0$. Обозначив $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, получим

$$4t^2 + 8t - 5 = 0. \quad t_1 = -2,5; \quad t_2 = \frac{1}{2}. \quad \text{Корень } t_1 = -2,5 \text{ не удовлетворяет}$$

условию $|t| \leq 1$. Тогда имеем

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ при } n = 0, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\text{при } n = -1, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} - 2\pi \in \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\text{при } n = -2, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} - 4\pi \notin \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right].$$

Замечание. Другой способ поиска корней, принадлежащих указанному промежутку.

Рассмотрим такой способ для $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

$$-3\pi \leq x \leq -\frac{3\pi}{2}, \quad -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}, \quad -3 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq -\frac{3}{2},$$

$$-3 - \frac{1}{3} \leq 2k \leq -\frac{3}{2} - \frac{1}{3}, \quad -\frac{5}{3} \leq k \leq -\frac{11}{12}. \text{ Учитывая, что } k \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$

$$\text{имеем } k = -1. \text{ При } k = -1, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} - 2\pi, \quad x_1 = -\frac{5\pi}{3}; \quad x_2 = -\frac{7\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ. а) } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) корни } x_1 = -\frac{5\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{7\pi}{3}$$

принадлежат указанному промежутку.

Пример 2. а) Решить уравнение $\sqrt{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) \sin x = \cos x$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Решение. а) Воспользуемся формулами приведения, свойствами нечетности и периодичности функций:

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

Получим уравнение $-\sqrt{2} \cos x \cdot \sin x = \cos x, \quad \cos x(\sqrt{2} \sin x + 1) = 0,$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

$$\text{б) } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ при } k = 4, \quad x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right],$$

$$\text{при } k = 5, \quad x = \frac{\pi}{2} + 5\pi \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right],$$

$$x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}, \quad \text{при } n = 2, \quad x = 4\pi - \frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi \right],$$

$$\text{при } n = 3, \quad x = 6\pi - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi \right],$$

$$x = 2\pi m - \frac{3\pi}{4}, \quad \text{при } m = 3, \quad x = 6\pi - \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi \right].$$

Замечание. Применим другой способ поиска корней из указанного отрезка.

Рассмотрим такой способ для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{9\pi}{2} \leq x \leq 6\pi, \quad \frac{9\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 6\pi, \quad \frac{9}{2} \leq \frac{1}{2} + k \leq 6, \quad \text{отсюда имеем}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \leq k \leq 6 - \frac{1}{2}, \quad 4 \leq k \leq 5\frac{1}{2}. \quad \text{Так как } k \in \mathbb{Z}, \text{ то } k = 4 \text{ или } k = 5.$$

Если $k = 4$, то $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi$; если $k = 5$, то $x = \frac{\pi}{2} + 5\pi$.

Ответ.

$$\text{а) } x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \quad x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{21\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}.$$

Пример 3. а) Решить уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

б) Найти все корни этого уравнения из отрезка $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Воспользуемся формулой двойного угла:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \text{тогда имеем}$$

$4\sin x \cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0$, сгруппируем и разложим на множители

$(4\sin x \cos x - 4\cos x) + (\sin x - 1) = 0, \quad (\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0$, что равносильно уравнениям:

$$\begin{cases} \sin x = 1, & x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ \cos x = -\frac{1}{4}, & x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Заметим, что угол $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ принадлежит 2-й четверти.

б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, при $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

$x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$, при $n = 0$, $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

при $n = 1$, $x = 2\pi + \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \notin \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

$x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$, $n = 0$, $x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \notin \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

при $n = 1$, $x = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ. а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

б) $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Пример 4. а) Решить уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$.

б) Найти все корни этого уравнения из отрезка $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Найдем ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. ОДЗ:
 $\left\{ x \neq \pi k, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z \right\}$.

Приведем уравнение к общему знаменателю

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0, \quad \cos^2 x + 3\sin x + 3\sin^2 x = 0,$$

$$(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x + 3 \sin^2 x = 0, \quad 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0.$$

Обозначив $\sin x = t$, $|t| \leq 1$, получим $t^2 + 3t + 1 = 0$. Найдем корни:

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -1.$$

Отсюда имеем $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ не принадлежат ОДЗ.

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{б) } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ подставим } n = 3, \quad x = 3\pi + \frac{\pi}{6} \in [2\pi; 3,5\pi].$$

$$\textbf{Ответ. а) } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z. \text{ б) } \frac{19\pi}{6}.$$

Пример 5. а) Решить уравнение $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Найдем ОДЗ:

$$2 \cos x + \sqrt{3} \neq 0, \quad \cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Тогда уравнение равносильно уравнению: $2 \sin^2 x - \sin x = 0$,
 $2 \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$. Отсюда имеем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pi m, \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad m, l, n \in Z.$$

Заметим, что система корней $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ не принадлежит ОДЗ.

$$\text{б) } x_1 = \pi t, \quad \text{при } t=1, \quad x_1 = \pi \in \left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right], \quad \text{при } t=2, \\ x_1 = 2\pi \in \left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad \text{при } l=1, \quad x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{6} \in \left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$\textbf{Ответ. а) } x_1 = \pi t; \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad t, l \in Z. \quad \text{б) } \pi, 2\pi, \frac{13\pi}{6}.$$

Пример 6. Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

Решение. ОДЗ: $3x^2 - 7x + 4 \geq 0$. Найдем корни уравнения

$$3x^2 - 7x + 4 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{6} = \left[\frac{1}{4/3} \right].$$

С учетом метода интервалов ОДЗ: $\left\{ x \leq 1 \cup x \geq \frac{4}{3} \right\}$.

Решим уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$. Заметим, что при $k=0$, $x = \frac{\pi}{3}$. $1 < x = \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}$, т.е., не удовлетворяет ОДЗ.

Можно проверить, что при $k \geq 1$, $x \notin \left(1; \frac{4}{3} \right)$, т.е. такие корни удовлетворяют ОДЗ.

Уравнение $\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$ имеет корни $x_1 = 1, x_2 = \frac{4}{3}$.

$$\textbf{Ответ. } x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z, \quad k \neq 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Пример 7. Решить уравнение $\frac{3\cos 2x + 7\cos x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ:

$$-\sin x > 0, \quad \sin x < 0, \quad \pi(2k-1) < x < 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя формулу косинуса двойного угла, получим

$$3\cos 2x + 7\cos x + 3 = 0, \quad 3(2\cos^2 x - 1) + 7\cos x + 3 = 0,$$

$$6\cos^2 x + 7\cos x = 0, \quad 6\cos x \left(\cos x + \frac{7}{6} \right) = 0; \quad \text{т.к.} \quad |\cos x| \leq 1, \quad \text{то}$$

единственным решением заданного уравнения является уравнение

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Учитывая ОДЗ,} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textbf{Ответ.} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 8. а) Решить уравнение $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Решение. а) Введем замену $4^{\sin x} = t$, $t > 0$, тогда получим

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}, \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

найдем его корни $t = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 2, \\ t_2 = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4^{\sin x} = 2, \\ 4^{\sin x} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^{2\sin x} = 2, \\ 2^{2\sin x} = 2^{-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Рассмотрим отдельно решения при четных и нечетных значениях k и n .

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \text{при } k=1, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right],$$

$$\text{при } k = 2, \quad x = \frac{\pi}{6} + 4\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right], \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l,$$

$$\text{при } l = 1, \quad x = 2\pi + \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right],$$

$$\text{при } l = 2, \quad x = 4\pi + \frac{5\pi}{6} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right],$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad \text{при } m = 1, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right],$$

$$\text{при } m = 2, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right],$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \text{при } n = 2, \quad x = 4\pi - \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right].$$

$$\text{Ответ. а) } x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}.$$

Пример 9. а) Решить уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Представив левую часть уравнения в виде $15^{\cos x} = (5 \cdot 3)^{\cos x}$, тогда получим уравнение $5^{\cos x} \cdot 3^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$. Разделив обе части уравнения на $3^{\cos x} \neq 0$, получим уравнение $5^{\cos x} = 5^{\sin x}$, $\cos x = \sin x$. Данное уравнение разделим на $\cos x \neq 0$.

Тогда имеем $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $k = 5$ и $k = 6$, получим значения

$$x = \frac{\pi}{4} + 5\pi \text{ и } x = \frac{\pi}{4} + 6\pi, \text{ принадлежащие отрезку } \left[5\pi; \frac{13\pi}{2} \right].$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

2.11. Тригонометрические неравенства

При решении тригонометрических неравенств используются свойства монотонности, значения основных периодов и графики тригонометрических функций. Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства.

1. Неравенство вида **$\sin x \geq a$** . Если $a > 1$, то неравенство не имеет решений; если $a \leq -1$, то неравенству удовлетворяет любое значение $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим решение этого неравенства, при $-1 < a \leq 1$ на отрезке $[0, 2\pi]$. На единичном тригонометрическом круге (рис.5) видно, что данному неравенству удовлетворяют все значения x , такие что $\arcsin a \leq x \leq \pi - \arcsin a$.

Учитывая, что функция $\sin x$ имеет период 2π , получим, что $\sin x \geq a$ при $x \in [2\pi k + \arcsin a, (2k+1)\pi - \arcsin a], k \in \mathbb{Z}$.

