Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет**

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА DESMOS

Методические указания к самостоятельной работе

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020**

УДК 517.38 (073)

МАТЕМАТИКА. Геометрические приложения определенного интеграла с использованием графического редактора DESMOS: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *О.В. Сильванович.* СПб, 2020. 32 с.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего образования. Приведено пять заданий для самостоятельной работы (каждое из которых содержит 30 вариантов). Для каждого из предлагаемых заданий дан подробный пример его решения с использованием компьютера.

Методические указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентов в соответствии с рабочими программами всех специальностей и направлений подготовки бакалавров по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент проф. *С.Н. Перегудин* (СПбГУ)

1. ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания содержат 5 заданий для самостоятельного решения (каждое из заданий содержит 30 вариантов) по теме: «Геометрические приложения определённого интеграла»: вычисление площадей и длин кривых, заданных в декартовой и полярных системах координат. Некоторые из этих кривых являются достаточно сложными для построения, поэтому в каждом задании подробно разобран пример решения задания с помощью графического редактора DESMOS Graphing Calculator, позволяющего не только построить графики кривых, но и проверить правильность вычисления определённого интеграла. Отчёт о выполнении РГЗ должен содержать как графики функций, так и проверку вычисления значения определённого интеграла. Для создания отчёта студент может воспользоваться как представленными рабочими листами в DESMOS, так и создать собственные в любом другом доступном графическом калькуляторе или системе компьютерной алгебры (Mathematica, MathCad и др.).

1.1.Методические указания по выполнению и оформлению расчётно-графических заданий (РГЗ)

Общие указания. Выполнение заданий РГЗ проходит в том порядке, в котором они представлены, и каждое из заданий является необходимым для выполнения работы в целом. Решение каждого из заданий должно содержать графики функций (которые могут быть построены как «от руки», так и с помощью графического редактора) и скрин-шот проверки значения определённого интеграла с помощью DESMOS или любой другой доступной системы компьютерной алгебры.

Отчёт о выполнении РГЗ должен содержать несколько пунктов:

- формулировка задания РГЗ;
- графики функций;
- подробное вычисление определённого интеграла;

-скрин-шот значения определённого интеграла, вычисленного с помощью компьютера.

Требования к оформлению отчёта о выполнении РГЗ:

- отчёт оформляется в письменной форме;
- графики функций, вычисление определённого интеграла оформляются либо «от руки», либо с помощью компьютера;
- все рисунки последовательно нумеруются и подписываются;
- титульный лист работы оформляется по образцу, представленному в Приложении;
- оформленный отчёт сдаётся на проверку преподавателю в соответствии с графиком проверки.

Все необходимые теоретические сведения можно найти в [1,с.81-90].

1.2. Замечание (о графическом редакторе DESMOS Graphing Calculator)

Выбор Desmos Graphing Calculator обусловлен несколькими причинами:

- доступность: DESMOS Graphing Calculator - это облачный сервис, в основе которого лежит технология HTML5. Данная программа работает в режиме on-line на любом компьютере, планшете или смартфоне. После авторизации можно сохранять построенные графики, апплеты и делиться ими в виде ссылки или картинки;
- простой интерфейс;
- работа с функциями, заданными:
  - ✓ аналитически (в декартовой и полярной системах координат);
  - ✓ таблично;
- возможность создания графических анимаций (динамических моделей кривых), анимированных цветных рисунков;
- большое количество встроенных математических функций и операций:
  - ✓ тригонометрические функции;
  - ✓ статистические функции;
  - ✓ основные математические операции.

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание №1. Вычислить площадь области, ограниченной линиями:

Номер варианта	
1	$y=\frac{3}{x};\ y=4e^{x};\ y=3;\ y=4$
2	$x=\sqrt{36-y^2};\ x=6-\sqrt{36-y^2}$.
3	$x^2+y^2=72;6y=-x^2\ \ (y\le 0)$
4	$x=8-y^2;\ x=-2y$
5	$y=\frac{3}{x};\ y=8e^{x};\ y=3;\ y=8$
6	$y=\frac{\sqrt{x}}{2};\ y=\frac{1}{2x};\ x=16$
7	$x=5-y^2;\ \ x=-4y$
8	$x^2+y^2=12;\ -\sqrt{6}y=x^2\ (y\le 0)$
9	$y=\sqrt{12-x^2};\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2};x=0;x\ge 0$
10	$y=\frac{3}{2}\sqrt{x};\ y=\frac{3}{2x};\ x=9$
11	$y=\sqrt{24-x^2};\ 2\sqrt{3}y=x^2;\ x=0(x\ge 0)$
12	$y=\sin x;\ y=\cos x;\ x=0(x\ge 0)$
13	$y=20-x^2;\ y=-8x$
14	$y=\sqrt{18-x^2};\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$
15	$y=32-x^2;\ y=-4x$
16	$y=\frac{2}{x};\ y=5e^{x};\ y=2;\ y=5$

