ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

____

Руководитель программы аспирантуры
профессор А.М. Щипачёв

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТРАНСПОРТА И ХРАНЕНИЯ НЕФТИ И ГАЗА

Подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Область науки:	2. Технические науки
Группа научных специальностей:	2.8. Недропользование и горные науки
Научная специальность:	2.8.5. Строительство и эксплуатация нефтегазопроводов, баз и хранилищ
Отрасли науки:	Технические
Форма освоения программы аспирантуры:	Очная
Срок освоения программы аспирантуры:	4 года
Составитель:	к.т.н.В.В. Пшенин

ВВЕДЕНИЕ

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Определения и основные свойства Интеграловразличных видов (краткий обзор)

1. Пусть в области $\mathcal{D}$ на плоскости или в пространстве или на криволинейной поверхности (рис. 1) задана функция $f(M)$.

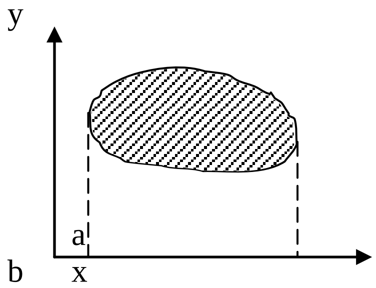

Рис. 1.1

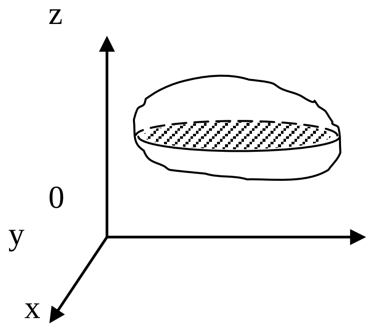

Рис. 1.2

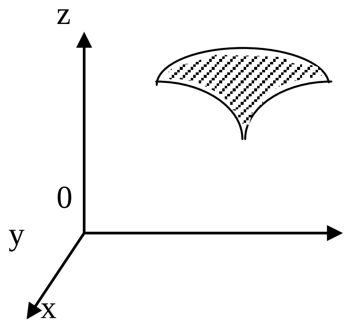

Рис. 1.3

Выполним следующее построение. Разделим область $\mathcal{D}$ на час- ти с мерами (площадями или объемами) $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, ..., \Delta\mu_n$, на каждой части выберем по точке M_1, M_2, K, M_n и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\mu_k. \qquad (1.1)$$

Обозначим Δ наибольший из диаметров частей (диаметром множества называется наибольшее расстояние между точками множества). Предел суммы (1.1) при условии $\Delta \to 0$ называется интегралом (соответственно двойным, тройным и поверхностным) от функции f(M) по области $\mathcal{D}$ и обозначается $\int\limits_{\mathcal{D}} f(M)\,d\mu$:

$$\int_D f(M)d\mu = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\mu_k.$$

Если функция непрерывна в области $\mathcal{D}$, включая точки границы, то этот предел существует. Основные свойства интеграла:

1) свойство линейности:

$$\int_D (f_1 + f_2)d\mu = \int_D f_1 d\mu + \int_D f_2 d\mu, \int_D cf d\mu = c\int_D f d\mu (c = \mathrm{const});$$

2) свойство аддитивности: если область $\mathcal{D}$ разделена на части $D_1, D_2, \dots, D_n$, то

$$\int_D f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{D_k} f\,d\mu.$$

Другие обозначения интегралов: $\iint\limits_{\mathcal{D}} f\,ds$ – для двойного и поверхностного, $\iiint\limits_{\mathcal{D}} f\,dv$ – для тройного. Будем употреблять термины: ds – элемент площади, dv – элемент объема. Вычисление двойного интеграла сводится к повторному интегрированию:

$$\iint_D f(M)ds = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

где $[a, b]$ – проекция области $\mathcal{D}$ на ось абсцисс, $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – уравнения нижней и верхней границ области $\mathcal{D}$. Тройной интеграл приводится к двойному по формуле

$$\iiint_D f(M)dv = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_0} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

где $\mathcal{D}_0$ – проекция области $\mathcal{D}$ на плоскость xOy, $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$ – уравнения нижней и верхней границ области $\mathcal{D}$. Если поверхность задается уравнением $z = z(x,y)$, где функция $z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x, z'_y, то интеграл по поверхности приводится к двойному интегралу по формуле

$$\iint_D f(x,y,z)ds = \iint_{D_0} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy,$$

где $\mathcal{D}_0$ – проекция поверхности $\mathcal{D}$ на плоскость xOy.

