Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА DESMOS

Методические указания к самостоятельной работе

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020

УДК 517.18 (073)

МАТЕМАТИКА. Кривые 2-го порядка с использованием графического редактора DESMOS: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *О.В. Сильванович,* СПб, 2020. 33 с.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего образования. Приведены основной теоретический материал по кривым 2-го порядка и задания для самостоятельной работы.

Методические указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентов в соответствии с рабочими программами всех специальностей и направлений подготовки бакалавров по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент проф. *С.Н. Перегудин (СПбГУ)*

1. ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания содержат основные теоретические сведения по кривым 2-го порядка, позволяющие самостоятельно выполнить расчётно-графическое задание (РГЗ) по этой теме. Для каждой исследуемой кривой созданы рабочие листы в графическом калькуляторе DESMOS Graphing Calculator [5], позволяющие студенту наглядно изучить основные графические свойства кривых, а также влияние параметров кривой на её график.

Особенностью предлагаемых к выполнению РГЗ является их формулировка в общем виде для некоторых исходных параметров кривой. Выбор параметров осуществляется либо преподавателем, ведущим практические занятия, либо студентом (при предварительном согласии преподавателя и соблюдении индивидуальности значений параметров кривой для каждого студента).

Для создания отчёта о выполнении РГЗ, студент может воспользоваться как представленными рабочими листами в DESMOS, так и создать собственные в любом другом доступном графическом калькуляторе или системе компьютерной алгебры (Mathematica, MathCad и др.).

1.1.Методические указания по выполнению и оформлению расчётно-графических заданий (РГЗ)

Общие указания. Выполнение заданий РГЗ проходит в том порядке, в котором они представлены, и каждое из заданий является необходимым для выполнения работы в целом.

Отчёт о выполнении РГЗ должен содержать несколько пунктов:

-формулировка общего задания РГЗ с указанием значений параметров, необходимых для выполнения работы в целом;

-последовательное краткое описание полученных результатов при выполнении соответствующих заданий;

-общий вывод о проделанной работе с формулировкой основных результатов, отражающих выполнение сформулированного общего задания РГЗ;

-список литературы и ссылки на Интернет-ресурсы, которые были использованы при выполнении РГЗ.

Требования к оформлению отчёта о выполнении РГЗ:

- отчёт оформляется в письменной форме;
- графики чертятся либо «от руки», либо с помощью компьютера (в этом случае в отчёт необходимо вставить его печатную версию);
- все рисунки последовательно нумеруются и подписываются;
- титульный лист работы оформляется по образцу, представленному в Приложении;
- оформленный отчёт сдаётся на проверку преподавателю в соответствии с графиком проверки.

1.2. Замечание (о графическом редакторе DESMOS Graphing Calculator*)*

Выбор Desmos Graphing Calculator обусловлен несколькими причинами:

- доступность: DESMOS Graphing Calculator - это облачный сервис, в основе которого лежит технология HTML5. Данная программа работает в режиме on-line на любом компьютере, планшете или смартфоне. После авторизации можно сохранять построенные графики, апплеты и делиться ими в виде ссылки или картинки;
- простой интерфейс;
- работа с функциями, заданными:
    - ✓ аналитически (в декартовой и полярной системах координат);
    - ✓ таблично;
- возможность создания графических анимаций (динамических моделей кривых), анимированных цветных рисунков;
- большое количество встроенных математических функций и операций:
    - ✓ тригонометрические функции;
    - ✓ статистические функции;
    - ✓ основные математические операции.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Эллипс: определение, основные характеристики

Определение. ***Эллипс*** - *это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.*

Для вывода канонического уравнения эллипса введём прямоугольную систему координат Oxy так, что ось Ox проходит через фокусы F_1 и F_2, симметрично относительно начала координат: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$; $M(x,y)$ - произвольная точка эллипса. Отрезки $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ называются ***фокальными радиусами*** точки $M(x,y)$. Тогда, согласно определению эллипса, получим:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a\ (2a > 2c).$$

Подставляя выражения для соответствующих фокальных радиусов точек F_1 и F_2, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возведем равенство в квадрат и раскроем при этом квадрат суммы и разности. Получим:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2.$$

Отсюда

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4xc$$

или

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + xc.$$

Еще раз возведем в квадрат равенство:

$$\underline{\underline{a^2x^2}} + 2a^2xc + \underline{a^2c^2} + a^2y^2 = \underline{a^4} + 2a^2xc + \underline{\underline{x^2c^2}}$$

и получим

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right),\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Так как $a>c>0$, то, введя новый параметр $b^2=a^2-c^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое называется ***каноническим уравнением эллипса***. График эллипса представлен на рис.1.

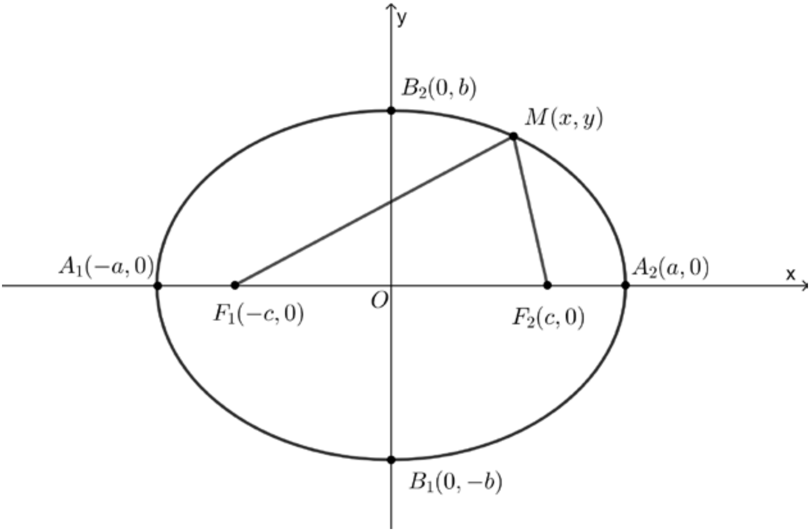

Рис.1. График эллипса, на котором отмечены его фокусы, вершины и фокальные радиусы точки $M(x,y)$

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются ***вершинами эллипса***, число a - ***большая полуось эллипса,*** число b - ***малая полуось эллипса,*** оси Ox и Oy называются ***большой и малой осями эллипса*** соответственно. Точка $O(0,0)$ - центр эллипса (очевидно, по построению и уравнению кривой, что эллипс - кривая, симметричная относительно своего центра).

