МАТЕМАТИКА

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к самостоятельной работе для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к самостоятельной работе
для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 517.1+517.2(073)

МАТЕМАТИКА. Неопределенный интеграл. Дифференциальные уравнения: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Е.Г. Булдакова, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев.* СПб, 2019. 64 с.

Методические указания содержат задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов на практических занятиях по высшей математике для всех специальностей и направлений подготовки бакалавриата по указанным разделам курса высшей математики.

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензенты: кафедра прикладной математики (Санкт-Петербургский государственный университет); проф. С.И. Перегудин (Санкт-Петербургский государственный университет)

МАТЕМАТИКА

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к самостоятельной работе для студентов всех специальностей и направлений бакалавриата

Сост.: *Е.Г. Булдакова, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *Е.Г. Булдакова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 28.10.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,72. Усл.кр.-отт. 3,72. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 75 экз. Заказ 919. С 306.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

Введение

Задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов-бакалавров содержат по 30 вариантов для каждого из двух разделов курса высшей математики второго семестра: неопределенный интеграл и дифференциальные уравнения.

Задания предназначены для использования во время практических занятий при разборе соответствующих разделов и подготовки к написанию контрольных и самостоятельных работ, сдаче коллоквиумов и экзаменов.

Эти индивидуальные задания разбираются и решаются самостоятельно каждым студентом во время практических занятий с использованием лекционного материала при непосредственной консультационной поддержке преподавателя. Разбор и решение этих заданий позволяют студентам уяснить и освоить основные понятия и методы указанных разделов высшей математики.

Такая индивидуальная самостоятельная работа позволяет продуктивно использовать аудиторное время практических занятий для каждого студента.

1. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка $F'(x) = f(x)$. Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных функций $F(x) + C$, где $F(x)$ – какая-либо конкретная первообразная; C – произвольная постоянная.

Множество первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Соответственно, операция нахождения первообразных называется *интегрированием*.

Задача отыскания первообразной является обратной по отношению к дифференцированию. Например, если $f(x) = x$, то $F(x) = \frac{x^2}{2}$, так как $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$. Следовательно, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Для простейших функций первообразные находят обращением таблицы производных, а для сложных функций используют специальные методы.

Как известно, производные элементарных функций выражаются через элементарные функции, но это неверно для интегралов: например, интегралы $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ не выражаются через элементарные функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Следствие. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$. Следствие. $\int df(x) = f(x) + C$;

3) Если $\lambda = \text{const}$, то $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$;

4) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Отметим, что операция интегрирования, так же как и операция дифференцирования, не зависит от обозначения переменных, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(t)dt = F(t) + C.$

Рассмотрим простейшие методы интегрирования:

1. Приведение к табличным интегралам с использованием тождественных преобразований и свойств интегралов покажем на примерах:

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \int x^{1/2}dx - 2\int x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 2\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 3/2} = \left| a^2 = 3/2, \Rightarrow a = \sqrt{3/2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3/2}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3} - x^2}} = \left| a^2 = \frac{4}{3}, \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2} + C.$$

2. Многие интегралы можно привести к табличным, если применить метод подведения под *знак дифференциала*, т.е. формулу дифференциала $f'(x)dx = df(x)$ в эквивалентной форме $\varphi(x)dx =$

$= d(\int \varphi(x)dx)$, где функция $\varphi(x)$ как бы «подводится» под знак дифференциала. Следующие частные случаи подведения под дифференциал необходимо запомнить наизусть:

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2);\ \ \mathrm{e}^x\,dx = d(\mathrm{e}^x);\ \ x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3);\ \frac{dx}{x} = d\big(\ln x\big);$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x);\ \ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);\ \ \cos x dx = d(\sin x);$$

$$\sin x dx = -d(\cos x);\ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);\ \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x).$$

Приведем примеры:

$$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \left|t = \ln x\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln\left|\,t\,\right| + C = \ln\left|\ln x\right| + C;$$

$$\int\frac{\mathrm{e}^x\,dx}{\mathrm{e}^{2x}-9} = \int\frac{d(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-9} = \left|t = \mathrm{e}^x\right| = \int\frac{dt}{t^2-9} = \left|a = 3\right| =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right| + C;$$

$$\int\frac{xdx}{\sin(2-3x^2)} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sin(2-3x^2)} = \frac{1}{2\cdot(-3)}\int\frac{d(-3x^2)}{\sin(2-3x^2)} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{d(2-3x^2)}{\sin(2-3x^2)} = \left|t = 2-3x^2\right| = -\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sin t} =$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = -\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{2-3x^2}{2} + C,$$

где $dx = d(x+C)$ и $dx = \dfrac{1}{C}d(Cx)$;

$$\int \frac{\sin x \operatorname{tg} \ln \cos x}{\cos x} dx = -\int \frac{\operatorname{tg} \ln \cos x}{\cos x} d(\cos x) = \left| t = \cos x \right| = -\int \frac{\operatorname{tg} \ln t}{t} dt =$$

$$= -\int \operatorname{tg} \ln \operatorname{t} d(\ln t) = \left| y = \ln t \right| = -\int \operatorname{tg} y dy = \ln\left|\cos y\right| + C =$$

$$= \ln\left|\cos \ln t\right| + C = \ln\left|\cos \ln \cos x\right| + \mathrm{C}.$$

3. Во втором способе мы ввели новую переменную, но только в качестве обозначения, чтобы привести интеграл к табличному относительно новой переменной. В этом случае под дифференциалом уже было получено нужное выражение. В общем случае, когда подведение под дифференциал невозможно или не приводит к желаемому результату, можно применить метод замены переменной, если $x = \varphi(t)$ и $\varphi(t), \varphi'(t), f(x)$ – непрерывны, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\, d\varphi(t) = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

Основная идея: если некоторое выражение (не слишком громоздкое) усложняет интеграл, то следует попробовать принять это выражение за новую переменную. Замена переменной включает три подготовительных этапа: 1) ввести новую переменную; 2) выразить старую переменную; 3) найти дифференциал старой переменной. После этого производят замену всех выражений под знаком интеграла.

