

**МАТЕМАТИКА**  
**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.**  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Методические указания к самостоятельной работе  
для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2019**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

**МАТЕМАТИКА**  
**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.**  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Методические указания к самостоятельной работе  
для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2019

УДК 517.1+517.2(073)

**МАТЕМАТИКА. Неопределенный интеграл. Дифференциальные уравнения:** Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Е.Г. Булдакова, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев*. СПб, 2019. 64 с.

Методические указания содержат задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов на практических занятиях по высшей математике для всех специальностей и направлений подготовки бакалавриата по указанным разделам курса высшей математики.

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензенты: кафедра прикладной математики (Санкт-Петербургский государственный университет); проф. С.И. Перегудин (Санкт-Петербургский государственный университет)

© Санкт-Петербургский  
горный университет, 2019

## **МАТЕМАТИКА**

### **НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Методические указания к самостоятельной работе  
для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата*

Сост.: *Е.Г. Булдакова, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой  
высшей математики

Ответственный за выпуск *Е.Г. Булдакова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 28.10.2019. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 3,72. Усл.кр.-отт. 3,72. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 75 экз. Заказ 919. С 306.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

## **Введение**

Задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов-бакалавров содержат по 30 вариантов для каждого из двух разделов курса высшей математики второго семестра: неопределенный интеграл и дифференциальные уравнения.

Задания предназначены для использования во время практических занятий при разборе соответствующих разделов и подготовки к написанию контрольных и самостоятельных работ, сдаче коллоквиумов и экзаменов.

Эти индивидуальные задания разбираются и решаются самостоятельно каждым студентом во время практических занятий с использованием лекционного материала при непосредственной консультационной поддержке преподавателя. Разбор и решение этих заданий позволяют студентам уяснить и освоить основные понятия и методы указанных разделов высшей математики.

Такая индивидуальная самостоятельная работа позволяет продуктивно использовать аудиторное время практических занятий для каждого студента.

## 1. Неопределенный интеграл

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если во всех точках этого отрезка  $F'(x) = f(x)$ . Всякая непрерывная функция  $f(x)$  имеет бесконечное множество первообразных функций  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  – какая-либо конкретная первообразная;  $C$  – произвольная постоянная.

Множество первообразных для функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Соответственно, операция нахождения первообразных называется *интегрированием*.

Задача отыскания первообразной является обратной по отношению к дифференцированию. Например, если  $f(x) = x$ , то  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ , так

$$\text{как } \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x. \text{ Следовательно, } \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Для простейших функций первообразные находят обращением таблицы производных, а для сложных функций используют специальные методы.

Как известно, производные элементарных функций выражаются через элементарные функции, но это неверно для интегралов:

например, интегралы  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$  не выражаются через элементарные функции.

*Свойства неопределенного интеграла:*

- 1)  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ . Следствие.  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ ;
- 2)  $\int f'(x)dx = f(x) + C$ . Следствие.  $\int df(x) = f(x) + C$ ;
- 3) Если  $\lambda = \text{const}$ , то  $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ ;
- 4)  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ .

Отметим, что операция интегрирования, так же как и операция дифференцирования, не зависит от обозначения переменных, т.е. если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(t)dt = F(t) + C$ .

Рассмотрим простейшие методы интегрирования:

1. Приведение к табличным интегралам с использованием тождественных преобразований и свойств интегралов покажем на примерах:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx &= \int \left( \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \sqrt{x} dx - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \int x^{1/2} dx - 2 \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 2 \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x^{1/2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+3/2} = \left| a^2 = 3/2, \Rightarrow a = \sqrt{3/2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3/2}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}} = \left| a^2 = \frac{4}{3}, \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} + C. \end{aligned}$$

2. Многие интегралы можно привести к табличным, если применить метод подведения под знак дифференциала, т.е. формулу дифференциала  $f'(x)dx = df(x)$  в эквивалентной форме  $\varphi(x)dx =$

$= d(\int \varphi(x)dx)$ , где функция  $\varphi(x)$  как бы «подводится» под знак дифференциала. Следующие частные случаи подведения под дифференциал необходимо запомнить наизусть:

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2); \quad e^x dx = d(e^x); \quad x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x);$$

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = d(\operatorname{arctg} x); \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\operatorname{arcsin} x); \quad \cos x dx = d(\sin x);$$

$$\sin x dx = -d(\cos x); \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x).$$

Приведем примеры:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \left| t = \ln x \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9} &= \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 9} = \left| t = e^x \right| = \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \left| a = 3 \right| = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sin(2-3x^2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sin(2-3x^2)} = \frac{1}{2 \cdot (-3)} \int \frac{d(-3x^2)}{\sin(2-3x^2)} = \\ &= -\frac{1}{6} \int \frac{d(2-3x^2)}{\sin(2-3x^2)} = \left| t = 2-3x^2 \right| = -\frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sin t} = \\ &= -\frac{1}{6} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + C = -\frac{1}{6} \operatorname{tg} \frac{2-3x^2}{2} + C, \end{aligned}$$

где  $dx = d(x+C)$  и  $dx = \frac{1}{C} d(Cx)$ ;

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \operatorname{tg} \ln \cos x}{\cos x} dx &= - \int \frac{\operatorname{tg} \ln \cos x}{\cos x} d(\cos x) = |t = \cos x| = - \int \frac{\operatorname{tg} \ln t}{t} dt = \\ &= - \int \operatorname{tg} \ln t d(\ln t) = |y = \ln t| = - \int \operatorname{tg} y dy = \ln |\cos y| + C = \\ &= \ln |\cos \ln t| + C = \ln |\cos \ln \cos x| + C. \end{aligned}$$

3. Во втором способе мы ввели новую переменную, но только в качестве обозначения, чтобы привести интеграл к табличному относительно новой переменной. В этом случае под дифференциалом уже было получено нужное выражение. В общем случае, когда подведение под дифференциал невозможно или не приводит к желаемому результату, можно применить метод замены переменной, если  $x = \varphi(t)$  и  $\varphi(t)$ ,  $\varphi'(t)$ ,  $f(x)$  – непрерывны, то

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Основная идея: если некоторое выражение (не слишком громоздкое) усложняет интеграл, то следует попробовать принять это выражение за новую переменную. Замена переменной включает три подготовительных этапа: 1) ввести новую переменную; 2) выразить старую переменную; 3) найти дифференциал старой переменной. После этого производят замену всех выражений под знаком интеграла.