2. Пусть на кривой AB (рис. 2) задана функция f(M). Впишем в кривую ломаную $M_0M_1M_2\dots M_{n-1}M_n$, где $M_0 = A, M_n = B$.

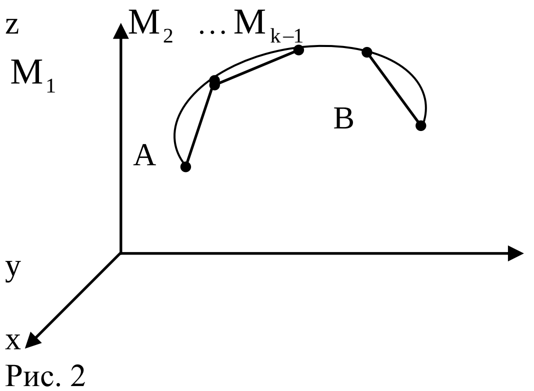

Рис. 2

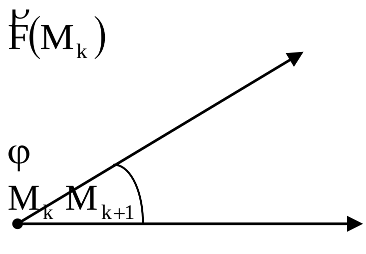

Рис. 3

Обозначим длины звеньев $\Delta\ell_0, \Delta\ell_1, \dots, \Delta\ell_{n-1}$ и составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta\ell_k.$$

Предел этой суммы при условии $\Delta \to 0$, где Δ – наибольшая из длин звеньев, называется криволинейным интегралом первого рода от функции f(M) по кривой AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)d\lambda$:

$$\int_{AB} f(M)d\ell = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta\ell_k.$$

Если кривая AB задается параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \le t \le \beta), \qquad (1.2)$$

где правые части имеют непрерывные производные, то имеет место формула

$$\int_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt.$$

3. Пусть на кривой AB задана вектор-функция $\vec{F}(M)$. Впишем в кривую AB ломаную, как в п. 2, и будем рассматривать звенья ломаной как векторы: $\overrightarrow{\Delta\ell_k} = \overrightarrow{M_k M_{k+1}}$, $k = 0,1,\dots,n-1$ (рис. 3). Обозначим $\vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k}$ скалярное произведение векторов$\vec{F}(M_k), \overrightarrow{\Delta\ell_k}$:

$$\vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k} = \left|\vec{F}(M_k)\right| \left|\overrightarrow{\Delta\ell_k}\right| \cos \quad \phi.$$

Составим сумму $\sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k}$.

Предел этой суммы при условии $\Delta \to 0$ называется криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $\vec{F}(M)$ по кривой AB и обозначается $\int_{AB} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{d\ell}$:

$$\int_{AB} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{d\ell} = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta\ell_k}.$$

Обозначим $\{P,Q,R\}, \{dx,dy,dz\}$ проекции векторов $\vec{F}$, $\overrightarrow{d\lambda}$ на оси координат. В силу правила векторной алгебры скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций на координатные оси, поэтому

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Интеграл по кривой с уравнениями (1.2) вычисляется по формуле

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_\alpha^\beta (Px' + Qy' + Rz')dt,$$

где P, Q, R вычисляются в точке $(x(t), y(t), z(t))$. Если кривая AB лежит в плоскости xOy, то

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta (Px' + Qy')dt.$$

Для криволинейных интегралов первого и второго рода верны свойства линейности и аддитивности. Кроме того, при изменении направления на кривой AB интеграл первого рода не изменяется, интеграл второго рода меняет знак на противоположный:

$$\int_{AB} fd\ell = \int_{BA} fd\ell, \int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\int_{BA} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}.$$

Интеграл второго рода по замкнутой кривой L (конец B совпадает с началом A) обозначается $\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$; при этом необходимо указать на кривой направление, по которому берется интеграл.