17	$x^2+y^2=36$; $3\sqrt{2}\cdot y=x^2$ $(y\geq 0)$
18	$y=3\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{x}$; $x=4$
19	$y=6-\sqrt{36-x^2}$; $y=\sqrt{36-x^2}$; $x=0(x\geq 0)$
20	$y=\frac{25}{4}-x^2$; $y=x-\frac{5}{2}$
21	$y=\sqrt{x}$; $y=\frac{1}{x}$; $x=16$
22	$y=\frac{2}{x}$; $y=7e^x$; $y=2$; $y=7$
23	$x=27-y^2$; $x=-6y$
24	$x=\sqrt{72-y^2}$; $6x=y^2$; $y=0(y\geq 0)$
25	$y=\sqrt{6-x^2}$; $y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$
26	$y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{2x}$; $x=4$
27	$y=\sin x$; $y=\cos x$; $x=0(x\leq 0)$
28	$y=\frac{1}{x}$; $y=6e^x$; $y=1$; $y=6$
29	$y=3\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{x}$; $x=9$
30	$y=9-x^2$; $y=-8x$

Пример решения задания №1

Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y=11-x^2$; $y=-10x$.

Решение:

Найдем точки пересечения кривых, решив уравнение $-x^2+10x+11=0$. Его корни $x_1=-1, x_2=11$, тогда $y_1=10, y_2=-110$. Сделаем рисунок, на котором отметим точки пересечения кривых $(-1;10)$, $(11;-110)$ и заштрихуем искомую площадь фигуры, которую мы ищем (рис.1).

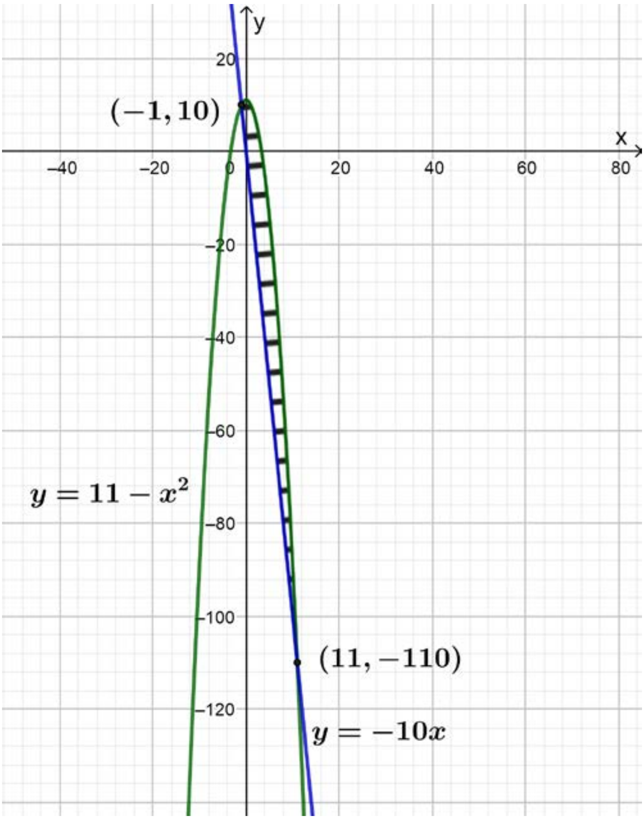

Рис.1 Графики функций $y=11-x^2$; $y=-10x$

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=11-x^2$ и $y=-10x$, вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$S=\int_{-1}^{11}(11-x^2-(-10x))dx=\int_{-1}^{11}(11-x^2+10x)dx=$$

$$=\left(11x-\frac{x^3}{3}+10\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{11}=$$

$$=121+11-\frac{1331}{3}-\frac{1}{3}+5\cdot(121-1)=132-444+600=288.$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера(рис.2 https://www.desmos.com/calculator/ip2yylsv6e).

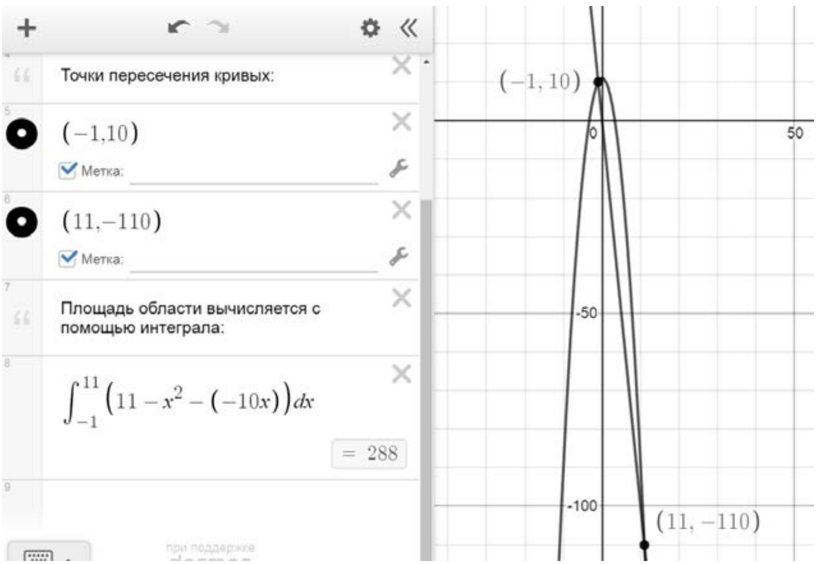

Рис. 2. Вычисление площади области, ограниченной линиями

$$y=11-x^2;\ y=-10x$$

Задание №2. Вычислить площадь области, ограниченной линиями, заданными параметрическими уравнениями:

Номер варианта	
1	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x = 2\ (x \ge 2)$
2	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$; $y = 2\left(y \ge 2\right)$
3	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$; $(0 \le t \le 8\pi)$; $y = 4\ (y \ge 4)$
4	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$; $x = 2\ \ (x \ge 2)$
5	$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$; $y = 3\ \ (y \ge 3)$
6	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 4\pi)$; $y = 3(y \ge 3)$
7	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$; $x = 6\sqrt{3}\ (x \ge 6\sqrt{3})$
8	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$; $y = \sqrt{3}(y \ge \sqrt{3})$
9	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$; $(0 \le t \le 6\pi)$; $y = 3(y \ge 3)$
10	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x = 4(x \ge 4)$

11	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}; \quad y = 3(y \ge 3)$
12	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le 2\pi); \quad y = 9(y \ge 9)$
13	$\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; \ x = 4(x \ge 4)$
14	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}; \quad y = 4(y \ge 4)$
15	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases} (0 \le t \le 12\pi); \quad y = 6(y \ge 6)$
16	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; \ x = 3\sqrt{3}(x \ge 3\sqrt{3})$
17	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}; \quad y = 2\sqrt{3}(y \ge 2\sqrt{3})$
18	$\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le 20\pi); \quad y = 15(y \ge 15)$
19	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}; \ x = 1(x \ge 1)$
20	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}; \quad y = 4(y \ge 4)$
21	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi); \quad y = 1(y \ge 1)$

22	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$; $x = 1 (x \geq 1)$
23	$\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$; $y = 2 (y \geq 2)$
24	$\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$; $(0 \leq t \leq 16\pi)$; $y = 12 (y \geq 12)$
25	$\begin{cases} x = 24\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$; $x = 9\sqrt{3} (x \geq 9\sqrt{3})$
26	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$; $y = 4\sqrt{3} (y \geq 4\sqrt{3})$
27	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$; $(0 \leq t \leq 4\pi)$; $y = 2 (y \geq 2)$
28	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x = 2 (x \geq 2)$
29	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$; $y = 5 (y \geq 5)$
30	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$; $(0 \leq t \leq 8\pi)$; $y = 3 (y \geq 3)$

Пример решения задания №2

Вычислить площадь области, ограниченной линиями::

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \quad y = 6 (y \geq 6), \quad 0 \leq t \leq 4\pi .$$

Решение:

Графиком функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; \left(0 \le t \le 4\pi\right)$$

являются две арки циклоиды [4,с.38]; уравнение прямой $y = 6$ ($y \ge 6$ задаёт полуплоскость). Изобразим рисунок, на котором отметим данные линии и заштрихуем искомую область - см. рис.3.

Очевидно, что для вычисления площади всей фигуры, достаточно вычислить площадь области, ограниченную одной аркой циклоиды и прямой $y = 6$ и умножить её на 2. Для этого необходимо найти точки пересечения первой арки циклоиды и прямой $y = 6$:

$$4(1 - \cos t) = 6,\ (0 \le t \le 2\pi),$$

$$\cos t = -\frac{1}{2}, t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

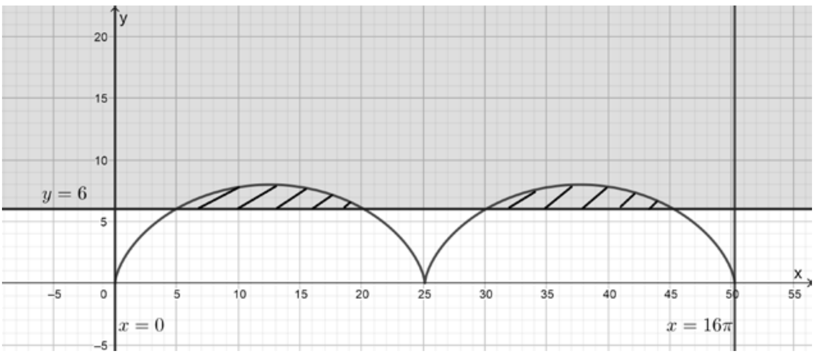

Рис.3.Область, ограниченная 2-мя арками циклоиды и полуплоскостью $y \ge 6$ при $0 \le x \le 16\pi$.

