

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Методические указания к самостоятельной работе
для студентов всех направлений бакалавриата*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 517.1+517.2(073)

МАТЕМАТИКА. Частные производные и их применение. Краткие интегралы и их приложения: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Е.Г. Булдакова, Л.И. Гончар, И.А. Лебедев*. СПб, 2019. 36 с.

Методические указания содержат задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки бакалавриата по указанным разделам курса математики третьего семестра.

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент проф. *С.И. Перегудин* (Санкт-Петербургский государственный университет)

Введение

Задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов всех направлений бакалавриата содержат по 30 вариантов для каждого из двух разделов курса математики третьего семестра: частные производные и их применение, кратные интегралы и их приложения.

Задания предназначены для использования во время практических занятий при разборе соответствующих разделов и подготовке к написанию контрольных и самостоятельных работ, сдаче коллоквиумов и экзаменов.

Эти индивидуальные задания разбираются и решаются самостоятельно каждым студентом во время практических занятий с использованием лекционного материала при непосредственной консультационной поддержке преподавателя. Разбор и решение этих заданий позволяет студентам уяснить и освоить основные понятия и методы указанных разделов курса математики.

Такая индивидуальная самостоятельная работа позволяет продуктивно использовать аудиторное время практических занятий для каждого студента.

Варианты самостоятельных работ по теме « Частные производные и их применение».

Вариант 1

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \text{ где } x = u \cdot \sin v, \quad y = u \cdot \cos v.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;1)$ по направлению к точке $N(0;2;1)$ для функции трех переменных $w = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 3x\sqrt{y} - 5y^2 - \frac{3}{2}x^2 + y$.

Вариант 2

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ где } y = x^2 + \frac{1}{x}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = (xy)^2$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(2;4;4)$ по направлению к точке $N(1;3;3)$ для функции трех переменных $w = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = -2y\sqrt{x} + \frac{1}{3}y^3 + xy$.

Вариант 3

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x \ln \frac{y}{x}, \text{ где } x = ve^{-u}, \quad y = ue^v.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;1)$ по направлению к точке $N(0;-1;0)$ для функции трех переменных $w = -2 \ln(5 + x^2) - 4xyz$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = -3y\sqrt{x} + 3y^2 + 3x - 3y$.

Вариант 4

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = (x - y)e^{x-2y}, \text{ где } x = 2t, \quad y = t \cdot \ln t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = x^3 + y^3 - 3xyz$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(-2; \frac{1}{2}; 1)$ по направлению к точке $N(-1; -\frac{1}{2}; 0)$ для функции трех переменных

$$w = x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = -3y\sqrt{x} + 3y^2 + 3x - 3y$.

Вариант 5

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = 2^{x-y} + xe^{-x}, \text{ где } y = 2x \ln x.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = z^3 + 3x^2z - y^3$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(2;2;4)$ по направлению к точке $N(1;1;3)$ для функции трех переменных

$$w = xz^2 - \sqrt{x^3y}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 2x^3 - 6xy + y^3$.

Вариант 6

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x^2y - ye^{y-x}, \text{ где } y = u \cdot v, \quad x = u^2v + u.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = 3z^2 - x^2z + yx.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;1)$ по направлению к точке $N(2;2;4)$ для функции трех переменных

$$w = xy - y\sqrt{x}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 - 3xy^2 + 18y$.

Вариант 7

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = 2y + xe^{x^2-y}, \text{ где } y = t^2 - 3t, \quad x = e^{-t}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \sqrt{x^2 - y} + x \ln z.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;1)$ по направлению к точке $N(-1;0;-1)$ для функции трех переменных $w = \ln(1 + x^2) - 4xyz$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + 9xy + y^3$.

Вариант 8

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = y \ln y + x^2 2^{x-y}, \text{ где } y = x^2 - \frac{1}{x}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \sin x \cdot e^{-y} + z^2 y.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(2;2;-1)$ по направлению к точке $N(-1;0;0)$ для функции трех переменных

$$w = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^2 y - 2xy + 3y^2$.

Вариант 9

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x\sqrt{y} - ye^{y-2x}, \text{ где } y = u \ln u, \quad x = \frac{u}{v}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x\sqrt{y} + z \ln y.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(-1;0;1)$ по направлению к точке $N(1;1;0)$ для функции трех переменных

$$w = 4xz + y^2 - \sqrt{z}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = e^x(x - y^2)$.