1.2. Основные понятия и правила Векторного анализа(краткий обзор)

1. Будем далее называть функцию $u(x,y,z,\dots)$ гладкой, если она имеет непрерывные частные производные $u'_x, u'_y, u'_z, \dots$. Поверхность $f(x,y,z)=0$ будем называть гладкой, если функция f гладкая, и кусочно-гладкой, если она состоит из нескольких гладких кусков. Нормалью к гладкой поверхности в точке M_0 называется проходящая через нее прямая, перпендикулярная касательной плоскости. Одно из двух возможных направлений нормали в каждой точке поверхности удобно задавать с помощью орта $\vec{n}$ – вектора длиной единица, направленного по нормали в соответствующую сторону (рис. 4).

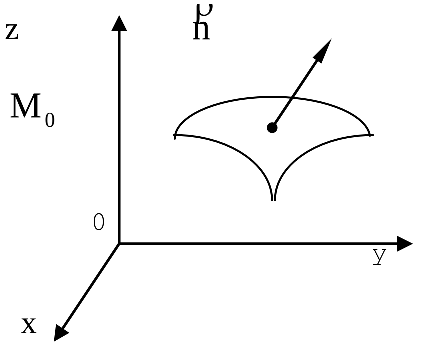

Рис. 4

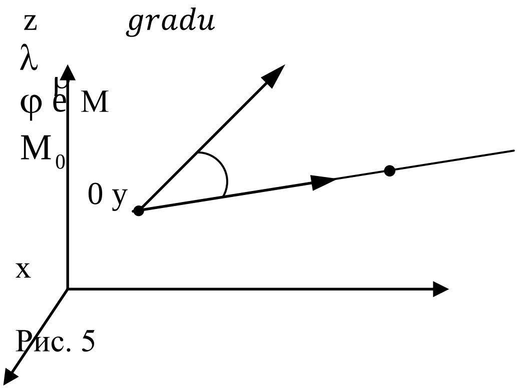

Рис. 5

2. Производной гладкой функции $u(x,y,z)$ в точке M_0 по направлению λ (рис. 5) называется число

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{M\to M_0} \frac{u(M)-u(M_0)}{M_0M}.$$

Это число характеризует скорость изменения величины $u(x,y,z)$ при смещении из точки M_0 по направлению λ. Имеет место формула

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (1.3)$$

где α, β, γ – углы направления λ с осями координат, частные производные вычисляются в точке M_0. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами направления λ и представляют собой проекции на оси координат орта $\vec{e}$ направления λ:

$\vec{e}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Градиентом гладкой функции $u(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{grad} u\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \qquad (1.4)$$

Формула (1.3) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{e} = |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{e}| \cos\phi = |\operatorname{grad} u| \cos\phi.$$

Отсюда следует: производная по направлению равна проекции градиента на это направление и достигает максимума, если $\varphi = 0$, т. е. если за направление λ принять направление градиента. При этом
$\max \frac{\partial u}{\partial \ell} = |\mathrm{grad} u|$.
Таким образом, градиент указывает направление и скорость наибыстрейшего возрастания величины $u(x, y, z)$ при смещении из точки M_0.

3. Поверхностями уровня функции $u(x, y, z)$ называются поверхности $u(x, y, z) = \mathrm{const}$. Через каждую точку области определения функции $u(x, y, z)$ проходит точно одна поверхность уровня. Справедливо утверждение: градиент гладкой функции в каждой точке направлен по нормали к проходящей через нее поверхности уровня в сторону возрастания уровня.

4. Если в каждой точке M области $\mathcal{D}$ в пространстве задан определенный вектор $\vec{F}$ $\breve{F}$, то говорят, что в области $\mathcal{D}$ задано векторное поле $\vec{F} = \vec{F}(M)$. Примеры векторных полей:
$\vec{E}(M)$ – поле электрической напряженности;
$\vec{H}(M)$ – поле магнитной напряженности;
$\vec{P}(M)$ – поле силы тяжести;
$\vec{v}(M)$ – поле скорости жидкости или газа;
$\mathrm{grad} u(M)$ – поле градиента гладкой функции $u(x, y, z)$.

Векторное поле удобно изображать с помощью векторных линий. Векторной линией поля $\vec{F}$ называется линия, в каждой точке которой вектор поля направлен по касательной к ней. На рисунках 6 и 7 изображены векторные линии поля $\vec{E}$ точечного заряда и поля $\vec{H}$ вблизи проводника с током.