Пример 1. Найти $\displaystyle\int \frac{xdx}{(2x+1)^3}.$

Решение. Подведение под дифференциал $xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2)$ не приводит к успеху, так как в знаменателе стоит $(2x+1)$. Интеграл усложняет то, что в знаменателе двучлен $(2x+1),$ а делить легко на одночлен! Поэтому попробуем принять $t = 2x+1.$ Тогда имеем

$$x = \frac{t-1}{2}, \Rightarrow dx = \left(\frac{t-1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt.$$

Следовательно, получим

$$\int \frac{xdx}{(2x+1)^3} = \int \frac{\frac{t-1}{2}\frac{1}{2}dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int (t^{-2} - t^{-3})dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-2}}{-2}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2x+1} + \frac{1}{2(2x+1)^2}\right) + C.$$

Интегрирование по частям основано на следующем утверждении: если $u = u(x)$, $v = v(x)$, u' и v' – непрерывны, то имеет место формула

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

✓*Замечание*. Если $dv = \varphi(x)dx$, то $v' = \varphi(x)$ и $v = \int \varphi(x)dx.$ Так как v – любая первообразная, то обычно произвольную постоянную в v опускают (ее ставят после окончания интегрирования).

Интегрирование по частям удобно в том случае, если $\int vdu$ находится проще, чем $\int udv.$ Ситуация такова для двух классов интегралов:

1. $\int P_n(x)\varphi(x)dx,$ где $P_n(x)$ – многочлен и $\varphi(x)$ – тригонометрическая или показательная функция, причем $u = P_n(x)$ и $dv = \varphi(x)dx,$ а интегрирование по частям применяют столько раз, какова степень многочлена;
2. $\int g(x)\varphi(x)dx,$ где $\int g(x)dx$ легко находится, а $\varphi(x)$ – обратная тригонометрическая или логарифмическая функция, причем $u = \varphi(x)$ и $dv = g(x)dx.$

Пример 2. Найти $\int x^2 \cos 2xdx$.

Решение. Запишем

$$\int x^2 \cos 2xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, \Rightarrow & du = 2xdx \\ dv = \cos 2xdx, \Rightarrow & v = \frac{1}{2}\int \cos 2xd(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\int x\sin 2xdx=\begin{vmatrix} u=x,\Rightarrow & du=dx \\ dv=\sin 2xdx,\Rightarrow & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\left(-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Пример 3. Найти $\int x\ln(x-1)dx.$

Решение. Имеем

$$\int x\ln(x-1)dx=\begin{vmatrix} u=\ln(x-1),\Rightarrow & du=\frac{dx}{x-1} \\ dv=xdx,\Rightarrow & v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)+1}{x-1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int(x+1)dx-\frac{1}{2}\ln|x-1|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Кроме того, интегрирование по частям применяется для специального приема приведения интеграла к самому себе. Например,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{vmatrix} u=\sqrt{a^2-x^2},\Rightarrow du=\frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv=dx,\Rightarrow v=\int dx=x \end{vmatrix}=$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом, получим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C,$$

где в силу произвольности C вместо $C/2$ снова пишем C.

Пример 4. Найти $\int \mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{x}, \Rightarrow x = t^2, \Rightarrow dx = 2tdt$:

$$\int \mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\,dx = \int \mathrm{e}^{-2t}\,2tdt = 2\int t\,\mathrm{e}^{-2t}\,dt = \left|\begin{array}{l} u = t, \Rightarrow du = 1dt \\ dv = \mathrm{e}^{-2t}\,dt, \Rightarrow \\ v = \int \mathrm{e}^{-2t}\,dt = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} \end{array}\right| =$$

$$= 2\left(\frac{t\,\mathrm{e}^{-2t}}{-2} - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}dt\right) = 2\left(\frac{t\,\mathrm{e}^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\,dt\right) = 2\left(\frac{t\,\mathrm{e}^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\right) + C =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{-2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}\right) + C = -\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}} + C.$$

Варианты заданий.

Вариант 1

1 $\int \frac{dx}{(3x-10)^{11}}$

2 $\int \frac{\sin\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}}dx$

3 $\int \cos^7 x\cdot \sin^3 x\cdot dx$

4 $\int (2x-7)\cos\frac{x}{2}dx$

5 $\int (x^3+1)\ln x\cdot dx$

6 $\int \frac{xdx}{x^2-2x+4}$

7 $\int \frac{2x+5}{(x^3+4x^2+8x)x}dx$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$

9 $\int \cos^2 7x\cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{4\cos^2 x-\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{3\sin 2x+4\cos 2x}$

Вариант 2

1 $\int \frac{xdx}{(3x^2+1)^3}$

2 $\int \frac{e^{-3tgx}dx}{\cos^2 x}$

3 $\int \sin^7 x\cdot \cos^3 x\cdot dx$

4 $\int (2x+5)e^{7x}dx$

5 $\int (7x-1)\ln x\cdot dx$

6 $\int \frac{xdx}{x^2+x+2}$

7 $\int \frac{4x+7}{(x^3-2x^2+3x)x}dx$

8 $\int \frac{3dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

9 $\int \cos^4 3x\cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{\sin^2 2x+1}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x+2}$

Вариант 3

1 $\int \frac{xdx}{(3x^2-2)^5}$ 2 $\int \frac{e^{-2ctgx}}{\sin^2 x}dx$

3 $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ 4 $\int (8x-1)e^{2x}dx$

5 $\int (2x+5)\ln x \cdot dx$ 6 $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3}dx$

7 $\int \frac{4x+3}{x^3+6x^2+9x}dx$ 8 $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \cos^2 2x \cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{6\cos^2 x-1}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x-1}$

Вариант 4

1 $\int \frac{xdx}{(4x^2-1)^4}$ 2 $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \cos^3 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ 4 $\int (7x+2)\sin 2xdx$

5 $\int (3x-1)\ln(x+1) \cdot dx$ 6 $\int \frac{xdx}{x^2-2x+5}$

7 $\int \frac{4x-1}{(x^3+6x^2+10x)x}dx$ 8 $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{x+1}-2\cdot\sqrt[4]{x+1}}$

9 $\int \sin^4 2x \cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{6\cos^2 x+5}$

