Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский горный университет**

Кафедра высшей математики

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания для самостоятельной работы слушателей подготовительного отделения

Санкт-Петербург
2022

УДК 512.12 + 514.116 + 517(073)

МАТЕМАТИКА: Методические указания для самостоятельной работы/ Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: А.П. Господариков, Л.В. Бакеева, СПб., 2022. 105 с.

В методических указаниях даны необходимые теоретические сведения и практические методы решения задач по основным некоторым разделам высшей математики (комплексные числа, матрицы, определители, системы линейных алгебраических уравнений, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной).

Методические указания предназначены для аудиторной и самостоятельной работы слушателей подготовительного отделения..

Табл. 4. Рис. 26. Библиогр.: 15 назв.

Научный редактор проф. А.П. Господариков
Рецензент проф. С.И. Перегудин (СПбГУ)

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для слушателей подготовительного отделения, планирующих поступать на направления подготовки магистратуры инженерно-технического и экономического профилей.

Цель указаний – повторение и систематизация знаний по отдельным разделам высшей математики и подготовка к экзаменам.

Методические указания содержат все необходимые определения и формулы, формулировки свойств. Особое внимание уделяется разнообразным приемам и методам решения задач, а также заданиям для самостоятельного решения.

При повторении теоретического материала следует обращаться к учебникам или учебным пособиям. Для тех разделов программы, на которые следует обратить особое внимание, даны более подробные теоретические пояснения.

Основные задачи методических указаний – овладение базовыми знаниями высшей математики, формирование навыков применения математического аппарата для решения конкретных задач.

1. МОДУЛЬ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модулем или *абсолютной величиной* вещественного числа a называется $|a|$, определяемое следующим соотношением:

$$|a|=\begin{cases}a,\ \text{если}\ a\ge 0\\ -a,\ \text{если}\ a<0\end{cases}$$

Например, $|-2|=2,\ |1|=1,\ |0|=0$.

Свойства модуля:

1. $|x|\ge 0$;
2. $|x|=|-x|$;
3. $|x|\ge x$;
4. $|xy|=|x|\cdot|y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ y\ne 0$;
6. $|x+y|\le|x|+|y|$;
7. $|x-y|\ge|x|-|y|$;
8. При $a>0$: $|x|\le a\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -a\\ x\le a\end{cases}$, или $-a\le x\le a$;
9. $|x|\ge a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -a\\ x\ge a\end{array}\right.,\ (a\ge 0)$.

С геометрической точки зрения, модуль числа a равен *расстоянию* от начала координат до точки на числовой оси, соответствующей числу a.

Свойства степени.

Для любых $x,\ y$ и положительных a и b верны равенства:

1. $a^0=1$;
2. $(ab)^x=a^x b^x$;
3. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$;
5. $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
6. $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$;

7. $\left(a^{x}\right)^{y}=a^{xy}$.

Пусть $n\in N$. *Арифметическим корнем* четной n-ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, *n-ая* степень которого равна a; $b=\sqrt[n]{a}$, если $b\geq 0$ и $b^{n}=a$.

Например, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[4]{(-3)^{4}}=3$ (по определению арифметический корень четной степени всегда неотрицателен). Извлечь корень нечетной степени $\sqrt[n]{a}$ можно из любого действительного числа a, он является действительным числом, удовлетворяющим условию $(\sqrt[n]{a})^{n}=a.$

Свойства арифметических корней.

Для любых неотрицательных a и b, натуральных n и k, больших 1, верны равенства:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a\;(a\geq 0)$;

3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\;(b\neq 0)$;

4. $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$, если $0\leq a<b$;

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k}=\sqrt[n]{a^{k}}$;

6. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$;

7. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

8. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$

9. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^{k}}$;

10. $\sqrt{(a-b)^{2}}=|a-b|=\begin{cases}a-b, & \text{если } a\geq b\\ -(a-b), & \text{если } a<b\end{cases}$

Арифметический корень n-ой степени, может быть записан, как степень с рациональным показателем:

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}};\quad \sqrt[n]{a^{k}}=a^{\frac{k}{n}}.$$

Наибольшие трудности возникают при использовании свойства корня *n-ой* степени для действительных чисел:

$$\sqrt[n]{x^{n}}=\begin{cases}|x|, & n=2k, k\in N\\ x, & n=2k-1, k\in N\end{cases}.$$

Умножение дробных выражений, содержащих корни *n-ой* степени, на выражение, сопряженное знаменателю, иногда позволяет упростить вид всего выражения.

Корни *n-ой* степени иногда удобно заменить на соответствующие степени с рациональным показателем, а иногда полезно ввести новую переменную, что позволяет сделать выражение более компактным. При вычислении корня *n*-ой степени часто помогает разложение подкоренного выражения на множители.

Формулы сокращенного умножения.

Для разложения многочленов на множители, упрощения выражений, приведения многочленов к стандартному виду используют *формулы сокращенного умножения*

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;
2. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
4. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

Пример 1. Вычислить

а) $\left(2\frac{4}{7}-3{,}5\right):\frac{1}{70}=\left(\frac{18}{7}-\frac{7}{2}\right)\cdot 70=\frac{36-49}{7\cdot 2}\cdot 70=(36-49)\cdot\frac{70}{14}=$
$=-13\cdot 5=-65$.

Ответ. -65.

б) $\frac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}=\sqrt{\frac{2{,}8\cdot 4{,}2}{0{,}24}}=\sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}}=\sqrt{\frac{7\cdot 4\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 6}}=\sqrt{7\cdot 7}=7$

Ответ. 7**.**

в) $\frac{\sqrt[9]{7}\ \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{\sqrt[18]{7^2}\ \sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}}=\sqrt[18]{\frac{7^2\cdot 7}{7^3}}=\sqrt[18]{1}=1$

Ответ. 1**.**

г) $\sqrt[3]{49}\ \sqrt[6]{49}=49^{\frac{1}{3}}\cdot 49^{\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$.

Ответ. 7**.**

д) $\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}=-\sqrt[3]{2^2\cdot 5\cdot 5^2\cdot 2^7}=-\sqrt[3]{2^9\cdot 5^3}=-2^3\cdot 5=-40$.

Ответ. -40

е) $\sqrt{14^2+42^2+21^2}=\sqrt{(2\cdot 7)^2+(6\cdot 7)^2+(3\cdot 7)^2}=$

$=\sqrt{2^2\cdot 7^2+6^2\cdot 7^2+3^2\cdot 7^2}=\sqrt{7^2(4+36+9)}=$

$=7\sqrt{49}=7\cdot 7=49.$

Ответ. 49

ж). $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^3}}{\sqrt[3]{36-35}}+\sqrt{35}=\dfrac{6-\sqrt{35}}{1}+\sqrt{35}=6.$

Ответ. 6

Пример 2. Найти значение выражения:

$\sqrt[4]{(2x-1)^4}-\sqrt[4]{(2x+1)^4}$ при $x<-99$.

Решение.

Упростим выражение, используя свойство 6 арифметического корня и определение модуля:

$\sqrt[4]{(2x-1)^4}-\sqrt[4]{(2x+1)^4}=|2x-1|-|2x+1|=-2x+1+2x+1=2$.

Ответ. 2

Пример 3. Вычислить или упростить:

а) $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(3^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=2^2-2+3=4-2+3=5$.

Ответ. 5.

б) $x^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[5]{x^9}:\sqrt{x^3}=x^{-\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{9}{5}}:x^{\frac{3}{2}}=x^{-\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{9}{5}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=$

$x^{\frac{9}{5}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=x^{\frac{9}{5}-3}=x^{\frac{9-15}{5}}=x^{-\frac{6}{5}}.$

Ответ. $x^{-\frac{6}{5}}$.

Пример 4. Вычислить

а) $\left(728^2-26^2\right):754$.

Решение.

Воспользуемся соответствующей формулой сокращенного умножения:

$$\left(728^2-26^2\right):754=(728-26)(728+26):754=\frac{702\cdot 754}{754}=702$$

Ответ. 702.

б) $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}$.

Решение.

Применим соответствующую формулу сокращенного умножения:

$$\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\sqrt{13}\sqrt{7}+7}{10+\sqrt{91}}=\frac{20+2\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2\left(10+\sqrt{91}\right)}{10+\sqrt{91}}=2$$

Ответ. 2

Пример 5. Упростить выражения.

а) $\dfrac{b^2+8b+16}{b}\left(\dfrac{b}{(b+4)^2}+\dfrac{b}{16-b^2}\right)+\dfrac{8}{b-4}$.

Решение.

Воспользуемся формулами сокращенного умножения и в скобках приведем выражение к общему знаменателю, поменяв знак перед вторым слагаемым:

$$\frac{(b+4)^2}{b}\left(\frac{b}{(b+4)^2}-\frac{b}{(b+4)(b-4)}\right)+\frac{8}{b-4}=$$

$$=\frac{(b+4)^2}{b}\left(\frac{b(b-4)-b(b+4)}{(b+4)^2(b-4)}\right)+\frac{8}{b-4}=$$

$$=\frac{(b+4)^2}{b}\cdot\frac{b^2-4b-b^2-4b}{(b+4)^2(b-4)}+\frac{8}{b-4}=\frac{-8b}{b(b-4)}+\frac{8}{b-4}=$$

$$= -\frac{8}{b-4} + \frac{8}{b-4} = 0$$

Ответ. 0.

б). $\dfrac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x + y + \sqrt{xy}} + \dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - 2\sqrt{x}$ при $x > 0,\ y > 0,\quad x \neq y.$

Решение.

Прежде чем приводить дроби к общему знаменателю, необходимо упростить каждую дробь, используя формулы сокращенного умножения.

$$\frac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x + y + \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x + y + \sqrt{xy}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(x + \sqrt{xy} + y\right)}{x + y + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y};$$

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Получим $\dfrac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x + y + \sqrt{xy}} + \dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) - 2\sqrt{x} = 0.$

Ответ. 0.

в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} \dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{2}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}$; $x > 0,\ y > 0,\quad x \neq y.$

Решение.

Сначала упростим каждый из сомножителей и избавимся от отрицательных степеней, учитывая, что $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}};$$

$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\frac{x + y}{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x + y}{xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})}.$$

Используя формулу сокращенного умножения, получим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{x+y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Задания для самостоятельной работы.

Упростить выражение:

1. $\sqrt{a^3}:\sqrt[3]{a}\cdot\frac{\sqrt[6]{a^{-1}}}{a}$;
2. $\frac{\sqrt[3]{z^2}:\sqrt{z^3}}{(\sqrt{z\sqrt[3]{z^2}})^{-1}}$;
3. $\sqrt{\frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y^2}}}:\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^{-6}}}$;
4. $\sqrt[3]{\left(\frac{8c^{-3}}{27b^6}\right)^{-1}}\cdot\frac{2}{3}\cdot a^{-1}b^{-2}$;
5. $\sqrt{x^5}:\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}$;
6. $\frac{\sqrt[3]{c}\cdot(\sqrt[5]{c})^3}{\sqrt[4]{c^3}}$;
7. $\frac{\sqrt[16]{y^{12}}:y^{7/8}\cdot y^{0,25}}{\sqrt[8]{y}}$;
8. $\frac{\sqrt[7]{a^3}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[7]{a^{-4}}\sqrt{a^3}}$;
9. $\sqrt{\frac{x^3}{y^4}}\cdot\sqrt[3]{xy^{-4}}:\sqrt[6]{x^{-1}}$;
10. $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}}:\frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt{a^{-3}}}$.

Вычислить:

1. $\left(\sqrt{10+5\sqrt{3}}-\sqrt{10-5\sqrt{3}}\right)^2$;

2. $\sqrt[9]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[9]{9+4\sqrt{5}}$;

3. $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$;

4. $\dfrac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{6{,}3/1{,}7}-\sqrt{1{,}7/6{,}3}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}$;

5. $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$.

Упростить выражение:

1. $\left(\dfrac{2}{b^2-4}-\dfrac{2}{b^2+4b+4}\right):\dfrac{2}{(b+2)^2}-\dfrac{2b}{b-2}$;

2. $\left(\dfrac{a}{a^2-2a+1}-\dfrac{a+2}{a^2+a-2}\right):\dfrac{1}{(2a-2)^2}$;

3. $\left(\dfrac{q^3+8}{q^3+4q^2+4q}-\dfrac{2}{q+2}\right)\cdot(q-2)^{-2}$;

4. $\dfrac{b^{-1}}{b^{-2}-a^{-2}}-\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2\,(a-b)}{a^3+b^3}\right)\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$;

5. $\dfrac{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$;

6. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}+\sqrt[3]{x}\right)+\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}+2}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2}\right)$;

7. $\left(a+\sqrt{\dfrac{b^3}{a}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}+\dfrac{1}{\sqrt{b^{-2}}}$;

8. $$\left(\left(\frac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5;$$

9. $$\frac{\left(\sqrt{x}-x^{\frac{1}{3}}\right)^2+4x^{-\frac{1}{2}}:x^{-\frac{8}{6}}}{x^{-\frac{4}{3}}\left(x-x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right)};$$

10. $$\frac{\left(ab^{-3}-a^{-3}b\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(b^{-2}-a^{-2}\right)^{-1}}.$$

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. МАТРИЦЫ ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА.