2. Неравенство вида **$\sin x \leq a$** . Если $a \geq 1$, то неравенству удовлетворяет любое значение $x \in \mathbb{R}$, а если $a < -1$, то неравенство не имеет решений.

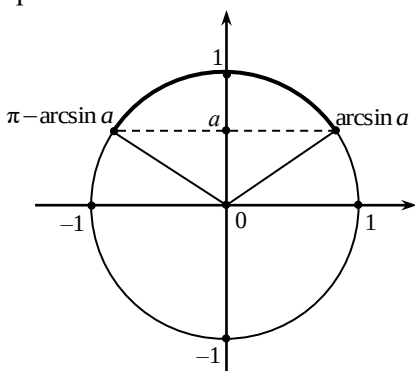


Рис.5

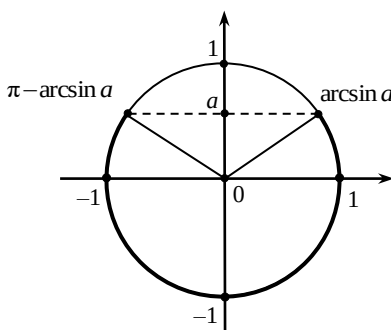


Рис.6

На отрезке $[0, 2\pi]$ (рис.6) решением этого неравенства, при $-1 < a \leq 1$, являются все значения x , удовлетворяющие

условию $\pi - \arcsin a \leq x \leq \arcsin a$, а с учетом периодичности функции $\sin x - x \in [(2k-1)\pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Неравенство вида **$\cos x \geq a$** . Если $a > 1$, то неравенство не имеет решений; если $a \leq -1$, то неравенству удовлетворяет любое значение $x \in \mathbb{R}$.

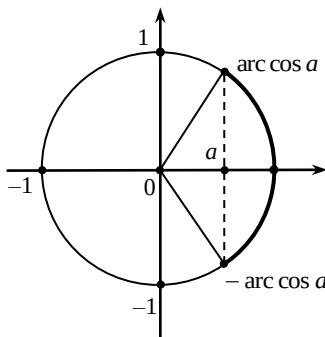


Рис.7

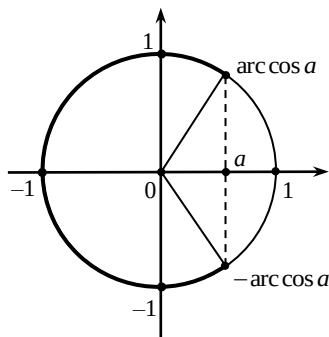


Рис.8

Рассмотрим решение этого неравенства, при $-1 < a \leq 1$, на отрезке $[0, 2\pi]$. На единичном тригонометрическом круге (рис.7) видно, что данному неравенству удовлетворяют все значения x , такие что $-\arccos a \leq x \leq \arccos a$.

Учитывая, что функция $\cos x$ имеет период 2π , получим решение неравенства $\cos x \geq a$ при $x \in [2\pi k - \arccos a, 2\pi k + \arccos a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Неравенство вида **$\cos x \leq a$** . Если $a \geq 1$, то неравенству удовлетворяет любое значение $x \in \mathbb{R}$, а если $a < -1$, то неравенство не имеет решений.

На отрезке $[0, 2\pi]$ (рис.8) решением этого неравенства, при $-1 < a \leq 1$, являются все значения x , удовлетворяющие условию $\arccos a \leq x \leq 2\pi - \arccos a$, а с учетом периодичности функции $\cos x$: $x \in [2\pi k + \arccos a, (2k+1)\pi - \arccos a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Неравенство вида **$\operatorname{tg} x \geq a$** . Поскольку функция $\operatorname{tg} x$ принимает значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, неравенство имеет решение при любом значении a .

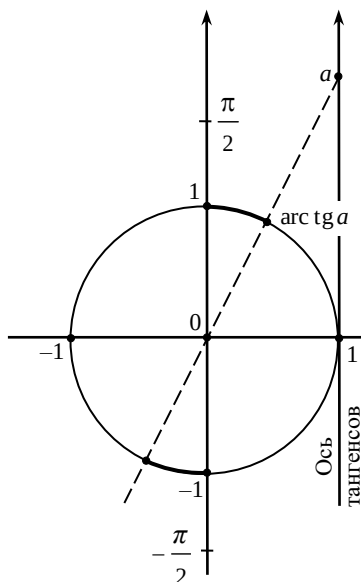


Рис.9

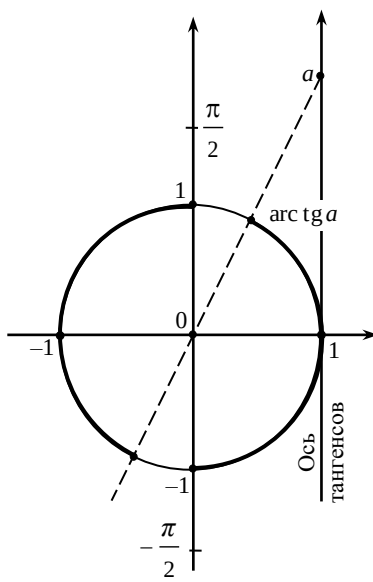


Рис.10

Рассмотрим интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. На единичном тригонометрическом круге (рис.9) видно, что данному неравенству удовлетворяют все значения x , такие что $\arctg a \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Учитывая, что функция $\tg x$ имеет период π , получим, что $\tg x \geq a$ всюду, где $x \in \left[\pi k + \arctg a, \pi k + \frac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Неравенство вида **$\tg x \leq a$** . Поскольку функция $\tg x$ принимает значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, то данное неравенство имеет решение при любом значении a .

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ (рис.10) решением данного неравенства являются все значения x , удовлетворяющие условию:

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq \operatorname{arctg} a, \quad \text{а с учетом периодичности функции } \operatorname{tg} x:$$

$$x \in \left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \operatorname{arctg} a \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 37. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. Это простейшее неравенство вида 1. При $a = \frac{1}{2}$ сразу получим ответ. Обратим внимание лишь на то, что знак неравенства «строгий», т.е. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right)$.

$$\textbf{Ответ: } \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 38. Найти множество значений x , удовлетворяющих неравенству

$$2 \sin x + 1 > 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Решение. Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Решением системы являются значения: $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$.

$$\textbf{Ответ. } 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}.$$

Пример 39. Решить неравенство $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 \geq 0$.

Решение. Обозначив $t = \sin x$; $|t| \leq 1$, получим квадратное неравенство:

$$4t^2 - 8t + 3 \geq 0, \quad (2t - 1)(2t - 3) \geq 0.$$

Следовательно, $t \leq \frac{1}{2}$ или $t \geq \frac{3}{2}$, поэтому все решения первоначального неравенства должны удовлетворять либо неравенству $\sin x \leq \frac{1}{2}$, либо неравенству $\sin x \geq \frac{3}{2}$.

Неравенство $\sin x \leq 1/2$ имеет следующее решение:
 $x \in \left[2\pi k - \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$

Неравенство $\sin x \geq 3/2$ решений не имеет.

$$\text{Ответ. } 2\pi k - \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 40. Решить неравенство $|\operatorname{tg} x| > 4/3$.

Решение. Неравенство $|\operatorname{tg} x| > 4/3$ эквивалентно совокупности неравенств:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > \frac{4}{3}, \\ \operatorname{tg} x < -\frac{4}{3}; \end{cases} \begin{cases} \arctg \frac{4}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k - \arctg \frac{4}{3}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x \in \left(\arctg \frac{4}{3} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \cup \left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k - \arctg \frac{4}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.12. Примеры на различные типы тригонометрических неравенств

Пример 41. Доказать неравенство $\cos \alpha + \alpha \sin \alpha > 1$, если $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. При $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\alpha > \sin \alpha$, умножим обе части неравенства на $\sin \alpha > 0$, получим $\alpha \sin \alpha > \sin^2 \alpha$. Далее, так как $|\cos \alpha| < 1$, то $\cos \alpha > \cos^2 \alpha$ на промежутке $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Складывая почленно неравенства $\alpha \sin \alpha > \sin^2 \alpha$ и $\cos \alpha > \cos^2 \alpha$, находим $\cos \alpha + \alpha \sin \alpha > \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, что и требовалось доказать.