При найденных значениях параметров $t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$ получаем точки пересечения:

$$\begin{cases} x = 4\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{8\pi}{3} - 4\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}9 \\ y = 4(1-\cos t) = 4\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 6 \end{cases} -$$

точка $A\left(\dfrac{8\pi}{3} - 4\dfrac{\sqrt{3}}{2};6\right)$;

$$\begin{cases} x = 4\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{16\pi}{3} + 4\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 20{,}2 \\ y = 4(1-\cos t) = 4\left(1-\cos\dfrac{4\pi}{3}\right) = 4\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 6 \end{cases} -$$

точка $B\left(\dfrac{16\pi}{3} + 4\dfrac{\sqrt{3}}{2};6\right)$ и отметим их на графике - см. рис.4.

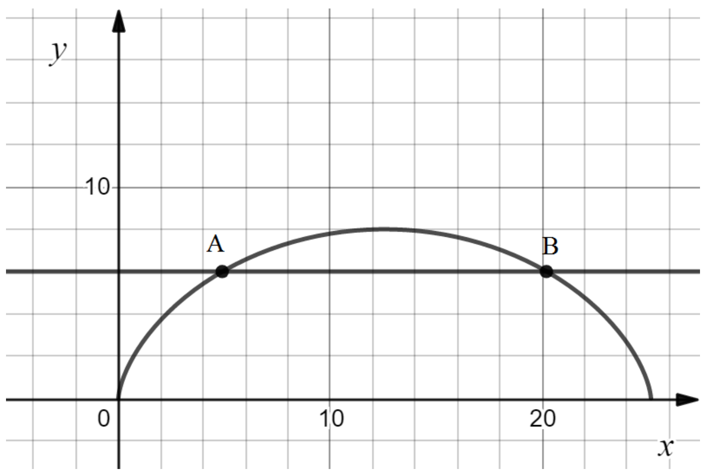

Рис.4. Область, ограниченная первой аркой циклоиды и прямой y=6

Площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \quad (\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3})$$

вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$S_1 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 4(1\text{-}\mathrm{cost}) \cdot (4(t - \sin t))' dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 4(1\text{-}\mathrm{cost}) \cdot 4(1 - \cos t) dt =$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 16(1\text{-}\mathrm{cost})^2 dt = 16 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1\text{-}2\mathrm{cost} + \cos^2 t) dt =$$

$$= 16 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(1\text{-}2\mathrm{cost} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 16\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} =$$

$$= 16\left(\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{8\pi}{3}}{4} - \frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{4}\right) =$$

$$= 16\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 16\left(\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 112{,}6.$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера - см.рис.5 (https://www.desmos.com/calculator/yvuln0argf).

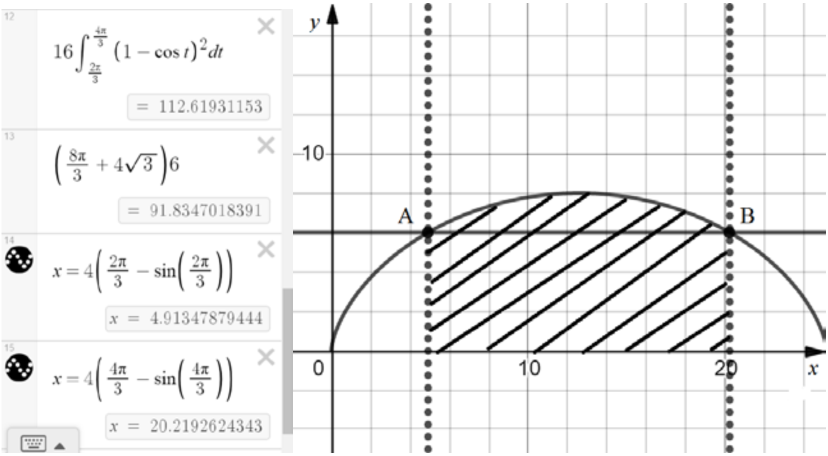

Рис.5. Вычисление площади области, ограниченной одной аркой циклоиды и прямыми $x=4\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $x=4\left(\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

Далее необходимо отнять площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой y=6, снизу осью Ox, а справа и слева - прямыми $x=\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x=\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть:

$$S_2=\left(\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot 6=$$

$$=\left(\frac{8\pi}{3}+8\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 6=\left(\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)\cdot 6\approx 91{,}8.$$

Окончательно площадь заданной фигуры будет равна:

$$2S=2(S_1-S_2)\approx 2(112{,}6-91{,}8)=41{,}6\,.$$

Задание №3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат.