11 $\int \frac{dx}{5\sin x-4\cos x+3}$

Вариант 5

1	$\int \frac{xdx}{(3x^2+2)^4}$	2	$\int \frac{\sqrt[3]{tgx+3}}{\cos^2 x}dx$
3	$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$	4	$\int (3x-4)\cos 2xdx$
5	$\int (x^2+5x)\ln x \cdot dx$	6	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+x+7}$
7	$\int \frac{x+3}{(x^3+9x)x}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$
9	$\int \sin^4 5x \cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{5\cos^2 x+3}$
11	$\int \frac{dx}{4\cos x-3+\sin x}$		

Вариант 6

1	$\int \sqrt[5]{3x-7} \cdot dx$	2	$\int \frac{ctg(tgx)}{\cos^2 x}dx$
3	$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$	4	$\int (x+1)e^{-4x}dx$
5	$\int (x^3+x)\ln x \cdot dx$	6	$\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-3x+9}$
7	$\int \frac{x-2}{(x^3+9x)(x+3)}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{x+2}}$
9	$\int \sin^4 2x \cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{4\cos^2 x-3}$
11	$\int \frac{dx}{3\cos x+1-\sin x}$		

Вариант 7

1	$\int \sqrt[7]{3x-1}dx$	2	$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
3	$\int \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$	4	$\int (4x+5)\cos 4x dx$
5	$\int (3x+7)\ln x\cdot dx$	6	$\int \frac{xdx}{x^2-8x+19}$
7	$\int \frac{x+1}{(x^3+4x)x}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x=1}-\sqrt[3]{x-1}}$
9	$\int \sin^4 3x\cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4}$
11	$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+1}$		

Вариант 8

1	$\int \frac{xdx}{(3x^2-8)^6}$	2	$\int \frac{\sqrt{ctgx+1}}{\sin^2 x}dx$
3	$\int \sin^9 x\cdot\cos x\cdot dx$	4	$\int (3x-1)\cos x dx$
5	$\int (x^2+2x)\ln x\cdot dx$	6	$\int \frac{xdx}{x^2-4x+5}$
7	$\int \frac{dx}{(x^2-3x+3)(x-1)^2}$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$
9	$\int \cos^4 2x\cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2}$
11	$\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x}$		

Вариант 9

1 $\dfrac{xdx}{(8x^2-3)^5}$

2 $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$

3 $\int\sqrt[3]{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$

4 $\int(2x-1)\cos 10xdx$

5 $\int x^5\cdot\ln x\cdot dx$

6 $\int\dfrac{(x-1)dx}{x^2+x+3}$

7 $\int\dfrac{dx}{x^4+2x^2}$

8 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

9 $\int\cos^4 3x\cdot dx$

10 $\int\dfrac{dx}{2\cos^2 x+3}$

11 $\int\dfrac{dx}{3\sin x-2\cos x}$

Вариант 10

1 $\int\dfrac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2-3}}$

2 $\int\dfrac{e^{-2ctgx}}{\sin^2 x}dx$

3 $\int\dfrac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$

4 $\int(2x-1)\sin xdx$

5 $\int x^4\ln x\cdot dx$

6 $\int\dfrac{(x+1)dx}{x^2-6x+13}$

7 $\int\dfrac{2x+5}{x^4+8x^2}dx$

8 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}}$

9 $\int\cos^4 2x\cdot dx$

10 $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x+3}$

11 $\int\dfrac{dx}{2\sin x-3\cos x}$

Вариант 11

1 $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x+7}}$

2 $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x} dx$

3 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$

4 $\int (3x+1)\sin 2x dx$

5 $\int (x^3+x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(x-2)dx}{x^2+4x+3}$

7 $\int \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx$

8 $\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

9 $\int \cos^6 x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2}$

11 $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$

Вариант 12

1 $\int e^{-6x-2} dx$

2 $\int \frac{tg(tgx)}{\cos^2 x} dx$

3 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$

4 $\int (2x-9)\cos 5x dx$

5 $\int (x^2-3x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(3x+7)dx}{x^2+3x+5}$

7 $\int \frac{x+3}{x^3+2x^2} dx$

8 $\int \frac{dx}{5\cdot\sqrt{x+1}-4\cdot\sqrt[4]{x+1}}$

9 $\int \sin^4 3x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3+5\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x-2\sin x+3}$

Вариант 13

1 $\int \sin(2x-5)dx$

2 $\int \frac{\sqrt{1+2tg^2 x}}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$

4 $\int (2x-4)\sin 3x dx$

5 $\int (x^2+6x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-4x+8}$

7 $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2}dx$

8 $\int \frac{dx}{5\cdot\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \sin^6 x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{4\cos x-\sin x+2}$

Вариант 14

1 $\int \cos(4x-2)dx$

2 $\int \frac{e^x dx}{(4+3e^x)^4}$

3 $\int \frac{\cos x dx}{4-\sin^2 x}$

4 $\int (2x-1)\sin\frac{x}{3}dx$

5 $\int (x^3-2x)\ln 3x \cdot dx$

6 $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-5x+7}$

7 $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2}dx$

8 $\int \frac{dx}{5\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{4\cos x-5\sin x+1}$

Вариант 15

1 $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$

2 $\int \frac{e^x dx}{(4-5e^x)^3}$

3 $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$

4 $\int (5x-4)e^{2x} dx$

5 $\int (x^4 - 3x^2)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(x-3)dx}{x^2 - 8x + 7}$

7 $\int \frac{2x+3}{x^3 + 4x^2 + x^4} dx$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

9 $\int \sin^2 4x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3 + 2\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x + 1}$

Вариант 16

1 $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$

2 $\int \frac{e^x dx}{(3-2e^x)^3}$

3 $\int \frac{\sin x dx}{2-\cos^2 x}$

4 $\int (2x-9)\sin 8x dx$

5 $\int (x^3 + 8x^2)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2 - 6x + 13}$

7 $\int \frac{x+3}{x^4 + 7x^2} dx$

8 $\int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}}$

9 $\int \sin^4 3x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3 + 4\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x - \sin x + 1}$