Пример 42. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\cos^4 \alpha} + \frac{1}{\sin^4 \alpha} \geq 8.$$

Решение. Сделаем в левой части преобразования: приведём выражение к общему знаменателю и выделим полный квадрат.

$$\frac{1}{\cos^4 \alpha} + \frac{1}{\sin^4 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha \cdot \sin^4 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha \sin^4 \alpha}.$$

Используя формулу $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получим

$$\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha}{\cos^4 \alpha \cdot \sin^4 \alpha} = \frac{8(2 - 1 + \cos^2 2\alpha)}{\sin^4 2\alpha} = \frac{8(1 + \cos^2 2\alpha)}{\sin^4 2\alpha} \geq \frac{8}{\sin^4 2\alpha} \geq 8.$$

Задания для самостоятельной работы к разделам 2.9 – 2.12

Решить тригонометрические уравнения:

1. $4 \cos^2 \frac{x}{2} = 3.$

Ответ. $\pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

2. $2 \sin^2 2x = 1.$

Ответ. $\pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

3. $\cos\left(\frac{2\pi}{7} - 4x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ответ. $\frac{\pi}{14} \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

4. $\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}.$

Ответ. $\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$

5. $2 \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 3 = 0.$

Ответ. $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

6. $3 \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 4 = 0.$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

7. $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \cos x - 2 = 0.$

Ответ. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$8. 2\cos^2(x+\pi)+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0. \quad \text{Ответ. } (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in\mathbb{Z}.$$

$$9. \cos(2\pi-x)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1.$$

$$\text{Ответ. } \pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}, \quad \pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

$$10. 3\cos 4x+5\sin 2x=-1. \quad \text{Ответ. } (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n}{2}\pi, n\in\mathbb{Z}$$

$$11. \sin \pi x+\sqrt{3}\cos \pi x=0. \quad \text{Ответ. } \frac{3n-1}{3}, n\in\mathbb{Z}.$$

$$12. \sqrt{3}\sin x+3\cos x=0. \quad \text{Ответ. } -\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

$$13. \sin x+\cos 2x=1+\sin x\cos 2x. \quad \text{Ответ. } k\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi, k, n\in\mathbb{Z}.$$

$$14. \sin x-1=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x. \quad \text{Ответ. } 2k\pi; \frac{\pi}{2}+2n\pi, k, n\in\mathbb{Z}.$$

$$15. 3\sin^2 x-\cos^2 x=0. \quad \text{Ответ. } \pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

$$16. \sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$$

$$\text{Ответ. } \arctg 3+m\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi, m, n\in\mathbb{Z}.$$

$$17. 8\sin x\cdot\cos x+7\cos 2x+8\cos^2 x=0.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{\pi}{4}+k\pi; \arctg\frac{15}{7}+n\pi, k, n\in\mathbb{Z}.$$

$$18. 3\cos^2 x-4\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=2.$$

$$\text{Ответ. } \arctg\frac{\sqrt{3}}{6}+m\pi; -\frac{\pi}{6}+n\pi, m, n\in\mathbb{Z}.$$

$$19. \sin^2 x-\sin 2x=\cos^2 x+1. \quad \text{Ответ. } -\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi, k, n\in\mathbb{Z}.$$

$$20. 2(\sin x+\cos x)=-\sqrt{6}. \quad \text{Ответ. } (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}.$$

$$21. \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$22. \cos x + \sin x = \sqrt{3}.$$

Ответ. Решений нет.

$$23. \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1.$$

$$\text{Ответ. } 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. \sin x - 2 \cos x = 2.$$

$$\text{Ответ. } 2 \arctg 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. \sin 3x - \sin x = 0.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$26. \cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

$$\text{Ответ. } \frac{2n\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$27. \sin 7x - \sin x = \cos 4x.$$

$$\text{Ответ. } (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$28. \cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}; -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$29. \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x;$$

$$\text{Ответ. } \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$30. \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi k}{7}; \frac{\pi n}{5}, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$31. \cos 2x \cos 3x = \cos 5x \cos 6x.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi k}{8}; \frac{\pi n}{3}; k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$32. \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + 3 = 0.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{\pi}{4} + k\pi; -\arctg 2 + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$33. 2\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) = \cos x.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$34. 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{6} + \pi m, \frac{\pi}{3} + \pi n, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$35. 4 \sin^2 \frac{x}{2} + 8 \sin^2 x = 9.$$

$$\text{Ответ. } \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$36. \cos(\pi/2 + x) + \sin 3x + \sin^2 x = \cos^2 x.$$

$$\text{Ответ. } (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$37. \cos x + \cos^2 2x - \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) = 0.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{23} + \frac{2\pi n}{3}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$38. \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1,5.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$39. \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x. \quad \text{Ответ. } \pi + 2\pi m; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$40. \cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}. \quad \text{Ответ. } \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$41. 2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0. \quad \text{Ответ. } \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$42. \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1.$$

$$\text{Ответ. } x \neq \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \quad k, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Решить неравенства:

$$1. \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Ответ: } x \in \left(2\pi k + \frac{\pi}{6}, 2\pi k + \frac{11\pi}{6} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. 6\sin^2 x + 5\sin x + 1 \leq 0. \quad \text{Ответ.}$$

$$x \in \left[2\pi k - \frac{\pi}{6}, 2\pi k - \arcsin \frac{1}{3} \right] \cup \left[2\pi k + \pi + \arcsin \frac{1}{3}, 2\pi k + \frac{7\pi}{6} \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \frac{1}{4} - \sin^2 x > 0. \quad \text{Ответ. } x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \cos 2x \geq \sin x. \quad \text{Ответ. } x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5. |\operatorname{tg} x| > \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{Ответ. } x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решить тригонометрические уравнения из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №5, 2016-20гг.)

$$1. \cos \frac{8\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{В ответе записать наибольший отрицательный корень.} \quad \text{Ответ. } x = -1/8.$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1. \quad \text{В ответе записать наибольший отрицательный корень.}$$

$$\text{Ответ. } x = -1.$$

$$3. \sin \frac{\pi x}{3} = \frac{1}{2}. \quad \text{В ответе записать наименьший положительный корень.}$$

$$\text{Ответ. } x = 1/2.$$

$$4. \sin \frac{\pi(2x-3)}{6} = -\frac{1}{2}. \quad \text{В ответе записать наименьший положительный корень.}$$

$$\text{Ответ. } x = 1.$$

Решить тригонометрические уравнения из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №13, 2016–20гг.)

№№ 1 – 18. а) Решить уравнение. б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие указанному отрезку.

$$1. \text{ а) } 6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0. \quad \text{б) } \left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2} \right].$$

$$\text{Ответ. а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } -\frac{14\pi}{3}.$$

$$2. \text{ a) } \cos 2x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0. \text{ б) } \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}. \text{ б) } -\frac{15\pi}{4}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$$

$$3. \text{ а) } 2\sin^2 x - 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2 = 0. \text{ б) } \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right].$$

$$\text{Ответ. а) } -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}. \text{ б) } \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}.$$

$$4. \text{ а) } \sqrt{3}\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1. \text{ б) } \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Ответ. а) } \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, k, n, m \in \mathbb{Z}. \text{ б) } -3\pi, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}.$$

$$5. \text{ а) } \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right). \text{ б) } \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

$$\text{Ответ. а) } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}. \text{ б) } \pi, \frac{5\pi}{3}.$$

$$6. \text{ а) } \sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1. \text{ б) } \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ответ. а) } 2\pi k; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}. \text{ б) } -2\pi, -\frac{5\pi}{6}.$$

$$7. \text{ а) } \sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0. \text{ б) } \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ б) } \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}.$$

$$8. \text{ а) } 4\cos^3 x - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0. \text{ б) } [-2\pi; -\pi].$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}. \text{ б) } -\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}.$$

$$9. \text{ а) } 2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x. \text{ б) } \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right].$$

$$\text{Ответ. а) } \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -3\pi, -2\pi, -\frac{13\pi}{6} .$$

$$10. \text{ а) } \cos x (2 \cos x + \operatorname{tg} x) = 1 . \text{ б) } \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} .$$

$$11. \text{ а) } \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0 . \text{ б) } \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{11\pi}{6} .$$

$$12. \text{ а) } \frac{2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x}{2 \cos x + 1} = 0 . \text{ б) } \left[2\pi, \frac{7\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } \pi k; \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi .$$

$$13. \text{ а) } \frac{5 \cos x + 4}{4 \operatorname{tg} x - 3} = 0 . \text{ б) } \left[-4\pi, -\frac{5\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -4\pi + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) .$$

$$14. \text{ а) } \log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3 . \text{ б) } \left[-4\pi, -\frac{5\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{7\pi}{2}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{5\pi}{2} .$$

$$15. \text{ а) } 2 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 4 = 0 . \text{ б) } \left[-2\pi, -\frac{\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ. а) } \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{7\pi}{4} .$$

$$16. \text{ а) } \left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2 . \text{ б) } \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2} \right] .$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} . \text{ б) } \frac{13\pi}{6}, \frac{19\pi}{6} .$$

$$17. \text{ а) } 25^{\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos(x+\pi)} . \text{ б) } \left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ответ. а) } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} .$$

$$18. \text{ а) } 10^{\sin x} = 5^{-\cos x} \cdot 2^{\sin x} . \text{ б) } \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$$

$$\text{Ответ. а) } -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} . \text{ б) } -\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4} .$$

№№ 19 – 23. Решить уравнения:

$$19. \sqrt{9-x^2} \cos x = 0 .$$

$$\text{Ответ. } \pm 3, \pm \frac{\pi}{2} .$$

$$20. \frac{4\cos 2x - 9\sin x - 4}{\sqrt{-\cos x}} = 0 .$$

$$\text{Ответ. } \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

$$21. (6\sin^2 x + 5\sin x - 4)\sqrt{-7\cos x} = 0 .$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} .$$

$$22. (2\cos^2 x - 5\cos x + 2)\log_{11}(-\sin x) = 0 .$$

$$\text{Ответ. } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} .$$

$$23. \frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin(x - \pi/4)}} = 0 .$$

$$\text{Ответ. } \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z} .$$

3. НАЧАЛА АНАЛИЗА

3.1. Дифференцирование функций

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a, b) , x и $x + \Delta x$ – значения аргумента из интервала (a, b) ; $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$ – соответствующие им значения функции $f(x)$. Величина Δx называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется *приращением функции* в точке x .