**Пример 1.** Найти  $\int \frac{xdx}{(2x+1)^3}$ .

**Решение.** Подведение под дифференциал  $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$  не приводит к успеху, так как в знаменателе стоит  $(2x+1)$ . Интеграл усложняет то, что в знаменателе двучлен  $(2x+1)$ , а делить легко на одночлен! Поэтому попробуем принять  $t = 2x+1$ . Тогда имеем

$$x = \frac{t-1}{2}, \Rightarrow dx = \left( \frac{t-1}{2} \right)' dt = \frac{1}{2} dt.$$

Следовательно, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(2x+1)^3} &= \int \frac{\frac{t-1}{2} \frac{1}{2} dt}{t^3} = \frac{1}{4} \int \frac{t-1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \int (t^{-2} - t^{-3}) dt = \frac{1}{4} \left( \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-2}}{-2} \right) + C = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{-1}{2x+1} + \frac{1}{2(2x+1)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

*Интегрирование по частям* основано на следующем утверждении: если  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  $u'$  и  $v'$  – непрерывны, то имеет место формула

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

✓ *Замечание.* Если  $dv = \varphi(x)dx$ , то  $v' = \varphi(x)$  и  $v = \int \varphi(x)dx$ . Так как  $v$  – любая первообразная, то обычно произвольную постоянную в  $v$  опускают (ее ставят после окончания интегрирования).

Интегрирование по частям удобно в том случае, если  $\int v du$  находится проще, чем  $\int u dv$ . Ситуация такова для двух классов интегралов:

1.  $\int P_n(x)\varphi(x)dx$ , где  $P_n(x)$  – многочлен и  $\varphi(x)$  – тригонометрическая или показательная функция, причем  $u = P_n(x)$  и  $dv = \varphi(x)dx$ , а интегрирование по частям применяют столько раз, какова степень многочлена;
2.  $\int g(x)\varphi(x)dx$ , где  $\int g(x)dx$  легко находится, а  $\varphi(x)$  – обратная тригонометрическая или логарифмическая функция, причем  $u = \varphi(x)$  и  $dv = g(x)dx$ .

**Пример 2.** Найти  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

*Решение.* Запишем

$$\int x^2 \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \Rightarrow \quad \quad \quad du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx, \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin 2x dx, \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\
&= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \left( -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right) = \\
&= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
\end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти  $\int x \ln(x-1) dx$ .

*Решение.* Имеем

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x-1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x-1), \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x-1} \\ dv = x dx, \Rightarrow \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-1)+1}{x-1} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int (x+1) dx - \frac{1}{2} \ln|x-1| = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + x \right) - \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.
\end{aligned}$$

Кроме того, интегрирование по частям применяется для специального приема приведения интеграла к самому себе. Например,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}, \Rightarrow du = \frac{-2x dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx, \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left( \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx = \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + C, \Rightarrow \\
\Rightarrow 2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C, \Rightarrow \\
\Rightarrow \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C,
\end{aligned}$$

где в силу произвольности  $C$  вместо  $C/2$  снова пишем  $C$ .

**Пример 4.** Найти  $\int e^{-2\sqrt{x}} dx$ .

**Решение.** Сделаем замену  $t = \sqrt{x}, \Rightarrow x = t^2, \Rightarrow dx = 2tdt$ :

$$\begin{aligned}
\int e^{-2\sqrt{x}} dx &= \int e^{-2t} 2tdt = 2 \int t e^{-2t} dt = \left. \begin{array}{l} u = t, \Rightarrow du = 1dt \\ dv = e^{-2t} dt, \Rightarrow \\ v = \int e^{-2t} dt = \frac{e^{-2t}}{-2} \end{array} \right| = \\
&= 2 \left( \frac{t e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2} dt \right) = 2 \left( \frac{t e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt \right) = 2 \left( \frac{t e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2t}}{-2} \right) + C = \\
&= 2 \left( \frac{\sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}}}{-2} - \frac{1}{4} e^{-2\sqrt{x}} \right) + C = -\sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

## Варианты заданий.

### Вариант 1

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1  | $\int \frac{dx}{(3x-10)^{11}}$          | 2  | $\int \frac{\sin \sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}} dx$ |
| 3  | $\int \cos^7 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ | 4  | $\int (2x-7) \cos \frac{x}{2} dx$              |
| 5  | $\int (x^3+1) \ln x \cdot dx$           | 6  | $\int \frac{xdx}{x^2-2x+4}$                    |
| 7  | $\int \frac{2x+5}{(x^3+4x^2+8x)x} dx$   | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$     |
| 9  | $\int \cos^2 7x \cdot dx$               | 10 | $\int \frac{dx}{4\cos^2 x - \sin^2 x}$         |
| 11 | $\int \frac{dx}{3\sin 2x + 4\cos 2x}$   |    |  |

### Вариант 2

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1  | $\int \frac{xdx}{(3x^2+1)^3}$           | 2  | $\int \frac{e^{-3\lg x} dx}{\cos^2 x}$   |
| 3  | $\int \sin^7 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ | 4  | $\int (2x+5)e^{7x} dx$                   |
| 5  | $\int (7x-1) \ln x \cdot dx$            | 6  | $\int \frac{xdx}{x^2+x+2}$               |
| 7  | $\int \frac{4x+7}{(x^3-2x^2+3x)x} dx$   | 8  | $\int \frac{3dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ |
| 9  | $\int \cos^4 3x \cdot dx$               | 10 | $\int \frac{dx}{\sin^2 2x+1}$            |
| 11 | $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x + 2}$ |    |  |

### Вариант 3

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1  | $\int \frac{x dx}{(3x^2 - 2)^5}$          | 2  | $\int \frac{e^{-2ctgx}}{\sin^2 x} dx$                       |
| 3  | $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$   | 4  | $\int (8x - 1)e^{2x} dx$                                    |
| 5  | $\int (2x + 5) \ln x \cdot dx$            | 6  | $\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 3} dx$                        |
| 7  | $\int \frac{4x + 3}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$  | 8  | $\int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[4]{x}}$ |
| 9  | $\int \cos^2 2x \cdot dx$                 | 10 | $\int \frac{dx}{6 \cos^2 x - 1}$                            |
| 11 | $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x - 1}$ |    |   |

### Вариант 4

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1  | $\int \frac{x dx}{(4x^2 - 1)^4}$             | 2  | $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x} dx$                              |
| 3  | $\int \cos^3 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$      | 4  | $\int (7x + 2) \sin 2x dx$                                       |
| 5  | $\int (3x - 1) \ln(x + 1) \cdot dx$          | 6  | $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x + 5}$                                 |
| 7  | $\int \frac{4x - 1}{(x^3 + 6x^2 + 10x)x} dx$ | 8  | $\int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x + 1} - 2 \cdot \sqrt[4]{x + 1}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 2x \cdot dx$                    | 10 | $\int \frac{dx}{6 \cos^2 x + 5}$                                 |
| 11 | $\int \frac{dx}{5 \sin x - 4 \cos x + 3}$    |    |  |

### Вариант 5

1  $\int \frac{x dx}{(3x^2 + 2)^4}$

2  $\int \frac{\sqrt[3]{tgx + 3}}{\cos^2 x} dx$

3  $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$

4  $\int (3x - 4) \cos 2x dx$

5  $\int (x^2 + 5x) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(x - 3) dx}{x^2 + x + 7}$

7  $\int \frac{x + 3}{(x^3 + 9x)x} dx$

8  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$

9  $\int \sin^4 5x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{5 \cos^2 x + 3}$