Матрицей A размерности $m\times n$ называется совокупность вещественных чисел, записанная в виде прямоугольной таблицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. = (a_{ij})_{m\times n}\,.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*, индексы i и j обозначают номер строки и номер столбца, на пересечении которых стоит элемент. Матрица размерности $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n.

Каждой квадратной матрице порядка n сопоставляется число, которое называется *определителем* этой матрицы. Определитель матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$ обозначается

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Число строк (столбцов) определителя называется *порядком* определителя. Определители 2-го, 3-го порядка вычисляются по формулам

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Пример 6. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 3 + 4 = 7;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-(-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 = 8.$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя порядка n называется определитель порядка n-1 , который получается, если из исходного определителя удалить i-ю строку и j-й столбец.

Алгебраическим дополнением элемента $_{ij}$ называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема (теорема разложения). Определитель равен сумме попарных произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}.$$

Основные свойства определителей:

1) Значение определителя не изменится, если заменить все его строки столбцами с теми же номерами (транспонировать). Таким образом, все свойства, сформулированные для строк, верны и для столбцов;

2) Если поменять местами две строки, определитель изменит знак;

3) Если в двух строках элементы с одинаковыми номерами пропорциональны, то определитель равен нулю;

4) Если каждый элемент строки определителя умножить на число k, то определитель увеличится в k раз. Таким образом, общий множитель всех элементов строки можно выносить за знак определителя;

5) Сумма попарных произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки с теми же номерами равна нулю;

6) Определитель не изменит своего значения, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки с теми же номерами, умноженные на одно и то же число;

Пример 7. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -21 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$;

Решение.

Вычислим, используя свойства определителей.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -21 \end{vmatrix} = \left|\text{разложим по элементам 2-й строки}\right|^{*} =$

$$= \underbrace{11}_{a_{21}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -21 \end{vmatrix}}_{A_{21}} + \underbrace{0}_{a_{22}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -21 \end{vmatrix}}_{A_{22}} +$$

$$+ \underbrace{4}_{a_{23}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}} = 11\cdot(-1)^3\big((-2)(-21) - 1\cdot 1\big) +$$

$$+ 0\cdot(-1)^4\big(1\cdot(-21) - 0\cdot 1\big) + 4\cdot(-1)^5\big(1\cdot 1 - 0\cdot(-2)\big) =$$
$$-11\cdot 41 + 0 - 4 = -455 .$$

Ответ. -455.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix} =$

= | из 2, 3 и 4 строк вынесем множитель (-1), получим | =

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$$

=| прибавим к 2, 3 и 4 строкам 1 строку |=

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{vmatrix} =$$

=| разложим определитель по элементам первого столбца |=

---

[*] Здесь и далее даны необходимые пояснения.

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 8 & 26\\ 3 & 15 & 63\end{vmatrix}=$$

=| вынесем множители 2 и 3 из 2-ой и 3-ей строк соответственно |=

$$=2\cdot 3\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 1 & 4 & 13\\ 1 & 5 & 21\end{vmatrix}=$$

=| вычтем из 2-ой и 3-ей строк 1-ую строку |=

$$=6\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 2 & 14\end{vmatrix}=$$

=| разложим определитель по элементам первого столбца |=

$$=6\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & 14\end{vmatrix}=6(1\cdot 14-2\cdot 6)=12.$$

Ответ. 12.

Линейные операции над матрицами

Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$, тогда $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,n$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица порядка n, каждый элемент которой определяется по формуле $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$, называется *единичной* матрицей порядка n.

Линейными операциями называются операции сложения и умножения на число.

Сложение матриц. *Суммой* матриц одинаковой размерности $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица

$$C=A+B=(c_{ij}=a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Например,

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1) & 2+3\\ -3+4 & 0+1\\ 1+0 & 1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число. Пусть α – число, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, тогда *произведением матрицы* A *на число* α называется матрица

$$B=\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n}.$$

Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 2\end{pmatrix},\ \Rightarrow\ (-3)A=\begin{pmatrix}-3 & -15 & 3\\ -6 & -3 & -9\\ -9 & -18 & -6\end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы означает замену столбцов матрицы ее строками с теми же номерами (и наоборот), т.е. если $A=(a_{ij})_{m\times n}$, то транспонированная матрица $A^T=(a_{ij}^T=a_{ji})_{n\times m}$. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},\ \Rightarrow\ A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Пример 8. Найти $C=2A^T+5B$, если даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 0\\ 4 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix};\quad 2A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 0\\ 8 & -2\\ 10 & 8\end{pmatrix};\ 5B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 10 & 10\\ 0 & 15\\ 15 & 0\end{pmatrix};$$

$$C = 2A^{\mathrm{T}} + 5B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 0 \\ 8 & -2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \\ 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 10 \\ 8 & 13 \\ 25 & 8 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{p\times q}$.

Если число строк матрицы *B* равно числу столбцов матрицы *A(n=p)*, то матрица *B* называется *согласованной* с матрицей *A*.

Произведением матрицы A на согласованную матрицу B называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times q}$*, каждый элемент* c_{ij} *которой равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Таким образом, перемножать можно только согласованные матрицы.

Пример 9. Найти произведение матриц *AB*, если даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли найти *BA*?

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 4\cdot 3 & 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 4\cdot(-1) \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 3 & 4\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 14 & 0 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Умножение BA невозможно, так как матрица A не является согласованной с матрицей B.

Свойства операции:

1) В общем случае $AB \neq BA$; Если матрицы A и B – квадратные одного порядка и $AB = BA$, то они называются *перестановочными*;

2) $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$;

3) $(A + B)C = AC + BC$ и $C(A + B) = CA + CB$;

4) $\alpha AB = A(\alpha B) = (\alpha A)B,$ где α – число;

5) $\det AB = \det A \det B$;

6) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;

7) $AE = EA = A$.

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной* или *неособенной*, если $\det A \neq 0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для квадратной матрицы A, если $A^{-1}A = A^{-1}A = E$.

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы является её невырожденность.

Способ вычисления обратной матрицы. Пусть задана $A = (a_{ij})_{n \times n}$, причем $\det A \neq 0$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$. Здесь $\tilde{A} = (A_{ij})^{T}_{n \times n}$ – *союзная* (*присоединённая*) матрица матрицы A, где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Пример 10. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Следовательно, A^{-1} существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3;$ $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9;$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1.$

Так как

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & 3/8 \\ -3/8 & 1/8 & 9/8 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$ **2.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$ **3.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & a & d \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 22 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

Найти произведения матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу A^{-1}, обратную данным матрицам A:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА.

Метод Крамера.

Рассмотрим систему n алгебраических линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & \cdots & + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Определителем (главным) системы называется определитель матрицы системы, составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим Δ_j – определитель (вспомогательный), который получится из определителя системы Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Теорема Крамера. Если определитель системы уравнений $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 14.$$

Итак, система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -20.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{8}{7}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{30}{7}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{10}{7}$.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц

Если в заданной прямоугольной матрице A размерности $m \times n$ выделить k столбцов и k строк $\left(k \le \min\{m, n\}\right)$, то определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k столбцов и k строк, называется *минором k-го порядка* матрицы A. Число различных миноров k-го порядка матрицы равно $C_m^k C_n^k$.

Рангом матрицы A, называется наивысший порядок минора, отличного от нуля, обозначаемый $r(A)$ или $rangA$.

Матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{km} & a_{km+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

называется *трапецеидальной (ступенчатой)*, ее ранг равен числу ненулевых строк.

Элементарными преобразованиями матрицы называются такие преобразования, которые не изменяют её ранг:

1) перемена местами строк;

2) транспонирование;

3) умножение строки на число;

4) замена строки матрицы на строку, полученную сложением этой строки с другой, умноженной на число.

Все перечисленные преобразования можно производить и со столбцами матрицы.

Чтобы найти ранг произвольной матрицы, достаточно элементарными преобразованиями привести ее к трапецеидальному (ступенчатому) виду.

Пример 12. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Обозначим строки матрицы $\mathrm{S_i}$, а столбцы $\mathrm{C_i}$, для обозначения пояснений выполняемых элементарных преобразований матрицы. Тогда

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \to \left| \mathrm{S}_2 \to S_1 \right| \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left| \begin{matrix} \mathrm{S}_2 \to S_2 + S_1 \\ S_3 \to S_3 + 3S_1 \\ S_4 \to S_4 + 5S_1 \end{matrix} \right| \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \left| \begin{matrix} \mathrm{S}_3 \to S_3 - 2S_2 \\ S_4 \to S_4 - 3S_2 \end{matrix} \right| \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left| \mathrm{C}_1 \to C_1 + 3C_5 \right| \to \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная трапецеидальная матрица содержит две ненулевые строки. Ранг матрицы $r(A) = 2$.

Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса

Система m уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется *системой линейных алгебраических уравнений*. Матрица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы* уравнений. Числа b_i называются *свободными членами* уравнений системы.

асширенной матрицей системы называется матрица размерности $m \times (n+1)$:

$$A_{\eth} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Если $b_i = 0$ при всех i=1, 2, ..., m, то система уравнений называется *однородной*.

Решить систему уравнений (1.4) означает найти все наборы чисел $x_1, \cdots, x_n$, при которых каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Система m линейных уравнений с n неизвестными совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A_{\eth})$; причем, если $n = r(A)$, система имеет единственное решение, а если $n > r(A)$, то бесконечное множество решений (теорема Кронекера – Капелли).

В последнем случае ($r(A) = r(A_{\eth}) < n$) из матрицы A выбирается минор порядка $r(A)$, отличный от нуля (*базисный минор*), столбцы которого называются базисными, а соответствующие им неизвестные – *базисными переменными*. Остальные $n - r(A)$ переменных называются *свободными*. Из системы (1.4) базисные переменные единственным образом выражаются через свободные, принимающие произвольные значения, так что, каждому набору значений свободных неизвестных соответствует один, вполне определённый, набор значений базисных переменных. Зависимости, связывающие свободные и базисные неизвестные, называются *общим решением* системы.

Метод Гаусса позволяет получить решение совместной системы или определить, что система уравнений несовместна.

Приводя с помощью элементарных преобразований со строками матриц матрицу системы и расширенную матрицу к трапецеидальной (прямой ход), определяют ранги матриц, а, следовательно, и структуру решения исходной системы. Выписав систему уравнений, соответствующую последнему шагу прямого хода, обратным ходом вычисляют неизвестные.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \\ 9x_1 + 6x_2 = 33. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу системы и выполним одновременно преобразования над матрицей системы и над расширенной матрицей, обозначив в пояснениях строки $\mathrm{S_i}$, а столбцы $\mathrm{C_i}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & 4 \\ 3 & 4 & -2 & & 11 \\ 1 & 5 & -1 & & 7 \\ 3 & -2 & 4 & & 11 \\ 9 & 6 & 0 & & 33 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} \mathrm{S}_1 \leftrightarrow S_3 \\ S_2 \leftrightarrow S_3 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & & 7 \\ 2 & -1 & -1 & & 4 \\ 3 & 4 & -2 & & 11 \\ 3 & -2 & 4 & & 11 \\ 9 & 6 & 0 & & 33 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} \mathrm{S}_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_3 \\ S_5 \to S_5 - 3S_3 \\ S_3 \to S_3 - 3S_1 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & & 7 \\ 0 & -11 & 1 & & -10 \\ 0 & -11 & 1 & & -10 \\ 0 & -6 & 6 & & 0 \\ 0 & -6 & 6 & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} \mathrm{S}_3 \to S_3 - S_2 \\ S_5 \to S_5 - S_4 \end{vmatrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\left|\begin{matrix} S_4 \rightarrow -\frac{1}{6}S_4 \\ S_2 \leftrightarrow S_3 \end{matrix}\right|\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\left|S_3 \rightarrow S_3 + 11S_2\right|\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\left|S_3 \rightarrow -\frac{1}{10}S_3\right|\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица системы и её расширенная преобразованы к трапецеидальному виду. Следовательно,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A'_{\text{р}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $r(A) = r(A_{\text{р}}) = 3$ и равен числу неизвестных, то есть система совместна и имеет единственное решение.

Выполним обратный ход по методу Гаусса: $A'_{\text{р}}$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ \qquad x_2 - x_3 = 0; \\ \qquad\qquad x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1; \\ x_2 = x_3 = 1; \\ x_1 = 7 + x_3 - 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Итак, решение системы: $x_1 = 3;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 1$.

Ответ. $(3;1;1)$.

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7; \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы, обозначив в пояснениях строки $\mathrm{S_i}$, а столбцы $\mathrm{C_i}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_3 \to S_3 - 2S_1 \\ S_4 \to S_4 - 9S_1 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -27 & 6 & 11 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} S_3 \to 3S_3 - 7S_2 \\ S_4 \to S_4 - 9S_2 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} S_4 \to S_4 - S_3 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A'_{\text{р}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r(A) = 3$, $r(A_{\text{ð}}) = 4$. Так как $r(A) \neq r(A_{\text{ð}})$, следовательно, система решений не имеет.