Определение 2. Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производную функции $f(x)$ обозначают также y'_x или $f'_x(x)$.

Определение 3. Операция вычисления производной называется *дифференцированием* данной функции. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 , если в этой точке она имеет конечную производную. Соответственно, $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , если она дифференцируема в каждой его точке.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

$$C' = 0, \text{ если } C = \text{const}; \quad (x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (a^x)' = a^x \ln a; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

Пусть $C = \text{const}$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы

Основные правила дифференцирования

$$1. (uv)' = u'v + v'u, \quad (Cu)' = Cu'.$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}.$$

4. Если $y = f[u(x)]$ – сложная функция аргумента x , и существуют производные $f'(u)$ и $u'(x)$, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Пример 1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные функций: 1) $y = 4x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

$$2) y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}; \quad 3) y = x^3 \cos x; \quad 4) y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}.$$

Решение. 1. Применив к функции $y = 4x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ правила дифференцирования 1 и 2, получим:

$$\begin{aligned} y' &= (4x^3)' - (6x^2)' + (9x)' - (10)' = 4(x^3)' - 6(x^2)' + 9(x)' + 0 = \\ &= 4 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 = 12x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

2. Перепишем функцию $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$, используя дробные и

отрицательные показатели степени, в виде $y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(3x^{-2}\right)' = 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 3\left(x^{-2}\right)' = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}. \end{aligned}$$

3. По правилу 2 дифференцирования произведения для функции $y = x^3 \cos x$ имеем:

$$y' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x + x^3 (-\sin x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

4. По правилу 3 дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} \right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)' x^2 - (x^2)' \operatorname{tg} x}{(x^2)^2} = \frac{\frac{x^2}{\cos^2 x} - \frac{2x \sin x}{\cos x}}{x^4} = \\ &= \frac{x(x - 2 \cos x \sin x)}{x^4 \cos^2 x} = \frac{x - \sin 2x}{x^3 \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл производной. Пусть $y = f(x)$ – уравнение некоторой кривой и точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит этой кривой, т.е. $y_0 = f(x_0)$. Проведем касательную к данной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис.11).

Значение производной от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равно тангенсу угла наклона касательной к оси Ox . Иначе $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$, где α – угол между касательной к данной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ и положительным направлением оси абсцисс; k – угловой коэффициент касательной.

Тогда уравнение касательной к данной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

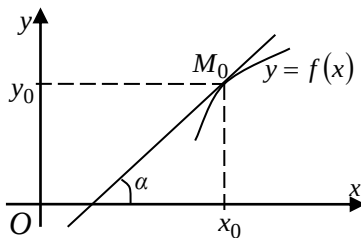


Рис.11

Пример 2. Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 + 2x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение. Найдем y_0 , подставив $x_0=1$ в уравнение кривой $y_0=3$. Угловой коэффициент касательной равен

$$k = f'(x_0) = (3x^2 + 2)\Big|_{x_0=1} = 5.$$

Составим уравнение касательной

$$y - 3 = 5(x - 1), \quad y = 5x - 2.$$

Физический смысл производной. Если $S = S(t)$ - закон прямолинейного (возможно неравномерного) движения материальной точки, то ее мгновенная скорость V в момент времени t есть предел средней скорости:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t).$$

Таким образом, производная функции $S(t)$ есть мгновенная скорость движения материальной точки в момент времени t .

Задания для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1. $y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 6$.
2. $y = (x + 2)^2 / x^{\frac{3}{2}}$.
3. $y = x \ln x - x$.
4. $y = (1 - \cos x) / (4 - x)$.
5. $y = \log_2 x / \cos x$.
6. $y = e^x \sin x$.
7. $y = 10^x / \sqrt{x}$.
8. $y = x^3 \lg x$.
9. $y = (x^3 + 1)^{10}$.
10. $y = e^{-3x}$.

Ответы.

1. $y' = 10x^4 - 9x^2 + 4$.
2. $y' = (x + 2)(x - 6) / 2x^{\frac{5}{2}}$.
3. $y' = \ln x$.
4. $y' = \frac{(4 - x) \sin x + 1 - \cos x}{(4 - x)^2}$.
5. $y' = \frac{\cos x + x \ln 2 \sin x \log_2 x}{x \ln 2 \cos^2 x}$.
6. $y' = e^x (\sin x + \cos x)$.
7. $y' = \frac{10^x (2 \ln 10 x \sqrt{x} - 1)}{2x \sqrt{x}}$.
8. $y' = 3x^2 \lg x + \frac{x^2}{\ln 10}$.
9. $y' = 30x^2 (x^3 + 1)^9$.
10. $y' = -3e^{-3x}$.

11. Составить уравнения касательной к кривой
 1) $y = (x-3)^5 + \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$. 2) $y = x \cos 3x$ в точке с абсциссой $x = \pi$.

Ответ. 1) $y = \frac{21}{4}x - 18$. 2) $y = -x$.

3.2. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале (a, b) , если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие в интервале функции называются *строго монотонными*.

Замечание. Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) в интервале (a, b) , если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Невозрастающие и неубывающие в интервале функции называются *монотонными*.

Признаки возрастания и убывания функции:

1) если $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ монотонно (строго) возрастает в интервале (a, b) ;

2) если $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ монотонно (строго) убывает в интервале (a, b) .

Замечание. если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 ; если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке x_0 .

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$ (*точкой минимума*), если существует такой

интервал с центром в точке x_0 , что для всех значений x которого выполняется условие $f(x) < f(x_0)$ (соответственно, $f(x) > f(x_0)$).

Значения функции $y = f(x)$ в точках максимума и минимума обозначаются $\max f(x)$ и $\min f(x)$.

Максимум или минимум функции $f(x)$ называются *экстремумами функции*.

Необходимое условие экстремума: Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и в некоторой ее окрестности и имеет экстремум в данной точке. Тогда, если $f(x)$ дифференцируема в данной точке, то $f'(x_0) = 0$. Если $f(x)$ не дифференцируема в точке x_0 , то производная в этой точке или не существует, или обращается в бесконечность. Соответствующие точки называются *критическими точками* функции $f(x)$. Точка x_0 , в которой $f'(x) = 0$, называется *стационарной точкой*.

Геометрически условие $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке x_0 касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox в точках максимума, минимума и в случае отсутствия экстремума, т.е. не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие экстремума функции $y = f(x)$ в точке. Если при переходе через критическую точку x_0 в положительном направлении оси Ox производная $f'(x)$ меняет знак, то данная точка является точкой экстремума, причем, если знак меняется с плюса на минус, то это точка максимума, а если с минуса на плюс, то это точка минимума. Если производная при переходе через критическую точку x_0 знака не меняет, то экстремума в этой точке нет.

Пример 3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 12x + 11$.

Решение. Областью определения функции является вся числовая ось, т.е. $x \in \mathbb{R}$. Найдем

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2) \cdot (x + 2).$$

При $f'(x) > 0$ $3(x - 2) \cdot (x + 2) > 0$ и $(x < -2) \cup (x > 2)$; при $f'(x) < 0$ $3(x - 2) \cdot (x + 2) < 0$ и $-2 < x < 2$.

Ответ. Функция монотонно возрастает при $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ и монотонно убывает в интервале $(-2, 2)$.

Пример 4. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x - 2\sin x$, если $0 \leq x \leq 2\pi$.

Решение. Найдем $f'(x) = 1 - 2\cos x$.

Имеем $f'(x) > 0$, $1 - 2\cos x > 0$, $\cos x < \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$; $f'(x) < 0$, $1 - 2\cos x < 0$, $\cos x > \frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$.

Ответ. Функция монотонно возрастает при $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ и монотонно убывает при $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = (x - 3)e^x$. (аналог примера из ЕГЭ, №12, 2016 – 20 гг.)

Решение. Найдем $f'(x) = e^x + (x - 3)e^x = (x - 2)e^x$. Функция $f(x)$ дифференцируема при всех x . Найдем ее стационарные точки: $f'(x) = 0$, $x = 2$ (единственная стационарная точка). Исследуем производную на перемену знака: при $x < 2$, $f'(x) > 0$, при $x > 2$, $f'(x) < 0$.

Ответ. $x_0 = 2$ - точка минимума, $\min f = -e^2$.

Примеры из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №12, 2016 – 20 гг.)

Пример 6. Найти точку минимума $y = (3x^2 - 48x + 48)e^{x-48}$.

Решение. ООФ: $x \in \mathbb{R}$. Найдем производную функции:

$$y' = (6x - 48)e^{x-48} + (3x^2 - 48x + 48)e^{x-48} = (3x^2 - 42x)e^{x-48}.$$

Критические точки: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 42x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 14$.

Определим знаки производной по методу интервалов (рис.12)



Рис.12

Производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через критическую точку $x_2 = 14$, следовательно, это точка минимума.

Ответ. $x = 14$ - точка минимума.

Пример 7. Найти точку максимума $y = (x - 10)^2 e^{x-6}$.

Решение. ООФ: $x \in \mathbb{R}$. Найдем производную функции:

$$y' = 2(x - 10)e^{x-6} + (x - 10)^2 e^{x-6} = (x - 10)(x - 8)e^{x-6}.$$

Критические точки: $y' = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 8$.