11  $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3 + \sin x}$

### Вариант 6

1  $\int \sqrt[5]{3x - 7} \cdot dx$

2  $\int \frac{ctg(tgx)}{\cos^2 x} dx$

3  $\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$

4  $\int (x + 1) e^{-4x} dx$

5  $\int (x^3 + x) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(3x - 1) dx}{x^2 - 3x + 9}$

7  $\int \frac{x - 2}{(x^3 + 9x)(x + 3)} dx$

8  $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 2} - \sqrt[4]{x + 2}}$

9  $\int \sin^4 2x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 3}$

11  $\int \frac{dx}{3 \cos x + 1 - \sin x}$

### Вариант 7

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1  | $\int \sqrt[7]{3x-1} dx$                   | 2  | $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| 3  | $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$ | 4  | $\int (4x+5) \cos 4x dx$                   |
| 5  | $\int (3x+7) \ln x \cdot dx$               | 6  | $\int \frac{xdx}{x^2-8x+19}$               |
| 7  | $\int \frac{x+1}{(x^3+4x)x} dx$            | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{x=1-\sqrt[3]{x-1}}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 3x \cdot dx$                  | 10 | $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4}$              |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+1}$        |    |  |

### Вариант 8

- |    |                                       |    |   |
|----|---------------------------------------|----|---|
| 1  | $\int \frac{xdx}{(3x^2-8)^6}$         | 2  | $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctgx}+1}}{\sin^2 x} dx$ |
| 3  | $\int \sin^9 x \cdot \cos x \cdot dx$ | 4  | $\int (3x-1) \cos x dx$                                 |
| 5  | $\int (x^2+2x) \ln x \cdot dx$        | 6  | $\int \frac{xdx}{x^2-4x+5}$                             |
| 7  | $\int \frac{dx}{(x^2-3x+3)(x-1)^2}$   | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x}}$                    |
| 9  | $\int \cos^4 2x \cdot dx$             | 10 | $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2}$                           |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x}$     |    |   |

### Вариант 9

$$1 \int \frac{x dx}{(8x^2 - 3)^5}$$

$$3 \int \sqrt[3]{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$$

$$5 \int x^5 \cdot \ln x \cdot dx$$

$$7 \int \frac{dx}{x^4 + 2x^2}$$

$$9 \int \cos^4 3x \cdot dx$$

$$11 \int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x}$$

$$2 \int \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln^2 x}}$$

$$4 \int (2x - 1) \cos 10x dx$$

$$6 \int \frac{(x - 1) dx}{x^2 + x + 3}$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$10 \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}$$

### Вариант 10

$$1 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2 - 3}}$$

$$3 \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$5 \int x^4 \ln x \cdot dx$$

$$7 \int \frac{2x + 5}{x^4 + 8x^2} dx$$

$$9 \int \cos^4 2x \cdot dx$$

$$11 \int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}$$

$$2 \int \frac{e^{-2 \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$$

$$4 \int (2x - 1) \sin x dx$$

$$6 \int \frac{(x + 1) dx}{x^2 - 6x + 13}$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$10 \int \frac{dx}{\cos^2 x + 3}$$

### Вариант 11

1  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+7}}$

2  $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x} dx$

3  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$

4  $\int (3x+1)\sin 2x dx$

5  $\int (x^3+x)\ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(x-2)dx}{x^2+4x+3}$

7  $\int \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx$

8  $\int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

9  $\int \cos^6 x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2}$

11  $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$

### Вариант 12

1  $\int e^{-6x-2} dx$

2  $\int \frac{tg(tgx)}{\cos^2 x} dx$

3  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$

4  $\int (2x-9)\cos 5x dx$

5  $\int (x^2-3x)\ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(3x+7)dx}{x^2+3x+5}$

7  $\int \frac{x+3}{x^3+2x^2} dx$

8  $\int \frac{dx}{5 \cdot \sqrt{x+1} - 4 \cdot \sqrt[4]{x+1}}$

9  $\int \sin^4 3x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{3+5\sin^2 x}$

11  $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x + 3}$

### Вариант 13

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1  | $\int \sin(2x-5)dx$                        | 2  | $\int \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$ |
| 3  | $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$ | 4  | $\int (2x-4)\sin 3x dx$                                    |
| 5  | $\int (x^2+6x)\ln x \cdot dx$              | 6  | $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-4x+8}$                           |
| 7  | $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2} dx$             | 8  | $\int \frac{dx}{5\cdot\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[4]{x}}$         |
| 9  | $\int \sin^6 x \cdot dx$                   | 10 | $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$                              |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\cos x - \sin x + 2}$     |    |  |

### Вариант 14

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1  | $\int \cos(4x-2)dx$                     | 2  | $\int \frac{e^x dx}{(4+3e^x)^4}$        |
| 3  | $\int \frac{\cos x dx}{4-\sin^2 x}$     | 4  | $\int (2x-1)\sin \frac{x}{3} dx$        |
| 5  | $\int (x^3-2x)\ln 3x \cdot dx$          | 6  | $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-5x+7}$        |
| 7  | $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2} dx$          | 8  | $\int \frac{dx}{5\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ |
| 9  | $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot dx$ | 10 | $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$           |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\cos x - 5\sin x + 1}$ |    |   |

### Вариант 15

$$1 \int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$$

$$2 \int \frac{e^x dx}{(4-5e^x)^3}$$

$$3 \int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$$

$$4 \int (5x-4)e^{2x} dx$$

$$5 \int (x^4-3x^2)\ln x \cdot dx$$

$$6 \int \frac{(x-3)dx}{x^2-8x+7}$$

$$7 \int \frac{2x+3}{x^3+4x^2+x^4} dx$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{x}-3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$9 \int \sin^2 4x \cdot dx$$

$$10 \int \frac{dx}{3+2\sin^2 x}$$

$$11 \int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x+1}$$

### Вариант 16

$$1 \int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$$

$$2 \int \frac{e^x dx}{(3-2e^x)^3}$$

$$3 \int \frac{\sin x dx}{2-\cos^2 x}$$

$$4 \int (2x-9)\sin 8x dx$$

$$5 \int (x^3+8x^2)\ln x \cdot dx$$

$$6 \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+13}$$

$$7 \int \frac{x+3}{x^4+7x^2} dx$$

$$8 \int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x}+2 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$9 \int \sin^4 3x \cdot dx$$

$$10 \int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$$

$$11 \int \frac{dx}{3\cos x-\sin x+1}$$

### Вариант 17

1  $\int \frac{dx}{\sin^2(8x-7)}$

2  $\int x^2 \operatorname{tg}(x^3+3) dx$

3  $\int \cos^3 x \cdot \sin x \cdot dx$

4  $\int (7x-3)e^{-2x} dx$

5  $\int (3x-1) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{x dx}{x^2-2x+5}$

7  $\int \frac{x+4}{x^3+2x^2+x^4} dx$

8  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2 \cdot \sqrt[4]{x}}$

9  $\int \sin^2 2x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{2+5\sin^2 x}$