Ответ. Система не имеет решений.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы, обозначив в пояснениях строки $\mathrm{S_i}$, а столбцы $\mathrm{C_i}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & & 3 \end{pmatrix} \to \left| \begin{matrix} \mathrm{S}_1 \to S_2 \\ S_2 \to S_1 \\ S_4 \to S_4 - 2S_1 \end{matrix} \right| \to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}S_2\to S_2-2S_1\\ S_3\to S_3-3S_1\end{vmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}S_3\to S_3-2S_2\\ S_4\to S_4-S_2\end{vmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A'_{\text{р}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(A)=r(A'_{\text{р}})=2$, т.е. система совместна и имеет бесконечное множество решений, так как $r(A)<n$=5.

Количество свободных переменных $\ell=n-r(A)=3$. Так как базисный минор $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, то базисными переменными являются x_1, x_2, а свободными x_3, x_4, x_5.

Согласно обратному ходу метода Гаусса матрице $A'_{\text{р}}$ соответствует система уравнений:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0;\\ 3x_2-3x_3-3x_4+5x_5=1.\end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x_3, x_4, x_5 \text{ - свободные неизвестные;} \\ x_2 = \frac{1}{3}(1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5); \\ x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5; \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}(1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5); \\ x_1 = \frac{1}{3}(1 + x_5); \end{cases}$$

где $x_3, x_4, x_5 \in R$.

Любое решение, полученное из общего решения при конкретных значениях свободных неизвестных, называется *частным*. Например, $x_1 = 1; x_2 = -3; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 2$.

Ответ. $\left(\frac{1}{3}(1 + x_5); \frac{1}{3}(1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5); x_3; x_4; x_5\right)$, $x_3; x_4; x_5 \in R$.

Задания для самостоятельной работы.

Решить систему уравнений методом Крамера:

1. $\begin{cases} x + 6y = 2; \\ 7x - 9y = -3. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y = -1; \\ 15x + 12y = 39. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2y - x = 18; \\ x + 3y = -13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y - z = -2; \\ x + y + z = 3; \\ 3x - 2y + 2z = 11. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

Решить систему уравнений методом Гаусса:

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7; \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$

4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где $x, y \in R$, i — символ, называемый *мнимой единицей*. По определению полагаем

$$i^2 = -1.$$

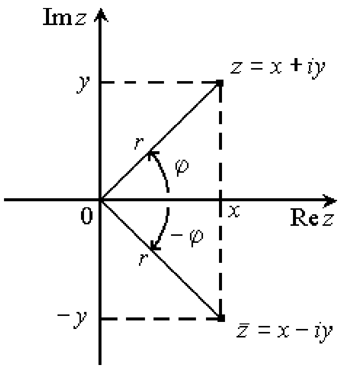

Рис. 1

При этом x называется *вещественной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — его *мнимой частью*, $y = \operatorname{Im} z$. Множество всех комплексных чисел принято обозначать буквой C.

Вещественное число x отождествляется с комплексным числом вида $x + 0 \cdot i$. Таким образом, множество вещественных является подмножеством множества комплексных чисел: $R \in C$.

Числа вида $iy = 0 + iy$ называются число мнимыми.

Комплексному числу $z = x + iy$ сопоставляется точка $M(x, y)$ или вектор $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ на координатной плоскости Oxy, которая называется *комплексной плоскостью* (рис.1). Вещественные числа изображаются точками оси Ox, которая называется вещественной осью, чисто мнимые числа – точками оси Oy, которая называется мнимой осью.

Формула $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Модулем комплексного числа z называется длина вектора $\overrightarrow{OM}$:

$$|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументом комплексного числа z называется угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси Ox. Аргумент определяется неоднозначно:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

где $\operatorname{Arg} z$ – любое из возможных значений аргумента; $\arg z$ – его *главное значение*, заключенное между $-\pi$ и π (или между 0 и 2π); k – целое число. В частности, $|i| = 1$, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$.

Если $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$, то

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тогда $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрическая форма* записи комплексного числа.

Пример 15.1. Комплексное число $z = (1; -1)$ записать в алгебраической и тригонометрической формах.

Решение. Алгебраическая форма заданного числа имеет вид $z = (1; -1) = 1 + (-1)i = 1 - i$. По формуле (15.2) найдем модуль z: $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Если обозначить $\varphi = \arg z$, то

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма этого числа

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad ◄$$

Пример 16. Записать в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = i$ и $z_2 = -3$.

Решение.

Для z_1 имеем: $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 0$, $y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1$,

для z_2: $x_2 = \operatorname{Re} z_2 = -3$, $y_2 = \operatorname{Im} z_2 = 0$.

Модули этих чисел: $|z_1| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$; $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$.

Пусть $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$. Тогда

$$\cos\varphi_1 = 0;\ \sin\varphi_1 = 1,\ \varphi_1 = \pi/2;$$
$$\cos\varphi_2 = -1;\ \sin\varphi_2 = 0,\ \varphi_2 = \pi.$$

Следовательно, тригонометрическая форма записи этих чисел

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};\quad z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 16. На комплексной плоскости построить линию, заданную уравнением $\operatorname{Re}(1+z) = |\,z\,|$.

Решение.

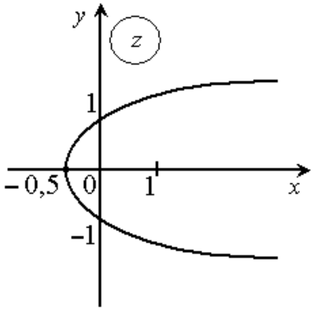

Рис. 2

Если $z = x + iy$, то $1 + z = (1 + x) + iy$.

$\mathrm{Re}\,(1 + z) = 1 + x$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда,

$$1 + x = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

$$(1 + x)^2 = x^2 + y^2\,,$$

$$1 + 2x + x^2 = x^2 + y^2\,,$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, получили уравнение параболы с вершиной в точке (− 1/2; 0), осью симметрии Ox и ветвями, направленными в сторону возрастания координаты x (рис. 2).

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда комплексные числа z_1 и z_2 называются *равными*, если они изображаются одной и той же точкой комплексной плоскости:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|; \\ \arg z_1 = \arg z_2. \end{cases}$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ (рис.1) называется *сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$, при этом $|\bar{z}| = |z|,\ \arg\bar{z} = -\arg z.$

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

Вычитание определяются аналогично сложению:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,.$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

При умножении двух комплексно-сопряженных чисел получим чисто вещественное число:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |\,z\,|^2\,.$$

Этим пользуются для выполнения операции деления – при делении числа z_1 на z_2 числитель и знаменатель дроби умножают на число, сопряженное к z_2:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\text{т.е. } z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \text{ где } z_2 \neq 0.$$

Пример 18. Найти а) z_1z_2, если $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 3 + 4i$; б) $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 1 - 2i$.

Решение.

а) $z_1z_2 = (4 - 2i)(3 + 4i) = 12 + 16i - 6i - 8i^2 = 12 + 10i + 8 = 20 + 10i$ (здесь учтено, что $i^2 = -1$).

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{(4 + 3i)(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} =$

$$= \frac{4 + 3i + 8i + 6i^2}{5} = \frac{4 + 11i - 6}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

Умножение и деление комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, производятся по формулам

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi - \varphi_2)\right].$$

Возведение комплексного числа в целую (положительную или отрицательную) степень, определяется по формуле ***Муавра***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathrm{Z}.$$

Пример 19. Пусть $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Найти в тригонометрической форме z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$ и z_1^4.

Решение.

Чтобы записать данные числа в тригонометрической форме, вычислим $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$;

если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то

$$\cos\varphi_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{4};$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{2},\ \sin\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);\ z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Произведем с данными числами указанные действия:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$z_1^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left[\cos\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 4(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -4.$$

Корень степени n из комплексного числа имеет ровно n различных значений, определяемых ***формулой Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

При изображении на комплексной плоскости все корни будут являться вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

Пример 20. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение.

Так как $|i| = 1$, $\arg i = \pi / 2$, то

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2 .$$

Таким образом,

при $k = 0$: $\left(\sqrt[3]{i}\right)_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$;

при $k = 1$: $\left(\sqrt[3]{i}\right)_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$;

при $k = 2$: $\left(\sqrt[3]{i}\right)_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$.

Все найденные корни изображены на рис. 3.

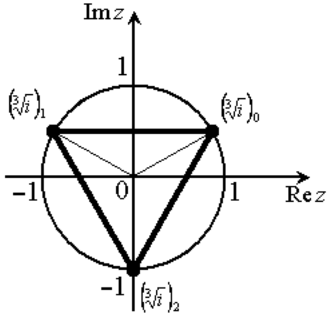

Рис. 3

С помощью ***формулы Эйлера***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можно получить показательную форму записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \text{ где } r = |z|, \quad \varphi = \arg z .$$

Действия над комплексными числами, записанными в показательной форме, производятся по обычным правилам алгебры так, как если бы мнимая единица *i* являлась вещественным числом.

Пример 21. Комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$ записать в показательной форме и найти z_2^6, $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение.

Имеем $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \pi/4$, $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = -\pi/6$.

Следовательно, $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Вычислим

$$z_2^6 = \left(2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6\mathrm{e}^{\left(-i\frac{\pi}{6}\right)6} = 64\mathrm{e}^{-i\pi} = 64\big(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\big) = -64;$$

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Пример 22. Решить уравнение $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$.

Решение.

Заменим в уравнении $z^2 = u$, тогда получим $u^2 + 4u + 8 = 0$.

$$u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i;$$

$$z^2 = u_{1,2} \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \sqrt{u_1}, \quad z_{3,4} = \sqrt{u_2}.$$

1) Запишем $u_1 = -2 + 2i$ в тригонометрической форме:

$$r_1 = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}, \ \operatorname{tg}\varphi_1 = -1, \ \frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \pi, \ \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$z_{1,2} = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2}\right), \quad k = 0, 1.$$

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8} \right).$$

2) $u_2 = -2-2i$; $r_2 = \sqrt{8}$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = 1$, $-\pi < \varphi_2 < -\dfrac{\pi}{2}$; $\varphi_2 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

$$z_{3,4} = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{2} \right), \quad k = 0, 1;$$

$$z_3 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8} \right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{8} \right) \right);$$

$$z_4 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8} \right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8} \right) \right) \text{ (см.рис.4).}$$

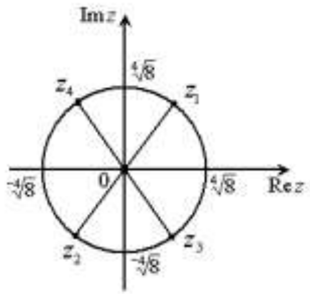

Рис. 4

Задания для самостоятельной работы

1. Для заданных комплексных чисел z_1 и z_2 найти $z_1 + z_2$; $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $z_1 - \bar{z}_2$; $z_1 z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$. Отметить заданные числа и полученные результаты на комплексной плоскости.

а) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 - 2i$;

б) $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 4 + i$;

в) $z_1 = 6 - i, \quad z_2 = i - 3$;

г) $z_1 = i + 1; \quad z_2 = -2 - i$;

д) $z_1 = i - 1; \quad z_2 = 3 - 2i$.

2. Определить, какую линию на комплексной плоскости образуют точки *z*, для которых выполнены условия:

1) $|z| > 5$;

2) $|z - i| < 3$;

3) $|z - 3 - 4i| = 5$;

4) $\operatorname{Re} z > 3$;

5) $\operatorname{Im} z \le 2$.

3. Вычислить, не пользуясь тригонометрической формой комплексного числа:

1) $\frac{1}{i}$;

2) $\frac{1+i}{1-i}$;

3) $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$;

4) $(1+2i)^6$;

5) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

4. Вычислить, пользуясь тригонометрической формой комплексного числа:

1) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$;

2) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^8$;

3) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

4) $\dfrac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{50}}$;

5) $\left(\sin\dfrac{9\pi}{20}+i\cos\dfrac{9\pi}{20}\right)^{-20}$.

5. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{-i}$;

2) $\sqrt[8]{1}$;

3) $\sqrt{1-i}$

4) $\sqrt{3+4i}$;

5) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

5. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Предел числовой последовательности

Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\ldots$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$ что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, что записывается в виде: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 23. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$.

Решение. Составим разность

$$\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}=\frac{5}{2(2n+1)}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon,\ \text{откуда}\ n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, для каждого положительного ε найдется число $N=\left[\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$ такое, что при $n>N$ будет иметь место неравенство $\left|\dfrac{3n+1}{2n-1}-1{,}5\right|<\varepsilon$ (здесь и далее символ $[x]$ означает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

Следовательно, по определению предела число 1,5 является пределом данной последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=1{,}5$.

Предел функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x\to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, что записывают выражением $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Запись $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ означает, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует такое $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$, что для всех x: $|x|>\Delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, т.е. для любого сколь угодно большого $E>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)|>E$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$.

Если $x\to a$ и $x<a$, то условно пишут $x\to a-0$. Аналогично, если $x\to a$ и $x>a$, то записывают $x\to a+0$.

Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно *левосторонним и правосторонним пределами* функции в точке $x=a$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если она определена в этой точке и выполняется равенство $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения, что выражается равенством $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

Для вычисления пределов функций используется теорема (о пределах алгебраических выражений): если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, а C – постоянная, то справедливо:

1) $\lim\limits_{x\to a} C=C$;

2) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, используемые при вычислении пределов:

1. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть также бесконечно малые функции.