Определим знаки производной по методу интервалов(рис.13).



Рис.13

Производная меняет знак с плюса на минус при переходе через критическую точку $x_2 = 8$, следовательно, это точка максимума.

Ответ. $x = 8$ - точка максимума.

Пример 8. Найти точку минимума $y = 2x - \ln(x + 4) + 12$.

Решение. ООФ: $x > -4$. Найдем производную функции:

$$y' = 2 - \frac{1}{x + 4}. \quad \text{Критические точки: } y' = 0, \quad 2 - \frac{1}{x + 4} = 0,$$

$$x + 4 = \frac{1}{2}, \quad x = -3,5.$$

Производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через критическую точку, следовательно, $x = -3,5$ - точка минимума.

Ответ. $x = -3,5$ - точка минимума.

3.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначается $\sup_{[a,b]} f(x)$, наименьшее значение — $\inf_{[a,b]} f(x)$.

Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Для нахождения *наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$* нужно сравнить значения функции на границах отрезка со значениями в критических точках, принадлежащих данному отрезку, и среди них выбрать наибольшее (наименьшее) значение.

Замечание. Функция, непрерывная в интервале (a, b) , может не достигать своего наибольшего или наименьшего значений. Если непрерывная функция имеет в интервале (a, b) *единственную экстремальную точку*, например, минимум (максимум), то в этой точке обязательно достигается наименьшее (наибольшее) значение функции в этом интервале

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1, 4]$.

Решение. Найдем критические точки функции $f(x)$:
 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Обе найденные критические точки принадлежат заданному промежутку. В точке $x_1 = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x_2 = 2$ функция имеет минимум.

Вычислим значения функции в этих точках и на границах отрезка: $f(-1) = -3$; $f(0) = 1$; $f(2) = -3$; $f(4) = 17$.

Таким образом, наибольшее значение на отрезке $[-1, 4]$ функция принимает на правой границе отрезка при $x = 4$, а наименьшее значение достигается в двух точках: в точке $x = 2$ и на левой границе отрезка при $x = -1$.

Ответ. $\sup_{[-1,4]} f(x) = 17$; $\inf_{[-1,4]} f(x) = -3$.

**Примеры из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №12,
2016–20гг.)**

Пример 10. Найти наименьшее значение функции $y = (x-16)e^{x-15}$ на отрезке $[14, 16]$

Решение. Найдем критические точки функции:

$$y' = e^{x-15} + (x-16)e^{x-15} = (x-15)e^{x-15}, \quad y' = 0, \quad x = 15.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке: $y(14) = -2e^{-1}$, $y(16) = 0$, $y(15) = -1$. Наименьшее из полученных значений $y(15) = -1$.

Ответ. $\inf_{[14,16]} f(x) = -1$.

Пример 11. Найти наибольшее значение функции $y = 3\sqrt{2} \cos x + 3x - \frac{3\pi}{4} + 7$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем критические точки функции:

$$y' = -3\sqrt{2} \sin x + 3, \quad y' = 0, \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y(0) = 3\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} + 7, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + 7 = 7 + \frac{3\pi}{4},$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 7 = 3 + 7 = 10.$$

Наибольшее из полученных значений $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10$.

Ответ. $\sup_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 10$.

Пример 12. Найти наименьшее значение функции $y = 3\cos x - 17x + 3\pi$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$.

Решение. Найдем критические точки функции:

$$y' = -3\sin x - 17, \quad y' = 0, \quad \sin x = -\frac{17}{3} < -1, \quad \text{следовательно,}$$

критических точек нет. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$y(0) = 3 \cdot 1 + 3 = 6, \quad y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + \frac{3\pi}{2} \cdot 17 + 3 = \frac{51\pi}{2} + 3.$$

Наименьшее из полученных значений $y(0) = 6$.

Ответ. $\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right] f(x) = 6.$

Пример 13. Найти наибольшее значение функции $y = 9\operatorname{tg}x - 9x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

Решение. Найдем критические точки функции:

$$y' = \frac{9}{\cos^2 x} - 9, \quad y' = 0, \quad \cos^2 x = 1, \quad \cos x = \pm 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi.$$

Точка $x_2 \notin [-\pi/4, 0]$, точка $x_1 = 0$, принадлежит данному отрезку и совпадает с его концом (т.е. не является критической точкой).

Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$y(0) = 0 - 0 + 7 = 7, \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -9 + 9 \cdot \frac{\pi}{4} + 7 = \frac{9\pi}{4} - 2.$$

Наибольшее из полученных значений $y(0) = 7$.

Ответ. $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] f(x) = 7.$

Пример 14. Найти наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(x+3)^4$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

Решение. На указанном отрезке $x+3 > 0$, поэтому можно применить свойство логарифмов $\ln(x)^m = m \ln x$, ($x > 0$), тогда $y = 4x - \ln(x+3)^4 = 4x - 4 \ln(x+3)$, что облегчает нахождение производной. Найдем критические точки функции:

$$y' = 4 - \frac{4}{x+3}, \quad y' = 0, \quad x+3 = 1, \quad x = -2.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y(0) = -4 \ln 3, \quad y(-2) = -8 - \ln 1 = -8, \\ y(-2,5) = -10 - 4 \ln(0,5) = 4 \ln 2 - 10.$$

Наименьшее из полученных значений $y(-2) = -8$.

Ответ. $\inf_{[-2,5;0]} f(x) = -8.$

Пример 15. Найти наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(3x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

Решение. ООФ: $x > 0$. Найдем критические точки функции:

$$y' = 3 - \frac{3}{3x} = 3 - \frac{1}{x}; \quad y' = 0, \quad x = \frac{1}{3}.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6} - \ln \frac{3}{6} + 3 = \frac{7}{2} + \ln 2, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \ln 1 + 3 = 4, \\ y\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{6} - \ln \frac{15}{6} + 3 = \frac{11}{2} + \ln \frac{2}{5}.$$

Наименьшее из полученных значений $y\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Ответ. $\inf_{\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]} f(x) = 4.$

Пример 16. Найти наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Решение. ООФ: $x > 0$. Найдем критические точки функции:

$$y' = 2x - 3 + \frac{1}{x}, \quad y' = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Только одна критическая точка $x = 1$ принадлежит указанному отрезку. Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + \ln \frac{3}{4} + 5 = \frac{53}{16} + \ln \frac{3}{4}, \quad y(1) = 1 - 3 + \ln 1 + 5 = 3,$$

$$y\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16} - \frac{15}{4} + \ln \frac{5}{4} + 5 = \frac{45}{16} + \ln \frac{5}{4}.$$

Наименьшее из полученных значений $y(1) = 3$.

Ответ. $\inf_{\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]} f(x) = 3$.

Задания для самостоятельной работы к разделам 3.2 и 3.3

а) Найти интервалы возрастания и убывания следующих функций

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

2. $f(x) = 2x^2/(1 - x^2)$.

3. $f(x) = xe^{-x}$.

4. $f(x) = (2 - x)(x + 1)^2$.

Ответ.

1. $f(x)$ возрастает на $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, убывает на $(-1, 1)$.

2. $f(x)$ убывает на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, возрастает на $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. $f(x)$ возрастает на $(-\infty, 1)$, убывает на $(1, +\infty)$.

4. $f(x)$ убывает на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, возрастает на $(-1, 1)$.

б) Исследовать на экстремум следующие функции

1. $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$.

2. $f(x) = x^{-1} + (1 - x)^{-1}$.

3. $f(x) = x^2 e^{-x}$.

4. $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

Ответ.

1. $\max f(x) = f(0,5) = 24,25$, $\min f(x) = f(3) = -7$, 2. $\min f(x) = f(0,5) = 4$,

3. $\min f(x) = f(0) = 0$, $\min f(x) = f(2) = \frac{4}{e^2}$, 4. $\min f(x) = f(0) = 0$.

Задания из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №12, 2016–2017 гг.)

а) Найти точку максимума

1. $y = (x + 5)e^{5-x}$, 2. $y = (14 - x)e^{x+14}$, 3. $y = (3x^2 - 24x + 24)e^{x+24}$,

4. $y = (x - 12)^2 e^{x-5}$, 5. $y = \ln(x + 9) - 10x + 7$.

б) Найти точку минимума

1. $y = (x+8)e^{x-8}$, 2. $y = (13-x)e^{13-x}$, 3. $y = (3x^2 - 21x + 21)e^{x-21}$,
4. $y = (x-7)^2 e^{x-8}$, 5. $y = 2x - \ln(x+5) + 2$.

Ответ.

а) 1. - 4; 2. 13; 3. 0; 4. 10; 5. - 8,9.

б) 1. - 9, 2. 14, 3. 5, 4. 7, 5. - 4,5.

а) Найти наименьшее значение данной функции на указанном отрезке

1. $y = (x-9)e^{x-8}$ на $[7, 9]$; 2. $y = 2x - \ln(x+7)^2$ на $[-6,5; 0]$;

3. $y = 5x - \ln(5x) + 12$ на $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$;

4. $y = x^2 - 12x + 10\ln x + 12$ на $\left[\frac{12}{13}, \frac{14}{13}\right]$.