11  $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$

### Вариант 18

1  $\int \sqrt{3x-1} dx$

2  $\int x^3 \cos(x^4-2) dx$

3  $\int \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx$

4  $\int (3x-1)e^{-3x} dx$

5  $\int (7x-1) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(x+3) dx}{x^2-8x+15}$

7  $\int \frac{2x-3}{x^4+5x^2} dx$

8  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4 \cdot \sqrt[3]{x}}$

9  $\int \cos^4 \frac{x}{4} \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{2-3\sin^2 x}$

11  $\int \frac{dx}{2\cos x + \sin x + 1}$

### Вариант 19

- |    |                                       |    |  |
|----|---------------------------------------|----|--|
| 1  | $\int \sqrt[3]{4x+5} dx$              | 2  | $\int \cos x \cdot \operatorname{tg}(\sin x) dx$     |
| 3  | $\int \cos^5 x \cdot \sin x \cdot dx$ | 4  | $\int (2x-1) \sin 9x dx$                             |
| 5  | $\int (9x-1) \ln x \cdot dx$          | 6  | $\int \frac{xdx}{x^2-2x+4}$                          |
| 7  | $\int \frac{2x+5}{(x^3+4x^2+8x)x} dx$ | 8  | $\int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$ |
| 9  | $\int \cos^4 \frac{x}{3} \cdot dx$    | 10 | $\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x}$                        |
| 11 | $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$ |    |  |

### Вариант 20

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1  | $\int \sqrt[5]{6x-3} dx$                     | 2  | $\int \cos^6 x \cdot \sin x \cdot dx$          |
| 3  | $\int \frac{\sqrt{2 \ln x + 1}}{x} \cdot dx$ | 4  | $\int (7x-3)e^{-4x} dx$                        |
| 5  | $\int (4x+3) \ln x \cdot dx$                 | 6  | $\int \frac{(x-7)dx}{x^2+8x+7}$                |
| 7  | $\int \frac{x+4}{x^4+4x^3+16x^2} dx$         | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{2x+5}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 \frac{x}{3} \cdot dx$           | 10 | $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 1}$               |
| 11 | $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$        |    |  |

### Вариант 21

- |    |  |    |   |
|----|--|----|---|
| 1  | $\int \frac{dx}{\sin^2(8x+6)}$             | 2  | $\int \frac{\operatorname{arccot}gx}{1+x^2} dx$ |
| 3  | $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ | 4  | $\int (3x+8)\sin 3x dx$                         |
| 5  | $\int (x^4-3x^3)\ln x \cdot dx$            | 6  | $\int \frac{(2x-9)dx}{x^2-3x+5}$                |
| 7  | $\int \frac{x^2-3}{x^4+4x^3+8x^2} dx$      | 8  | $\int \frac{dx}{4\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$     |
| 9  | $\int \sin^2 7x \cdot dx$                  | 10 | $\int \frac{dx}{\cos^2 2x+3}$                   |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\sin x-1}$                |    |   |

### Вариант 22

- |    |                                       |    |  |
|----|---------------------------------------|----|--|
| 1  | $\int \frac{dx}{3\cos^2(3x-1)}$       | 2  | $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$           |
| 3  | $\int \sin^6 x \cdot \cos x \cdot dx$ | 4  | $\int (4x-9)e^{-3x} dx$                            |
| 5  | $\int (x^5-3x^2)\ln x \cdot dx$       | 6  | $\int \frac{(x+3)dx}{x^2-7x+9}$                    |
| 7  | $\int \frac{x-4}{x^4+2x^3+9x^2} dx$   | 8  | $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{3x-1}-\sqrt[3]{3x-1}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cdot dx$    | 10 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x+4}$                       |
| 11 | $\int \frac{dx}{2\sin x+5}$           |    |  |

### Вариант 23

1  $\int \frac{dx}{(8x-7)^2}$

2  $\int \frac{\arctg^3 x}{1+x^2} dx$

3  $\int \cos^8 x \cdot \sin x \cdot dx$

4  $\int (3x-7)e^{-2x} dx$

5  $\int (x+10) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(3x-10)dx}{x^2-10x+17}$

7  $\int \frac{x^2+2}{x^4+4x^2} dx$

8  $\int \frac{dx}{4 \cdot \sqrt{x} - 4\sqrt{x}}$

9  $\int \cos^2 12x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x + 2}$

11  $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$

### Вариант 24

1  $\int \frac{dx}{(8x+7)^{10}}$

2  $\int 4^x \sin(4^x + 3) dx$

3  $\int \cos^{10} x \cdot \sin x \cdot dx$

4  $\int (4x-9)e^{-5x} dx$

5  $\int (x^6 - x) \ln x \cdot dx$

6  $\int \frac{(3x-9)dx}{x^2-6x+18}$

7  $\int \frac{x-3}{x^4+2x^2} dx$

8  $\int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x} - 4 \cdot \sqrt[3]{x}}$

9  $\int \cos^2 10x \cdot dx$

10  $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 6}$

11  $\int \frac{dx}{4 \cos x - 5 \sin x}$

### Вариант 25

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1  | $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-1}}$           | 2  | $\int e^x \cdot \operatorname{ctg}(2e^x - 1) dx$ |
| 3  | $\int \cos^9 x \cdot \sin x \cdot dx$      | 4  | $\int (2x-3) \cos 6x dx$                         |
| 5  | $\int (4x-1) \ln x \cdot dx$               | 6  | $\int \frac{x dx}{x^2 + 7x - 1}$                 |
| 7  | $\int \frac{3x+1}{(x^3 + 6x^2 + 10x)x} dx$ | 8  | $\int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ |
| 9  | $\int \cos^2(3x+1) \cdot dx$               | 10 | $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin^2 x}$                 |
| 11 | $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$        |    |  |

### Вариант 26

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1  | $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{3x+8}}$          | 2  | $\int e^{2x} \cdot \operatorname{tg}(e^{2x}) dx$ |
| 3  | $\int \cos^{11} x \cdot \sin x \cdot dx$  | 4  | $\int (2x-1) \cos 5x dx$                         |
| 5  | $\int (4x+1) \ln x \cdot dx$              | 6  | $\int \frac{x dx}{x^2 + 6x - 1}$                 |
| 7  | $\int \frac{4x-5}{(x^3 - 6x^2 + 8x)x} dx$ | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1} - \sqrt[3]{4x-1}}$   |
| 9  | $\int \cos^2 3x \cdot dx$                 | 10 | $\int \frac{dx}{5 + 3 \sin^2 x}$                 |
| 11 | $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x}$     |    |  |

### Вариант 27

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1  | $\int \frac{dx}{(4x-1)^4}$                | 2  | $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x} dx$                      |
| 3  | $\int \cos^3 x \cdot \sin^7 x \cdot dx$   | 4  | $\int (7x+2) \sin 2x dx$                                 |
| 5  | $\int (3x=1) \ln(x+1) \cdot dx$           | 6  | $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x + 5}$                         |
| 7  | $\int \frac{4x-1}{(x^3 + 4x^2 + 9x)x} dx$ | 8  | $\int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 7x \cdot dx$                 | 10 | $\int \frac{dx}{6 \cos^2 x + 5}$                         |
| 11 | $\int \frac{dx}{5 \sin x - 4 \cos x + 3}$ |    |  |