Замечание 1.

1. Положение фокусов эллипса можно установить без вычисления фокусного расстояния c. Для этого необходимо циркулем, установленным в вершине $B_2(0,b)$, провести дугу радиуса a до пересечения с осью Ox в точках F_1 и F_2, т.к. $a^2 = c^2 + b^2$ - см. рис.2 и https://www.desmos.com/calculator/gvlt5opo9l.

2. Эллипс можно построить с помощью карандаша и нити [6].

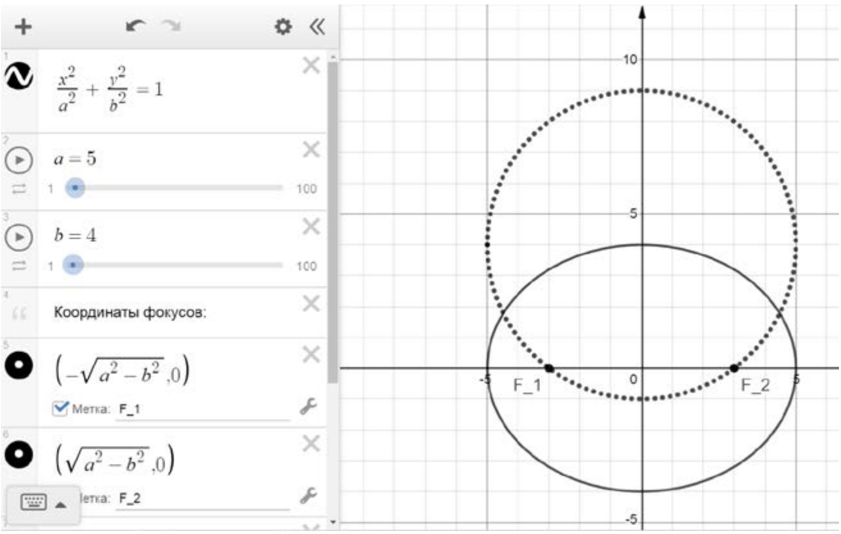

Рис.2. Нахождение фокусов эллипса геометрически

Введём новый параметр ε - ***эксцентриситет эллипса:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

и рассмотрим прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$, которые называются ***директрисами эллипса*** и <u>всегда</u> находятся вне него - см. рис.3.

Замечание 2. Величина ε характеризует отношение длин полуосей эллипса $\frac{b}{a}$, т.е. степень «сплюснутости» эллипса. Например, для окружности $c = 0$, то есть $\varepsilon = 0$. Для эллипсов, близких по форме к окружности, отношение $\frac{b}{a}$ близко к единице, а ε - малая величина.

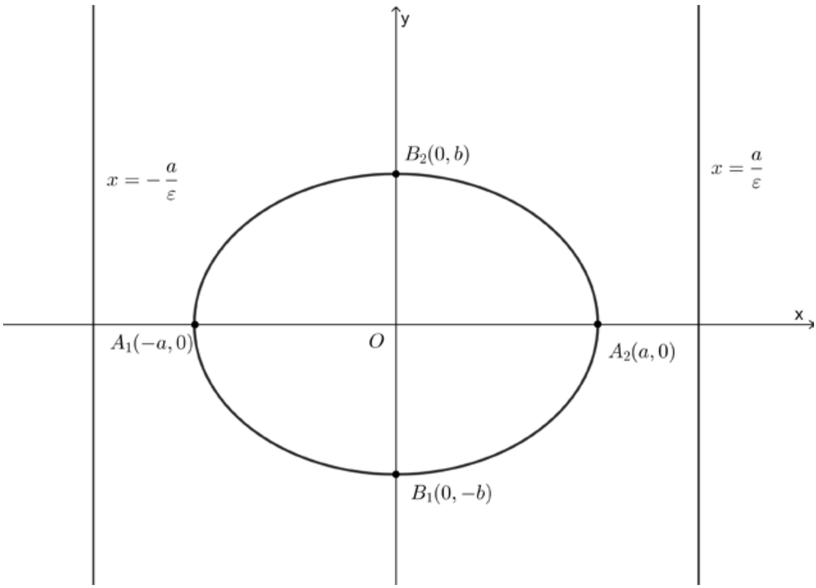

Рис.3.Эллипс и его директрисы

Фокальные радиусы точки $M(x, y)$ находятся по формулам [1, с.66-67]:

$$\left|\overrightarrow{MF_1}\right| = a + \varepsilon x, \quad \left|\overrightarrow{MF_2}\right| = a - \varepsilon x.$$

Рассмотрим отношение расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ до фокуса F_2 к расстоянию до ближайшей директрисы

$x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ - см. рис.4.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{\varepsilon(a - \varepsilon x)}{a - \varepsilon x} = \varepsilon\ .$$

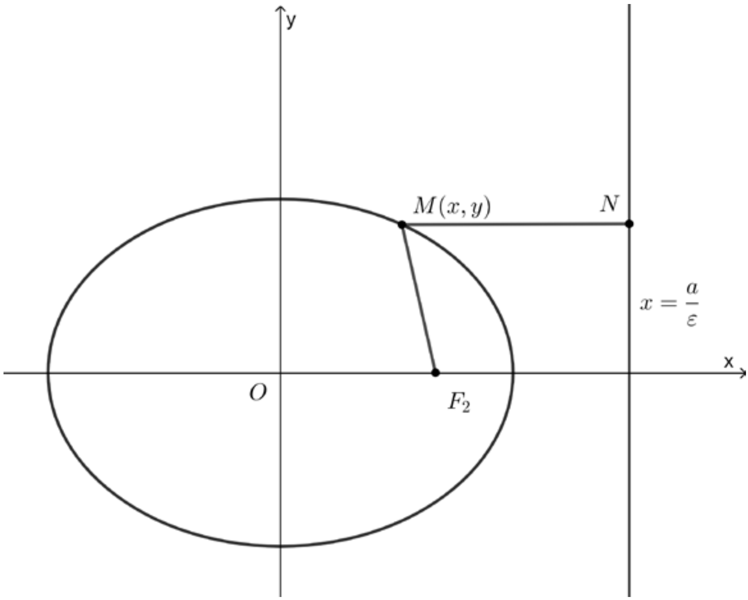

Рис.4.Эллипс и его директриса $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$