Вариант 17

1 $\int \frac{dx}{\sin^2(8x-7)}$ 2 $\int x^2 tg(x^3+3)dx$

3 $\int \cos^3 x \cdot \sin x \cdot dx$ 4 $\int (7x-3)e^{-2x}dx$

5 $\int (3x-1)\ln x \cdot dx$ 6 $\int \frac{xdx}{x^2-2x+5}$

7 $\int \frac{x+4}{x^3+2x^2+x^4}dx$ 8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\cdot\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \sin^2 2x \cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{2+5\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$

Вариант 18

1 $\int \sqrt{3x-1}dx$ 2 $\int x^3 \cos(x^4-2)dx$

3 $\int \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx$ 4 $\int (3x-1)e^{-3x}dx$

5 $\int (7x-1)\ln x \cdot dx$ 6 $\int \frac{(x+3)dx}{x^2-8x+15}$

7 $\int \frac{2x-3}{x^4+5x^2}dx$ 8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4\cdot\sqrt[3]{x}}$

9 $\int \cos^4 \frac{x}{4} \cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{2-3\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x+1}$

Вариант 19

1	$\int \sqrt[3]{4x+5}dx$	2	$\int \cos x \cdot tg(\sin x)dx$
3	$\int \cos^5 x \cdot \sin x \cdot dx$	4	$\int (2x-1)\sin 9x dx$
5	$\int (9x-1)\ln x \cdot dx$	6	$\int \frac{xdx}{x^2-2x+4}$
7	$\int \frac{2x+5}{(x^3+4x^2+8x)x}dx$	8	$\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$
9	$\int \cos^4 \frac{x}{3} \cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x}$
11	$\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+2}$		

Вариант 20

1	$\int \sqrt[5]{6x-3}dx$	2	$\int \cos^6 x \cdot \sin x \cdot dx$
3	$\int \frac{\sqrt{2\ln x+1}}{x} \cdot dx$	4	$\int (7x-3)e^{-4x}dx$
5	$\int (4x+3)\ln x \cdot dx$	6	$\int \frac{(x-7)dx}{x^2+8x+7}$
7	$\int \frac{x+4}{x^4+4x^3+16x^2}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}-\sqrt[3]{2x+5}}$
9	$\int \sin^4 \frac{x}{3} \cdot dx$	10	$\int \frac{dx}{2\cos^2 x+1}$
11	$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$		

Вариант 21

1 $\int \frac{dx}{\sin^2(8x+6)}$

2 $\int \frac{arcctgx}{1+x^2}dx$

3 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

4 $\int (3x+8)\sin 3x dx$

5 $\int (x^4-3x^3)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(2x-9)dx}{x^2-3x+5}$

7 $\int \frac{x^2-3}{x^4+4x^3+8x^2}dx$

8 $\int \frac{dx}{4\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$

9 $\int \sin^2 7x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{\cos^2 2x+3}$

11 $\int \frac{dx}{4\sin x-1}$

Вариант 22

1 $\int \frac{dx}{3\cos^2(3x-1)}$

2 $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3 $\int \sin^6 x \cdot \cos x \cdot dx$

4 $\int (4x-9)e^{-3x}dx$

5 $\int (x^5-3x^2)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(x+3)dx}{x^2-7x+9}$

7 $\int \frac{x-4}{x^4+2x^3+9x^2}dx$

8 $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{3x-1}-\sqrt[3]{3x-1}}$

9 $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+4}$

11 $\int \frac{dx}{2\sin x+5}$

Вариант 23

1 $\int \frac{dx}{(8x-7)^2}$

2 $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$

3 $\int \cos^8 x \cdot \sin x \cdot dx$

4 $\int (3x-7)e^{-2x} dx$

5 $\int (x+10)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(3x-10)dx}{x^2-10x+17}$

7 $\int \frac{x^2+2}{x^4+4x^2} dx$

8 $\int \frac{dx}{4\cdot\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \cos^2 12x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+2}$

11 $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$

Вариант 24

1 $\int \frac{dx}{(8x+7)^{10}}$

2 $\int 4^x \sin(4^x+3)dx$

3 $\int \cos^{10} x \cdot \sin x \cdot dx$

4 $\int (4x-9)e^{-5x} dx$

5 $\int (x^6-x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{(3x-9)dx}{x^2-6x+18}$

7 $\int \frac{x-3}{x^4+2x^2} dx$

8 $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[3]{x}}$

9 $\int \cos^2 10x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-6}$

11 $\int \frac{dx}{4\cos x-5\sin x}$

Вариант 25

1 $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-1}}$ 2 $\int e^x \cdot ctg(2e^x - 1)dx$

3 $\int \cos^9 x \cdot \sin x \cdot dx$ 4 $\int (2x-3)\cos 6x dx$

5 $\int (4x-1)\ln x \cdot dx$ 6 $\int \frac{xdx}{x^2+7x-1}$

7 $\int \frac{3x+1}{(x^3+6x^2+10x)x}dx$ 8 $\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \cos^2(3x+1)\cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$

Вариант 26

1 $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{3x+8}}$ 2 $\int e^{2x} \cdot tg(e^{2x})dx$

3 $\int \cos^{11} x \cdot \sin x \cdot dx$ 4 $\int (2x-1)\cos 5x dx$

5 $\int (4x+1)\ln x \cdot dx$ 6 $\int \frac{xdx}{x^2+6x-1}$

7 $\int \frac{4x-5}{(x^3-6x^2+8x)x}dx$ 8 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}-\sqrt[3]{4x-1}}$

9 $\int \cos^2 3x \cdot dx$ 10 $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$

11 $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

Вариант 27

1 $\int \frac{dx}{(4x-1)^4}$

2 $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x} dx$

3 $\int \cos^3 x \cdot \sin^7 x \cdot dx$

4 $\int (7x+2)\sin 2x dx$

5 $\int (3x=1)\ln(x+1)\cdot dx$

6 $\int \frac{xdx}{x^2-2x+5}$

7 $\int \frac{4x-1}{(x^3+4x^2+9x)x} dx$

8 $\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{x}-2\cdot\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \sin^4 7x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{6\cos^2 x+5}$