Номер варианта	
1	$r = 4\cos 3\theta$
2	$r = 3\cos 2\theta$
3	$r = \sqrt{3}\cos\theta; r = \cos\theta; (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
4	$r = 4\sin 3\theta$
5	$r = 2\sin\theta; r = 2\sqrt{3}\sin\theta; (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
6	$r = 2\sin 3\theta$
7	$r = 3\sin 3\theta$
8	$r = 3\cos 3\theta$
9	$r = \cos\theta; r = \sqrt{2}\cos\theta; (\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
10	$r = \sin\theta; r = \sqrt{2}\sin\theta; (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
11	$r = 6\cos 3\theta$
12	$r = 6\cos 2\theta$
13	$r = \sqrt{3}\cos\theta; r = \cos\theta; (0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$
14	$r = \sqrt{2}\cos\theta; r = 2\cos\theta; (\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3})$
15	$r = \cos\theta; \quad r = 2;$
16	$r = \sin\theta; r = 2\sin\theta; (\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
17	$r = 2\sin 3\theta$
18	$r = 3\cos 2\theta$
19	$r = 4\sin 2\theta$

20	$r=\frac{3}{2}\sin\theta;\ \ r=\frac{5}{2}\sin\theta;(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$
21	$r=\frac{3}{2}\cos\theta; r=\frac{5}{2}\cos\theta;(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$
22	$r=2\cos 3\theta$
23	$r=4\cos 2\theta$
24	$r=2\cos\theta; r=4\cos\theta;(0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$
25	$r=4\sin\theta; r=2\sin\theta;(0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$
26	$r=2\sin 4\theta$
27	$r=2\cos 4\theta$
28	$r=\sin 3\theta$
29	$r=2\cos\theta; r=4;$
30	$r=3\cos 3\theta$

Пример решения задания №3

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат:

$$r=2\sin\theta; r=4\sin\theta\ .$$

Решение:

Изобразим рисунок, на котором отметим заданные кривые - это две окружности с центрами в точках (0;1) и (0;2) и радиусами 1 и 2 соответственно; $\theta\in[0,\pi]$ (иначе полярный радиус $r<0$) и заштрихуем область, площадь которой необходимо вычислить - см. рис.6. Площадь фигуры, ограниченной этими кривыми, вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left((4\sin\theta)^2-(2\sin\theta)^2\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\theta d\theta=6\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=$$

$$=6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=3\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=3\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big\|_0^{\pi}=$$

$$=3\left(\pi-\frac{\sin(2\pi)}{2}+\frac{\sin 0}{2}\right)=3\pi.$$

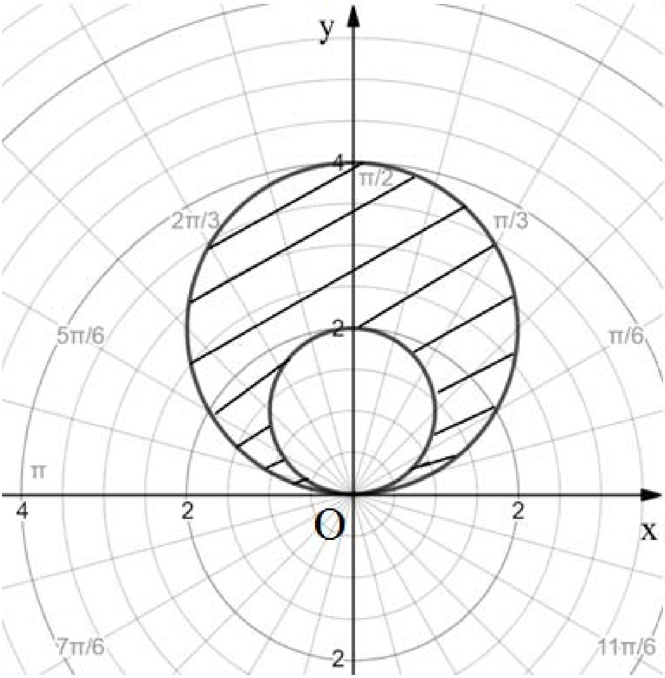

Рис.6.Область, ограниченная кривыми $r=2\sin\theta$ и $r=4\sin\theta$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера - см.рис.7 (https://www.desmos.com/calculator/14oixap4cs).

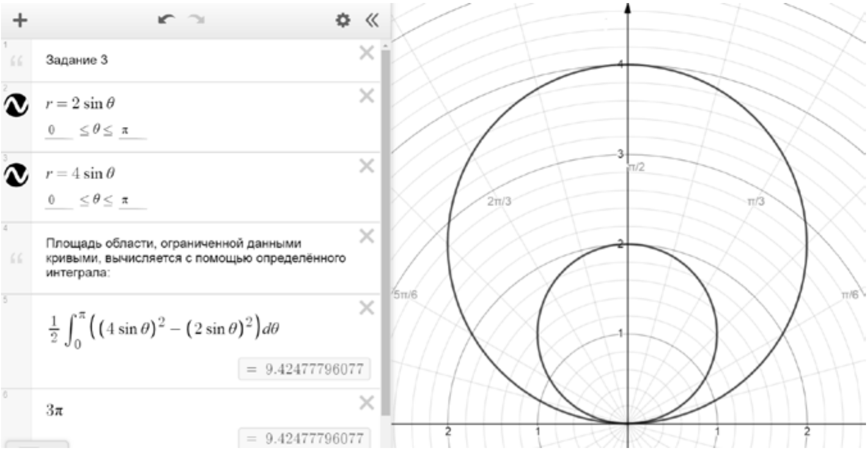

Рис.7. Вычисление площади области, ограниченной кривыми
$r = 2\sin\theta$ и $r = 4\sin\theta$

Замечание.