Это отношение позволяет дать ещё одно **определение эллипса**:

Эллипс *- это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение фокального расстояния к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ *- эксцентриситету эллипса.*

Замечание 3. Эллипс также может быть задан параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi].$$

2.2. Гипербола: определение, основные характеристики

Определение. ***Гипербола*** - *это геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Аналогично эллипсу, введём прямоугольную систему координат, в которой фокусы F_1 и F_2 имеют координаты: $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Отрезки $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ называются ***фокальными радиусами*** точки $M(x,y)$. Возьмём некоторое число $a > 0$. Тогда, согласно определению гиперболы, получим:

$$\left\| \overrightarrow{MF_1} \right| - \left| \overrightarrow{MF_2} \right\| = 2a \ (a < c).$$

Подставляя выражения для соответствующих фокальных радиусов точек F_1 и F_2 получим:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Сделав ряд преобразований (аналогично выводу канонического уравнения эллипса, см.[1,с.70-71]) и введя новый параметр $b^2 = c^2 - a^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

График гиперболы, заданной этим уравнением, представлен на рис.5. Точки A_1, A_2 и B_1, B_2 называются ***действительными и мнимыми вершинами гиперболы*** соответственно; параметр a - ***действительная полуось гиперболы,*** параметр b - ***мнимая полуось***

гиперболы; оси Ox и Oy называются ***действительной и мнимой осями гиперболы,*** соответственно. Точка $O(0,0)$ - центр гиперболы (очевидно, по построению и уравнению кривой, что гипербола - кривая, симметричная относительно своего центра) и имеет две симметричные относительно оси Oy ветви.

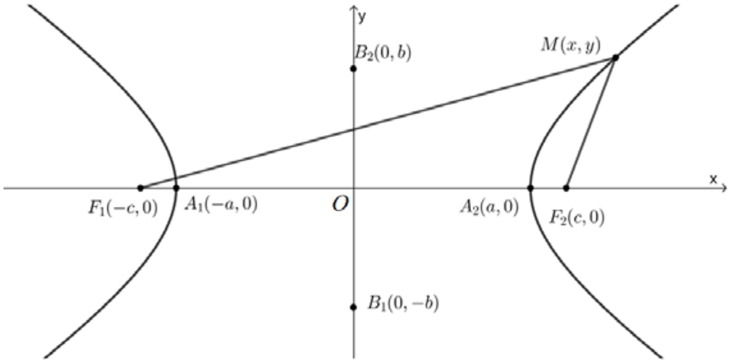

Рис.5. График гиперболы, её фокусы, вершины и фокальные радиусы точки $M(x,y)$

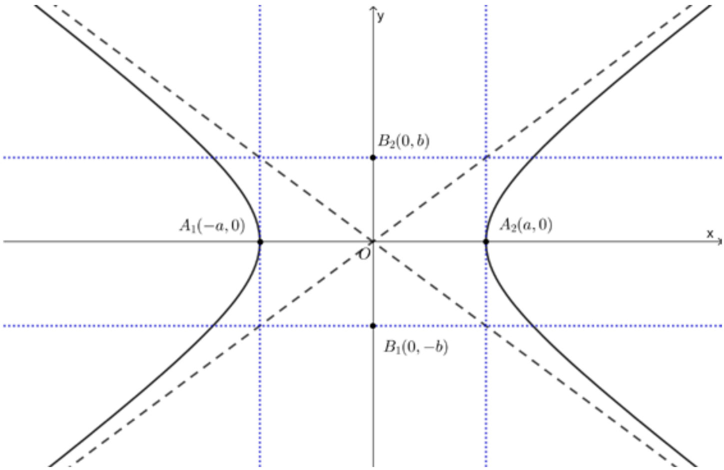

Рис.6. Гипербола и её асимптоты

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются ***асимптотами гиперболы*** и являются диагоналями прямоугольника, образованного пересечением прямых $x = a, x = -a, y = b, y = -b$ - см. рис.6.

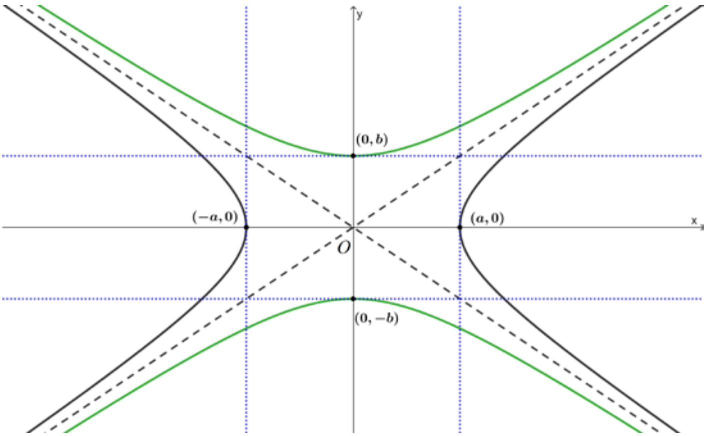

Рис.7.Графики сопряжённых гипербол

Аналогично эллипсу, введём параметр ε - ***эксцентриситет гиперболы:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

и прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$, называемые ***директрисами гиперболы,*** которые <u>всегда</u> находятся между её действительными вершинами - см. рис.8.