Вариант 10

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = \frac{x}{y} + \ln x \cdot e^{-y}, \text{ где } y = te^t, \quad x = t - \ln t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = e^{-z} \cdot x + y^2x$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(3;4;1)$ по направлению к точке $N(2;2;-1)$ для функции трех переменных

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} - z.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + xy + y^2$.

Вариант 11

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xy^2 - ye^{-2y}, \text{ где } y = \ln x - x.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = x \ln z - xy^2$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(2;1;1)$ по направлению к точке $N(1;2;3)$ для функции трех переменных $w = \sqrt{x + y + 1} - 2z$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = -2xy + x^2y + 3y^2$.

Вариант 12

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = ye^{-y} + x^2 \ln(x - y), \text{ где } x = 2t, \quad y = t - \ln t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных $w = e^{x-y} + z\sqrt{x}$.

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;0)$ по направлению к точке $N(0;-1;1)$ для функции трех переменных $w = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^2 + y^2 + 3x^3y$.

Вариант 13

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xy^2 - y2^{y-x} + x, \text{ где } y = x^2 \ln x.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = e^{x-z} + x\sqrt{yz} - y.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(3;-4;0)$ по направлению к точке $N(1;-1;2)$ для функции трех переменных

$$w = (x^2 + y^2 - z)^{3/2}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = e^{x/2}(x + y^2)$.

Вариант 14

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x\sqrt{y} + y \ln(x-1), \text{ где } y = 3t-1, \quad x = t^2 \ln t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \ln(x^2 + z^2) - yz + x.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(3;0;-4)$ по направлению к точке $N(1;1;-2)$ для функции трех переменных

$$w = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 2x^3 - 3y^3 - 6xy$.

Вариант 15

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = \ln(x - y) - xe^{-y}, \text{ где } y = \ln \frac{x-1}{x}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = 2 \ln xy - z\sqrt{x}.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(2;1;1)$ по направлению к точке $N(1;0;0)$ для функции трех переменных

$$w = x + \ln(z^2 + y^2).$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 3x^3 - 2y^2 - 3xy$.

Вариант 16

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x\sqrt{x} + ye^{y-x}, \text{ где } y = ut, \quad x = u^2 - t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = xe^{-z} + y \arctg x.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;5;-2)$ по направлению к точке $N(0;4;-1)$ для функции трех переменных

$$w = x^2y - \sqrt{xy + z^2}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 - y^2 + xy$.

Вариант 17

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x \ln y - y^2 e^{-x}, \text{ где } y = \frac{x}{\ln x}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = xyz^2 - xe^{x-z}.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(0;1;1)$ по направлению к точке $N(1;0;0)$ для функции трех переменных

$$w = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = -2x^3 + y^2 - 6xy.$$

Вариант 18

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x \ln x - ye^{x-2y}, \text{ где } x = v^2 - u, \quad y = u + 2v.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = yz^2 - z \ln x.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;-1;1)$ по направлению к точке $N(1;2;3)$ для функции трех переменных

$$w = x \ln(1 + y^2) - e^{z-x}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = x^3 - 2y^2 - xy.$$

Вариант 19

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = y\sqrt{x} + xe^{-y}, \text{ где } x = \ln t, \quad y = t^2.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \operatorname{arctg}(xy) + ze^x + y.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;3;2)$ по направлению к точке $N(0;1;0)$ для функции трех переменных.

$$w = \ln(3 - x^2) + xy^2z.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = -x^3 - 3y^2 + 6xy.$$

Вариант 20

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xy^2 + ye^{2y}, \text{ где } y = x^2 \ln(x+1).$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x\sqrt{z} + \ln(x^2 - y).$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;2)$ по направлению к точке $N(0;1;1)$ для функции трех переменных

$$w = x^2y^2z - \ln(z-1).$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = -2x^3 - y^2 - 3xy.$$

Вариант 21

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xy^2 + xe^{y-x}, \text{ где } y = t \ln t, \quad x = t - \frac{1}{t}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = xe^{y-z} + xy^2 - z.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;-3;4)$ по направлению к точке $N(0;-1;2)$ для функции трех переменных

$$w = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 2x^3 + 4y^2 + 5xy$.