1. В условии задания №3 в некоторых вариантах встречается такая кривая, как *полярная роза* (краткую информацию о свойствах которой можно найти в [4,с.30]). При её построении необходимо предварительно найти область значений θ, для которых $r \geq 0$. По умолчанию многие графические программы (например Desmos, Wolfram Mathematica) изображают полярные кривые обобщённо, при условии, что полярный радиус может быть отрицательным (https://www.desmos.com/calculator/fjlffcuejx).

2. В случае, если область ограничена окружностью, заданной в полярных координатах, необходимо привести её полярное уравнение к уравнению в декартовых координатах и определить её центр и радиус.

Задание №4. Найти длину кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Номер варианта	
1	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
2	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
3	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$
4	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
5	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
6	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$
7	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
8	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}; (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3})$
9	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$
10	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; (\frac{\pi}{2} \le t \le \pi)$

11	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$
12	$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{6})$
13	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3})$
14	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$
15	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; (\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4})$
16	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$
17	$\begin{cases} x = 5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
18	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$
19	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le \pi)$
20	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}; (0 \le t \le 2\pi)$
21	$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$
22	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; (0 \le t \le 2\pi)$

23	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$
24	$\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$
25	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases};(0 \le t \le \pi)$
26	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$
27	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{3})$
28	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases};(\dfrac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi)$
29	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$
30	$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases};(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$

Замечание.

В условии задания №4 встречаются кривые: кардиоида [4,с.13], астроида [4,с.22] и циклоида [4,с.38].

Пример решения задания №4

Вычислить длину кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le \frac{\pi}{2}).$$

Решение:

Графиком функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; (0 \le t \le 2\pi)$$

является астроида [4, с.22] - см. рис.8.

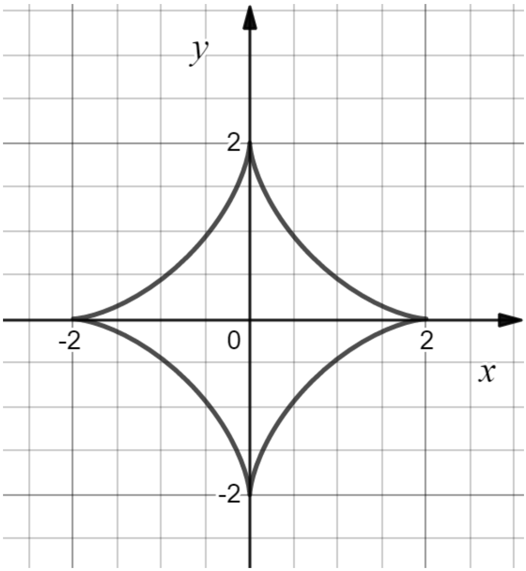

Рис.8. Астроида

Для того, чтобы посчитать длину её участка при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (который отмечен пунктирной линией на рис.9), необходимо вычислить определённый интеграл:

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\left(2\cos^3 t\right)'\right)^2 + \left(\left(2\sin^3 t\right)'\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(2\cdot 3\cdot \cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2 + \left(2\cdot 3\cdot \sin^2 t\cdot \cos t\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot 3\sqrt{\left(\cos^4 t\cdot \sin^2 t + \sin^4 t\cdot \cos^2 t\right)}dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot \sin t dt =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

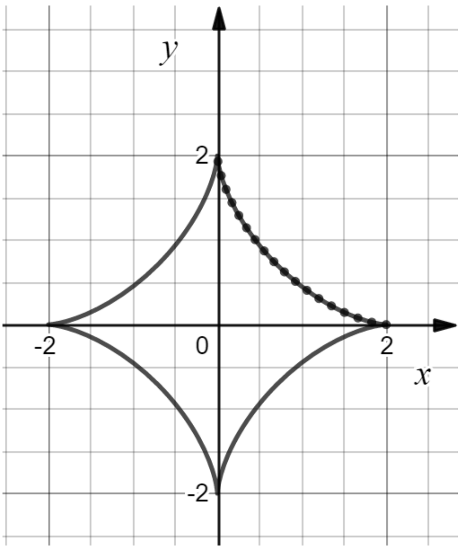

Рис.9. Участок астроиды при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

(отмечен пунктирной линией)

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера - см.рис.10 (https://www.desmos.com/calculator/byjr8ko0ge).