Рассмотрим отношение $\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$, где $\left|\overrightarrow{MF_2}\right|$ - фокальный радиус точки $M(x, y)$, лежащей в правой полуплоскости (или расстояние от произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до правого фокуса гиперболы F_2), $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ - расстояние от точки $M(x, y)$ до ближайшей директрисы - см. рис.9.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{|a - \varepsilon x|}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon x - a} = \varepsilon, \quad \frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \varepsilon.$$

Это соотношение позволяет дать ещё одно ***определение гиперболы*** (аналогично эллипсу):

Гипербола *– это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon(\varepsilon > 1)$ *- эксцентриситету гиперболы.*

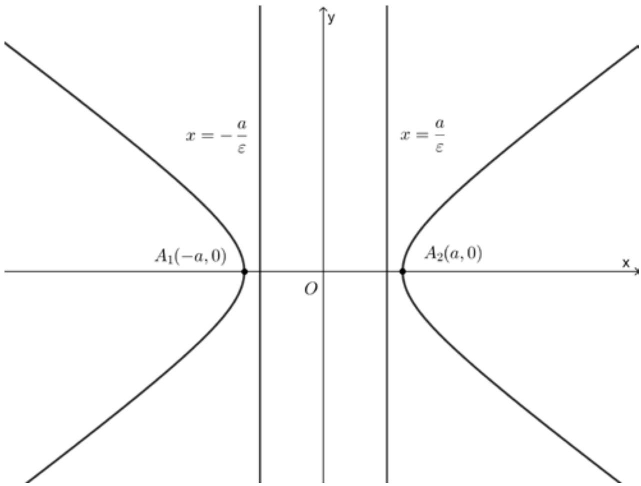

Рис.8.График гиперболы и её директрис

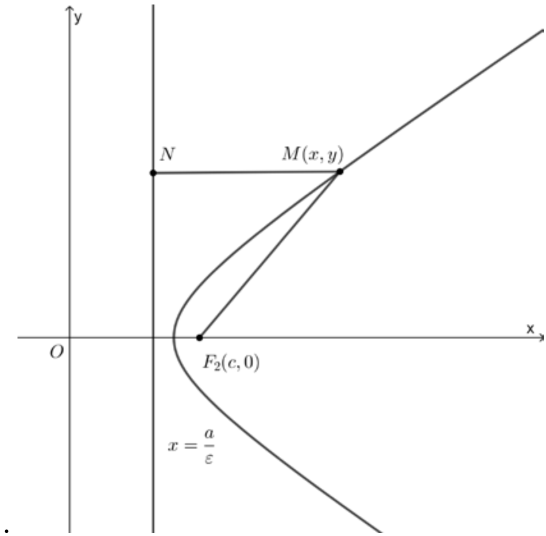

Рис.9. График правой ветви гиперболы и директрисы $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$

Замечание. Гипербола может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \mathrm{ch} t = \pm a \cdot \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \cdot \mathrm{sh} t = b \cdot \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}, t \in R.$$

2.3. Парабола: определение, основные характеристики

Определение. ***Парабола*** *– это геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой* ***фокусом****, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус и называемой* ***директрисой.***

Расстояние от фокуса параболы до её директрисы называется ***параметром параболы*** $p(p > 0)$ **.**

Аналогично выводу уравнений эллипса и гиперболы вводим прямоугольную систему координат, в которой фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, уравнение директрисы: $x = -\frac{p}{2}$ (см. рис.10). Тогда, согласно определению параболы: $\left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Откуда, сделав ряд преобразований [1, с.76-77], получаем уравнение

$$y^2 = 2px,$$

которое называется ***каноническим уравнение параболы.***

Очевидно (по построению кривой), что парабола, заданная уравнением $y^2 = 2px$ симметрична относительно оси Ox.

Рассмотрим отношение $\frac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$, где $\left|\overrightarrow{MF}\right|$ - фокальный радиус точки $M(x, y)$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ - расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы параболы - см. рис.10.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = 1.$$

Это соотношение позволяет дать ещё одно ***определение параболы*** (аналогично эллипсу и гиперболе):

Парабола *- это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon = 1$ *- эксцентриситету параболы* .

Замечание 1. Парабола может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \ t \in R.$$

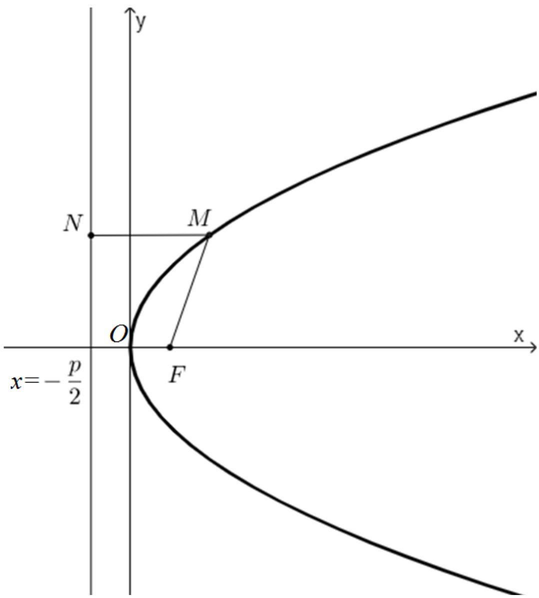

Рис.10. График параболы $y^2 = 2px$ и директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$

Замечание 2. Параболу можно построить с помощью карандаша, линейки и угольника [7], а также с помощью специального прибора - параболографа Кавальери [8].

Замечание 3. Анимированное представление эллипса, гиперболы и параболы как конических сечений можно увидеть в [9]; оптические свойства этих кривых представлены в [10], [11].

2.4. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Изучив эллипс, гиперболу и параболу как геометрическое место точек плоскости, мы можем дать их **общее определение**:

Геометрическое место точек плоскости для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) равно постоянной величине ε*, есть эллипс (*$\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$*), гипербола (*$\varepsilon : \varepsilon > 1$*) или парабола (*$\varepsilon = 1$*).*

Введём декартову систему координат Oxy и полярную систему координат $Or\theta$, координаты которых связаны уравнениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \ 0 \le \theta < 2\pi, \ r \ge 0 .$$

Зафиксируем точку O (полюс полярной системы координат $Or\theta$) в точке F - фокусе некоторой кривой 2-го порядка (для эллипса выбираем левый фокус, для гиперболы - правый). На расстоянии p от точки F проведём прямую d (директрису некоторой кривой 2-го порядка) - см. рис.11.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$:

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{r}{x+p} = \frac{r}{r\cos\theta + p} = \varepsilon ,$$

и получим

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

- ***полярное уравнение кривой 2-го порядка***, которое при $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ задаёт эллипс, при $\varepsilon : \varepsilon > 1$ - гиперболу (правую ветвь), при $\varepsilon = 1$ - параболу.