### Вариант 28

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1  | $\int \frac{dx}{(4x+3)^3}$              | 2  | $\int \frac{\sqrt[3]{2tgx+3}}{\cos^2 x} dx$ |
| 3  | $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ | 4  | $\int (3x-4) \cos 2x dx$                    |
| 5  | $\int (x^2 + 5x) \ln x \cdot dx$        | 6  | $\int \frac{x-3}{x^2 + x + 7} dx$           |
| 7  | $\int \frac{x+3}{(x^3 + 9x)x} dx$       | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$ |
| 9  | $\int \sin^4 5x \cdot dx$               | 10 | $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 3}$            |
| 11 | $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3}$          |    |   |

### Вариант 29

- |    |                                       |    |  |
|----|---------------------------------------|----|--|
| 1  | $\int \sqrt[5]{3x-7} dx$              | 2  | $\int \frac{\operatorname{ctg}(2\operatorname{tg}x)}{\cos^2 x} dx$ |
| 3  | $\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$ | 4  | $\int (x+1)e^{-4x} dx$   |
| 5  | $\int (x^3+7x)\ln x \cdot dx$         | 6  | $\int \frac{3x-1}{x^2-3x+9} dx$                                    |
| 7  | $\int \frac{x-2}{(x^3+9x)(x+3)} dx$   | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{x+2}}$                         |
| 9  | $\int \sin^4 2x \cdot dx$             | 10 | $\int \frac{dx}{4\cos^2 x-3}$                                      |
| 11 | $\int \frac{dx}{3\cos x+1}$           |    |  |

### Вариант 30

- |    |                                      |    |   |
|----|--------------------------------------|----|---|
| 1  | $\int \sqrt[7]{3x+1} dx$             | 2  | $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}x-1}}{\sin^2 x} dx$ |
| 3  | $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$ | 4  | $\int (4x+5)\cos 3x dx$                                 |
| 5  | $\int (3x+7)\ln x \cdot dx$          | 6  | $\int \frac{x dx}{x^2-5x+4}$                            |
| 7  | $\int \frac{x+1}{(x^3+4x)x} dx$      | 8  | $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$              |
| 9  | $\int \cos^4 3x \cdot dx$            | 10 | $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4}$                           |
| 11 | $\int \frac{dx}{4\sin 2x+3\cos 2x}$  |    |   |

## 2. Дифференциальные уравнения

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = \varphi(x)$  и ее производные  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Отметим, что порядок старшей производной определяет порядок уравнения.

*Решением* дифференциального уравнения называется дифференцируемая  $n$  раз функция  $y = \varphi(x)$ , которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Так, например, дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки под действием силы упругости, имеет вид  $y'' + \omega^2 y = 0$  при  $\omega = \text{const}$ .

Проверим, что функция  $y_1 = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$  при любых значениях постоянных  $C_1$  и  $C_2$  является решением данного уравнения.

Имеем  $y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x$ ,  $y'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x$ .

После подстановки в искомое дифференциальное уравнение получим тождество:

$$-C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x + \omega^2 (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) = 0.$$

*Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция  $y = \varphi(x, C)$ , которая при любом значении произвольной постоянной  $C$  является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения  $y = \varphi(x, C)$  при определенном значении произвольной постоянной  $C$ , называются *частными*.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию  $y = y_0$  при  $x = x_0$  (или  $y \Big|_{x=x_0} = y_0$ ), называется *задачей Коши*.

Если общее решение получено в неявном виде  $\varphi(x, y, C) = 0$ , то последнее равенство называется *общим интегралом* дифференциального уравнения, а равенство  $\varphi(x, y, C) = 0$  – *частным интегралом*.

**Пример 1.** Найти частный интеграл уравнения  $(x^2 - 1)y' = 2x\sqrt{y}$  удовлетворяющий начальному условию  $y \Big|_{x=-\sqrt{2}} = 1$ .

**Решение.** Непосредственной подстановкой можно убедиться, что равенство вида

$$2\sqrt{y} - \ln|x^2 - 1| = C$$

является общим интегралом данного уравнения. Подставим  $x = -\sqrt{2}$  и  $y = 1$  в это равенство:

$$2\sqrt{1} - \ln\left|(\sqrt{2})^2 - 1\right| = C,$$

т.е.  $C = 2$ . Таким образом, частный интеграл исходного уравнения имеет вид

$$2\sqrt{y} - \ln|x^2 - 1| = 2.$$

Геометрически общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство *интегральных кривых* на плоскости  $Oxy$ ; частное решение (частный интеграл) задает одну кривую из этого семейства.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Разрешив уравнение (1) относительно  $y'$ , получим уравнение первого порядка в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Учитывая, что  $y' = \frac{dy}{dx}$ , дифференциальное уравнение (2) можно записать в симметричном виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где  $P(x, y), Q(x, y)$  – известные функции.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Уравнение первого порядка вида

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Умножив уравнение (3) на  $\frac{1}{f_2(y)\varphi_1(x)}$  ( $f_2(y) \cdot \varphi_1(x) \neq 0$ ), получим уравнение с *разделенными переменными*:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0, \quad \text{или} \quad M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

почленно интегрируя которое, найдем общий интеграл уравнения (3):

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

**Пример 2.** Найти решение уравнения

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

**Решение.** Разделим переменные в данном уравнении

$$\frac{x dx}{1 + x^2} + \frac{y dy}{1 + y^2} = 0.$$

Почленно интегрируем

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} + \int \frac{y dy}{1+y^2} = C,$$

получим

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln C_1 \quad (\text{ààðàì} \quad C = \ln C_1).$$

Отсюда

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1^2.$$

Удовлетворяем начальному условию:  $(1+0^2)(1+1^2) = C_1^2$ , тогда  $C_1^2 = 2$  и уравнение искомой интегральной кривой имеет вид

$$(1+x^2)(1+y^2) = 2.$$

Если переменные разделить не удастся, то следует проверить, не является ли уравнение однородным. Для этого необходимо привести его к виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

и определить, являются ли функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  однородными одной степени или нет. Напомним, что функция  $\varphi(x, y)$  является *однородной степени  $n$* , если для любого  $\lambda \neq 0$  имеет место равенство  $\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \varphi(x, y)$ . Если уравнение приводится к виду  $y' = f(x, y)$  или  $x' = \tilde{f}(x, y)$ , то оно будет **однородным** в том случае, когда

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad \tilde{f}(x, y) = \tilde{g}\left(\frac{x}{y}\right) - \text{однородная функция нулевой}$$

степени. Метод решения основан на введении новой искомой функции

$$u(x) = \frac{y}{x} \quad \text{èèè} \quad u(y) = \frac{x}{y} : \quad y = ux, y' = u'x + u \quad \text{или} \quad x = uy, x' = u + uy' \quad \text{и}$$

после замены в уравнении всегда разделяются переменные.