Вариант 22

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x \ln x - y^2 e^{y-x}, \text{ где } y = x + \frac{1}{x^2}.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \sqrt{x-z} + z^2 e^{-y}.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;2;-1)$ по направлению к точке $N(0;0;1)$ для функции трех переменных

$$w = z^2 + 2 \operatorname{arctg}(x-y).$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 - 3xy^2 + 18y$.

Вариант 23

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = y \ln(x - y) - e^{-2x}, \text{ где } y = u + v^2, \quad x = u^2 - v.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = z \ln x - y^2 z.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;1)$ по направлению к точке $N(0;3;1)$ для функции трех переменных

$$w = xyz - z^2.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 2x^3 + 4y^2 - 5xy$.

Вариант 24

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xe^{-x} + x \ln(1 + y^2), \text{ где } y = t^3, \quad x = t \cdot \ln t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x \ln z - x^2 y + e^z.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;2;1)$ по направлению к точке $N(1;3;4)$ для функции трех переменных

$$w = y\sqrt{x} - \ln z.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 - 4y^2 + 2xy$.

Вариант 25

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = y \ln x - x e^{-y}, \text{ где } y = uv, \quad x = u^2 - \ln v.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x - y^2 + zx^2.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;2;1)$ по направлению к точке $N(2;3;3)$ для функции трех переменных $w = \ln(y - x) - zy$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = 2x^3 - 5y^2 + xy$.

Вариант 26

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = y e^{-x} + \ln y, \text{ где } y = x^2 \ln(x + 1).$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x^2 - zy + z^2.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(-1;1;0)$ по направлению к точке $N(2;1;2)$ для функции трех переменных $w = xy - \ln(z + y)$.

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = -x^3 - 2y^2 + xy$.

Вариант 27

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xy^2 + ye^{2y}, \text{ где } y = x^2 \ln(x+1).$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x\sqrt{z} + \ln(x^2 - y).$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;2)$ по направлению к точке $N(0;1;1)$ для функции трех переменных

$$w = x^2 y^2 z - \ln(z-1).$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = -2x^3 - y^2 - 3xy.$$

Вариант 28

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = x\sqrt{y} - ye^{-x}, \text{ где } y = x^2 \ln x.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = xy^2 - z\sqrt{x} + e^{-y}.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;1;0)$ по направлению к точке $N(-1;-1;2)$ для функции трех переменных

$$w = xz^2 - \ln y + \sqrt{y}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = e^{-x}(x + y^2).$$

Вариант 29

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = xe^x + x\sqrt{y-x}, \text{ где } y = u + 2v; \quad x = 2v - u.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = \sqrt{x^2 = y + yz}.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;-2;4)$ по направлению к точке $N(0;-1;3)$ для функции трех переменных

$$w = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = yx^2 + y^2 - 4xy$.

Вариант 30

1. Записать цепочечное правило для сложной функции двух переменных

$$z = ye^{-2x} + x^2 \ln x, \text{ где } y = 2t - t^2; \quad x = te^t.$$

2. Найти полный дифференциал для функции трех переменных

$$w = x^2z - z^2y + y \ln y.$$

3. Найти производную по направлению в точке $M(1;0;1)$ по направлению к точке $N(2;1;-1)$ для функции трех переменных

$$w = x \ln z - x^2 \sqrt{y}.$$

4. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Варианты самостоятельных работ по теме «Кратные интегралы их приложения»

Вариант 1

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = 2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x + y^2 = 2.$$

$$S_2: y = -x^2 + 10x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^6 dx \int_{x^2-5x}^x f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - x, \quad z = 3x - 1, \quad 4x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 9, \quad z = 0.$

Вариант 2

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 9, \quad y = -3, \quad 4y^2 = -x - 3.$$

$$S_2: y = -x^2 - 10x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{6-y^2} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 + x, \quad z = 1, \quad -4x - 2y^2 = 0$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 3 - x^2 - y^2, \quad z = x^2 + y^2 - 5.$

Вариант 3

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 4, \quad y = 4, \quad 2y^2 = -x - 4.$$

$$S_2: y = -x^2 - 8x, \quad y = -2x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^1 dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - x, \quad z = x + 1, \quad -x + y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = \frac{x^2 + y^2}{5} - 4, \quad z = 1.$