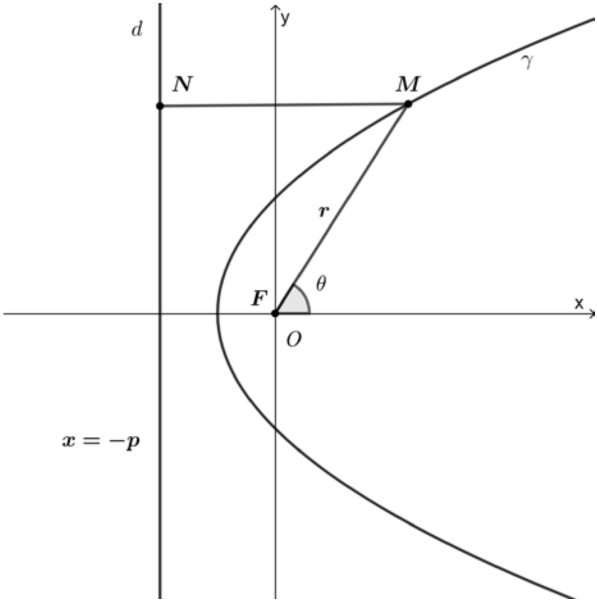

Рис.11. График кривой 2-го порядка в системе координат Oxy, совмещённой с полярной системой координат $Or\theta$

Замечание. Если точка M принадлежит левой ветви гиперболы, то $\dfrac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \dfrac{r}{-x-p} = \dfrac{r}{-r\cos\theta - p} = \varepsilon$, откуда получаем её полярное уравнение $r = \dfrac{-p\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}$. При этом заметим, что при вводе уравнения только правой ветви гиперболы, DESMOS автоматически будет строить и левую ветвь этой гиперболы.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1.Задание 1.

Исследовать каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика эллипса, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

от значений параметров a и b. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/t0kvspiy9z (рис.12) нужно изменять значения параметров, нажимая на кнопку , находящуюся слева от соответствующего параметра или вводя их с клавиатуры. Вычисление параметра c и эксцентриситета эллипса ε будет происходить автоматически по заранее введённой формуле при условии, что $a > b$ (рис. 13, 14).

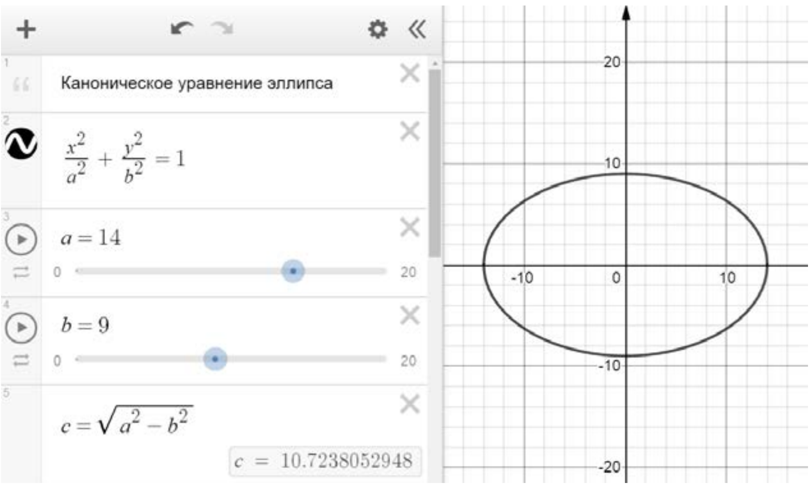

Рис.12. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение эллипса, значение параметров a и b, c)

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокусы и директрисы эллипса (рис.14).

3.Изменяя значения параметров a и b ($a > b$), сделать вывод об увиденной зависимости значения эксцентриситета ε, положения фокусов и директрис эллипса при изменении параметров a и b ($a > b$).

4. Для некоторых целых положительных значений параметров a и b (которые задаются или преподавателем, или выбираются студентом самостоятельно (совпадение значений параметров у различных студентов не допускается)) поместить в отчёт следующие графики эллипса, на которых отмечены его вершины, фокусы и директрисы:

- график эллипса при $a > b$;
- график эллипса при $a = b$;
- график эллипса при $a < b$ (обратить внимание, что этот график получается из графика эллипса при $a > b$ путём поворота координатных осей на угол $\frac{\pi}{2}$).

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра c, эксцентриситета ε, уравнения директрис (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

5.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b ($a > b$ или $a < b$) проверить выполнение определения эллипса как геометрического места точек плоскости (см.п.2, с.9). Для этого необходимо выбрать любые три точки на эллипсе, лежащие в различных четвертях плоскости Oxy и сравнить отношение $\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$ с вычисленным ранее в п.4. значением ε.

6.Записать параметрические уравнения эллипса для значений a и b, выбранных ранее в п.5., и построить график эллипса, заданного этими уравнениями (см.строка №15 рабочего листа из п.1, рис.15).