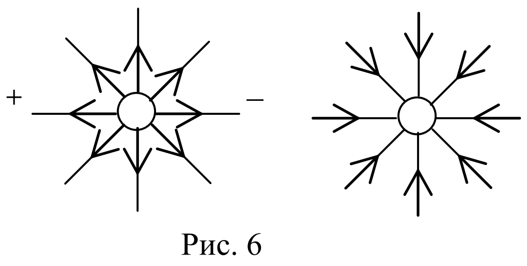

Рис. 6

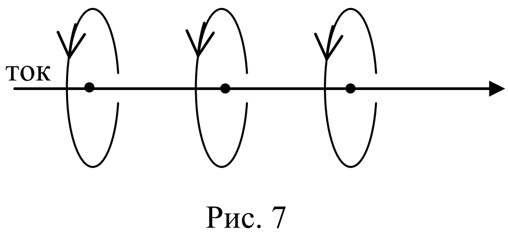

Рис. 7

Точки пространства, вблизи которых векторные линии ведут себя так, как на рисунке 6, называются источниками (соответственно положительными и отрицательными) векторного поля. Источниками поля $\breve{E}$ являются электрические заряды. Точки, вблизи которых векторные линии ведут себя так, как на рисун-ке 7, называются вихревыми точками векторного поля. Линия, состоящая из вихревых точек, называется вихревой линией векторного поля. Проводник с током является вихревой линией поля $\vec{H}$.

5. Если в пространстве зафиксирована декартова система координат, то вектор поля представляется геометрической суммой

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \qquad (1.5)$$

где P, Q, R – проекции вектора на оси координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные орты. Поле $\vec{F}$ называется гладким, если функции P, Q, R гладкие.

Дивергенцией гладкого векторного поля (1.5) в точке M_0 называется число

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (1.6)$$

где частные производные вычисляются в точке M_0. Для пояснения физического смысла этого понятия приведем два закона электродинамики:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \operatorname{div}\vec{H} = 0. \qquad (1.7)$$

Здесь константа ε – диэлектрическая проницаемость среды, ρ – объемная плотность заряда. Из первого равенства (1.7) следует: дивергенция поля $\vec{E}$ в каждой точке прямо пропорциональна объемной плотности заряда в этой точке. Таким образом, дивергенция поля электрической напряженности характеризует интенсивность источников этого поля – электрических зарядов. Второе равенство (1.7) связано с тем, что поле $\vec{H}$ не имеет источников: в природе не существует магнитных зарядов. Магнитные явления возникают там, где имеются движущиеся электрические заряды.

В общей ситуации дивергенция также характеризует интенсивность источников поля.

6. Зафиксируем в части пространства, где есть гладкое векторное поле $\vec{F}$, область $\mathcal{D}$ с гладкой или кусочно-гладкой границей S. Проведем из каждой точки M поверхности S вектор по-
ля $\vec{F}$ и обозначим F_n проекцию $\vec{F}$ на направление внешней нормали (рис. 8). По правилу векторной алгебры $F_n = \vec{F}\cdot\vec{n}$, где $\vec{n}$ – орт внешней нормали в точке M.

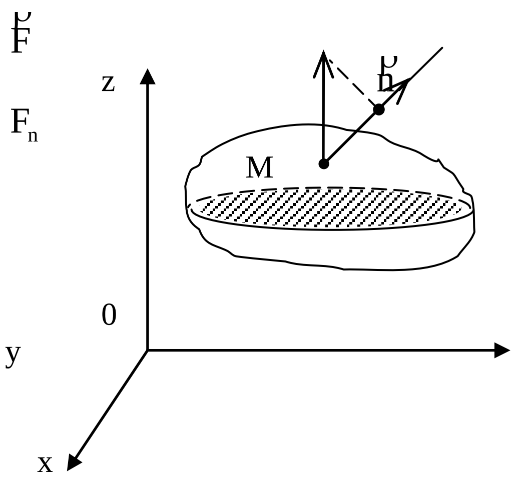

Рис. 8

Имеет место формула Гаусса-Остроградского

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv = \iint_S F_n dS \quad (1.8)$$

Поверхностный интеграл в правой части формулы (1.8) называется потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S по направлению внешней нормали.