**Пример 3.** Решить уравнение  $(x^2 + y^2) dx = 2xy dy$  и найти интегральную кривую, проходящую через точку  $A(4; 0)$ .

**Решение.** Очевидно, что  $M(x, y) = x^2 + y^2$  и  $N(x, y) = -2xy$  – однородные функции второй степени. Используем подстановку  $y = u(x) \cdot x$ . Тогда  $y' = u'x + u$ . Следовательно, получим

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}; \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{2u}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2u}{1 - u^2} du.$$

После интегрирования запишем

$$\ln|x| = -\ln|1 - u^2| + \ln|2C|$$

или, взяв  $(\pm \tilde{N}) = \tilde{N}$ , получим

$$\ln|x(1 - u^2)| = \ln|2C|; \quad x \cdot \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = \pm 2C;$$

$$x^2 - y^2 = 2Cx.$$

Окончательно общий интеграл  $(x - C)^2 - y^2 = C^2$  и определяет семейство гипербол. С учетом начального условия, т.е.  $y(4) = 0$  (кривая проходит через точку  $A$ ), вычислим  $C$ :

$$4^2 - 0^2 = 2C \cdot 4 \quad \text{и} \quad C = 2.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если оно линейно относительно искомой функции и ее производной. Общий вид линейного уравнения:  $y' + p(x)y = q(x)$ .

Одним из способов решения такого уравнения является использование подстановки  $y = u(x)v(x)$  (метод Бернулли).

**Пример 4.** Решить уравнение  $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$ .

**Решение.** Очевидно, что данное уравнение является линейным:

$$p(x) = -\operatorname{tg} x, \quad q(x) = \sin x. \quad \text{Тогда ищем решение в виде} \quad y = u(x) \cdot v(x);$$

$$y' = u'v + uv'$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим

$$u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \sin x;$$

$$(u' - \operatorname{tg} x \cdot u)v + uv' = \sin x. \quad (4)$$

Так как уравнение одно, а неизвестных функций две, то одна из них, например функция  $u(x)$  свободная, поэтому можно на нее наложить дополнительное условие:  $u' - \operatorname{tg} x \cdot u = 0$ . Разделим переменные в последнем уравнении, тогда при  $(\pm \tilde{N}) = \tilde{N}$  имеем

$$\frac{du}{u} = \operatorname{tg} x dx;$$

$$\ln|u| = -\ln|\cos x| + \ln C, \Rightarrow |u| = \frac{C}{|\cos x|}, \Rightarrow u = \frac{\pm C}{\cos x}.$$

Таким образом,  $u = C / \cos x$ . Так как необходимо, чтобы любая функция  $u = u(x)$  удовлетворяла уравнению  $u' - \operatorname{tg} x \cdot u = 0$ , то полагаем  $u = 1 / \cos x$  ( $C = 1$ ). Тогда из уравнения (4) получим

$$\frac{1}{\cos x} v' = \sin x; \quad v' = \sin x \cos x; \quad v = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Итак,  $y = \frac{1}{\cos x} \left( C + \frac{1}{2} \sin^2 x \right).$

Отметим, что использование подстановки  $y = uv$  для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка приводит к формуле вида (формула Бернулли):

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[ C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]. \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (6)$$

где  $n$  – любое действительное число, кроме нуля и единицы (при  $n = 0$  имеем линейное уравнение, а при  $n = 1$  – уравнение с разделяющимися переменными). Уравнение (6) называется **уравнением Бернулли**, и метод его решения основан на замене  $z = y^{1-n}$ , что сводит его к линейному уравнению. Отметим, что для решения уравнения Бернулли можно использовать и метод Бернулли

**Пример 5.** Решить уравнения:

$$1. y' + \frac{y}{x} = -xy^2. \quad 2. y'(2x - y^2) = 1.$$

**Решение.** 1. Здесь  $p(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = -x$ ,  $n=2$ . Положим  $z = y^{1-2} = y^{-1}$ ,

подставляя  $y = z^{-1}$  и  $y' = -z'/z^2$  в исходное уравнение, получим

$$z' - \frac{z}{x} = x.$$

Воспользовавшись формулой (5), где  $p(x) = -x^{-1}$ ,  $q(x) = x$ , находим

$$z = e^{+\int \frac{dx}{x}} \left[ C + \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right] = x \left[ C + \int dx \right] = x(C + x).$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = z^{-1} = (x^2 + Cx)^{-1}.$$

2. Это уравнение линейно относительно функции  $x(y)$ . Так как

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ то оно примет вид}$$

$$x' = 2x - y^2 \text{ или } x' - 2x = -y^2.$$

Здесь  $p(y) = -2$ ,  $q(y) = -y^2$ . Используя формулу (5), получим

$$x = e^{2y} \left( C - \int y^2 e^{-2y} dy \right).$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int y^2 e^{-2y} dy = -\frac{1}{2} e^{-2y} \left( y^2 + y + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, общим решением данного уравнения является функция:

$$x = C e^{2y} + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y + \frac{1}{4}.$$

### Варианты заданий.

#### Вариант 1

1.  $y' \sin x = y \ln y$ ;

2.  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ ;

3.  $y' - x^3 y = x^7$ ;

4.  $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$ ;

5.  $y'' - \frac{2}{x} y' = x^5$ ;

6.  $y'' = e^{2y}$ ;

7.  $y'' + 4y' + 13y = 2x - 1 + e^{-2x}$ ;

8.  $y'' - 2y' + y = (x^3 + 1)e^x - \sin 2x$   
(коэффициенты не вычислять)

## Вариант 2

1.  $y' = (2x - 1)$

2.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$

3.  $y' - 2x^2 y = x^5;$

4.  $y' + 2y = 3e^x y^4;$

5.  $y'' + \frac{3}{x} y' = \sqrt[3]{x};$

6.  $2(y')^2 = (y - 1)y'';$

7.  $y'' - 8y' + 17y = x + 1 - 2e^{-x};$

8.  $y'' + 2y' + y = (x^2 + 1)e^{-x} \sin x + 2e^{-x}$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 3

1.  $x(y^6 + 1) + y^2 y'(x^4 + 1) = 0$

2.  $(xy' - y)\cos^2 \frac{y}{x} + x = 0;$

3.  $x^2 y' - 2xy + x^3 = 0;$

4.  $y' + 2\frac{y}{x} + \sqrt{y} = 0;$

5.  $xy'' - y' = 2x^2 e^x;$

6.  $(y^2 - 1)y'' + 2(y')^2 = 0;$

7.  $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x} - x^2;$

8.  $y'' + 6y' + 9y = e^{3x} \cos 3x - xe^{-3x}$   
(коэффициенты не вычислять)

#### Вариант 4

1.  $y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$

2.  $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x};$

3.  $y' + x^4 y = x^9;$

4.  $y' - \frac{y}{x} = x^2 \sqrt{y};$

5.  $y'' \operatorname{ctgx} + y' = 2;$

6.  $2yy'' = (y')^2;$

7.  $y'' - 2y' + 10y = e^x - 2x^2;$

8.  $y'' + 4y' + 4y = x \sin 3x - e^{-2x}$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 5