2. Произведение конечного числа бесконечно больших функций и сумма бесконечно больших функций одного знака при $x\to a$ есть также функции бесконечно большие при $x\to a$.

3. Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$, то функция $\alpha(x)=1/f(x)$ бесконечно малая при $x\to a$, и обратно.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\infty$.

Все остальные соотношения между бесконечно малыми и бесконечно большими не подчиняются никакому закону или правилу, поэтому говорят, что отношение двух бесконечно малых представляет собой *неопределенностъ вида* $\left(\frac{0}{0}\right)$, отношение двух бесконечно больших функций - *неопределенностъ вида* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, произведение бесконечно малой и бесконечно большой функций есть *неопределенность вида* $(0\cdot\infty)$, разность двух бесконечно больших функций одного знака - *неопределенность вида* $(\infty-\infty)$.

Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ представляет собой неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то неопределенность раскрывается вынесением за скобки в числителе и в знаменателе переменной x в наибольшей степени (аналогично вычисляют пределы от функций натурального аргумента при $n\to\infty$). Данный метод справедлив также для выражений, содержащих иррациональность.

Пример 24. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x+1}{7x^2+2}$.

Решение.

Вынесем в числителе и в знаменателе переменную x в наибольшей степени за скобки, применяя свойства и 1 и теорему о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x+1}{7x^2+2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{7+\frac{2}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{7}x^3=\left[\begin{array}{l}+\infty,\ x\to+\infty;\\ -\infty,\ x\to-\infty,\end{array}\right.$$

где знак ответа зависит от знака переменной x.

Пример 25. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Решение.

Вынесем за скобки в числителе и в знаменателе переменную x в наибольшей степени и, выполняя преобразования, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=3.$$

Раскрытие неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

1) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ представляет собой неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то $x=a$ - общий корень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, поэтому для раскрытия неопределенности следует разложить многочлены на простейшие множители и сократить на бином $(x-a)$.

Пример 26. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{10x^2-7x+1}{6x^2-x-1}$.

Решение.

Разложим многочлены в числителе и в знаменателе на простейшие множители с помощью корней уравнений $10x^2-7x+1=0$ и $6x^2-x-1=0$, получим

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{10x^2-7x+1}{6x^2-x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\frac{5}{3}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}.$$

2) Если неопределенное выражение содержит иррациональность, то бывает полезно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, используя формулы сокращенного умножения.

Пример 27. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на сумму $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$, чтобы перевести иррациональность из числителя в знаменатель. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Раскрытие неопределенности вида $(\infty-\infty)$. Основной прием решения таких примеров заключается в преобразовании разности в частное и раскрытии неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, если таковые появятся.

Пример 28. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Решение.

Переведем иррациональность из числителя в знаменатель, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)(\infty-\infty)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6-5x}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{6}{x}-5\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6}{x}-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} - \frac{5}{2}.$$

Сравнение бесконечно малых величин. Замечательные пределы

Первый замечательный (*классический*) *предел*

$$\lim_{\substack{\alpha\to0\\(\alpha\neq0)}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Следствия первого замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1; \quad \lim_{\alpha\to0} \frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = 1; \quad \lim_{\alpha\to0} \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Второй замечательный (*классический*) *предел*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$

или в другой форме записи $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ \alpha\neq0}}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \mathrm{e}$, где $\mathrm{e} = 2{,}718281\ldots$.

Следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1; \quad \lim_{\alpha\to0} \frac{a^\alpha-1}{\alpha} = \ln a; \quad \lim_{\alpha\to0} \frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha} = m;$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a \mathrm{e},$$

где $a>0$; $a\neq 1$; $m\in Q$; $m>0$.

Сравнение бесконечно малых величин. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$ и существует конечный предел их отношения, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$, тогда возможны следующие случаи:

1) если $K=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая *высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$ при $x\to a$;

2) если $K\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями *одного порядка* при $x\to a$;

3) если $K=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* бесконечно малыми функциями, что записывают в виде $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

4) если $K=\infty$, то говорят, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая *низшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$ при $x\to a$.

Свойство бесконечно малых формулируется следующим образом: предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций.

Первый и второй классические пределы и их следствия дают следующие пары *эквивалентных бесконечно малых функций при* $\alpha\to 0$:

$\sin\alpha\sim\alpha$; $\quad\ln(1+\alpha)\sim\alpha$; $\quad\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$;

$(\mathrm{e}^{\alpha}-1)\sim\alpha$; $\quad\arcsin\alpha\sim\alpha$; $\quad(a^{\alpha}-1)\sim\alpha\ln a$;

$\mathrm{arctg}\alpha\sim\alpha$; $\quad((1+\alpha)^m-1)\sim\alpha m$; $\quad 1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$.

Пример 29. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-3x}-1}{\arcsin 2x}$.

Решение.

Воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-3x}-1}{\arcsin 2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{1-3x}-1\sim\frac{1}{5}(-3x)\\ \arcsin 2x\sim 2x\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(-3x)}{5\cdot 2x}=-\frac{3}{10}.$$

Пример 30. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1-2x)}{\ln(\cos 5x)}$.

Решение.

Воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1-2x)}{\ln(\cos 5x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1-2x)}{\ln(1+(\cos 5x-1))}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\operatorname{arctg} x\sim x, & \ln(1-2x)\sim -2x,\\ \ln(1+(\cos 5x-1))\sim\cos 5x-1, & \cos 5x-1\sim-\frac{5x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2\cdot 2}{-25x^2}=\frac{4}{25}.$$

Пример 31. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\cos 7x-\cos 3x}$.

Решение.

Переведем иррациональность из числителя в знаменатель, заменим разность косинусов на произведение синусов, воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\cos 7x-\cos 3x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{-2\sin 5x\cdot\sin 2x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin 5x\cdot\sin 2x}=\left\{\begin{matrix}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\\ \sin 5x\sim 5x,\ \sin 2x\sim 2x\end{matrix}\right\}=$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2\cdot 5x\cdot 2x}=-\frac{1}{80\sqrt{2}}.$$

Пример 32. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Введем новую переменную $y = x - \frac{\pi}{2}$. Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + y$. Заметим, что $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = \left\{\begin{aligned} & y = x - \frac{\pi}{2}, \\ & x = \frac{\pi}{2} + y, \\ & y \to 0 \end{aligned}\right\} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{\sqrt[3]{\left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right]^2}} =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{\sqrt[3]{(1-\cos y)^2}} = \left\{\begin{aligned} & \sin y \sim y \\ & 1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\left(y^2/2\right)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{y\to 0} \frac{-2^{\frac{2}{3}} y}{y^{\frac{4}{3}}} = \lim_{y\to 0} \frac{-2^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{0}\right) = \infty .$$

Вычисление пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$.

$$\lim_{x\to a} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)}$$

1. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A$ $(A > 0)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} (u(x))^{v(x)} = A^B$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то искомый предел находят непосредственным вычислением, используя соотношения $A^{+\infty} = \infty$ при $A > 1$ и $A^{+\infty} = 0$ при $0 < A < 1$.

3. $\lim\limits_{x\to a} (u(x))^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)}$.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, т.е. имеем *неопределенность* (1^{∞}), то применяют второй замечательный предел

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\mathrm{e}$ или формулу $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to a} v(x)(u(x)-1)\right)}$ при $u(x) \underset{x\to a}{\to} 1$.

Пример 33. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)^{5x}$.

Решение.

Вычислим $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=3$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^{5x}=(3^{\infty})=\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^{5x}=(3^{-\infty})=0.$$

Пример 34. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида (1^{∞}), поэтому, чтобы применить второй замечательный предел, необходимо в основании выделить единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x-1}{2x+5}-1\right)\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-6}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-6}}\right)^{\frac{-6}{2x+5}\cdot 3x}=\mathrm{e}^{-9},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-6}}=\mathrm{e}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{-6\cdot 3x}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-18x}{x\left(2+\dfrac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-18}{2+\dfrac{5}{x}}=-9.$$

Пример 35. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{3}{2x^2}}$.

Решение.

Применив второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{3}{2x^2}}\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{3}{2x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{3(\cos x-1)}{2x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}},$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(\cos x-1)}{2x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3x^2}{2}}{2x^2}=-\frac{3}{4}.$$

Непрерывность функции. Точки разрыва

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если функция $f(x)$ определена в этой точке и выполняется равенство

$f(a-0)=f(a)=f(a+0)$,

где $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$.

Если положить $x=a+\Delta x$, где $\Delta x\to 0$, то условие непрерывности функции в точке $x=a$ можно записать в виде

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$,

где

$\Delta f(x)=f(a+\Delta x)-f(a)$.

Некоторые свойства непрерывных функций:

1) сумма (разность) и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная;

2) частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная для всех значений аргумента, при которых знаменатель отличен от нуля;

3) результат подстановки непрерывной функции в непрерывную функцию есть функция непрерывная, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – функция непрерывная, если непрерывны функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$;

4) основные элементарные функции в области их определения непрерывны.

Функция $f(x)$ при $x = a$ (в точке $x = a$) имеет *разрыв*, если в этой точке нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции.

Виды разрывов следующие:

• если $f(a-0) = f(a+0)$ а функция в точке $x = a$ не определена, или $f(a)$ существует, но $f(a) \neq f(a-0)$, то точка $x = a$ называется *устранимой точкой разрыва*. Если доопределить или переопределить функцию, положив $f(a) = f(a-0) = f(a+0)$, то функция станет непрерывной в точке $x = a$;

• если оба односторонних предела конечны и $f(a-0) \neq f(a+0)$ то точка $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода*;

• если хотя бы один из односторонних пределов не существует или обращается в бесконечность, то $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода.*

Пример 36. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

Решение.

Значение функции при $x = 0$ не определено, но существуют конечные и равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию, положив $f(0) = 1$, то функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

станет непрерывной в точке $x=0$.

Пример 37. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2}x+1 & \text{при} \quad x\neq 2,\\ \\ 2 & \text{при} \quad x=2.\end{cases}$$

Решение.

Данная функция определена для всех значений x. При $x>2$ имеем $|x-2|=x-2$ и $\dfrac{|x-2|}{x-2}=1$. В этом случае $f(x)=x+1$ и потому для всех значений $x>2$ функция непрерывна как многочлен первой степени. Аналогично, при $x<2$ имеем $\dfrac{|x-2|}{x-2}=-1$ и $f(x)=-x+1$ также непрерывна как многочлен первой степени.

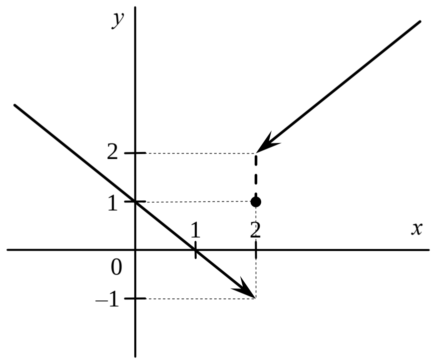

Рис. 5

Исследуем поведение функции около точки $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(-x+1)=-2+1=-1;$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=2+1=3.$$

По условию задачи $f(2)=2$, но $f(2-0)\neq f(2+0)\neq f(2)$. Следовательно, точка $x=2$ есть точка разрыва первого рода (рис. 5).

Пример 38. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

***Решение*.**

По свойствам непрерывных функций данная функция непрерывна для всех $x\neq 1$. Для выяснения характера разрыва функции найдем

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{\left(\frac{1}{-0}\right)}=(2^{-\infty})=0;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\frac{1}{1+0-1}}=2^{\left(\frac{1}{+0}\right)}=(2^{+\infty})=+\infty.$$

Следовательно, $x=1$ – точка разрыва второго рода, так как правосторонний предел равен бесконечности (рис.6).

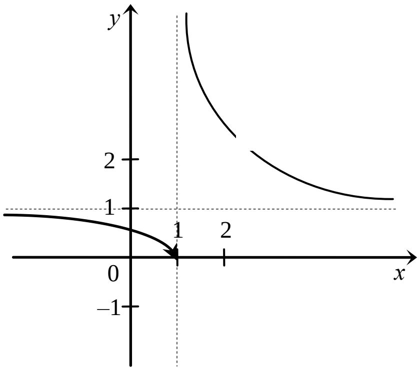

Рис.6

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-3x^2+1}{4x^5+3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x+1}{4x^4+3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x^2+3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+3x-2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-x-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2-x-2}{6x^2+7x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x^2-2x-1}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x-7}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt{x}-3}$. **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-3}-x)$. **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x)$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$. **16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^4}{x^3-1}-x\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 3x}$. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 5x}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$. **24.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$. **25.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^x$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{2x+1}{x-2}}$. **27.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}\right)^{x^2}$. **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{x-1}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{2x}}$. 30. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$.

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функций:

1. $y=\dfrac{e^x-1}{x}$. **2.** $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$. **3.** $y=\dfrac{5^{\frac{1}{x^2}}-1}{5^{\frac{3}{x^2}}+1}$.

4. $y = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \le 2; \\ x-1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$ **5.** $y = \begin{cases} x^2+1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \quad\quad \text{ при } x = 0, \\ x^3+1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Дифференцирование явных функций

Пусть x и $x+\Delta x$ – значения аргумента, $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$ – соответствующие им значения функции $y = f(x)$. Величина Δx называется *приращением аргумента*, а разность $y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – *приращением функции* на отрезке $[x; x+\Delta x]$.