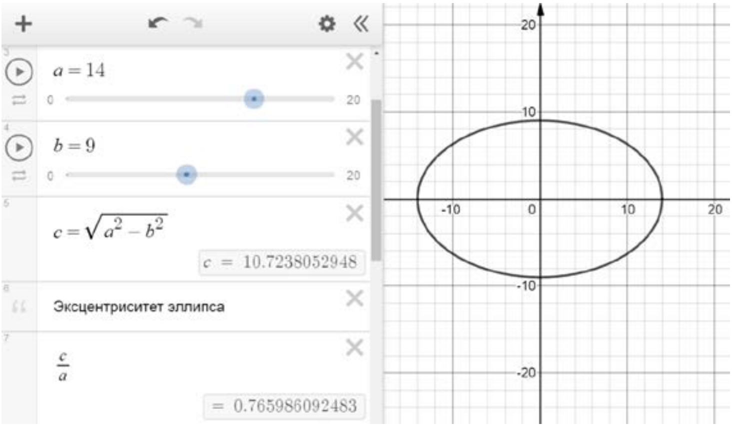

Рис.13. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение эллипса, значение эксцентриситета ε)

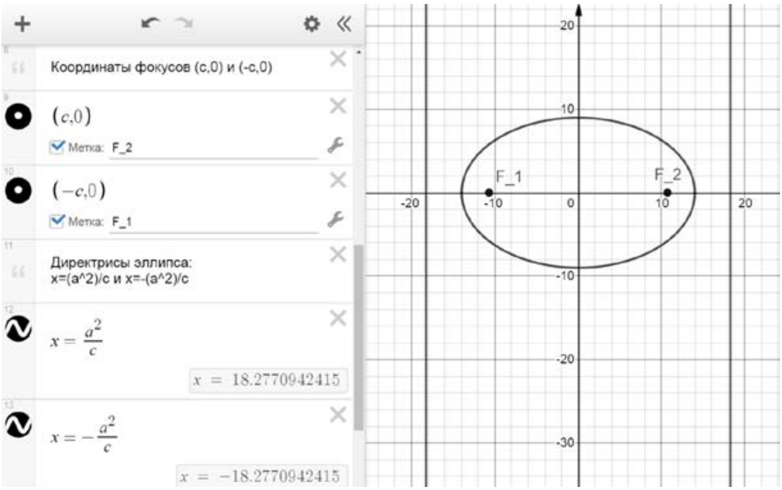

Рис.14. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение эллипса, координаты фокусов, уравнения директрис)

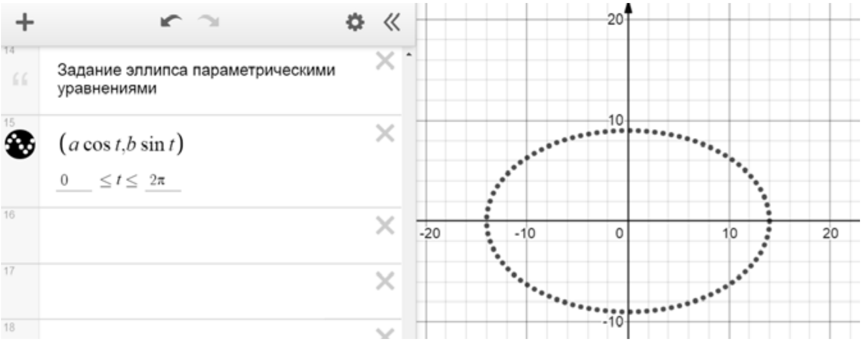

Рис.15. Рабочий лист в DESMOS
(задание эллипса параметрическими уравнениями)

Задание №2.
Исследовать каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика гиперболы, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

от значений параметров a и b. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/dbwpfmefvt (рис.16) нужно изменять значения параметров, нажимая на кнопку , находящуюся слева от соответствующего параметра или вводя их с клавиатуры. При этом подсчёт параметра c будет происходить автоматически по заранее введённой формуле. Вычисление параметра c и эксцентриситета эллипса ε будет происходить автоматически по заранее введённой формуле (рис.17).

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокусы и директрисы гиперболы (рис.18).

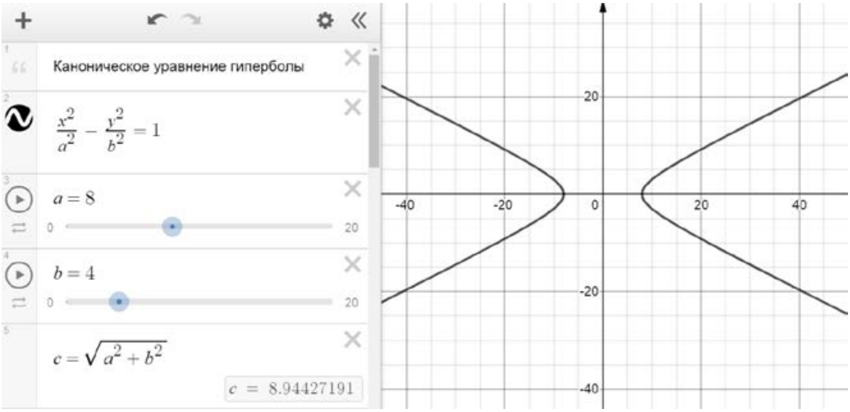

Рис.16. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение гиперболы, значение параметров *a* и *b, c*)

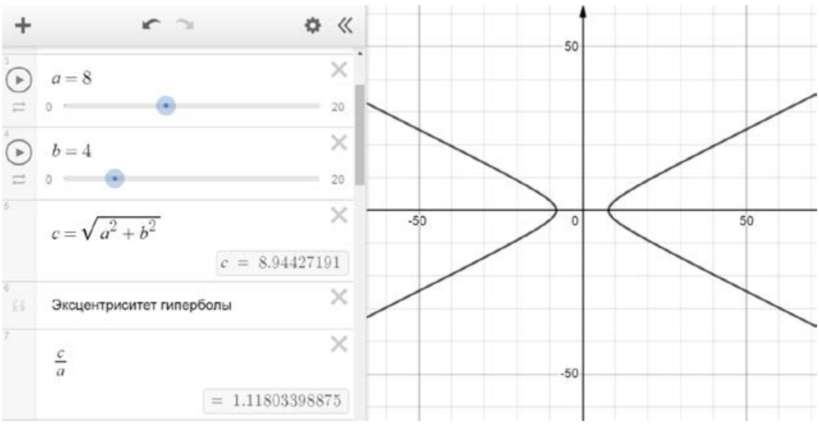

Рис.17. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение гиперболы, значение эксцентриситета ε)

3.Изменяя значения параметров *a* и *b*, сделайте вывод об увиденной зависимости значения эксцентриситета ε, положения фокусов и директрис гиперболы при изменении параметров *a* и *b*.