11 $\int \frac{dx}{5\sin x-4\cos x+3}$

Вариант 28

1 $\int \frac{dx}{(4x+3)^3}$

2 $\int \frac{\sqrt[3]{2tgx+3}}{\cos^2 x} dx$

3 $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$

4 $\int (3x-4)\cos 2x dx$

5 $\int (x^2+5x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{x-3}{x^2+x+7} dx$

7 $\int \frac{x+3}{(x^3+9x)x} dx$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

9 $\int \sin^4 5x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+3}$

11 $\int \frac{dx}{4\cos x-3}$

Вариант 29

1 $\int \sqrt[5]{3x-7}\,dx$

2 $\int \frac{ctg(2tgx)}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$

4 $\int (x+1)e^{-4x}dx$

5 $\int (x^3+7x)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{3x-1}{x^2-3x+9}dx$

7 $\int \frac{x-2}{(x^3+9x)(x+3)}dx$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{x+2}}$

9 $\int \sin^4 2x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{4\cos^2 x-3}$

11 $\int \frac{dx}{3\cos x+1}$

Вариант 30

1 $\int \sqrt[7]{3x+1}\,dx$

2 $\int \frac{\sqrt{ctgx-1}}{\sin^2 x}dx$

3 $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$

4 $\int (4x+5)\cos 3x dx$

5 $\int (3x+7)\ln x \cdot dx$

6 $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$

7 $\int \frac{x+1}{(x^3+4x)x}dx$

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

9 $\int \cos^4 3x \cdot dx$

10 $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4}$

11 $\int \frac{dx}{4\sin 2x+3\cos 2x}$

2.Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, искомую функцию $y = \varphi(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 .$$

Отметим, что порядок старшей производной определяет порядок уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется дифференцируемая *n* раз функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Так, например, дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки под действием силы упругости, имеет вид $y'' + \omega^2 y = 0$ при $\omega = \text{ñînst}$.

Проверим, что функция $y_1 = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением данного уравнения. Имеем $y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x$, $y'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x$.

После подстановки в искомое дифференциальное уравнение получим тождество:

$$-C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x + \omega^2 \left(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x\right) = 0 .$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной *C* является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной *C*, называются *частными*.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ (или $y\Big|_{x=x_0} = y_0$), называется *задачей Коши*.

Если общее решение получено в неявном виде $\varphi(x, y, C) = 0$, то последнее равенство называется *общим интегралом* дифференциального уравнения, а равенство $\varphi(x, y, C) = 0$ – *частным интегралом*.

Пример 1. Найти частный интеграл уравнения $(x^2 - 1)y' =$, $= 2x\sqrt{y}$ удовлетворяющий начальному условию $y\Big|_{x=-\sqrt{2}} = 1$.

Решение. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что равенство вида

$$2\sqrt{y} - \ln\left|\, x^2 - 1 \,\right| = C$$

является общим интегралом данного уравнения. Подставим $x = -\sqrt{2}$ и $y = 1$ в это равенство:

$$2\sqrt{1} - \ln\left|\, \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 \,\right| = C,$$

т.е. $C = 2$. Таким образом, частный интеграл исходного уравнения имеет вид

$$2\sqrt{y} - \ln\left|\, x^2 - 1 \,\right| = 2.$$

Геометрически общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство *интегральных кривых* на плоскости Oxy; частное решение (частный интеграл) задает одну кривую из этого семейства.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Разрешив уравнение (1) относительно y', получим уравнение первого порядка в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, дифференциальное уравнение (2) можно записать в симметричном виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – известные функции.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Уравнение первого порядка вида

$$f_1(x) f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0 \tag{3}$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными.***

Умножив уравнение (3) на $\dfrac{1}{f_2(y)\varphi_1(x)}$ $\left(f_2(y)\cdot\varphi_1(x) \neq 0\right)$, получим уравнение с ***разделенными переменными***:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \quad \text{или } M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

почленно интегрируя которое, найдем общий интеграл уравнения (3):

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Разделим переменные в данном уравнении

$$\frac{xdx}{1 + x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0.$$

Почленно интегрируем

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C,$$

получим

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C_1 \ (\text{áåðåì} \quad C = \ln C_1).$$

Отсюда

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1^2 .$$

Удовлетворяем начальному условию: $(1 + 0^2)(1 + 1^2) = C_1{}^2$, тогда $C_1{}^2 = 2$ и уравнение искомой интегральной кривой имеет вид

$$(1 + x^2)\ (1 + y^2) = 2.$$

Если переменные разделить не удается, то следует проверить, не является ли уравнение однородным. Для этого необходимо привести его к виду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

и определить, являются ли функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородными одной степени или нет. Напомним, что функция $\varphi(x,y)$ является *однородной степени n*, если для любого $\lambda \neq 0$ имеет место равенство $\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \varphi(x,y)$. Если уравнение приводится к виду $y' = f(x,y)$ или $x' = \tilde{f}(x,\ y)$, то оно будет ***однородным*** в том случае, когда $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ или $\tilde{f}(x,y) = \tilde{g}\left(\frac{x}{y}\right)$ – однородная функция нулевой степени. Метод решения основан на введении новой искомой функции $u(x) = \frac{y}{x}$ èëè $u(y) = \frac{x}{y}$: $y = ux, y' = u'x + u$ или $x = yu, x' = u + yu'$ и после замены в уравнении всегда разделяются переменные.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2 + y^2)\ dx = 2xydy$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $A(4;\ 0)$.

Решение. Очевидно, что $M(x,y) = x^2 + y^2$ и $N(x,y) = -2xy$ – однородные функции второй степени. Используем подстановку $y = u(x)\cdot x$. Тогда $y' = u'x + u$. Следовательно, получим

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}; \;\; u'x + u = \frac{1+u^2}{2u}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2u}{1-u^2}\,du\,.$$

После интегрирования запишем

$$\ln|\,x\,| = -\ln|\,1-u^2\,| + \ln|\,2C\,|$$

или, взяв $(\pm\tilde{N}) = \tilde{N}$, получим

$$\ln\left|\,x\left(1-u^2\right)\right| = \ln|\,2C\,|; \quad x\cdot\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = \pm 2C\,;$$

$$x^2 - y^2 = 2Cx\,.$$

Окончательно общий интеграл $(x-C)^2 - y^2 = C^2$ и определяет семейство гипербол. С учетом начального условия, т.е. $y(4) = 0$ (кривая проходит через точку A), вычислим C:

$$4^2 - 0^2 = 2C\cdot 4 \;\text{ и }\; C = 2.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно линейно относительно искомой функции и ее производной. Общий вид линейного уравнения: $y' + p(x)y = q(x)$.