Вариант 4

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 4, \quad y = 1, \quad y^2 = -x - 1.$$

$$S_2: x = -y^2 + 3y, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 4 - x, \quad z = 2 + x, \quad 4x - 2y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 5, \quad z = 4.$

Вариант 5

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = y^2 - 4y, \quad x = 2y.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad x = 1, \quad y - 3x^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 + x, \quad z = 1, \quad 4x + y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 16, \quad z = 0.$

Вариант 6

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = y^2 + 4x, \quad x = y.$$

$$S_2: y = -5, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad 4y^2 = -x - 5.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - x, \quad z = x + 1, \quad y^2 - x = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = x^2 + y^2 - 2.$

Вариант 7

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 + 10x, \quad y = 2x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 25, \quad y = -3, \quad 3y^2 = x - 5.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 - x, \quad z = 1, \quad x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2, \quad z = 2 - x^2 - y^2$.

Вариант 8

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 + 4x, \quad y = x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = -1, \quad x + y^2 = -1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^1 dx \int_{2-x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = y - 2, \quad z = -3, \quad 3y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = 1$.

Вариант 9

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = x^2 + 4x, \quad y = -x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = 1, \quad x + 2y^2 = -1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = -10 - y, \quad z = -8, \quad y + 2x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 4 + x^2 + y^2, \quad z = 5.$

Вариант 10

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 + 8x, \quad y = -2x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = 1, \quad x + 3y^2 = -1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_4^9 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 - x, \quad z = 1, \quad 4x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 5, \quad z = 4.$

Вариант 11

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 - 4x, \quad y = 2x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = -1, \quad x - 3y^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1 - y, \quad z = 2, \quad x^2 + y = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 6, \quad z = -2.$

Вариант 12

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 + 4, \quad y = -x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 9, \quad y = -3, \quad x - 2y^2 = 3.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^2 dx \int_{2-x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - x, \quad z = 2x, \quad x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = 2.$

Вариант 13

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = -y^2 - 4y, \quad x = y.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = 1, \quad x - 3y^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - y, \quad z = y - 1, \quad x^2 - 2y = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 5, \quad z = -1.$

Вариант 14

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = x^2 + 7x, \quad y = x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = -1, \quad x - 3y^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^4 dx \int_{-\sqrt{-x}}^x f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1 + y, \quad z = 0, \quad y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = (x^2 + y^2)^2 - 1, \quad z = 3.$

Вариант 15

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -4, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad y^2 = -x - 5.$$

$$S_2: y = x^2 - 4x, \quad y = 2x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^2 dy \int_{2-y}^{3-y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1, \quad z = 2 + y, \quad 4y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 3 - x^2 - y^2, \quad z = -1.$

Вариант 16

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 8, \quad -2x = y^2.$$

$$S_2: y = x^2 - 6x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-9}^{-4} dx \int_{-\sqrt{-x}}^x f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1 + x, \quad z = -1, \quad 2x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 2, \quad z = 0.$

Вариант 17

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -4, \quad x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = -x - 4.$$

$$S_2: y = x^2 - 10x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^2 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 4 - y, \quad z = y + 2, \quad 2y - x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 7, \quad z = 2.$

Вариант 18

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = -3, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad y = x^2 + 3.$$

$$S_2: x = y^2 - 2y, \quad 3x = y.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^3 dx \int_{3-x}^{5-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 4 - x, \quad z = x + 2, \quad 4x = 8y^2.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 5 + x^2 + y^2, \quad z = 6.$

Вариант 19

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -2x, \quad y = x^2 + 8x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = -1, \quad x + 2y^2 = -1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{9}} dx \int_{-\sqrt{-x}}^x f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 4 - y, \quad z = 3, \quad 4y - x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 1 + \frac{x^2 + y^2}{3}, \quad z = 4.$

Вариант 20

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 9, \quad y = -3, \quad 3y^2 = -x - 3.$$

$$S_2: y = x^2 + 8x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{1-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 - y, \quad z = 3, \quad y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 3, \quad z = 7.$

Вариант 21

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 4, \quad y = -2, \quad 3y^2 = x - 2.$$

$$S_2: y = -x^2 + 9x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-2}^1 dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 + y, \quad z = 1, \quad 2y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , аограниченного поверхностями. $V: z = 5 - x^2 - y^2, \quad z = 1.$

Вариант 22

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -2x + 4, \quad 3x^2 - 4y = 0.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 81, \quad y = -9, \quad y^2 + 9 = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 + x, \quad z = 0, \quad x + 3y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 21, \quad z = 4.$

Вариант 23

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 16, \quad y = 4, \quad 3y^2 = x - 4.$$

$$S_2: y = 8x - x^2, \quad y = -3x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1 - y, \quad z = 3 + y, \quad x^2 + y = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 1, \quad z = 80$.