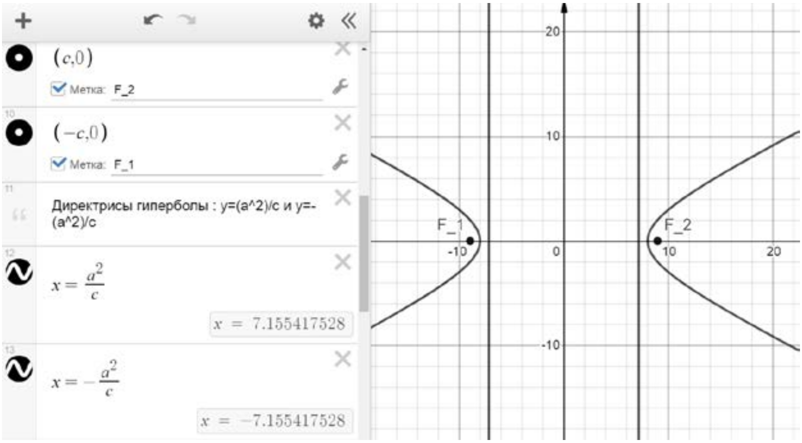

Рис.18. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение гиперболы, координаты фокусов, уравнения директрис)

4.Для выбранных ранее (см. задание №1, п.4) целых положительных значений параметров a и b поместите в отчёт следующие графики гиперболы, на которых отмечены её вершины, фокусы, директрисы и асимптоты:

- график гиперболы при $a > b$;
- график гиперболы при $a = b$;
- график гиперболы при $a < b$.

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра c, эксцентриситета ε, уравнения директрис и асимптот (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

5.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b построить сопряжённую гиперболу. Отметить на графике её фокусы, вершины и директрисы.

6.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b проверить выполнение определения гиперболы как геометрического места точек на плоскости (см.п.2, с.14). Для этого необходимо выбрать любые три точки гиперболы (лежащие в различных четвертях плоскости Oxy) и сравнить отношение $\dfrac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$ с вычисленным ранее в п.4. значением ε.

7.Записать параметрические уравнения ветвей гиперболы для значений *a* и *b*, выбранных ранее в п.4., и построить график гиперболы, заданной этими уравнениями (см. строки №15,16 рабочего листа из п.1, рис.19).

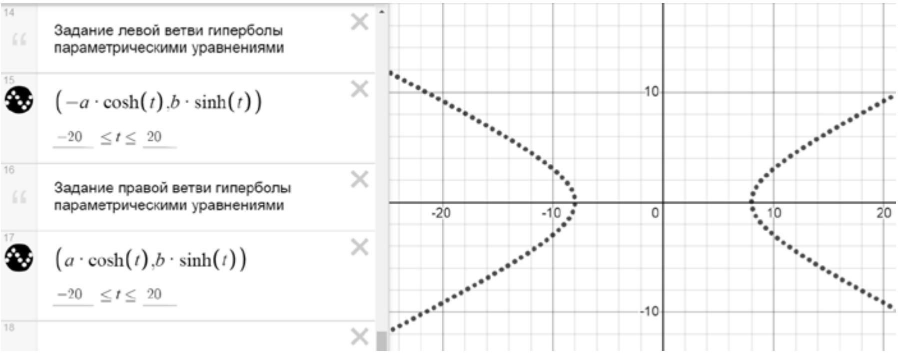

Рис.19.Рабочий лист в DESMOS
(задание гиперболы параметрическими уравнениями)

Задание №3.

Исследовать каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика параболы, заданной каноническим уравнением

$$y^2 = 2px,$$

от значений параметра *p*. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/eie0yazwfl (рис.20) нужно изменять его значение, нажимая на кнопку , находящуюся слева от него или вводя его значение с клавиатуры.

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокус и директрису параболы (рис.21).

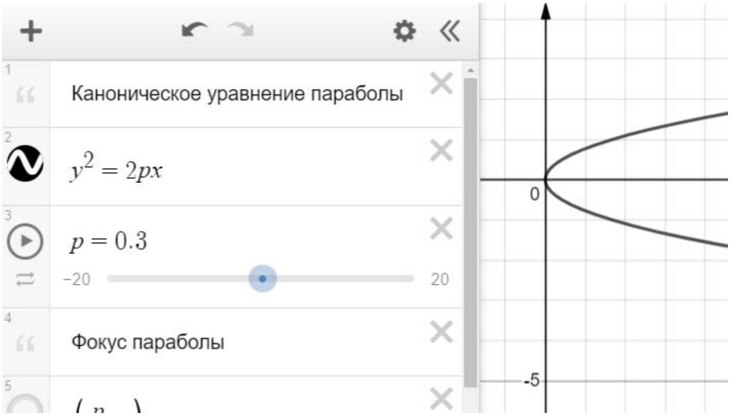

Рис.20.Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение параболы, значение параметра p)

3. Для значения параметра $p = a + b$ (значения параметров a и b берут из п.4 задания №1) поместить в отчёт следующие графики параболы, на которых отмечены её вершина, фокус и директриса:

- график параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$;
- график параболы, заданной уравнением $y^2 = -2px$;
- график параболы, заданной уравнением $x^2 = 2py$;
- график параболы, заданной уравнением $x^2 = -2py$ (обратите внимание, что этот график параболы, заданной уравнением $x^2 = 2py$ ($x^2 = -2py$) получается из графика параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$ ($y^2 = -2px$) путём поворота координатных осей на угол $\dfrac{\pi}{2}$).