Одним из способов решения такого уравнения является использование подстановки $y = u(x)v(x)$ (метод Бернулли).

Пример 4. Решить уравнение $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$.

Решение. Очевидно, что данное уравнение является линейным: $p(x) = -\,\mathrm{tg}\,x$, $q(x) = \sin x$. Тогда ищем решение в виде $y = u(x)\cdot v(x)$; $y' = u'v + uv'$.

Подставляя эти выражения в уравнение, получим

$$u'v + uv' - \mathrm{tg}\,x\cdot uv = \sin x\,;$$

$$(u' - \mathrm{tg}\,x\cdot u)v + uv' = \sin x\,. \tag{4}$$

Так как уравнение одно, а неизвестных функций две, то одна из них, например функция $u(x)$ свободная, поэтому можно на нее наложить дополнительное условие: $u' - \operatorname{tg} x \cdot u = 0$. Разделим переменные в последнем уравнении, тогда при $(\pm \tilde{N}) = \tilde{N}$ имеем

$$\frac{du}{u} = \operatorname{tg} x dx;$$

$$\ln|\,u\,| = -\ln|\cos x| + \ln C, \Rightarrow |u| = \frac{C}{|\cos x|}, \Rightarrow u = \frac{\pm C}{\cos x}.$$

Таким образом, $u = C / \cos x$. Так как необходимо, чтобы любая функция $u = u(x)$ удовлетворяла уравнению $u' - \operatorname{tg} x \cdot u = 0$, то полагаем $u = 1/\cos x$ ($C = 1$). Тогда из уравнения (4) получим

$$\frac{1}{\cos x} v' = \sin x; \quad v' = \sin x \cos x; \quad v = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Итак, $y = \dfrac{1}{\cos x}\left(C + \dfrac{1}{2}\sin^2 x\right)$.

Отметим, что использование подстановки $y = uv$ для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка приводит к формуле вида (формула Бернулли):

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx\right]. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{6}$$

где n – любое действительное число, кроме нуля и единицы (при $n = 0$ имеем линейное уравнение, а при $n = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными). Уравнение (6) называется ***уравнением Бернулли***, и метод его решения основан на замене $z = y^{1-n}$, что сводит его к линейному уравнению. Отметим, что для решения уравнения Бернулли можно использовать и метод Бернулли

Пример 5. Решить уравнения:

$$1.\ y' + \frac{y}{x} = -xy^2. \quad 2.\ y'(2x - y^2) = 1.$$

Решение. 1. Здесь $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = -x$, $n = 2$. Положим $z = y^{1-2} = y^{-1}$, подставляя $y = z^{-1}$ и $y' = -z'/z^2$ в исходное уравнение, получим

$$z' - \frac{z}{x} = x.$$

Воспользовавшись формулой (5), где $p(x) = -x^{-1}$, $q(x) = x$, находим

$$z = \mathrm{e}^{+\int \frac{dx}{x}} \left[C + \int x\, \mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right] = x\left[C + \int dx\right] = x(C + x).$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = z^{-1} = \left(x^2 + Cx\right)^{-1}.$$

2. Это уравнение линейно относительно функции $x(y)$. Так как $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, то оно примет вид

$$x' = 2x - y^2 \text{ или } x' - 2x = -y^2.$$

Здесь $p(y) = -2,\ q(y) = -y^2.$ Используя формулу (5), получим

$$x = \mathrm{e}^{2y}(C - \int y^2\, \mathrm{e}^{-2y}\, dy).$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int y^2\, \mathrm{e}^{-2y}\, dy = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, общим решением данного уравнения является функция:

$$x = C\,\mathrm{e}^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}.$$

Варианты заданий.

Вариант 1

1. $y'\sin x = y\ln y$;

2. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

3. $y' - x^3 y = x^7$;

4. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$;

5. $y'' - \dfrac{2}{x}y' = x^5$;

6. $y'' = e^{2y}$;

7. $y'' + 4y' + 13y = 2x - 1 + e^{-2x}$;

8. $y'' - 2y' + y = (x^3 + 1)e^x - \sin 2x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 2

1. $y' = (2x - 1)$

2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$

3. $y' - 2x^2 y = x^5;$

4. $y' + 2y = 3e^x y^4;$

5. $y'' + \frac{3}{x} y' = \sqrt[3]{x}\ ;$

6. $2(y')^2 = (y-1)y''$;

7. $y'' - 8y' + 17y = x + 1 - 2e^{-x}$;

8. $y'' + 2y' + y = (x^2 + 1)e^{-x} \sin x + 2e^{-x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 3

1. $x(y^6+1)+y^2y'(x^4+1)=0$

2. $(xy'-y)\cos^2\dfrac{y}{x}+x=0;$

3. $x^2y'-2xy+x^3=0;$

4. $y'+2\dfrac{y}{x}+\sqrt{y}=0;$

5. $xy''-y'=2x^2e^x;$

6. $(y^2-1)y''+2(y')^2=0;$

7. $y''-8y'+17y=10e^{2x}-x^2;$

8. $y''+6y'+9y=e^{3x}\cos 3x-xe^{-3x}$

(коэффициенты не вычислять)

Вариант 4

1. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$

2. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

3. $y'+x^4y=x^9$;

4. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2\sqrt{y}$;

5. $y''ctgx+y'=2$;

6. $2yy''=(y')^2$;

7. $y''-2y'+10y=e^x-2x^2$;

8. $y''+4y'+4y=x\sin 3x-e^{-2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 5

1. $(1+e^{y})dx = e^{x}dy$

2. $xy' - y = \dfrac{x}{arctg\,\dfrac{y}{x}}$;

3. $y' + xy = x^{3}$;

4. $y' + \dfrac{2}{x}y = e^{x}\sqrt{y}$;