Ответы. а) 1. - 1; 2. - 12; 3. 13; 4. 1.

б) Найти наибольшее значение данной функции на указанном отрезке

1) $y = (10-x)e^{x-9}$ на $[8, 10]$; 2) $y = \ln(x+8)^3 - 3x$ на $[-7,5; 0]$;

3) $y = \ln(7x) - 7x + 7$ на $\left[\frac{1}{14}, \frac{5}{14}\right]$;

4) $y = x^2 - 5x + 3\ln x - 4$ на $\left[\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right]$.

Ответ. б) 1. 1; 2. 21; 3. 6; 4. - 8.

в) Найти наименьшее значение данной функции на указанном отрезке

1. $y = 6 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - 4\sqrt{3}x - 8\sqrt{3}\cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

2. $y = 2\cos x - 16x + 9$, $\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$; 3. $y = 4\cos x - \frac{18}{\pi}x + 7$, $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$;

$$4. y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 7, \left[0, \frac{\pi}{4}\right]; \quad 5. y = 8 \operatorname{tg} x - 8x - 2\pi + 5 \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ответ. в) 1. – 6; 2. 11; 3. 11; 4. 7; 5. – 3.

г) Найти наибольшее значение данной функции на указанном отрезке

$$1. y = 14 \cos x + 7\sqrt{3}x - \frac{7\sqrt{3}\pi}{3} + 6 \text{ на } \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$2. y = 9x - 8 \sin x + 7, \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]; \quad 3. y = 2 \sin x - \frac{36}{\pi}x + 9, \left[-\frac{5\pi}{6}, 0\right];$$

$$4. y = 6 \operatorname{tg} x - 6x + 6, \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]; \quad 5. y = 28 \operatorname{tg} x - 28x + 7\pi - 9 \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ответ. г) 1. 13; 2. 7; 3. 38; 4. 6; 5. 19.

3.4. Первообразная. Площадь плоской фигуры

Определение 1. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Все первообразные для функции $f(x)$ определяются выражением вида $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных, C – произвольная постоянная. Операция нахождения первообразной называется *интегрированием*.

Пример 17. Найти первообразные функций 1) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}$; 2) $e^{2x-3} - \cos(x-1)$; 3) $\frac{5}{x^3} + \frac{1}{3x+4}$; 4) $\sin(2-5x)$.

Решение. (Ответы).

$$1) F(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C; \quad 2) F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \sin(x-1) + C;$$

$$3) F(x) = -10x^{-2} + \frac{1}{3}\ln(3x+4) + C; \quad 4) F(x) = \frac{1}{5}\cos(2-5x) + C.$$

Определение 2. Если $f(x)$ есть какая-либо первообразная подынтегральной функции $f(x)$, то разность ее значений

$F(b) - F(a)$ является определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Определение 3.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ - формула Ньютона-Лейбница.}$$

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.14) вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если область задана соотношениями: $a \leq x \leq b$ и $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ (рис.15), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (2)$$

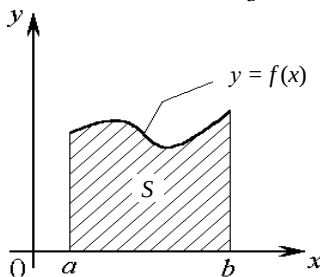


Рис.14

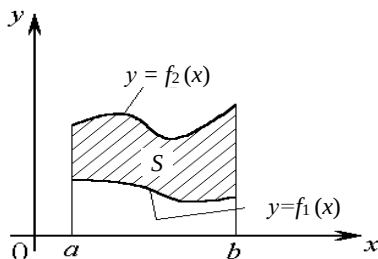


Рис.15

Пример 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = x^3$, $y = 8$.

Решение. При $y = 8$ имеем (рис.16): $8 = x^3$, $x = 2$. Тогда по формуле (2):

$$S = \int_0^2 (8 - x^3) dx = \left(8x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 16 - 4 = 12 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ. 12 кв.ед.

Пример 19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Решение. Найдем точку пересечения кривых (рис.17):

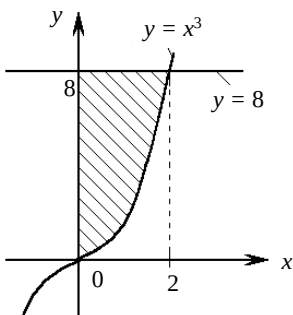


Рис.16

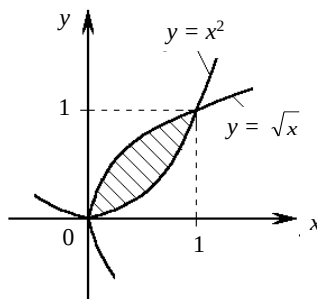


Рис.17

$\sqrt{x} = x^2$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Применив формулу (2),

$$\text{Тогда имеем } S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$ кв.ед.

Примеры из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №7, 2016–20гг.)

Пример 20. Варианты вопросов:

1) На рисунке (рис. 18) изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Вычислить интеграл $\int_1^5 f(x) dx$.

2) Вычислить разность значений первообразной данной функции $F(5) - F(1)$.

Решение. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле (1):

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ т.е. } S = \int_1^5 f(x) dx = F(5) - F(1).$$

Площадь данной фигуры (трапеции) равна
 $S = \frac{2+4}{2} \cdot 4 = 12$ (кв.ед.), т.е. $F(5) - F(1) = 12$.

Ответ. 1) 12 кв.ед.; 2) 12.

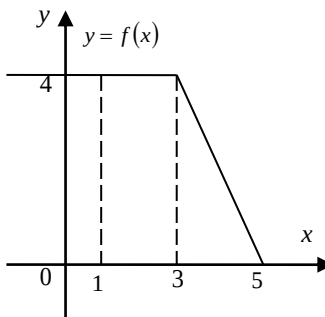


Рис.18

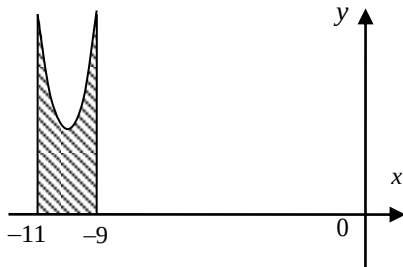


Рис.19

Пример 21. На рис. 19 изображен график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - 5$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найти площадь закрашенной фигуры.

Решение. Площадь криволинейной трапеции (закрашенной фигуры), изображенной на рисунке вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ т.е. } S = F(-9) - F(-11) = \\ &= (-9)^3 + 30(-9)^2 - 302 \cdot 9 - 5 - \\ &\quad - \left((-11)^3 + 30(-11)^2 - 302 \cdot 11 - 5 \right) = 6 \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ. 6 кв.ед.

3.5. Приложения производной

Примеры из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №7, 2016–20гг.)

Пример 22. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-4, 4)$. На рис.20 изображен график ее производной. Найти

количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 8 - 3x$ или совпадает с ней.

Решение. Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k_2$. Угловым коэффициентом касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ в точке x_0 равен $f'(x_0)$; угловым коэффициентом прямой равен -3 , следовательно, $f'(x_0) = -3$ и надо сосчитать количество точек, в которых значение производной равно -3 (или количество точек, в которых график производной пересекает прямую $y = -3$). Таких точек 7.

Ответ. 7.

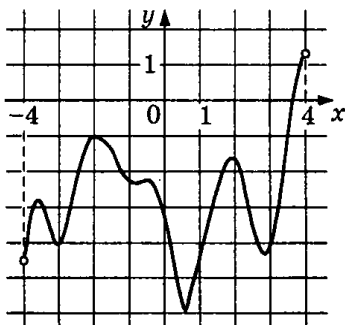


Рис.20

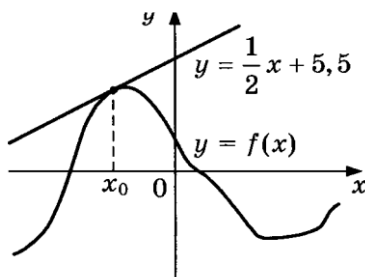


Рис.21

Пример 23. На рис.21 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0 . Уравнение касательной $y = 0,5x + 5,5$. Найти значение производной функции $y = 8f(x) - 3$ в точке x_0 .

Решение. Угловым коэффициентом касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен $f'(x_0)$, следовательно, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, найдем производную функции $y = 8f(x) - 3$ в точке x_0 : $y' = 8f'(x_0)$, $y'(x_0) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

Ответ. 4.

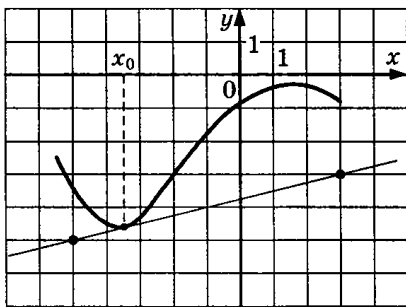


Рис.22

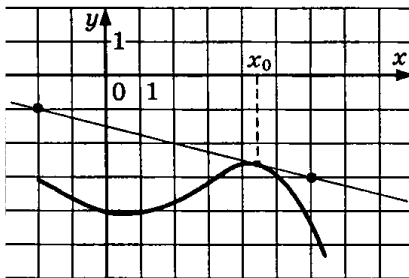


Рис.23

Пример 24. На рис.22 и рис.23 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой x_0 . Найти значение производной функции в точке x_0 .