7. Ротором гладкого векторного поля (1.5) в точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \qquad (1.9)$$

где частные производные вычисляются в точке M_0. Символическая запись этой формулы:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

В частном случае, когда поле $\vec{F}$ плоское: $P = P(x, y), Q = Q(x, y), R = 0$, формула (1.9) принимает вид

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (1.10)$$

Для пояснения физического смысла ротора рассмотрим поле $\vec{\upsilon}$ линейной скорости цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси симметрии (рис. 9). Вектором угловой скорости цилиндра называется вектор $\vec{\omega}$ длиной ω, направленный по оси вращения так, как указано на рисунке 9.

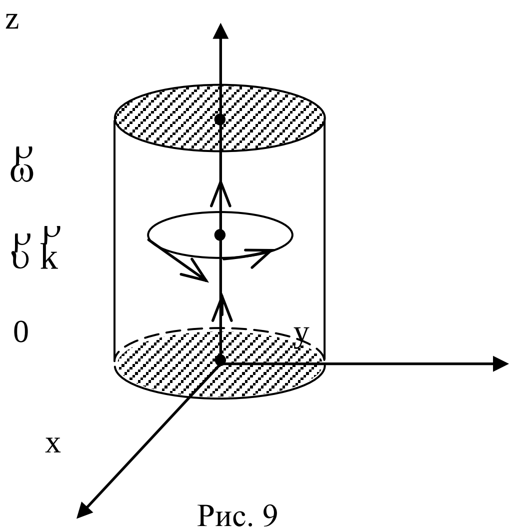

Рис. 9

В данном случае $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, где $\vec{k}$ – орт оси z. Вычисления дают для проекций вектора $\vec{\upsilon}$ в точке (x, y, z) цилиндра на оси координат формулы $P = -\omega y, Q = \omega x, R = 0$.
По формуле (1.10)
$\mathrm{rot}\vec{\upsilon} = [\omega - (-\omega)]\vec{k} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}$.
Таким образом, ротор поля линейной скорости цилиндра, вращающегося вокруг оси симметрии, равен удвоенному вектору угловой скорости. Очевидно, ось вращения является вихревой линией поля $\vec{\upsilon}$.

Аналогично ротор поля скорости $\vec{\upsilon}$ жидкости или газа характеризует угловую скорость частиц жидкости или газа вокруг вихревых линий. В областях, где $\mathrm{rot}\vec{\upsilon} = \vec{0}$, вихревые явления отсутствуют.

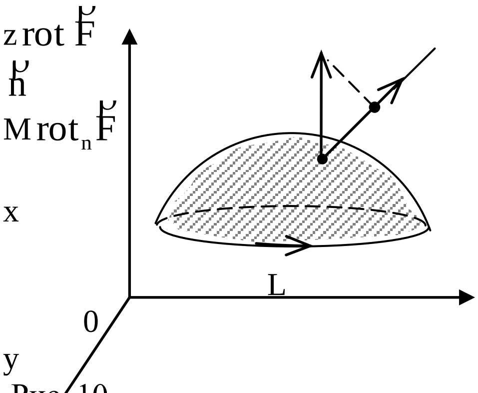

Рис. 10

8. Зафиксируем в части пространства, где есть векторное поле $\vec{F}$, гладкую замкнутую кривую L с заданным на ней направлением и гладкую поверхность S с границей L (рис. 10). Выберем в каждой точке M поверхности S направление орта нормали указанным образом и обозначим $\mathrm{rot_n}\vec{F}$ проекцию на выбранное направление нормали вектора $\mathrm{rot}\vec{F}$, выходящего из точки M: $\mathrm{rot_n}\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}$.

Справедлива формула Стокса $\iint_S \mathrm{rot_n}\vec{F}ds = \int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}$. (1.11)

Поверхностный интеграл в левой части равенства представляет собой поток поля $rot\vec{F}$ через поверхности S по выбранному направлению нормали (п. 6). Криволинейный интеграл второго рода в правой части равенства берется в выбранном на L направлении и называется циркуляцией векторного поля $\vec{F}$ по замкнутой кривой L.