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; (\Delta x \ne 0).$$

Операция вычисления производной $y' = f'(x) = f'_x$ называется *дифференцированием* данной функции. Функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0, если в этой точке она имеет конечную производную. Соответственно $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой его точке.

Формулы дифференцирования элементарных функций:

$$C' = 0, C = \text{const}; (x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\ (\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \mathrm{ch}\, x;\ (\mathrm{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \mathrm{sh}\, x;$$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x};\ (\mathrm{cth}\, x)' = \left(\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

Пусть C=const, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы следующие основные правила дифференцирования:

1) $(uv)' = u'v + v'u,\ (Cu)' = Cu'$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2},\ \left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{C}{v^2}$;

4) если $y=f(u)$ - дифференцируемая функция, то $y = f[u(x)]$ – сложная функция аргумента x и $y'_x = f'_u u'_x$.

5) если $y = u(x)^{v(x)}$ – степенно-показательная функция, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$y'_x = (u^v)' = u^{v-1}[uv'_x \ln u + vu'_x].$$

Пример 39. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные функций:

1) $y = 4x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

2) $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$;

3) $y = x^3 \cos x$;

4) $y = e^x \mathrm{arctg} x$;

5) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x^2}$.

Решение.

1. $y'=(4x^3)'-(6x^2)'+(9x)'-(10)'=4(x^3)'-6(x^2)'+9(x)'+0=$
$$=4\cdot 3x^2-6\cdot 2x+9=12x^2-12x+9.$$

2. Перепишем функцию $y=2\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{x^2}$, используя дробные и отрицательные показатели степени, в виде $y=2x^{1/3}+3x^{-2}$. Тогда
$$y'=\left(2x^{1/3}\right)'+\left(3x^{-2}\right)'=2\left(x^{1/3}\right)'+3\left(x^{-2}\right)'=$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3\cdot(-2)x^{-3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{6}{x^3}.$$

3. По правилу 2 дифференцирования произведения имеем
$$y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=3x^2\cos x-x^3\sin x.$$

4. По правилу 2 дифференцирования имеем
$$y'=(\mathrm{e}^x)'\,\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{e}^x(\mathrm{arctg}\,x)'=\mathrm{e}^x\ln\mathrm{e}\cdot\mathrm{arctg}\,x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}.$$

5. По правилу 3 дифференцирования имеем
$$y'=\frac{(\mathrm{tg}\,x)'x^2-(x^2)'\mathrm{tg}\,x}{(x^2)^2}=\frac{\dfrac{x^2}{\cos^2 x}-\dfrac{2x\sin x}{\cos x}}{x^4}=$$
$$=\frac{x(x-2\cos x\sin x)}{x^4\cos^2 x}=\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}.$$

Пример 40. Найти производные функций:

1) $y=\dfrac{10}{1+3x}$;

2) $y=\mathrm{tg}^6\,x$;

3) $y=\ln(x^2+5)$;

4) $y=\sin^3(x^2-1)$;

5 $y=\ln\sqrt{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x^3)^3}}$.

Решение.

1. Запишем функцию $y=\dfrac{10}{1+3x}$ в виде $10(1+3x)^{-1}$. Тогда

$$y' = 10\cdot(-1)\cdot(1+3x)^{-2}\cdot 3 = -\frac{30}{(1+3)^2}.$$

2. $y' = \left[(\operatorname{tg} x)^6\right]' = 6\operatorname{tg}^5 x\cdot(\operatorname{tg} x)' = 6\operatorname{tg}^5 x\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{6\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}$.

3. $y' = \left(\ln(x^2+5)\right)' = \left(\log_e(x^2+5)\right)' = \dfrac{1}{(x^2+5)\ln e}(x^2+5)' = \dfrac{2x}{x^2+5}$.

4. $y' = 3\sin^2(x^2-1)\left(\sin(x^2-1)\right)' = 3\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)(x^2-1)' =$

$$3\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)\cdot 2x = 6x\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1).$$

5. Функцию $y=\ln\sqrt{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x^3)^3}}$ перепишем, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y=\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)-3\ln(1-x^3)].$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}+\frac{9x^2}{1-x^3}\right).$$

Дифференцирование неявных функций

Пусть зависимость между двумя переменными x и y выражена некоторым уравнением, не разрешенным относительно ни одной из них. Если на некотором интервале (a,b) каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y, которое вместе с x обращает такое уравнение в тождество, то будем говорить, что это уравнение задает *неявную функцию* $y(x)$. В дальнейшем будем считать функцию $y(x)$ дифференцируемой в интервале (a,b).

Заметим, что это же уравнение определяет и неявную функцию $x(y)$ на некотором интервале (c,d) изменения переменной y. Функцию $x(y)$ в дальнейшем будем считать дифференцируемой в интервале (c,d).

Пример 41. Найти производную y'_x из уравнения

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 .$$

Решение.

Так как y является функцией от x, то будем ее рассматривать как сложную функцию от x. Следовательно, $(y^3)'_x = 3y^2 y'$.

Продифференцировав по x обе части уравнения, получим

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3(y + xy') = 0 .$$

Откуда

$$y'(y^2 - x) = y - x^2;\ y' = (y - x^2)/(y^2 - x) .$$

Пример 42. Найти производную x'_y из уравнения

$$x^3 + \ln y = x^2 e^y .$$

Решение.

После преобразований

$$x^3 + \ln y - x^2\,\mathrm{e}^y = 0;\ 3x^2 x' + \frac{1}{y} - 2x \cdot x'\mathrm{e}^y - x^2\mathrm{e}^y = 0;$$

$$x'\left(3x^2 - 2x\mathrm{e}^y\right) = x^2\mathrm{e}^y - \frac{1}{y}$$

найдем

$$x' = \frac{yx^2\mathrm{e}^y - 1}{xy(3x - 2\mathrm{e}^y)} .$$

Если для неявно заданной функции была найдена производная y'_x, то производную x'_y можно искать по формуле для обратной функции

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} .$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

В геометрии и механике часто употребляется параметрический способ задания кривой.

Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся материальной точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется *параметром*. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями
$x = \varphi(t);\;\; y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$.

Изменения параметра t на отрезке $[\alpha, \beta]$ таково, что точка с координатами (x,y) описывает всю кривую или рассматриваемую ее часть. Отметим, что каждому значению t соответствует только одно значение x и y. Задание кривой уравнениями (2.9) называется *параметрическим.*

Если из уравнений можно исключить параметр t, то получим явное или неявное задание функции $y=f(x)$. Исключение параметра t из уравнений движения материальной точки приводит к уравнению траектории этой точки.

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые по t функции и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная от функции y по x

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Пример 43. Найти производную y'_x, если $x = r\cos t$; $y = r\sin t$.

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\operatorname{ctg} t\ .$$

Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$. Аналогично *производная третьего порядка* функции $y=f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y'''=(y'')'$.

Таким образом, *производная n-го порядка* от функции $y=f(x)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ и обозначается $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Пример 44. Найти производную *n*-го порядка от функции

$$y=x^7-3x^6+5x^4-7x^2+8x-10.$$

Решение.

Найдем последовательно y', y'', y''' и т.д.:

$$y'=7x^6-18x^5+20x^3-14x+8;$$

$$y''=42x^5-90x^4+60x^2-14;$$

$$y'''=210x^4-360x^3+120x;$$

$$y^{(4)}=840x^3-1080x^2+120;$$

$$y^{(5)}=2520x^2-2160x;$$

$$y^{(6)}=5040x-2160;$$

$$y^{(7)}=5040;$$

$$y^{(8)}=y^{(9)}=\ldots=y^{(n)}=0.$$

Пример 45. Найти y''' для функции $y=x^2\sin 2x$.

Решение.

Выпишем производные:

$$y'=2x\sin 2x+2x^2\cos 2x;$$

$$y''=2\sin 2x+4x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x=$$

$$=2\sin 2x+8x\cos 2x-4x^2\sin 2x;$$

$$y'''=4\cos 2x+8\cos 2x-16x\sin 2x-8x\sin 2x-8x^2\cos 2x=$$

$$=12\cos 2x-24x\sin 2x-8x^2\cos 2x.$$

Если функция задана параметрическим способом $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, то

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример 46. Найти y'', для функции $y(x)$ неявно заданной уравнением $\mathrm{arctg}\,y-y+x=0$.

Решение.

Дифференцируем уравнение по *x*:

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0.$$

Тогда

$$y'-y'(1+y^2)+1+y^2=0;\qquad y'(1-1-y^2)=-(1+y^2);$$

$$y'=\frac{-(1+y^2)}{-y^2}=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1.$$

Дифференцируем полученное равенство еще раз:

$$y''=-2y^{-3}y'=-\frac{2y'}{y^3}.$$

В правую часть последнего равенства подставим вместо производной y' ее выражение, полученное выше, тогда

$$y''=-\frac{2}{y^3}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Аналогично поступим при определении производных более высоких порядков.

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента.

Дифференциал функции равен произведению производной на приращение аргумента: $dy=y'\Delta x$, но так как для функции $y=x$

$dx \equiv \Delta x$, то $dy = y'dx$. Тогда производная представима в виде частного двух дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Таким обозначением постоянно пользуются наряду с обозначениями y' и $f'(x)$.

Геометрически дифференциал функции представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции (рис. 7) в точке $M(x, y)$.

Основные свойства дифференциалов следующие:

1) $dC = 0$;

2) $d(Cu) = Cdu$;

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(uv)=vdu+udv$;

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

6) $df(u)=f'(u)du$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$, C=const.

Дифференциалы элементарных функций получают из формул соответствующих производных по формуле $dy = y'dx$.

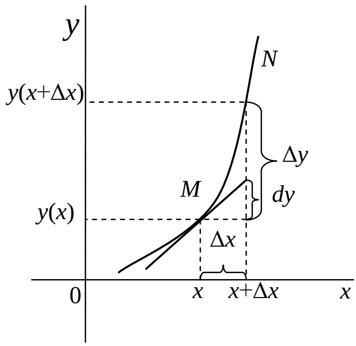

Рис.7

Задания для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1. $y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 6$.

2. $y = (x+2)^2 / x^{\frac{3}{2}}$.

3. $y = x \ln x - x$.

4. $y = (1 - \cos x)/(4 - x)$.

5. $y = \left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right)^2$.

6. $y = \operatorname{sh} x \sin x$.

7. $y = \arccos x / (1 - x^2)$.

8. $y = \log_2 x / \cos x$.

9. $y = \mathrm{e}^x \sin x$.

10. $y = (\log_3 x - x^2) / \sin x$.

11. $y = \operatorname{ch} x / x$.

12. $y = 10^x / \sqrt{x}$.

13. $y = x^3 \lg x - x^2 / \ln x$.

14. $y = (x^3 + 1)^{10}$.

15. $y = \mathrm{e}^{-3x}$.

16. $y = \ln \sin x + 0{,}5 \cos^2 x$.

17. $y = 4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}}$.

18. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

19. $y = \sqrt[3]{5x^2 + 3x + 10}$.

20. $y = \sqrt{x} \cos^2 x$.

21. $y = \cos^4 x$.

22. $y = \sqrt{x^2 + 1} / (x + 1)$.

23. $y = \arcsin(1/x)$.

24. $y = \cos \ln x$.

25. $y = \mathrm{e}^{\sin^2 x} / \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$.

26. $y = \ln \ln \operatorname{tg} x$.

27. $y = \ln \operatorname{ctg} x$.

28. $y = \operatorname{arctg} x / (1 + x^2)$.

29. $y = \operatorname{tg}^4 (x^2 + 1)$.

30. $y = \ln \operatorname{tg} 0{,}5x$.

Найти производную y'_x неявных функций:

1. $x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^2 - 3x + 4 = 0$.

2. $x^2 y + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} = 0$.

3. $\sin(x - y) - \ln(y - x) = 2\sqrt{y - x} + 3$.

Найти производную x'_y неявных функций:

1. $x \sin y + y \sin x = 0$.

2. $y^2 \ln x - x^2 \ln y = 1$.

3. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{xy}$.

Найти производную y'_x параметрически заданных функций:

1. $x=\frac{t^2}{4}-1;\ y=e^{t^2}$. **2.** $x=\ln(t-1);\ y=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t-5$.

3. $x=4^{-\arccos t};\ y=4^{\arcsin t}$. **4.** $x=t-\ln\sin t,\ y=t+\ln\cos t$.

5. $x=e^t\cos t;\ y=e^t\sin t$.

Найти y'' для функций:

1. $y=\ln(1+e^x)$. **2** $y=x/\sqrt{1-x^2}$.

3. $y=x^x$. **4.** $y=\arccos 0{,}5\,(x-2)$.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗА ГРАФИКА.

Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Функция $f(x)$ называется *возрастающей в интервале* (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей в интервале* (a, b), если для любых двух x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие в интервале функции называются строго монотонными.

Признаки возрастания и убывания функции следующие:

1) если $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает в интервале (a, b);

2) если $f'(x) < 0$ для $\forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ монотонно убывает в интервале (a, b).