Решение. Угловый коэффициент касательной к функции $y = f(x)$ равен $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между касательной к данной кривой в точке x_0 и положительным направлением оси абсцисс.

На рис. 22 отметим прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза лежит на касательной (отмечена точками). Из этого треугольника найдем $\operatorname{tg} \alpha$ как отношение длин катетов (длины катетов определяются по числу клеток).

На рис.22 этот треугольник имеет катеты, равные 2 и 8, параллельные, соответственно, осям Oy и Ox , отсюда

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{8} = 0,25$. На рис.23, сделав аналогичные вычисления, получим

$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{8} = 0,25$, где $\angle \beta$ – это угол, образованный касательной с отрицательным направлением оси Ox . Тогда $\alpha = \pi - \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -0,25$.

Ответ. рис.22: 0,25 ; рис.23: –0,25 .

Пример 25. На рис.24 и рис.25 изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены ряд точек. Найти количество точек, в которых $f'(x) = 0$, (рис.24) $f'(x) < 0$, (рис.25) $f'(x) > 0$ (рис.25)

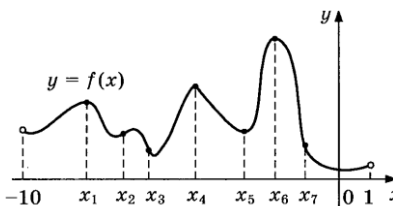


Рис.24

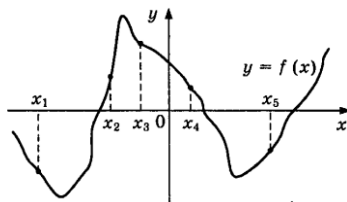


Рис.25

Решение.

На рис.24 производная равна нулю в точках экстремума, но только в тех точках, где касательная параллельна оси абсцисс. Таких точек три: x_1, x_5, x_6 .

На рис.25 если $f'(x) > 0$, то функция возрастает, $f'(x) < 0$, если функция убывает, следовательно, $f'(x) > 0$ в точках x_2, x_5 , $f'(x) < 0$ в точках x_1, x_3, x_4 .

Ответ. рис.24: x_1, x_5, x_6 ; рис.25: $f'(x) > 0$ в точках x_2, x_5 ;
 $f'(x) < 0$ в точках x_1, x_3, x_4 .

Пример 26. На рис.26 изображен график функции $y = f(x)$ на интервале (-3.8) .

Найти

- 1) количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней;
- 2) количество точек экстремума;
- 3) количество точек максимума;
- 4) количество точек минимума;
- 5) количество целых точек, в которых функция убывает.

Ответ.

1) Касательная параллельна данной прямой $y = 0 \cdot x + 12$, следовательно, угловой коэффициент касательной равен нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$. Таких точек, где касательная параллельна оси абсцисс равно 7;

2) Точек экстремума 7; 3) Точек максимума 4;

4) Точек минимума 3; 5) Целых точек, в которых функция убывает две: $x_1 = 6, x_2 = 7$.

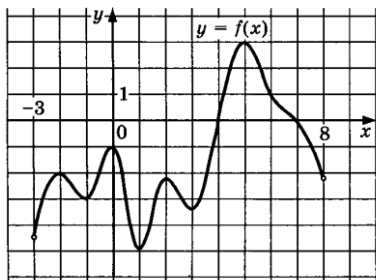


Рис.26

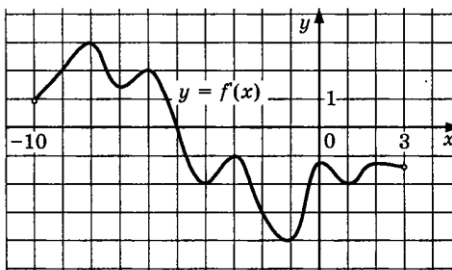


Рис.27

Пример 27. На рис.27 изображен график производной функции $y = f'(x)$ на интервале $(-10, 3)$.

Найти

- 1) точку отрезка $[-5, 1]$, в которой функция $f(x)$ принимает наименьшее значение;
- 2) точку отрезка $[-9, -6]$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение;
- 3) точки экстремума;
- 4) интервалы возрастания и убывания функции.

Ответ.

1). На промежутке $(-5, 1]$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, функция $f(x)$ убывает на данном промежутке и принимает наименьшее значение в точке $x = 1$;

2). На отрезке $[-9, -6]$ производная $f'(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на данном отрезке и принимает наибольшее значение в точке $x = -6$;

3). В точке $x = -5$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, точка $x = -5$ - точка максимума;

4). $f'(x) > 0$ на интервале $(-10, -5)$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на данном интервале; $f'(x) < 0$ на интервале $(-5, 3)$, следовательно, функция $f(x)$ убывает на данном интервале.

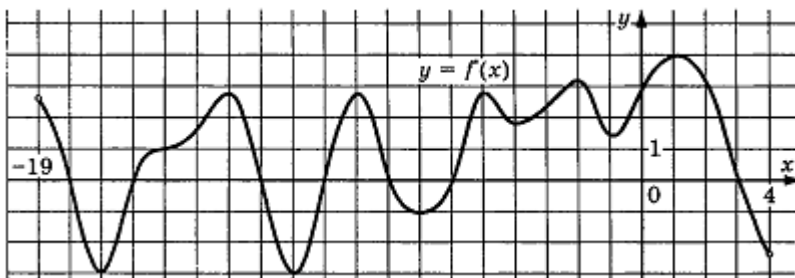


Рис.28

Пример 28. На рис.28 изображен график производной функции $f(x)$ на интервале $(-19, 4)$.

Найти

- 1) количество промежутков возрастания функции;
- 2) количество промежутков убывания функции;
- 3) длину наибольшего промежутка возрастания функции;
- 4) количество точек экстремума;
- 5) количество точек максимума;
- 6) количество точек минимума;
- 7) количество целых точек, в которых функция возрастает на отрезке $[-2, 3]$.

Ответ.

- 1). Если производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на данном промежутке (интервале). Таких интервалов 4: $(-19, -18)$, $(-16, -12)$, $(-10, -8)$, $(-6, 3)$;
- 2). Если производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на данном промежутке (интервале). Таких интервалов 4: $(-18, -16)$, $(-12, -10)$, $(-8, -6)$, $(3, 4)$;
- 3). Наибольший промежуток возрастания функции $(-6, 3)$, его длина равна 9.
- 4). В точках экстремума производная меняет знак. Таких точек 7: $x = -18$, $x = -16$, $x = -12$, $x = -10$, $x = -8$, $x = -6$, $x = 3$;
- 5). В точках максимума производная меняет знак с плюса на минус. Таких точек 4: $x = -18$, $x = -12$, $x = -8$, $x = 3$;

6). В точках минимума производная меняет знак с минуса на плюс. Таких точек 3: $x = -16$, $x = -10$, $x = -6$;

7). Количество целых точек, в которых функция возрастает на отрезке $[-2, 3]$ равно 4: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Задания для самостоятельной работы к разделам 3.4 и 3.5

а). Найти первообразные функций

1) $\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} - 4e^{-x}$;

2) $6(x+1)^5 + \frac{2}{\sqrt{x-4}}$;

3) $e^{2x-3} - \cos(3x-1) + \sqrt{\frac{x}{5}}$;

4) $\sin 2x$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$.

Ответ. а).

1) $F(x) = 6\sqrt{x} + 5\ln|x| + 4e^{-x} + C$; 2) $F(x) = (x+1)^6 + 4\sqrt{x-4} + C$;

3) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{1}{3}\sin(3x-1) + \frac{2}{3\sqrt{5}}x^{\frac{3}{2}} + C$; 4) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2}$.

б). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$;

2) параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и осью Ox ;

3) параболой $y = 4x - x^2$, прямой $y = 4 - x$ и осью Ox ;

4) параболой $y = 6x - x^2$, прямой $y = x + 4$.

Ответы. б). 1) 1; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{37}{6}$; 4) $\frac{9}{2}$.

Задания из открытого банка заданий для ЕГЭ

(задания №7, 2016–20 гг.)

1. На рис.29 изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Вычислить 1) $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$; 2) интеграл $\int_1^8 f(x)dx$.

Ответ. 1) 7; 2) 9.

2 На рисунке (рис.30) изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Вычислить площадь заштрихованной фигуры, если $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ одна из первообразных данной функции.

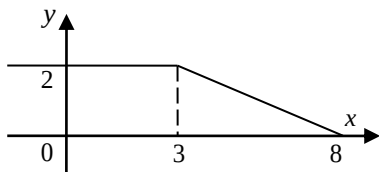


Рис.29



Рис.30

Ответ. 2.

3. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5, 3)$. На рис.31 изображен график ее производной. Найти количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3x - 1$ или совпадает с ней.

4. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3, 11)$. На рис.32 изображен график ее производной. Найти количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2x - 3$ или совпадает с ней.