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра координат фокуса и уравнения директрисы (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

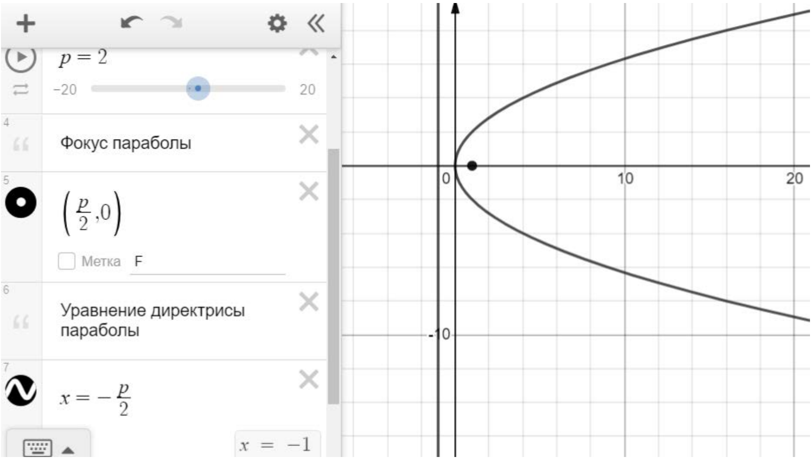

Рис.21. Рабочий лист в DESMOS (каноническое уравнение параболы, координаты фокуса, уравнение директрисы)

4.Для выбранного в п.3. значения параметра p проверить выполнение определения параболы как геометрического места точек плоскости (см.п.2,с.16). Для этого необходимо выбрать любые три точки параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$, лежащие в различных четвертях плоскости Oxy и сравнить отношение $\frac{|\overrightarrow{MF}|}{|\overrightarrow{MN}|}$ с $\varepsilon = 1$.

5.Записать параметрические уравнения параболы для значения параметра p, выбранного ранее в п.3, и построить график параболы, заданной этими уравнениями (см.строку №9 рабочего листа из п.1 - см. рис. 22).

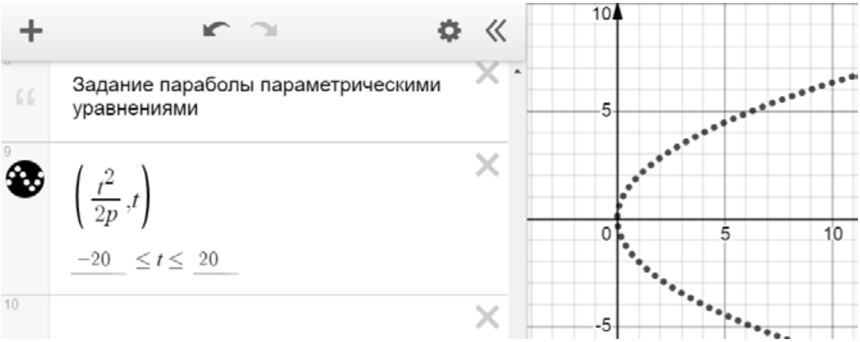

Рис.22.Рабочий лист в DESMOS
(задание параболы параметрическими уравнениями)

Задание №4.

Исследовать общее полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

$$r = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\theta},\ p>0, \varepsilon>0.$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$r = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\theta},\ p>0, \varepsilon>0$$

от значения параметров ε и p. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/mqqs85czsn (см. рис.23)[1] нужно изменять их значения, нажимая на кнопку , находящуюся слева от параметров или вводя их с клавиатуры.

2. Нарисовать графики эллипса, гиперболы и параболы при некоторых выбранных значениях параметров ε и $p = a + b$ (значе-

[1] Параметр ε обозначен буквой E в связи с отсутствием греческого алфавита на клавиатуре в DESMOS

ния параметров a и b берут из п.4 задания №1, значение ε выбирается студентом самостоятельно). Вставить эти графики в отчёт.

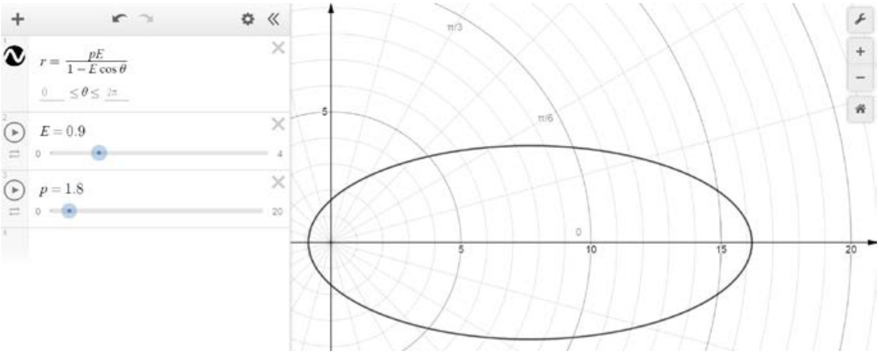

Рис.23. Рабочий лист в DESMOS (общее полярное уравнение для эллипса, гиперболы и параболы)

Рекомендательный библиографический список

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 105 с.

http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71687

2. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.

http://znanium.com/catalog/product/851522

3. Краткий курс аналитической геометрии: Учебник/ Ефимов Н. В., 14-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 240 с.

http://znanium.com/catalog/product/537806

4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия - М.: Изд-во МГУ, 1964. -699 с.

5. DESMOS Graphing Calculator: сайт. - URL: https://www.desmos.com/calculator (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

6.Математические этюды / : сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/etudes/ellipse/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

7. Математические этюды / Построение параболы. Геометрическое определение: сайт.-URL:

http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-parabola-geometric-definition/,

(дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

8. Математические этюды / Параболограф Кавальери: сайт.-URL:

http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-cavalieri-parabolograf/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

9. Математические этюды / Конические сечения. Конус с водой: сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-water/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

10. Оптическое свойство эллипса, гиперболы, параболы: сайт.-URL:

http://dev.mccme.ru/~merzon/mirror/mp-optical/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

11. Математические этюды / Параболическая антенна: сайт.- URL:
http://www.etudes.ru/ru/etudes/parabolic-antenna/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Титульный лист отчёта по РГЗ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

Расчетно-графическое задание

По дисциплине_________Математика_________________________

(Наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

Тема работы:__ _______Кривые 2-го порядка___________________

Выполнил студент гр. _____________ _________ __________

(шифр группы) (Ф.И.О.) (подпись)

Оценка:_____________ Дата:___________

Проверил:

Санкт-Петербург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА DESMOS

Методические указания к самостоятельной работе

Сост. *О.В. Сильванович*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *О.В. Сильванович*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 15.06.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,9. Усл.кр.-отт. 1,9. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 100 экз. Заказ 367.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2