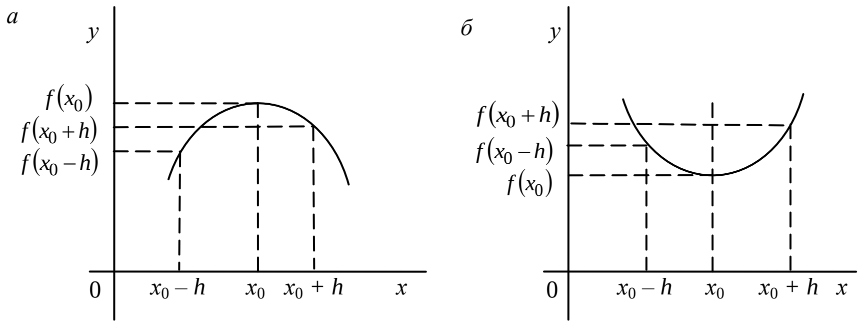

Рис.8

Значение функции $f(x_0)$ называется *максимумом* функции $f(x)$, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие $f(x) < f(x_0)$ для любого $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. В этом случае *точкой максимума* функции $f(x)$ называется точка x_0 (рис.8, *а*).

Значение функции $f(x_0)$ называется *минимумом* функции $f(x)$, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие $f(x) > f(x_0)$ для $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Точка x_0 называется в этом случае *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис.8, *б*).

Максимум или минимум функции $f(x)$ называется *экстремумом функции*.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и имеет экстремум, возможны три случая: $f'(x) = 0$; $f'(x) = \infty$ или $f'(x)$ не существует. Соответствующие точки называются *критическими точками* функции $f(x)$. Точка x_0, в которой $f'(x) = 0$, называется *стационарной точкой*.

Геометрический смысл условий:

1) $f'(x) = 0$ – в точке x_0 касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox в точках максимума (рис.9, *а*), минимума (рис.9, *б*) и в случае отсутствия экстремума (рис.9, *в*);

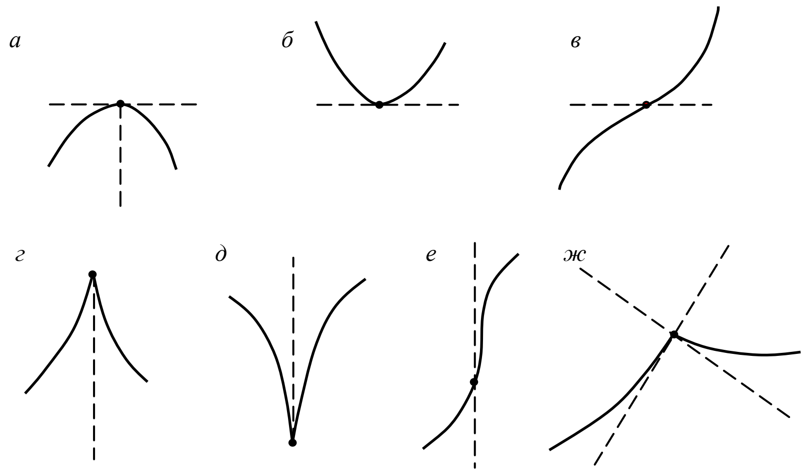

Рис. 9

2) $f'(x)=\infty$ – касательная параллельна оси Oy в точках острого максимума и острого минимума (рис.9, *г* и *д*) и при отсутствии экстремума (рис.9, *е*), а также касательная не существует (рис.9, *ж*) в случае, когда не существует $f'(x)$.

Заметим, что не всякая критическая точка является точкой экстремума, т.е. выполнение одного из условий 1-3 является необходимым условием существования экстремума, но недостаточным.

Достаточные условия: если при переходе через критическую точку первая производная меняет знак, то данная критическая точка является точкой экстремума, причем если знак меняется с плюса на минус, то это точка максимума, а если с минуса на плюс, то это точка минимума. Если при переходе через критическую точку первая производная знака не меняет, то экстремума в этой точке функция не имеет.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшее значение функции $f(x)$ в отрезке $[a, b]$ обозначается $\max\limits_{[a,b]} f(x)$, наименьшее значение – $\min\limits_{[a,b]} f(x)$. Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$ нужно сравнить значения функции на границах отрезка со значениями в экстремальных точках, принадлежащих данному интервалу, и среди них выбрать наибольшее (наименьшее).

Отметим, в частности, что функция, непрерывная в интервале (a, b), может не достигать своего наибольшего или наименьшего значений. Если непрерывная функция имеет в интервале (a, b) *единственную* экстремальную точку, например, минимум (максимум), то в этой точке обязательно достигается наименьшее (наибольшее) значение функции в этом интервале (рис.10).

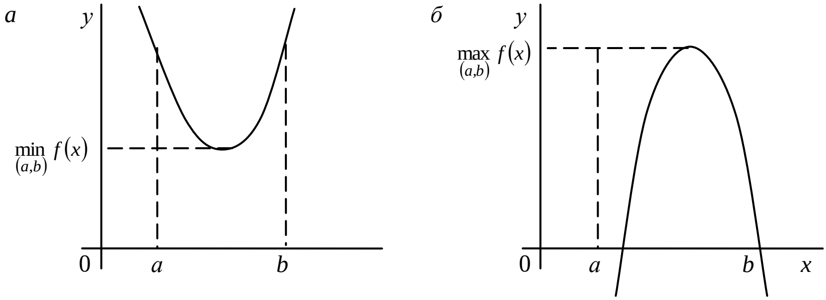

Рис.10

Пример 48. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение.

Найдем критические точки функции

$$f(x): f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Обе найденные критические точки принадлежат заданному промежутку. В точке $x_1 = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x_2 = 2$ функция имеет минимум.

Вычислим значения функции в этих точках и на границах отрезка: $f(-1) = -3$; $f(0) = 1$; $f(2) = -3$; $f(4) = 17$.

Таким образом, наибольшее значение на отрезке $[-1; 4]$ функция принимает на правой границе отрезка при $x = 4$, а наименьшее значение достигается в двух точках: в точке $x = 2$ и на левой границе

Пример 49. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

Решение.

Обозначим x половину основания AC равнобедренного треугольника ABC (рис.11). Тогда из условия задачи $AB = BC = p - x$. Определим высоту BH по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px}\ .$$

Объем конуса $V = S_{осн}h/3$, где основание конуса – круг радиусом x, высота – высота треугольника BH. Тогда

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{p^2 - 2px},\, x \in (0, p/2)\ .$$

Производная

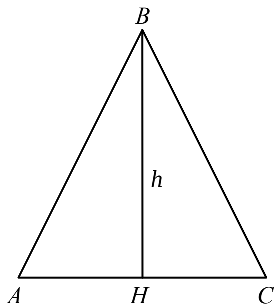

Рис.11

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{p^2 - 2px} + \frac{x^2(-2p)}{2\sqrt{p^2 - 2px}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{(2x(p^2 - 2px) - px^2)}{\sqrt{p^2 - 2px}} = \frac{\pi}{3}\frac{px(2p - 5x)}{\sqrt{p^2 - 2px}}\ ;$$

$$V'(x) = 0 \text{ при } x = 2p/5.$$

Найдем

$$V\left(\frac{2p}{5}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{4p^3}{25\sqrt{5}}\ .$$

Отсюда максимум $V(x)$ достигается при $x = 2p/5$ на интервале $(0, p/2)$. Следовательно, основание равнобедренного треугольника $AC = 2x = 4p/5$, а боковые стороны $AB = BC = p - x = 3p/5$.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* в интервале (a, b), если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.12, *а*). График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вниз* в интервале (a, b), если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис.12, *б*).

Достаточное условие выпуклости (вогнутости**)** графика функции: если $f''(x) < 0$ в интервале (a, b), то график функции является *выпуклым* в этом интервале; при $f''(x) > 0$ в интервале (a, b) график функции – *вогнутый.* Точка P графика функции с координатами x_0 и $f(x_0)$, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой или наоборот, называется *точкой перегиба* (рис.13).

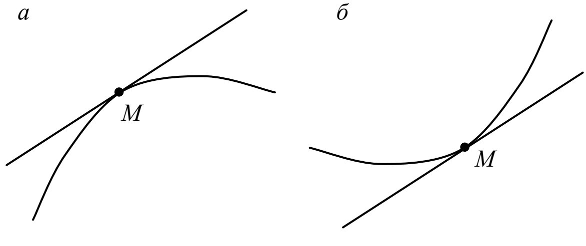

Рис. 12

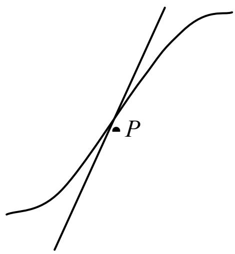

Рис. 13

Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$, $f''(x) = \infty$ или не существует, называются критическими точками второго рода функции $f(x)$. Не всякая критическая точка второго рода является точкой перегиба.

Если $f''(x)$ в окрестности точки x_0 не меняет знак, то данная точка кривой $y = f(x)$ точкой перегиба не является.

Чтобы найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, необходимо:

1) найти критические точки второго рода функции $y = f(x)$;

2) исследовать знак $f''(x_0)$ при переходе через критические точки второго рода.

Асимптоты

Прямая L называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки $M(x, y)$ кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат, т.е. при стремлении хотя бы одной из координат к бесконечности.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ (рис.14, *а*).

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ при $x\to+\infty$, если существуют конечные пределы $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right]$, и при $x\to-\infty$, если существуют пределы $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx\right]$ (рис.14, *б*). Частным случаем наклонной асимптоты при $k = 0$, является *горизонтальная асимптота* (необходимо убедиться, что имеет место $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$).

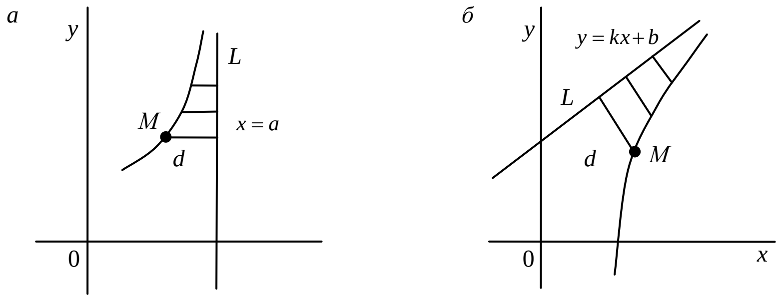

Рис.14

Заметим, что наклонная асимптота может быть у кривой при $x\to+\infty$ и ее может не быть при $x\to-\infty$ или наоборот. Возможны также случаи, когда при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ кривая имеет разные наклонные асимптоты.

Общее исследование функции. Построение эскиза графика функции

Для исследования функции $y = f(x)$ и построения эскиза ее графика целесообразен следующий порядок действий:

1. Найти области определения и значений функции.

2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат Ox ($y = 0$) и Oy ($x = 0$).

3. Исследовать функцию на четность и нечетность, т.е. установить симметрию графика относительно осей координат и начала координат, если таковая имеется.

4. Исследовать функцию на периодичность (в случае обнаружения таковой исследование и построение графика проводить на промежутке, равном длине основного периода, а затем распространить полученный график влево и вправо согласно периоду).

5. Исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить их характер; найти вертикальные асимптоты.

6. Найти наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ или убедиться, что их нет.

7. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой, являющейся графиком функции, и точки ее перегиба.

9. Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, нанеся предварительно асимптоты и характерные точки.

Пример 50. Исследовать функцию $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения данной функции $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. График функции не пересекает ось Oy, так как $x = 0$ не принадлежит области определения функции. Для нахождения точек пересечения графика с осью Ox надо решить уравнение $e^{\frac{1}{x}} - x = 0$. Его можно решить графически, построив графики функций $y_1 = x$ и

$y_2 = e^{\frac{1}{x}}$. Графиком функции $y_1 = x$ является прямая. Для того, чтобы построить эскиз графика $y_2 = e^{\frac{1}{x}}$, вычислим пределы $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} e^{1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$. Сделаем эскиз графиков y_1 и y_2 (рис.15).

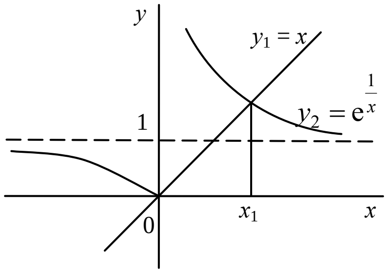

Рис. 15

Точка $x = x_1$ является точкой пересечения прямой y_1 и кривой y_2, а следовательно, и точкой пересечения функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$ с осью Ox.

3. Для выяснения четности и нечетности функции надо рассмотреть $f(-x)$. Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy. Если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

Вычислим $f(-x) = e^{-\frac{1}{x}} + x$. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то это функция общего вида и ее график никакой симметрией не обладает.

4. Очевидно, что функция непериодическая.

5. Определим вертикальные асимптоты, вычислив пределы

$$\lim_{x\to+0}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = +\infty; \quad \lim_{x\to-0}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = 0.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

6. Найдем наклонные асимптоты, вычислив

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{x}=-1\,;\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-x+x\right)=1\,.$$

Итак, наклонная асимптота $y = -x + 1$.

7. Исследуем функцию на экстремум и найдем интервалы монотонности. Так как

$$y'=\frac{-e^{\frac{1}{x}}-x^2}{x^2}=-\frac{(e^{\frac{1}{x}}+x^2)}{x^2}\,,$$

очевидно, что уравнение $e^{1/x} + x^2$ не имеет вещественных корней и экстремума. Функция всюду убывает, так как $y' < 0$ во всей области определения функции.