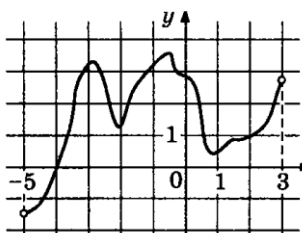


Рис.31

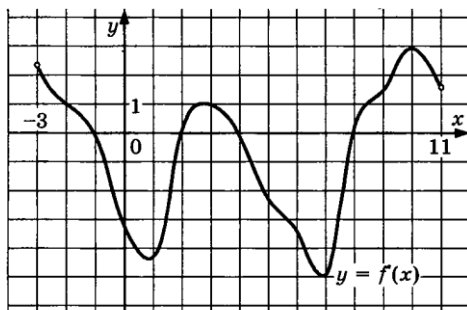


Рис.32

5. На рис.33 и рис.34 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой x_0 . Найти значение производной функции в точке x_0 .

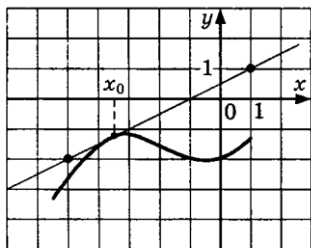


Рис.33

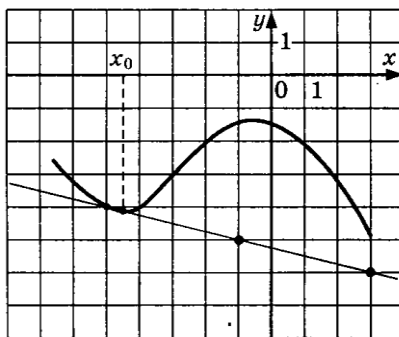


Рис.34

6. На рис.35 и рис.36 изображены график функции $y = f(x)$ и отмечены ряд точек. Найти количество точек, в которых $f'(x) < 0$, (рис.35) и $f'(x) > 0$ (рис.36).

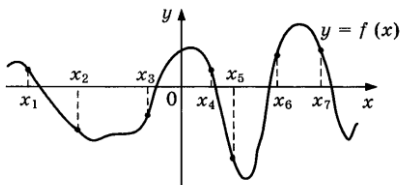


Рис.35

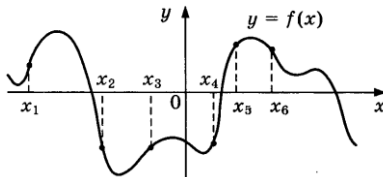


Рис.36

7. На рис.37 изображен график функции $y = f(x)$ на интервале $(-9, 5)$.

Найти

- 1) количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2$ или совпадает с ней;
- 2) количество точек экстремума;
- 3) количество точек максимума;
- 4) количество точек минимума;
- 5) количество целых точек, в которых функция убывает на интервале $(-9, -4)$.

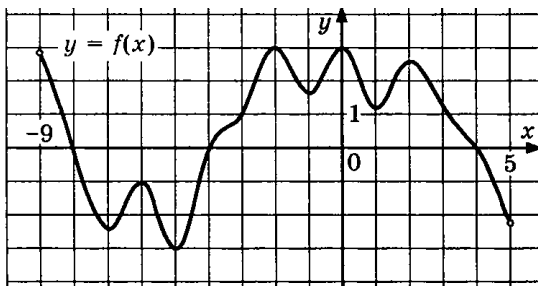


Рис.37

8. На рис.38 изображен график производной функции $y = f'(x)$ на интервале $(-5, 5)$.

Найти

- 1) точку отрезка $[-5, 1]$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение;
- 2) точку отрезка $[0, 2]$, в которой функция $f(x)$ принимает наименьшее значение;
- 3) количество точек экстремума;
- 4) количество точек максимума;
- 5) наибольший интервал возрастания функции и его длину.
- 6) наименьший интервал убывания функции и его длину.

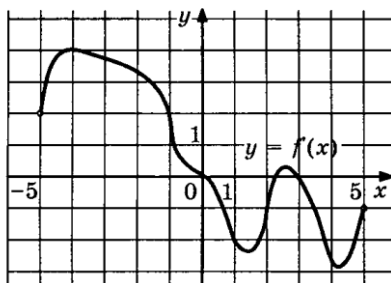


Рис.38

9. На рис.39 изображен график производной функции $f'(x)$ на интервале $(-16, 7)$.

Найти

- 1) количество промежутков возрастания функции;
- 2) количество промежутков убывания функции;
- 3) длину наибольшего промежутка возрастания функции;
- 4) количество точек экстремума;
- 5) количество точек максимума;
- 6) количество точек минимума;
- 7) количество целых точек, в которых функция возрастает на отрезке $[-2, 3]$.

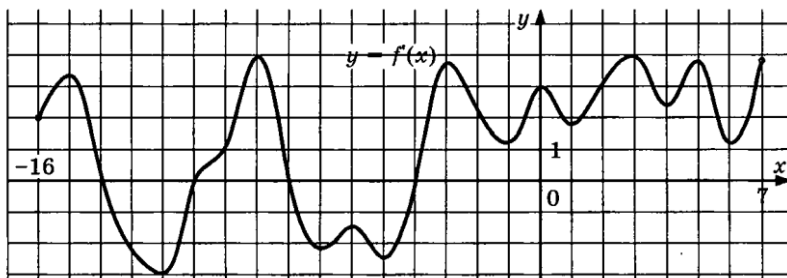


Рис.39

Ответ. 3. 4; 4. 4; 5. $\frac{1}{2}$ (рис.33), $-\frac{1}{4}$ (рис.34);

6. 5 точек: x_1, x_2, x_4, x_5, x_7 (рис.35); 4 точки: x_1, x_3, x_4, x_5 (рис.36)

7. 1) 8; 2) 8; 3) 4; 4) 4; 5) одна точка.

8. 1) в точке $x = 0$; 2) в точке $x = 2$; 3) три точки; 4) $x = 0$, $x = 3$;

5) интервал $(-5; 0)$, его длина равна 5;

6) интервал $(3; 5)$, его длина равна 2.

9. 1) 3; 2) 2; 3) 11; 4) 4; 5) 2; 6) 2; 7) 6.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений. Базовый и углубленный уровни / Ш.А. Алимов и др. – 7-е изд. - М.: Просвещение, 2019.
2. Алгебра и начала анализа: Учебник для 9 кл. общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов и др. – 19-е изд. - М.: Просвещение, 2014.
3. Алгебра и начала анализа. 10-11кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская –13-е изд.– М.: Мнемозина, 2012.
4. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. СПб.: Астрель, 2016.
5. Математика. Алгебра. 10-11 класс. Учебник. / А.Н. Колмогоров и др.– 17-е изд. – М.: Просвещение, 2011.
6. *Сканиви М.И.* Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы . – 6-е изд. – М.: Мир и Образование, 2019.
7. ЕГЭ: 4000 задач с ответами по математике. Базовый и профильный уровень / И.В. Ященко и др. – М.: Экзамен, 2020.
8. ЕГЭ: Математика. Тематические тренировочные задания / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина – М.: Эксмо, 2019.

Дополнительный

9. ЕГЭ: Разноуровневые контрольные работы / Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник – М.: Экзамен, 2011.
9. *Богомолов Н.В.* Практические занятия по математике: Учебное пособие, 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2008.
10. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Ч.1/под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1987.
11. *Пехлецкий, И.Д.* Математика: Учебник для ВУЗов. – М.: Академия, 2006.
12. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями) / В.М. Говоров, П.Т. Дыбов и др. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Список принятых обозначений	4
1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	4
1.1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	5
1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	7
Задания для самостоятельной работы	9
2. ТРИГОНОМЕТРИЯ	13
2.1. Радианное измерение углов и дуг	13
2.2. Определение тригонометрических функций	14
2.3. Графики тригонометрических функций	17
2.4. Формулы приведения	17
2.5. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	20
2.6. Формулы сложения и их следствия	21
2.6.1. Формулы сложения и вычитания	21
2.6.2. Формулы кратных углов	22
2.6.3. Формулы половинных углов	22
2.6.4. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла	23
2.6.5. Формулы суммы и разности тригонометрических функций	23
2.7. Вычисление и упрощение тригонометрических выражений <i>из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №9, 2016–20гг.)</i>	25
Задания для самостоятельной работы к разделам 2.1–2.7	28
2.8. Обратные тригонометрические функции, их графики	32
Задания для самостоятельной работы	36
2.9. Тригонометрические уравнения	37
2.9.1. Простейшие тригонометрические уравнения	37
2.9.2. Простейшие тригонометрические уравнения <i>из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №5, 2016–20гг.)</i>	38
2.9.3. Различные приемы решения тригонометрических уравнений	39
2.10. Решение тригонометрических уравнений <i>из открытого банка заданий для ЕГЭ (задания №13, 2016–20гг.)</i>	50
2.11. Тригонометрические неравенства	58
2.12. Примеры на различные типы тригонометрических уравнений и неравенств	62
Задания для самостоятельной работы к разделам 2.9–2.12	63

3. НАЧАЛА АНАЛИЗА	71
3.1. Дифференцирование функций	71
Задания для самостоятельной работы	74
3.2. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции	75
3.3. Наибольшее и наименьшее значения функции	79
Задания для самостоятельной работы к разделам 3.2. и 3.3.	83
3.4. Первообразная. Площадь плоской фигуры	85
3.5. Приложения производной	88
Задания для самостоятельной работы к разделам 3.4. и 3.5.	94
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	99