5. $xy'' = y' + 2$;

6. $1 + (y')^{2} + 2yy'' = 0$;

7. $y'' + 4y' + 5y = x^{2} - 1 + e^{-x}$;

8. $y'' - 6y' + 5y = (x^{3} + x)e^{x} - \sin x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 6

1. $y' - 3x^4(y^2 + 1) = 0$;

2. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}}$;

3. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2}$;

4. $y' - 2xy = x^3 y^3$;

5. $y'' - \dfrac{y'}{x} = 1$;

6. $2yy'' = 1 + (y')^2$;

7. $y'' + 4y' + 8y = 2x - 1 + e^{-2x}$;

8. $y'' + 6y' + 8y = x\sin x + x^2 \cos x + e^{-2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 7

1. $y' + \sin x(y^2 + 2y + 2) = 0$;

2. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y^2 - x^2}$;

3. $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x^2}$;

4. $y' + 3xy = xy^2$;

5. $y'' - \dfrac{y'}{x} = x^2 - 2$;

6. $y'' = 2y'y$;

7. $y'' - 4y' + 8y = x + 4 - e^x$;

8. $y'' + 2y' - 8y = x\cos 2x - \sin 2x + e^{2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 8

1. $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$;

2. $2x - y + (x + y)y' = 0$;

3. $y' + 2x^2 y = 3x^5$;

4. $y' + 2y = xy^3$;

5. $y'' + \frac{3}{x} y' = x^4$;

6. $y'' + yy' = 0$;

7. $y'' + 6y' + 10y = e^{-x} + 2x^2 - 2$;

8. $y'' + 2y' - 3y = (x + 2)e^{-2x} \sin 3x - 2e^x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 9

1. $y' = (2y+1)tgx$

2. $x^2 y' = y(x+y);$

3. $y' - x^2 y = 2x^5;$

4. $y' - 2y = 2e^x y^3;$

5. $y'' - \frac{3}{x} y' = \sqrt{x}$;

6. $(y')^2 + yy'' = 0$;

7. $y'' - 6y' + 10y = x^2 - 2x + e^{2x}$;

8. $y'' + 4y' - 5y = xe^x \cos 3x - e^x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 10

1. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$;

2. $(\sin\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\cos\frac{y}{x})xy' = x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}$;

3. $x^2 y' - 3xy = -x^3$;

4. $y' + \frac{y}{2} + y^3 = 0$;

5. $x(y'' + 1) + y' = 0$;

6. $(\frac{1}{4} - y^2)y'' = (y')^2$;

7. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$;

8. $y'' + 4y' + 4y = (x^3 + 1)\cos 2x + \sin 2x + 3e^{-2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 11

1. $y' - 2x^3(y^2 + 1) = 0$

2. $xy' - y = x\sin^2\dfrac{y}{x}$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 e^x$;

4. $y' + 2xy = x^3 y^3$;

5. $y'' + 2y' = 3x^2$;

6. $(y'')^2 + (y')^2 = 1$;

7. $y'' + 3y' = 3e^{-3x}$;

8. $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{-x}\cos 2x + e^{-2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 12

1. $y' = \dfrac{1-x^2}{1+y^2}$

2. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$;

3. $y' + x^2 y = x^5$;

4. $xy' - 3y = x^3 y^2$;

5. $y'' - \dfrac{y'}{x+1} = x(x+1)$;

6. $y'' - y^2 (y')^3 = 0$;

7. $y'' + 3y' + 3y = e^x + 10 - 6x$;

8. $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^x \sin 4x - e^{-3x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 13

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

2. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2}$;

3. $xy' - y = x^2 e^{-2x}$;

4. $xy' + 3y = xy^2$;

5. $2xy'' = (y')^2 - 4$;

6. $yy'' - (y')^2 = 0$;

7. $y'' - 2y' + y = 4e^x$;

8. $y'' + 6y' - 7y = xe^{2x}\sin 2x + x^3$

(коэффициенты не вычислять)

Вариант 14

1. $y' = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$;

2. $y + \sqrt{xy} = xy'$;

3. $y' + 4x^4 y = x^9$;

4. $xy' + 4y = xy^3$;

5. $2xy''y' = (y')^2 + 16$;

6. $y'' + 2y(y')^3 = 0$;

7. $y'' + y' = 2x - 1 + e^x$;

8. $y'' - 6y' + 9y = (x^3 - 2x)e^{3x} - \sin x$

(коэффициенты не вычислять

Вариант 15

1. $y'\sin y = \sqrt{x^2 - 1}$

2. $x^2 y' + y^2 = xyy'$;

3. $y' + xy = 3x^3$;

4. $y' + xy = x^3 y^3$;

5. $y'' + \dfrac{xy'}{1 - x^2} = x$;

6. $y'' y \ln y + (y')^2 = 0$;

7. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x} - e^{2x}$;

8. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x \sin 2x + 3e^x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 16

1. $\cos y y' = 2\sqrt{4 + x^2}$

2. $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0;$

3. $y' - xy = 2x^3;$

4. $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0;$

5. $y'' + \dfrac{xy'}{x^2 + 1} = x\,;$

6. $y(y+1)y'' + (y')^2 = 0\,;$

7. $y'' + 2y' - 3y = (x+2)e^{2x} - e^x\,;$

8. $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-x} \cos 4x - e^{-3x}$

(коэффициенты не вычислять)

Вариант 17

1. $e^{x+3y}dy = xdx$

2. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$;

3. $y' + x^3 y = x^7$;

4. $y' - \dfrac{3}{x} y = x^4 y^2$;

5. $y'' + \dfrac{2}{x} y' = x^2 + 1$;

6. $2(y')^2 = yy''$;

7. $y'' - 2y' + 10y = 2x - 3 + e^{-x}$;

8. $y'' + 8y' + 16y = (x^3 + 4)e^{-4x} + \cos 3x$

(коэффициенты не вычислять)

Вариант 18

1. $y' = \sin^2 y \cos^2 x$;

2. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$;

3. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$;

4. $y' + 4y + \sqrt[4]{y} = 0$;

5. $y'' tgx = y' + 1$;

6. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$;