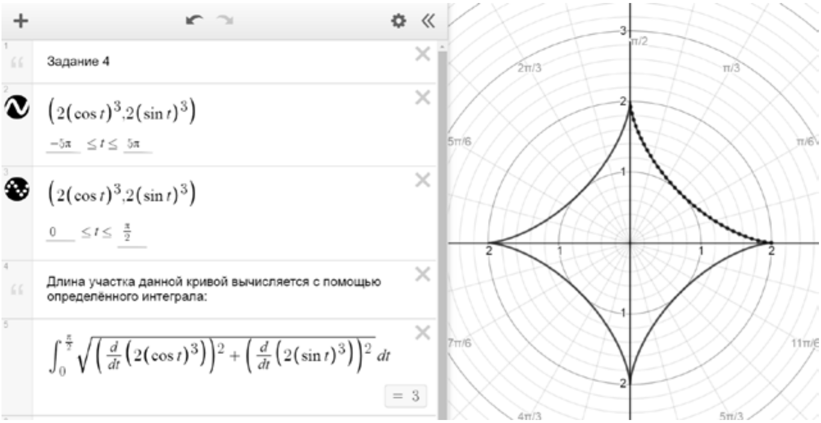

Рис.10. Вычисление длины участка астроиды при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Задание №5. Найти длину кривой, заданной в полярной системе координат.

Номер варианта		Номер варианта	
1	$r = 2e^{\frac{\theta}{4}} \quad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$	2	$r = 2\theta \quad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$
3	$r = \sqrt{2}e^{\frac{\theta}{3}} \quad (0 \le \theta \le \frac{5\pi}{2})$	4	$r = 4\theta \quad (0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2})$
5	$r = e^{\frac{\theta}{2}} \quad (\frac{\pi}{3} \le \theta \le 3\pi)$	6	$r = 3\theta \quad (\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{4\pi}{3})$
7	$r = e^{\frac{\theta}{4}} \quad (\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{8\pi}{3})$	8	$r = 4\theta \quad (\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{3})$

9	$r=\frac{1}{3}e^{\frac{3}{4}} \quad (0\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$	10	$r=\frac{2}{3}\theta \quad (0\le\theta\le\pi)$
11	$r=\sqrt{3}e^{\theta} \quad (\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3})$	12	$r=\sqrt{2}\theta \quad (0\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$
13	$r=2e^{\frac{\theta}{5}} \ (\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3})$	14	$r=\frac{3}{2}\theta \quad (\frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$
15	$r=\frac{1}{4}e^{\frac{\theta}{2}} \quad (0\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$	16	$r=\sqrt{3}\theta \ (0\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$
17	$r=e^{\frac{\theta}{3}} \quad (0\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$	18	$r=2\theta \quad (\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3})$
19	$r=e^{\frac{\theta}{5}} \quad (0\le\theta\le\frac{12\pi}{5})$	20	$r=4\theta \quad (\frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$
21	$r=2e^{\frac{\theta}{7}} \quad (0\le\theta\le\frac{7\pi}{3})$	22	$r=3\theta \quad (0\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$
23	$r=2e^{\frac{\theta}{6}} \ (0\le\theta\le\frac{7\pi}{2})$	24	$r=4\theta \quad (\frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{5\pi}{3})$
25	$r=\frac{1}{2}e^{\frac{\theta}{2}} \ (0\le\theta\le\frac{7\pi}{3})$	26	$r=\frac{2}{3}\theta \quad (0\le\theta\le 2\pi)$
27	$r=e^{\frac{2\theta}{5}} \quad (\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3})$	28	$r=\sqrt{5}\theta \quad (0\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$
29	$r=e^{\frac{4\theta}{7}} \quad (0\le\theta\le\frac{7\pi}{3})$	30	$r=\frac{1}{2}\theta \quad (0\le\theta\le\frac{8\pi}{3})$

Замечание.

В условии задания №5 встречаются кривые: спираль Архимеда и логарифмическая спираль [4,с.42].

Пример решения задания №5

Вычислить длину кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = e^{\frac{\theta}{4}}$ $(0 \le \theta \le \frac{5\pi}{2})$.

Решение:

График кривой, заданной уравнением $r = e^{\frac{\theta}{4}}$ - это логарифмическая спираль - см. рис.11.

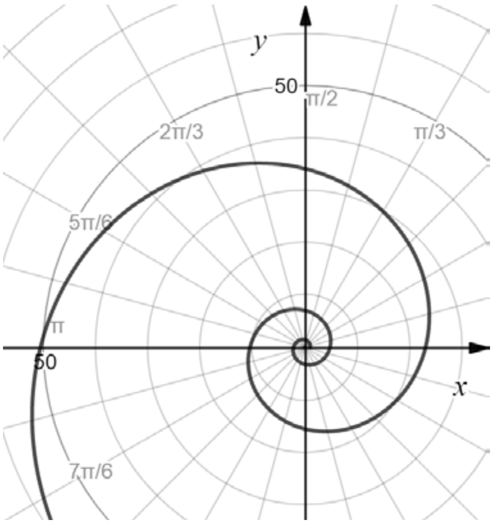

Рис.11. График кривой, заданной уравнением $r = e^{\frac{\theta}{4}}$

Сделаем рисунок, на котором отметим участок заданной кривой при $0 \le \theta \le \frac{5\pi}{2}$ пунктирной линией - см. рис.12.