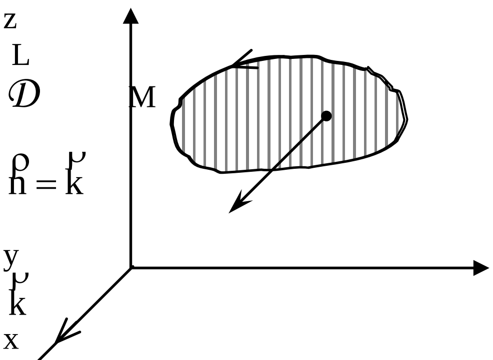

Рис. 11

Рассмотрим частный случай, когда поле $\vec{F}$ плоское: $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, кривая L лежит в плоскости xOy и в качестве поверхности взята ограниченная ею область $\mathcal{D}$ на плоскости (рис. 11). Выберем на кривой направление так, чтобы при обходе область $\mathcal{D}$ оставалась слева; такое направление называется положительным. Орт нормали к плоскости в каждой точке M области $\mathcal{D}$ должен быть согласован с направлением на кривой так, чтобы из его конца обход по этому направлению наблюдался против часовой стрелки; следовательно, он совпадает с ортом оси z: $\vec{n} = \vec{k}$. Вычисления с учетом равенства (1.10) дают

$$\mathrm{rot_n}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\cdot\vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\left|\vec{k}\right|^2 \cos\quad 0 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Тогда формула (1.11) примет вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy \qquad (1.12)$$

и называется формулой Грина. Интеграл в правой части записан в координатной форме (1.1, п. 3) и берется в положительном направлении.

9. Справедливы равенства

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{F} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u = \Delta u, \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}u = \vec{0},$$
$$\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}u) = p\Delta u + \mathrm{grad}p \cdot \mathrm{grad}u \qquad (1.13)$$

где обозначено $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.
(1.14)

Выражение (1.14) называется лапласианом функции $u(x, y, z)$. Приведем еще несколько формул векторного анализа:

$$\mathrm{div}(u\vec{F}) = u\,\mathrm{div}\vec{F} + \mathrm{grad} \rightleftarrows\rightleftarrows u \cdot \vec{F},$$

$$\mathrm{rot}(u\vec{F}) = u\,\mathrm{rot}\vec{F} + \mathrm{grad} \rightleftarrows\rightleftarrows u \cdot \vec{F},$$

$$\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}\vec{G},$$

$$\mathrm{grad}(uv) = u\,\mathrm{grad}v + v\,\mathrm{grad}u,$$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u - \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{F} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}.$$

Здесь $\times$ – знак векторного произведения векторов,
$\Delta\vec{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$.

10. Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным, если существует такая функция $U(x, y, z)$, что $\vec{F} = \mathrm{grad}U$.

Функция U называется потенциалом поля $\vec{F}$. Справедлива фор-мула

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dL} = U(B) - U(A).$$

В частности, интеграл по любой замкнутой кривой равен нулю.

Поле $\vec{F}$ называется безвихревым, если

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}.$$

Из формулы $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}U = \vec{0}$ следует: если поле $\vec{F}$ потенциальное, то оно безвихревое. Верно и обратное: если поле $\vec{F}$ безвихревое, то оно потенциальное:

$$\vec{F} = \mathrm{grad}U \Leftrightarrow \mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}.$$

Поле $\vec{F}$называется соленоидальным, если

$$\mathrm{div}\vec{F} = 0.$$

Поле $\vec{F}$ называется гармоническим, если оно потенциальное и соленоидальное. Из формулы $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}U = \Delta U$ следует: потенциал гармонического векторного поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = 0, \qquad (1.15)$$

где ΔU – лапласиан (1.14) функции $U(x, y, z)$. Уравнение (1.15) называется уравнением Лапласа.

Примером гармонического векторного поля является поле сил тяжести $\vec{P}$. В декартовой системе отсчета с началом в центре Земли вектор поля $\vec{P}$ представляется геометрической суммой

$$\vec{P} = -\gamma M\left(\frac{x}{r^3}\vec{i} + \frac{y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right), \qquad (1.16)$$

где M – масса Земли, γ – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Потенциалом поля $\vec{P}$ является функция

$$U(x, y, z) = \frac{\gamma M}{r}. \qquad (1.17)$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (1.14).

Замечание. Лапласиан (1.14) называется трехмерным. Далее будут рассматриваться также двумерный и одномерный лапласианы:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$