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика кривой и точки перегиба. Так как

$$y''=\frac{e^{\frac{1}{x}}+2xe^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^2}\,,$$

то критические точки второго рода: $x = -0{,}5$ ($y'' = 0$) и $x = 0$ ($y'' = \infty$).

Исследуем знак y'' при переходе через критические точки второго рода (табл.1).

Таблица 1

Функция	Интервал				
	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};0\right)$	0	$(0, +\infty)$
y'' y	$-$	0 Точка перегиба $(-0{,}5;\ e^{-2}+0{,}5)$	$+$	∞ Не определена	$+$

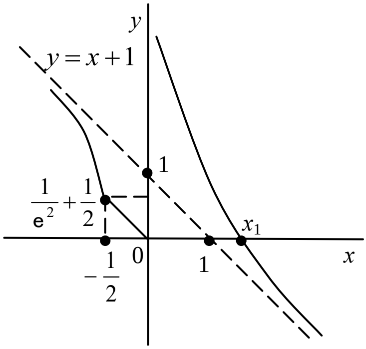

Рис. 16

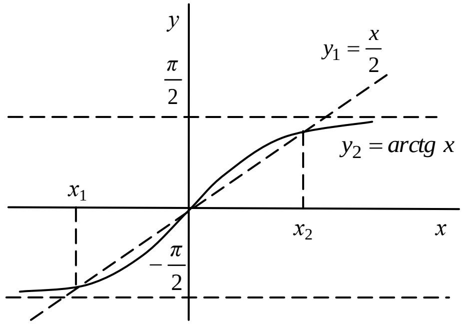

Рис.17

Таким образом, график кривой выпуклый при $x \in (-\infty, -0{,}5)$ и вогнутый при $x \in (-0{,}5; 0) \cup (0, +\infty)$.

Точка с координатами $(-0{,}5; e^{-2} + 0{,}5)$ является точкой перегиба. Эскиз графика представлен на рис. 16.

Пример 17. Исследовать функцию $f(x) = x - 2\,\mathrm{arg\,tg}x$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. График пересекает ось Oy в точке (0; 0). Для нахождения точек пересечения графика с осью Ox надо решить графически уравнение $x - 2\,\mathrm{arg\,tg}x = 0$ (или $x/2 = \mathrm{arctg}x$). Построим графики $y_1 = 0{,}5$ и $y_2 = \mathrm{arctg}\,x$ и найдем точки их пересечения (рис.17).

Таким образом, график y_1 пройдет через начало координат и дважды пересечет кривую y в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$.

3. Функция $y = x - 2\mathrm{arctg}x$ является нечетной, так как

$f(-x) = -x - 2\mathrm{arctg}(-x) = -x + 2\mathrm{arctg}x = -(x - 2\mathrm{arctg}x) = -f(x)$,

и следовательно, ее график будет симметричен относительно начала координат.

4. Функция непериодическая.

5. Функция является непрерывной, так как определена для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, и следовательно, вертикальных асимптот кривая не имеет.

6. Найдем наклонные асимптоты, вычислив

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x - 2\operatorname{arctg} x - x\right] = \begin{cases} -\pi \text{ при } x \to +\infty; \\ +\pi \text{ при } x \to -\infty. \end{cases}$$

Уравнение правой асимптоты (при $x \to +\infty$) $y = x - \pi$, а уравнение левой асимптоты (при $x \to -\infty$) $y = x + \pi$.

7. Исследуем функцию на экстремум и найдем интервалы монотонности. Вычислим

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Определим критические точки функции $y' = 0$ при $x = \pm 1$. Исследуем перемену знака y' (табл.2). Вычислим $y_{\max}(-1) = 0{,}5\pi - 1$ и $y_{\min}(1) = 1 - 0{,}5\pi$.

Таблица 2

Функция	Интервал				
	(–∞, –1)	–1	(–1; 1)	1	(1, +∞)
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

8. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и ее точки перегиба. Вычислим $y'' = 4x/\left(x^2+1\right)^2$. Определим критические точки второго рода: $x = 0$ ($y'' = 0$). Исследуем знак y'' при переходе через критические точки второго рода (табл.3).

Таблица 3

Функция	Интервал		
	(–∞, 0)	0	(0, +∞)
y''	–	0	+
y	$\frown$	Точка перегиба (0; 0)	$\smile$

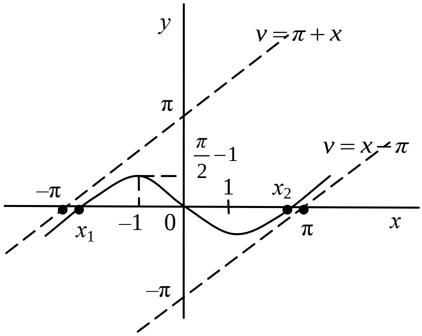

Рис. 19

Таким образом, график кривой выпуклый при $x \in (-\infty, 0)$ и вогнутый при $x \in (0, +\infty)$. Точка (0; 0) является точкой перегиба.

9. Эскиз графика представлен на рис.19.

Пример 52. Исследовать функцию и построить график $y = \ln \sin x$.

Решение. 1. Область определения функции – множество решений неравенства $\sin x > 0$, т.е. объединение интервалов $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots \cup (2n\pi, (2n+1)\pi), \ldots (n \in Z)$.

2. Точки пересечения графика функции с осью *Oy* отсутствуют. Точки пересечения графика с осью *Ox* (из решения уравнения $\ln \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1$) $x = \pi/2 + 2\pi n$ ($n \in Z$), т.е. график функции пересекает ось *Ox* в множестве точек указанного вида.

3. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, функция общего вида.

4. Функция периодическая, так как функция $\sin x$ периодическая с периодом 2π. Следовательно, можно исследовать и строить график на промежутке $[0, 2\pi]$, а затем распространить его влево и вправо согласно периоду.

5. Вертикальные асимптоты кривой: $x = 0$ и $x = \pi$, так как $\lim\limits_{x \to +0} \ln \sin x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi - 0} \ln \sin x = -\infty$.

6. Наклонных асимптот нет, так как функция периодическая.

7. Производная $y' = \operatorname{ctg} x$. Критические точки $x = \pi/2$ ($y' = 0$). Перемена знака y' при переходе через критическую точку представлена в табл.4. Вычислим $y_{\max}(\pi/2) = 0$.

Таблица 4

Функция	Интервал		
	(0; π/2)	π/2	(π/2; π)
y'	+	0	–
y	↗		↘

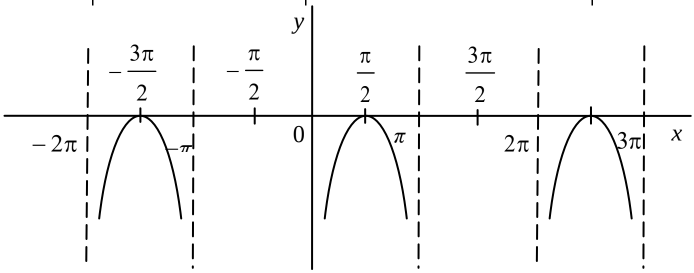

Рис. 20

8. Вторая производная $y'' = -1/\sin^2 x$. График функции выпуклый, так как $y'' < 0$ и $\forall x \in (0, \pi)$.

9. Эскиз графика представлен на рис.20.

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функции:

1. $y = (x+2)^2 (x-1)^3$.

2. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

3. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

4. $y = e^{\frac{1}{2+x}}$.

5. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Неопределенный интеграл

Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке X, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Все первообразные функции $f(x)$ определяются выражением вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных. Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$. Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ *– подынтегральным выражением,* x *– переменной интегрирования,* $\int$ - знаком интеграла. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Операция отыскания неопределенного интеграла называется *интегрированием*. Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию.

Основные свойства неопределенного интеграла следующие:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a = const.
5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

По таблице производных составим таблицу основных интегралов, которую впоследствии несколько дополним:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (m = const, $m \neq -1$).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a = const, $a > 0$, $a \neq 1$).

7. $\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Рассмотрим ряд примеров непосредственного интегрирования, которое заключается в алгебраических преобразованиях подынтегральной функции, применении свойств 1-5 и которое в конечном итоге позволяет при нахождении исходных интегралов использовать таблицу основных интегралов.

Пример 53. Найти интеграл $I = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$.

Решение.

Возводя подынтегральную функцию в квадрат и используя свойства 4 и 5, получим

$$I = \int\left(x + 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)dx =$$

$$= \int x dx + 2\int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C\,.$$

Пример 54. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Решение.

В числителе подынтегральной функции прибавим и вычтем x^2, а в знаменателе вынесем за скобки общий множитель x^2 и поделим числитель на знаменатель. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1 + x^2} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Пример 55. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение.

Известно, что $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$. Тогда

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C\,.$$

Пример 56. Найти интеграл $\int 2^{2x}\cdot e^x dx$.

Решение.

По одному из свойств степенной функции подынтегральную функцию можно записать следующим образом:

$$\int 2^{2x}\cdot e^x dx=\int (4\cdot e)^x dx=\frac{(4\cdot e)^x}{\ln(4\cdot e)}+C=\frac{4^x e^x}{\ln 4+1}+C\,.$$

Пример 57. Показать, что $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C\,.$

Решение.

Правильность результата интегрирования всегда можно проверить по свойству 1. Полагая $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C,$ найдем

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+m}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\frac{\sqrt{x^2+m}+x}{\sqrt{x^2+m}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+m}}\,.$$

Этот интеграл часто называют «длинным логарифмом».

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t – некоторая новая переменная; $\varphi(t)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$ и обратную функцию $t = \psi(x)$. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\,;$$

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной (подведение новой переменной под знак дифференциала) при такой подстановке

$$\int f\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx=\int f(u)du\,.$$

Пример 58. Найти интеграл $\int (3x+5)^{15}\,dx.$

Решение.

$$\int (3x+5)^{15}dx = \left\{\begin{array}{c} 3x+5=t, \\ 3dx=dt, dx=\dfrac{1}{3}dt \end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int t^{15}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}t^{16} + C = \frac{1}{48}(3x+5)^{16} + C.$$

Второй случай замены переменной в неопределенном интеграле, являющийся одним из ключевых приемов интегрирования, называется *подведением функции под знак дифференциала*. Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ может быть записан в виде произведения $d[f(x)] = f'(x)dx$.

Пример 59. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \left\{\begin{array}{l} d(1+x^2) = 2xdx, \\ xdx = \dfrac{1}{2}d(1+x^2) \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \{1+x^2 = u\} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Знак модуля опущен, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, положительно для любого x.

Пример 60. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} xdx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} xdx}{1+x^2} = \left\{ d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}dx \right\} =$$

$$= \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \{\operatorname{arctg} x = u\} = \int udu = \frac{u^2}{2} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

Пример 60. Найти интеграл $\int e^{\cos x}\cdot \sin xdx$.

Решение.

Так как $d(\cos x) = -\sin x dx$, преобразуем подынтегральное выражение и получим табличный интеграл 7:

$$\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin dx = -\int \mathrm{e}^{\cos x}(-\sin x dx) = -\int \mathrm{e}^{\cos x} d(\cos x) = \{\cos x = t\} =$$

$$-\int e^t dt = -e^t + C = -\mathrm{e}^{\cos x} + C.$$

Пример 61. Найти интеграл $\int \mathrm{tg} x dx$.

Решение.

В подынтегральной функции заменим $\mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x$ и с учетом $d(\cos x) = -\sin x dx,$ получим табличный интеграл 3:

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \{\cos x = t\} =$$

$$-\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Пример 62. Найти интеграл $\int \mathrm{ctg}\, x dx$.

Решение.

В подынтегральной функции заменим $\mathrm{ctg}\, x = \cos x / \sin x,$ $\cos x dx = d(\sin x)$. Тогда

$$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \{\sin x = t\} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Пример 63. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение.

Запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Внеся коэффициент $1/a$ под знак дифференциала и учитывая, что $d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}dx,$ получим табличный интеграл 4:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=$$

$$=\{\frac{x}{a}=t\}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Пример 64. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

Решение.
Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}};\ d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}dx.$$

Тогда получим табличный интеграл 5:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\{\frac{x}{a}=t\}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Пример 65. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ $(a\neq 0)$.

Решение.
Подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a}-\int \frac{dx}{x+a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{d(x-a)}{x-a}-\int \frac{d(x+a)}{x+a}\right) = \{x-a=t_1, x+a=t_2\} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dt_1}{t_1}-\int \frac{dt_2}{t_2}\right) = \frac{1}{2a}\left(\ln|t_1|-\ln|t_2|\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Отметим, что этот интеграл часто для краткости называют «высоким логарифмом».

Интегралами, найденными в примерах 60 – 65, дополним таблицу основных интегралов:

16. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

17. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$.

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0)$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C \ (m \neq 0)$.

Следует обратить особое внимание на последние четыре интеграла, так как они имеют частое применение. Например,

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right| + C.$$

Интегрирование по частям. Пусть функции $u = u(x)$ и $\nu = \nu(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $\nu'(x)$. Тогда справедлива следующая формула *интегрирования по частям*:

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du.$$

Данная формула применяется для интегрирования двух основных классов функций. К первому классу относятся интегралы вида

$$\int P_n(x)e^{ax}dx;\ \int P_n(x)\sin bxdx;\ \int P_n(x)\cos bxdx,$$

где $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ – многочлен степени n.