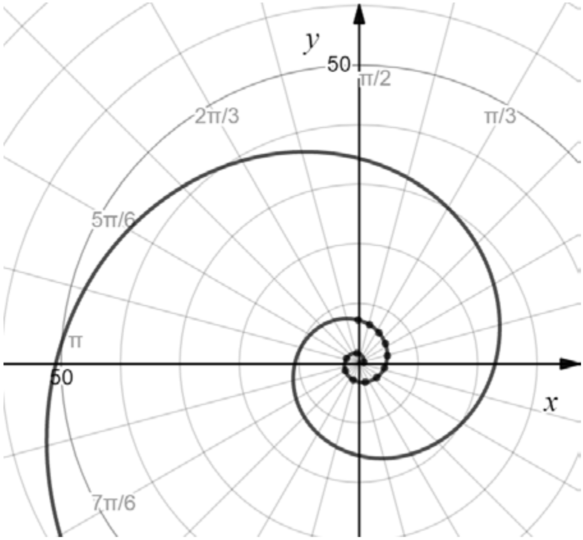

Рис.12. График кривой $r = e^{\frac{\theta}{4}}$ при

$0 \le \theta \le \dfrac{5\pi}{2}$ (отмечен пунктиром)

Длина данного участка кривой вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\left(\left(e^{\frac{\theta}{4}}\right)'\right)^2 + \left(e^{\frac{\theta}{4}}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{16} e^{\frac{\theta}{2}} + e^{\frac{\theta}{2}}}\, d\theta = \frac{\sqrt{17}}{4} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} e^{\frac{\theta}{4}} d\theta = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot 4e^{\frac{\theta}{4}} \Bigg|_0^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{17}\left(e^{\frac{5\pi}{8}} - 1\right) \approx 25{,}25.$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера - см. рис.13 (https://www.desmos.com/calculator/m58usfz1bl).

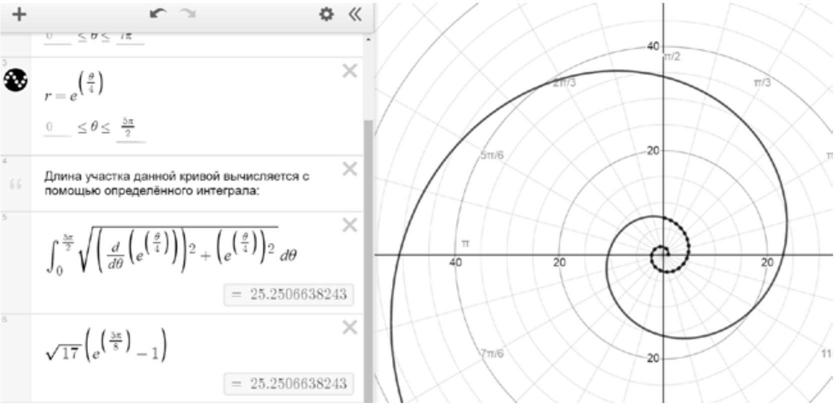

Рис.13.Вычисление длины кривой $r = e^{\frac{\theta}{4}}$ при $0 \le \theta \le \frac{5\pi}{2}$

Рекомендательный библиографический список

1.Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 102 с.

http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71689

2.Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.

http://znanium.com/catalog/product/851522

3.Краткий курс аналитической геометрии: Учебник/ Ефимов Н. В., 14-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 240 с.

http://znanium.com/catalog/product/537806

4. Сильванович О.В. Лабораторный практикум по высшей математике. Специальные кривые – СПб.: Университет ИТМО, 2018. - 61 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Титульный лист отчёта по РГЗ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

Индивидуальное домашнее задание
По дисциплине_________Математика_________________________
(Наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

Тема работы:
_Геометрические приложения определённого интеграла__

Выполнил студент гр. _____________ _________ __________
(шифр группы) (Ф.И.О.) (подпись)

Оценка:_____________ Дата:___________

Проверил:

Санкт-Петербург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

1.ВВЕДЕНИЕ... 3
1.1 Методические указания по выполнению и оформлению расчётно-графических заданий (РГЗ)... 3
1.2. Замечание (о графическом редакторе DESMOS Graphing Calculator.. 4
2.ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ…………… 5
Задание 1... 5
Задание 2... 8
Задание 3... 15
Задание 4... 21
Задание 5... 26
Рекомендательный библиографический список.............................. 30
ПРИЛОЖЕНИЕ... 31

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА DESMOS

Методические указания к самостоятельной работе

Сост. *О.В. Сильванович*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
высшей математики

Ответственный за выпуск *О.В. Сильванович*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 15.06.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,9. Усл.кр.-отт. 1,9. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 100 экз. Заказ 368.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2