1.  $(1 + e^y)dx = e^x dy$

2.  $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}};$

3.  $y' + xy = x^3;$

4.  $y' + \frac{2}{x}y = e^x \sqrt{y};$

5.  $xy'' = y' + 2;$

6.  $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0;$

7.  $y'' + 4y' + 5y = x^2 - 1 + e^{-x};$

8.  $y'' - 6y' + 5y = (x^3 + x)e^x - \sin x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 6

1.  $y' - 3x^4(y^2 + 1) = 0;$

2.  $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}};$

3.  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2};$

4.  $y' - 2xy = x^3y^3;$

5.  $y'' - \frac{y'}{x} = 1;$

6.  $2yy'' = 1 + (y')^2;$

7.  $y'' + 4y' + 8y = 2x - 1 + e^{-2x};$

8.  $y'' + 6y' + 8y = x \sin x + x^2 \cos x + e^{-2x}$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 7

1.  $y' + \sin x(y^2 + 2y + 2) = 0;$

2.  $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^2 - x^2};$

3.  $y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2};$

4.  $y' + 3xy = xy^2;$

5.  $y'' - \frac{y'}{x} = x^2 - 2;$

6.  $y'' = 2y'y;$

7.  $y'' - 4y' + 8y = x + 4 - e^x;$

8.  $y'' + 2y' - 8y = x \cos 2x - \sin 2x + e^{2x}$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 8

1.  $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0;$

2.  $2x - y + (x + y)y' = 0;$

3.  $y' + 2x^2 y = 3x^5;$

4.  $y' + 2y = xy^3;$

5.  $y'' + \frac{3}{x} y' = x^4;$

6.  $y'' + yy' = 0;$

7.  $y'' + 6y' + 10y = e^{-x} + 2x^2 - 2;$

8.  $y'' + 2y' - 3y = (x + 2)e^{-2x} \sin 3x - 2e^x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 9

1.  $y' = (2y + 1)tgx$

2.  $x^2 y' = y(x + y)$ ;

3.  $y' - x^2 y = 2x^5$ ;

4.  $y' - 2y = 2e^x y^3$ ;

5.  $y'' - \frac{3}{x}y' = \sqrt{x}$ ;

6.  $(y')^2 + yy'' = 0$ ;

7.  $y'' - 6y' + 10y = x^2 - 2x + e^{2x}$ ;

8.  $y'' + 4y' - 5y = xe^x \cos 3x - e^x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 10

1.  $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ ;

2.  $(\sin \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x})xy' = x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}$ ;

3.  $x^2 y' - 3xy = -x^3$ ;

4.  $y' + \frac{y}{2} + y^3 = 0$ ;

5.  $x(y'' + 1) + y' = 0$ ;

6.  $(\frac{1}{4} - y^2)y'' = (y')^2$ ;

7.  $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$ ;

8.  $y'' + 4y' + 4y = (x^3 + 1)\cos 2x + \sin 2x + 3e^{-2x}$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 11

1.  $y' - 2x^3(y^2 + 1) = 0$

2.  $xy' - y = x \sin^2 \frac{y}{x};$

3.  $y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x;$

4.  $y' + 2xy = x^3 y^3;$

5.  $y'' + 2y' = 3x^2;$

6.  $(y'')^2 + (y')^2 = 1;$

7.  $y'' + 3y' = 3e^{-3x};$

8.  $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{-x} \cos 2x + e^{-2x}$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 12

$$1. y' = \frac{1 - x^2}{1 + y^2}$$

$$2. xy' = y \ln \frac{y}{x};$$

$$3. y' + x^2 y = x^5;$$

$$4. xy' - 3y = x^3 y^2;$$

$$5. y'' - \frac{y'}{x+1} = x(x+1);$$

$$6. y'' - y^2 (y')^3 = 0;$$

$$7. y'' + 3y' + 3y = e^x + 10 - 6x;$$

$$8. y'' + 6y' + 9y = x^2 e^x \sin 4x - e^{-3x}$$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 13

$$1. x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$$

$$2. y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2};$$

$$3. xy' - y = x^2 e^{-2x};$$

$$4. xy' + 3y = xy^2;$$

$$5. 2xy'' = (y')^2 - 4;$$

$$6. yy'' - (y')^2 = 0;$$

$$7. y'' - 2y' + y = 4e^x;$$

$$8. y'' + 6y' - 7y = xe^{2x} \sin 2x + x^3$$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 14

1.  $y' = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ ;

2.  $y + \sqrt{xy} = xy'$ ;

3.  $y' + 4x^4 y = x^9$ ;

4.  $xy' + 4y = xy^3$ ;

5.  $2xy''y' = (y')^2 + 16$ ;

6.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$ ;

7.  $y'' + y' = 2x - 1 + e^x$ ;

8.  $y'' - 6y' + 9y = (x^3 - 2x)e^{3x} - \sin x$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 15

1.  $y' \sin y = \sqrt{x^2 - 1}$

2.  $x^2 y' + y^2 = xy y'$ ;

3.  $y' + xy = 3x^3$ ;

4.  $y' + xy = x^3 y^3$ ;

5.  $y'' + \frac{xy'}{1-x^2} = x$ ;

6.  $y'' y \ln y + (y')^2 = 0$ ;

7.  $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x} - e^{2x}$ ;

8.  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x \sin 2x + 3e^x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 16

1.  $\cos yy' = 2\sqrt{4 + x^2}$

2.  $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0;$

3.  $y' - xy = 2x^3;$

4.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0;$

5.  $y'' + \frac{xy'}{x^2 + 1} = x;$

6.  $y(y + 1)y'' + (y')^2 = 0;$

7.  $y'' + 2y' - 3y = (x + 2)e^{2x} - e^x;$

8.  $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-x} \cos 4x - e^{-3x}$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 17

1.  $e^{x+3y} dy = x dx$

2.  $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$ ;

3.  $y' + x^3 y = x^7$ ;

4.  $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^2$ ;

5.  $y'' + \frac{2}{x}y' = x^2 + 1$ ;

6.  $2(y')^2 = yy''$ ;

7.  $y'' - 2y' + 10y = 2x - 3 + e^{-x}$ ;

8.  $y'' + 8y' + 16y = (x^3 + 4)e^{-4x} + \cos 3x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 18

1.  $y' = \sin^2 y \cos^2 x$ ;

2.  $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ ;

3.  $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$ ;

4.  $y' + 4y + \sqrt[4]{y} = 0$ ;

5.  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ ;

6.  $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$ ;

7.  $y'' - 5y' + 6y = 3 \sin 2x - \cos 2x + x$ ;

8.  $y'' - 2y' + 17y = xe^{-x} \cos 4x - x^2$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 19