В этих интегралах следует положить $u = P_n(x)$, за $d\nu$ следует принять соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin bxdx$, $\cos bxdx$.

Ко второму классу относятся интегралы вида

$$\int P_n(x)\log_a xdx;\ \int P_n(x)\operatorname{arcctg} xdx;\ \int P_n(x)\arcsin xdx;$$

$$\int P_n(x)\arccos xdx;\ \int P_n(x)\operatorname{arctg} xdx.$$

В этих интегралах за u следует принять трансцендентную функцию соответственно $\log_a x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т.п., а за $d\nu$ – выражение $P_n(x)dx$, тогда интеграл в правой части не будет содержать трансцендентной функции.

Пример 66. Найти интеграл $\int xe^{-x}dx$.

Решение.

$$\int xe^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x,\ du = dx, \\ d\nu = e^{-x}dx,\ \nu = -e^{-x} \end{matrix}\right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C.$$

Пример 67. Найти интеграл $\int(x^2+1)\sin x dx$.

Решение.

$$\int(x^2+1)\sin x dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2+1,\, du=2xdx, \\ \nu=\sin x dx,\ \nu=-\cos x \end{matrix}\right\}=$$

$$=-(x^2+1)\cos x+2\int x\cos x dx=\left\{\begin{matrix} u=x,\ \ du=dx, \\ d\nu=\cos x dx,\ \ \nu=\sin x \end{matrix}\right\}=$$

$$=-(x^2+1)\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin x dx\right)=$$

$$-(x^2+1)\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C=$$

$$=-(x^2+1)\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Как видно из этого примера, формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз.

Пример 68. Найти интеграл $\int\sqrt[3]{x^2}\ln x dx$.

Решение.

Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int\sqrt[3]{x^2}\ln dx=\left\{u=\ln x,\, du=\frac{dx}{x},\, d\nu=x^{\frac{2}{3}}dx,\ \ \nu=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right\}=$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\ln x-\int\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{x}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{3}{5}\int x^{\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\left(\ln x-\frac{3}{5}\right)+C.$$

Пример 69. Найти интеграл $\int\mathrm{arctg}x dx$.

Решение.

$$\int\mathrm{arctg}x dx=\left\{\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}x,\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ d\nu=dx,\ \ \nu=x \end{matrix}\right\}=x\,\mathrm{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=$$

$$=x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2}=x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$= x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Формула интегрирования по частям применяется и в случаях, когда интеграл сводится к самому себе.

Пример 70. Найти интеграл $I = \int \mathrm{e}^x \sin x dx$.

Решение.

$$I = \int \mathrm{e}^x \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x, \;\; du = \mathrm{e}^x dx, \\ dv = \sin x dx, \;\; v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \mathrm{e}^x, du = \mathrm{e}^x dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right\} = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x dx.$$

Применив дважды формулу интегрирования по частям, получили в правой части снова исходный интеграл

$$I = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I.$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом I . Из этого уравнения находим

$$2I = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x;$$

$$I = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C .$$

В окончательном результате к найденной первообразной функции прибавлена произвольная постоянная.

Определенный интеграл

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a, b]$. если существует конечный предел интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ при $\max\{\Delta x_k\} \to 0$, $n \to \infty$, не зависящий ни от способа разбиения промежутка, ни от выбора точек c_k (здесь x_k ($k = 0,1,2,...n$) – абсциссы точек, с помощью которых осуществляется разбиение промежутка $[a, b]$ на малые элементы, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$).

Указанный предел, если он существует, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_k\}\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом промежутке.

Определенный интеграл для непрерывной функции вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) ,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Для определенного интеграла выполняются следующие свойства:

1. Если $a = b$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. Для любых чисел a, b, c имеет место равенство, называемое свойством аддитивности для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, (k = const).

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

6. Если при $a \le x \le b$ функция $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

7. Если при $a \le x \le b$ функции $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

9. Если при $a \le x \le b$ $|f(x)| \le k$ ($k = \text{const}$), то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k(b-a)$.

10. Если m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

11. Для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ справедлива теорема о среднем: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, где $a \le c \le b$. Величина $f(c)$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

12. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz$.

13. Если $f(x)$ – четная функция на $[-a, a]$ ($f(-x) = f(x)$, при условии $-a \le x \le a$), то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

14. Если $f(x)$ – нечетная функция на $[-a, a]$ ($f(-x) = f(x)$, при условии $-a \le x \le a$), то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Для вычисления определенного интеграла применяются формула *интегрирования по частям*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

и формула *замены переменной*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, причем все функции, входящие под знаки интегралов, должны быть непрерывны на соответствующих отрезках.

Пример 71. Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.
В соответствии с формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 72. Вычислить интеграл $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\, dx$.

Решение.
Согласно формуле интегрирования по частям

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{vmatrix} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1.$$

Пример 73. Вычислить интеграл $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.
Применим формулу замены переменной

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d(x^2) = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1-x^2 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0 = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$

Пример 74. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x\, dx$.

Решение.
Так как $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$ – четная функция, то

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, d(\sin x) = 2\frac{\sin^3 x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 75. Вычислить $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение.

Функция $f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ – нечетная, а пределы интегрирования симметричны, значит данный интеграл равен нулю по свойству 14.

Вычисление площади плоской фигуры в прямоугольных координатах

Геометрически определенный интеграл от функции $f(x)$ при $f(x) \geq 0$ ($a < b$) равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.21):

$$\int\limits_a^b y\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = S . \qquad (8.1)$$

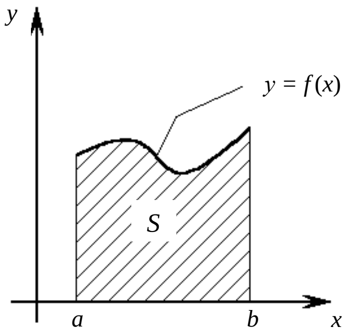

Рис.21

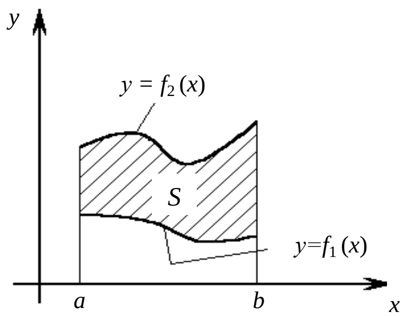

Рис.22

Из геометрического смысла определенного интеграла для областей I типа, задаваемых соотношениями $a \leq x \leq b$ и $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ (рис.22), имеет место формула для вычисления площади, в которой $y = f_2(x)$ –

уравнение верхней границы, а $y = f_1(x)$ – уравнение нижней границы области:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример 76. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = x^3$, $y = 8$.

Решение.

При $y = 8$ имеем (рис. 23): $8 = x^3$, $x = 2$. Тогда

$$S = \int_0^2 (8 - x^3)\,dx = \left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 16 - 4 = 12 \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Решение.

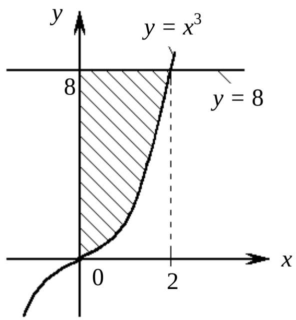

Рис.23

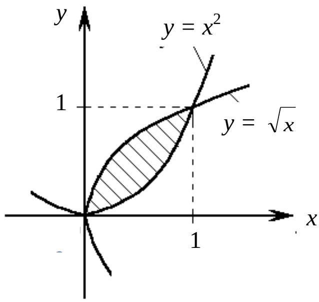

Рис.24

Найдем точку пересечения кривых (рис. 24):

$$\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; & x_2 = 1; \\ y_1 = 0; & y_2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Области II типа задаются неравенствами: $c \le y \le d$, $g_1(y) \le x \le g_2(y)$. Площадь такой области (рис.25)

$$S = \int_c^d \left[g_2(y) - g_1(y) \right] dy .$$

Пример 78. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 1$ и прямой $y = x - 1$ (рис.26).

Решение.

Найдем точки пересечения параболы с осями координат: $y^2 = 1$ и $y = \pm 1$ при $x = 0$; $x = ½$ при $y = 0$. Парабола симметрична относительно оси Ox, и ее вершина находится в точке $(–½, 0)$. Найдем точки пересечения прямой и параболы:

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1; \\ y = x - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1; \\ y^2 = 2(y+1)x + 1; \end{cases}$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0; \;\; y_1 = 3,\; y_2 = -1;\; x_1 = 4,\; x_2 = 0 .$$

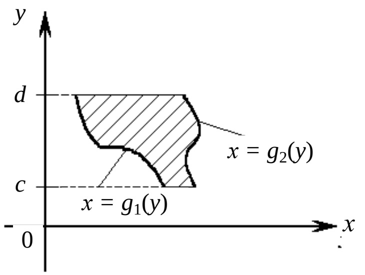

Рис.25

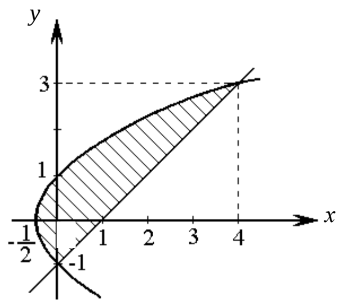

Рис.26

Возьмем в качестве $x = g_1(y) = \dfrac{y^2 - 1}{2}$ и $x = g_2(y) = y + 1$, тогда

$$S = \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \frac{y^2-1}{2} \right) dy = \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{27}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.).}$$

Задания для самостоятельной работы
Найти интегралы:

1. $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx$.

2. $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$.

3. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

4. $\int\left(\operatorname{ch} x-\cos x\right)dx$.

5. $\int\left(2\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x\right)^2 dx$.

6. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

7. $\int\left(3\cdot 2^x+\frac{10}{1+x^2}\right)dx$.

8. $\int\frac{\sin 2x dx}{\cos x}$.

9 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

10 $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

11. $\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

12. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.

13. $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

14. $\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

15. $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx$.

16. $\int\frac{dx}{5+16x^2}$.

17. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$.

18. $\int\frac{2^{5\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

19. $\int\frac{4e^{2x}dx}{5-3e^{2x}}$

20. $\int\frac{(2+x)dx}{\sqrt{x-1}}$.

23. $\int x\sqrt{x+7}dx$.

24. $\int\frac{dx}{e^x+1}$.

25. $\int\frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$.

26. $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

27. $\int x^2\cos 2x dx$.

28. $\int x\ln(1+x)dx$.

29. $\int (x-1)\arccos x dx$.

30. $\int \mathrm{arctg}\, 2x dx$.

31. $\int x^3 \mathrm{arctg} x dx$.

32. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x} dx$.

33. $\int \sqrt{x}\ln(x+2)dx$.

34. $\int e^x\cos 2x dx$.

35. $\int x^3 e^{-3x^2} dx$.

35. $\int \sin\ln x dx$.

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_1^2 (x^2-2x+3)dx$.

2. $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx$.

3. $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

4. $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

6. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

7. $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

8. $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1}$.

9. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$.

10. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

11. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x\, dx$.

12. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

13. $\int\limits_0^1 \mathrm{ch} x\, dx$.

14. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$.

16. $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$.

17. $\int\limits_0^1 x^3 e^{2x} dx$.

18. $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\, dx$.

19. $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

21. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$

22. $\int\limits_0^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

23. $\int\limits_1^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

24. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

25. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x^2}$.

26. $\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

27. $y = 2x$, $y = x$, $y = x^3$.

28. $y = -2x$, $y = 3x - x^2$.

29. $y + x = 2$, $y = x^2$.

30. $y = x + 4$, $y = 4x + x^2$.

31. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

32. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$.

33. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$.

34. $x = e^2$, $x = e$, $y = \ln x$, $y = 0$.

35.11.$xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобраз. учреждений / Ш. А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 2018. – 463 с.

2. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. пособ. для 10-11 кл. общеобраз. организаций / А. Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 2019. – 384 с.

5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / под ред. М.И. Сканави. – М.: АСТ, 2017. – 608 с.

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 105 с.

2. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 104 с.

3. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 102 с.

4. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.

5. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.

6. Краткий курс аналитической геометрии: Учебник/ Ефимов Н. В., 14-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 240 с.

Дополнительный

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие/ 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2008. – 495 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ, Астрель, 2006. – 509 с.

3.Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – 4-е изд. – М.: Оникс, 2011. – 416 с.

4. Дорофеев Г.В. Математика для поступающих в ВУЗы: Пособие. — 4-е изд., стереотип. — М.: Дрофа. 2001. — 672 с.

5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с.

6. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 464 с.

7. Математический практикум. Часть 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, О.Е. Карпухина, М.А. Керейчук, В.А.Семенов, Т.С. Обручева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2013. – 102 с.

8. Математический практикум. Часть 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения: Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, М.А. Зацепин, В.В. Тарабан, Т.С. Обручева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 114 с.

9. Математический практикум. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, М.А. Зацепин, В.А. Семенов, С.Е. Мансурова. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 162 с.

СОДЕРЖАНИЕ