Вариант 24

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = 5y, \quad x^2 = 6x - y.$$

$$S_2: y^2 = 100 - x^2, \quad x = -10, \quad y = 10 + x^2.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{4-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - y, \quad z = 6 + y, \quad y + 3x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: 4z = x^2 + y^2 - 1, \quad 2z + 1 = x^2 + y^2$.

Вариант 25

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 36, \quad y = 6, \quad 2y^2 = 6 - x.$$

$$S_2: 7y = y^2 - x, \quad x = -y.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_{-1}^0 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 8 - y, \quad z = 4 + y, \quad 8y - 4x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 20, \quad z = 5.$

Вариант 26

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 9, \quad x = 3, \quad x^2 = -3 + y.$$

$$S_2: x = -y^2 + 6y, \quad x = y.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^3 dx \int_0^{(x-1)^2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 1 - x, \quad z = 2, \quad x + y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 23, \quad z = 2.$

Вариант 27

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x = y^2 - 4y, \quad x = y.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = 1, \quad x - 2y^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 + y, \quad z = 1, \quad 4y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 7, \quad z = -3.$

Вариант 28

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 16, \quad y = 4, \quad y^2 = -x - 4.$$

$$S_2: y = -x^2 - 8x, \quad y = -2x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{2-x}{2}}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 - y, \quad z = 4 + y, \quad y + x^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = \frac{x^2 + y^2}{4} - 4, \quad z = 0.$

Вариант 29

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: y = -x^2 + 4x, \quad y = x.$$

$$S_2: x^2 + y^2 = 1, \quad y = -1, \quad x - 2y^2 = 1.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^{\frac{7}{4}} dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{2-2y} f(x, y) dx.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 3 - x, \quad z = 2x, \quad x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = 2.$

Вариант 30

1. Расставить пределы двумя способами по каждой из областей, ограниченных заданными линиями.

$$S_1: x^2 + y^2 = 1, \quad y = 1, \quad x + y^2 = -1.$$

$$S_2: y = -x^2 + 7x, \quad y = x.$$

2. Поменять порядок интегрирования.

$$\int_0^5 dx \int_{-x}^{4x-x^2} f(x, y) dy.$$

3. Найти объем тела V , ограниченного поверхностями.

$$V: z = 2 - x, \quad z = 2x - 1, \quad 2x - y^2 = 0.$$

4. Найти момент инерции I_z относительно оси OZ тела V , ограниченного поверхностями. $V: z = x^2 + y^2 - 9, \quad z = 0.$

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников.-М.: Высшая школа, 2009. Ч1,2.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. Пособие для вузов. В 2 т.-М.: Интеграл-Пресс, 2009, Т.1,2.
3. *Щипачев В.С.* Высшая математика.-М.: Высшая школа, 2005.
4. Математический практикум. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Учебно-методическое пособие/А.П. Господариков и др.; Санкт-Петербургский горный институт. СПб, 2010.
5. Математический практикум. Часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье. Интегральное исчисление функции многих переменных. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: Учебно-методическое пособие/А.П. Господариков и др.; Санкт-Петербургский горный институт. СПб, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Варианты самостоятельных работ по теме « Частные производные и их применение».....	4
2. Варианты самостоятельных работ по теме «Кратные интегралы их приложения».....	19
3. Рекомендательный библиографический список.....	34

МАТЕМАТИКА

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Методические указания к самостоятельной работе
для студентов всех направлений бакалавриата*

Сост.: *Е.Г. Булдакова, Л.И. Гончар, И.А. Лебедев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
высшей математики

Ответственный за выпуск *Л.И. Гончар*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 10.09.2019. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 2,0. Усл.кр.-отг. 2,0. Уч.-изд.л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 777. С 276.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2