1.  $y' = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x};$

2.  $y'(2x^2 + xy) = xy + y^2$

3.  $xy' - 2y + x^2 = 0;$

4.  $y' - \frac{y}{x} + 3y^2 = 0;$

5.  $2xy''y' = (y')^2 - 4;$

6.  $4(y'')^2 = 1 + (y')^2;$

7.  $y'' - 4y' + 3y = 2\sin x + e^x;$

8.  $y'' + 6y' + 10y = (x^2 \cos x + x \sin x)e^{-3x}$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 20

1.  $\frac{y}{y'} = x \ln y$ ;

2.  $y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ ;

3.  $y' - y = e^x$ ;

4.  $y' - \frac{y}{x} = y^3$ ;

5.  $y'' = y' + x$ ;

6.  $y''(1 + y) = (y')^2 + y'$ ;

7.  $y'' - 6y' + 8y = 3e^{3x} + e^{2x}$ ;

8.  $y'' + 4y' + 5y = x^2 e^{-2x} \sin x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 21

$$1. y' \sqrt{1+x^2} - \sin^2 y = 0$$

$$2. xy' = y - xe^{-\frac{y}{x}};$$

$$3. y' - x^4 y = x^9;$$

$$4. y' + \frac{2}{x}y = x^3 y^2;$$

$$5. (y'' + 1)(x - 1) = 3y';$$

$$6. 2y'' = 3y^{-2};$$

$$7. y'' + 2y' + 10y = 3e^x - 3x^2;$$

$$8. y'' - y' - 2y = xe^{3x} \cos x + \sin x - e^{2x}$$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 22

1.  $(1 + e^{3y})x dx = e^{3y} dy;$

2.  $2\sqrt{xy} - y = xy';$

3.  $xy' + y = \sin x;$

4.  $y' - 3y = e^{2x} y^3;$

5.  $xy'' = y' + x^2;$

6.  $yy'' + (y')^2 = y';$

7.  $y'' - 6y' + 9y = x^2 + e^{3x};$

8.  $y'' + 4y' + 13y = xe^{-2x} \cos 3x$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 23

$$1. y' = \frac{e^{2x}}{\ln y};$$

$$2. y^2 - 2xy = x^2 y';$$

$$3. (x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x;$$

$$4. y' + 2y = e^x y^2;$$

$$5. y'' + \frac{1}{x} y' = 0;$$

$$6. y''y + (y')^2 = y';$$

$$7. y'' - 4y' + 4y = x^2 - 2 + e^{2x};$$

$$8. y'' + 6y' + 10y = xe^{-3x} \sin x + x + 2$$

(коэффициенты не вычислять)

**Вариант 24**

1.  $\frac{yy'}{x} + e^y = 0;$

2.  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$

3.  $xy' - y = x^2 \sin x;$

4.  $y' + 2xy = 2xy^3;$

5.  $y''x \ln x = 3y';$

6.  $y'' = y'e^y;$

7.  $y'' + 6y' + 9y = 3 \cos 2x + e^{-3x};$

8.  $y'' - 8y' + 7y = x^2 e^x \sin 2x + e^x$   
(коэффициенты не вычислять)

**Вариант 25**

1.  $(x^2 - 1)y' = 2xy \ln y$

2.  $xy' + x \cos \frac{y}{x} - y + x = 0;$

3.  $y' - \frac{4}{x}y = \sqrt{x};$

4.  $y' - 3y = (x + 3)y^2;$

5.  $y'' + \frac{2}{x}y' = x^4;$

6.  $y''y^3 = 1;$

7.  $y'' - 6y' + 9y = 2 \sin x + e^{3x};$

8.  $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 3)e^{-2x} + x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 26

$$1. \frac{1}{x(y-1)} + \frac{y'}{y(x+2)} = 0;$$

$$2. xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x;$$

$$3. y' - \frac{2}{x}y = 3\sqrt{x};$$

$$4. y' + 3y = (x+2)y^2;$$

$$5. y'' + \frac{3}{x}y' = x^2;$$

$$6. y'' \operatorname{tg} y = (y')^2;$$

$$7. y'' + 4y' - 5y = 2e^x - x + 1;$$

$$8. y'' - 8y' + 16y = x^2 e^{4x} - e^{-x} \cos 3x$$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 27

1.  $x(y^2 + 1) + y^2 y'(x^2 + 1) = 0$

2.  $(xy' - y) \sin^2 \frac{y}{x} + x = 0;$

3.  $xy' - 2y + x^2 = 0;$

4.  $y' + \frac{3y}{x} = -y^2 x;$

5.  $xy'' - y' = x^2 e^x;$

6.  $y^2 y'' + y' = 0;$

7.  $y'' - y' - 6y = 5e^{3x} + x;$

8.  $y'' + 10y' + 25y = x^2 e^{-5x} + x e^{-x} \cos x$   
(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 28

$$1. xydx + \frac{dy}{\ln y}(x+1) = 0$$

$$2. xy' - y = xtg \frac{y}{x};$$

$$3. y' + \frac{3y}{x} = x;$$

$$4. xy' - y = x^2 y^2;$$

$$5. y'' + \frac{y'}{x} = xy^3;$$

$$6. yy'' + 2y' = 0;$$

$$7. y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} + 2x;$$

$$8. y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x} \sin 2x$$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 29

1.  $y' = y^2 \sin^2 x$

2.  $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}};$

3.  $y' + \frac{2y}{x} = x;$

4.  $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3;$

5.  $(x + 1)y'' = y';$

6.  $y'' = 4yy';$

7.  $y'' - 4y' + 4y = x - 2 + e^{2x};$

8.  $y'' + 9y = 2 \cos 3x - \sin 3x + x^2$

(коэффициенты не вычислять)

### Вариант 30

1.  $xy' = y^2 + 2y$ ;

2.  $y' = \frac{x+y}{y}$ ;

3.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ;

4.  $xy' - 2y = x^2 y^3$ ;

5.  $xy'' - y' = 0$ ;

6.  $y''y + (y')^2 = 0$ ;

7.  $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x} + 2x^2$ ;

8.  $y'' + 8y' + 16y = xe^{-4x} + 2\sin x - x \cos x$   
(коэффициенты не вычислять)

## Библиографический список

1. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 102 с.

<http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71689>

2. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.

<http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71690>

3. Математический практикум. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, М.А. Зацепин, В.В. Ивакин, В.А. Семенов, С.Е. Мансурова. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 162 с.

[http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com\\_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set\\_static\\_req&bns\\_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req\\_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D533720026<.>](http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D533720026<.>)

4. Математический практикум. Часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье. Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, Т.Р. Акчурин, С.Е. Мансурова, Т.С. Обручева, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 152 с.

[http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com\\_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set\\_static\\_req&bns\\_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req\\_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D147020047<.>](http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D147020047<.>)

5. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.

<http://znanium.com/catalog/product/851522>

6. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с.

<https://e.lanbook.com/book/65055>

## Содержание

Введение .....	3
1. Неопределенный интеграл .....	4
Варианты заданий .....	11
2. Дифференциальные уравнения .....	26
Варианты заданий .....	33
Библиографический список .....	63