7. $y'' - 5y' + 6y = 3\sin 2x - \cos 2x + x$;

8. $y'' - 2y' + 17y = xe^{-x} \cos 4x - x^2$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 19

1. $y' = \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 x}$;

2. $y'(2x^2 + xy) = xy + y^2$

3. $xy' - 2y + x^2 = 0$;

4. $y' - \dfrac{y}{x} + 3y^2 = 0$;

5. $2xy''y' = (y')^2 - 4$;

6. $4(y'')^2 = 1 + (y')^2$;

7. $y'' - 4y' + 3y = 2\sin x + e^x$;

8. $y'' + 6y' + 10y = (x^2 \cos x + x \sin x)e^{-3x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 20

1. $\dfrac{y}{y'} = x \ln y$;

2. $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$;

3. $y' - y = e^x$;

4. $y' - \dfrac{y}{x} = y^3$;

5. $y'' = y' + x$;

6. $y''(1 + y) = (y')^2 + y'$;

7. $y'' - 6y' + 8y = 3e^{3x} + e^{2x}$;

8. $y'' + 4y' + 5y = x^2 e^{-2x} \sin x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 21

1. $y'\sqrt{1+x^2} - \sin^2 y = 0$

2. $xy' = y - xe^{-\frac{y}{x}}$;

3. $y' - x^4 y = x^9$;

4. $y' + \dfrac{2}{x} y = x^3 y^2$;

5. $(y'' + 1)(x - 1) = 3y'$;

6. $2y'' = 3y^{-2}$;

7. $y'' + 2y' + 10y = 3e^x - 3x^2$;

8. $y'' - y' - 2y = xe^{3x}\cos x + \sin x - e^{2x}$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 22

1. $(1+e^{3y})xdx = e^{3y}dy$;

2. $2\sqrt{xy} - y = xy'$;

3. $xy' + y = \sin x$;

4. $y' - 3y = e^{2x}y^3$;

5. $xy'' = y' + x^2$;

6. $yy'' + (y')^2 = y'$;

7. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + e^{3x}$;

8. $y'' + 4y' + 13y = xe^{-2x}\cos 3x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 23

1. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$;

2. $y^2 - 2xy = x^2 y'$;

3. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$;

4. $y' + 2y = e^x y^2$;

5. $y'' + \dfrac{1}{x} y' = 0$;

6. $y''y + (y')^2 = y'$;

7. $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 2 + e^{2x}$;

8. $y'' + 6y' + 10y = xe^{-3x} \sin x + +x + 2$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 24

1. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$;

2. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$;

3. $xy' - y = x^2 \sin x$;

4. $y' + 2xy = 2xy^3$;

5. $y''x \ln x = 3y'$;

6. $y'' = y'e^y$;

7. $y'' + 6y' + 9y = 3\cos 2x + e^{-3x}$;

8. $y'' - 8y' + 7y = x^2 e^x \sin 2x + e^x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 25

1. $(x^2 - 1)y' = 2xy\ln y$

2. $xy' + x\cos\dfrac{y}{x} - y + x = 0;$

3. $y' - \dfrac{4}{x}y = \sqrt{x};$

4. $y' - 3y = (x+3)y^2;$

5. $y'' + \dfrac{2}{x}y' = x^4;$

6. $y''y^3 = 1;$

7. $y'' - 6y' + 9y = 2\sin x + e^{3x};$

8. $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 3)e^{-2x} + x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 26

1. $\dfrac{1}{x(y-1)}+\dfrac{y'}{y(x+2)}=0$;

2. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y+x$;

3. $y'-\dfrac{2}{x}y=3\sqrt{x}$;

4. $y'+3y=(x+2)y^2$;

5. $y''+\dfrac{3}{x}y'=x^2$;

6. $y''tgy=(y')^2$;

7. $y''+4y'-5y=2e^x-x+1$;

8. $y''-8y'+16y=x^2e^{4x}-e^{-x}\cos 3x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 27

1. $x(y^2+1)+y^2y'(x^2+1)=0$

2. $(xy'-y)\sin^2\dfrac{y}{x}+x=0;$

3. $xy'-2y+x^2=0;$

4. $y'+\dfrac{3y}{x}=-y^2x;$

5. $xy''-y'=x^2e^x;$

6. $y^2y''+y'=0;$

7. $y''-y'-6y=5e^{3x}+x;$

8. $y''+10y'+25y=x^2e^{-5x}+xe^{-x}\cos x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 28

1. $xydx + \dfrac{dy}{\ln y}(x+1) = 0$

2. $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$;

3. $y' + \dfrac{3y}{x} = x$;

4. $xy' - y = x^2y^2$;

5. $y'' + \dfrac{y'}{x} = xy^3$;

6. $yy'' + 2y' = 0$;

7. $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} + 2x$;

8. $y'' + 2y' + 5y = x^2e^{-x}\sin 2x$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 29

1. $y' = y^2 \sin^2 x$

2. $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$;

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = x;$

4. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^3$;

5. $(x+1)y'' = y'$;

6. $y'' = 4yy'$;

7. $y'' - 4y' + 4y = x - 2 + e^{2x}$;

8. $y'' + 9y = 2\cos 3x - \sin 3x + x^2$
(коэффициенты не вычислять)

Вариант 30

1. $xy' = y^2 + 2y$;

2. $y' = \dfrac{x+y}{y}$;

3. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$;

4. $xy' - 2y = x^2 y^3$;

5. $xy'' - y' = 0$;

6. $y''y + (y')^2 = 0$;

7. $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x} + 2x^2$;

8. $y'' + 8y' + 16y = xe^{-4x} + 2\sin x - x\cos x$
(коэффициенты не вычислять)

Библиографический список

1. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 102 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71689

2. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71690

3. Математический практикум. Часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, М.А. Зацепин, В.В. Ивакин, В.А. Семенов, С.Е. Мансурова. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 162 с.
http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D533720026<.>

4. Математический практикум. Часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье. Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, Т.Р. Акчурин, С.Е. Мансурова, Т.С. Обручева, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 152 с.
http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D147020047<.>

5. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.
http://znanium.com/catalog/product/851522

6. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с.
https://e.lanbook.com/book/65055

Содержание