ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель программы аспирантуры
профессор М.В. Двойников

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ТЕХНОЛОГИЯ И ТЕХНИКА ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

Подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Область науки:	2. Технические науки
Группа научных специальностей:	2.8. Недропользование и горные науки
Научная специальность:	2.8.1. Технология и техника геологоразведочных работ
Отрасли науки:	Технические
Форма освоения программы аспирантуры:	Очная
Срок освоения программы аспирантуры:	4 года
Составитель:	д.т.н. профессор М.В. Двойников

Санкт-Петербург

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в буровых и горноразведочных работах все более широкое использование получил современный метод управления – оптимизация процессов, позволяющий достигнуть наилучшего результата с меньшими затратами и в более короткие сроки. *Оптимизация* (от лат. *optimum* – наилучший) бурения скважин позволяет выбрать из множества разнообразных действий и мероприятий, только те, которые обеспечивают наилучшее для конкретных условий (оптимальное) состояние системы.

Понятие «*наилучший результат*» весьма относительно и приобретает смысл только тогда, когда обозначен критерий (желательно имеющий количественную оценку), по которому оценивается то или иное решение. Методы, с помощью которых определяется наилучший результат, и составляют предмет оптимизации. Она базируется на системном анализе технико-технологических операций, моделировании, эволюционном планировании, экспериментальных исследованиях с компьютерным хранением и переработкой информации и т.д.

Практическая реализация оптимизации процессов буровых и горноразведочных работ позволяет правильно и своевременно принимать как конкретные оперативные решения, так и стратегические решения по сооружению скважины или поисково-оценочного проекта в целом.

1. ЦЕЛИ И ТИПЫ ОПТИМИЗАЦИИ.

1.1. Объект оптимизации и его особенности.

Главной целью управления является поддержание или улучшение функционирования объекта управления – процесса бурения – в соответствии с разработанным алгоритмом. Под влиянием множества изменяющихся факторов процесс бурения может быть реализован по различным направлениям развития.

Все существующие факторы, определяющие состояние процесса бурения, при некотором упрощении можно разделить на три группы:

1) *управляемые* факторы (осевая нагрузка, частота вращения породоразрушающего инструмента, расход очистного агента и т.д.);

2) *неуправляемые* факторы (физико-механические свойства разбуриваемой горной породы, геолого-географические условия и т.д.);

3) *постоянные* для конкретного процесса факторы, которые в зависимости от этапа бурения могут быть отнесены к первой или второй группе (конструкция скважины, характеристики технических средств и т.д.).

Процесс бурения скважин не принадлежит к классическим системам управления и может быть отнесен к многофункциональной динамической системе управления. Многофакторность технологического процесса затрудняет составление аналитических зависимостей для описания процесса бурения в любой момент времени.

С точки зрения системного анализа процесс бурения целесообразно разделить на подсистемы, характеризующиеся спецификой самого процесса и требованиям к его организации. При таком подходе можно выделить следующие объекты управления и соответственно следующие подсистемы:

1) разрушение горной породы на забое скважины;
2) удаление шлама с забоя скважины и из призабойного пространства;
3) вынос шлама по стволу скважины;
4) отбор керна;
5) режим работы бурильной колонны;
6) спуско-подъемные операции;
7) состояние ствола скважины.

Несмотря на различие целевых функций вышеуказанных подсистем (для процесса разрушения – обеспечение эффективности разрушения льда на забое скважины; для процесса шламоудаления – эффективная очистка забоя и т.д.), они взаимосвязаны между собой.

Например, эффективность процесса разрушения связана с интенсивностью очистки забоя скважины от образующегося шлама, и, наоборот, эффективность удаления шлама с забоя скважины зависит от гранулометрического состава шлама, который, в свою очередь, определяется параметрами процесса разрушения. Тем не менее, деление процесса бурения на подсистемы позволяет правильно определить основные параметры и критерии управления бурения скважин (табл. 1).

Следует отметить, что под бурением скважин понимается не только процесс углубки и извлечения керна, но и следующие сопутствующие операции:

1) проектирование;
2) монтаж и демонтаж оборудования;
3) крепление скважины;
4) специальные работы, в том числе направленное бурение;
5) вспомогательные операции;
6) ликвидация осложнений и аварий;
7) рекультивация земель и природоохранные мероприятия.

Таблица 1

Параметры и критерии управления процессом бурения

Объект управления	Целевая функция управления	Параметры управления	Критерии управления
Разрушение горной породы на забое скважины	Эффективное разрушение	Осевая нагрузка, частота вращения породоразрушающего инструмента	Механическая скорость бурения
Удаление шлама с забоя скважины и из призабойного пространства	Своевременная и эффективная очистка забоя	Расход очистного агента и его реологические свойства в призабойных условиях	Механическая скорость бурения
Вынос шлама по стволу скважины	Эффективное и полное удаление шлама из скважины	Расход очистного агента, его тип и реологические свойства	Количество шлама, находящегося в скважине; осложнения (затяжки) бурового инструмента
Отбор керна	Извлечение полноценного кернового материала	Параметры бурения, тип и конструкция колонкового набора	Количество и качество кернового материала
Режим работы бурильной колонны	Предупреждение опасных перегрузок, обеспечение надежности и рациональное использование ресурса	Осевая нагрузка, частота вращения, смазывающие свойства промывочной жидкости	Ресурс бурильной колонны; частота обрывов
Спуско-подъемные операции	Быстрый подъем бурового снаряда для извлечения керна и смены породоразрушающего инструмента	Скорость спуско-подъемных операций, мощность привода бурового станка	Время, затрачиваемое на спуско-подъемные операции; энергопотребление
Состояние ствола скважины	Обеспечение устойчивости ствола скважины	Тип, показатель фильтрации промывочной жидкости, интенсивность обменных процессов	Наличие и характер осложнений в процессе бурения по причине нарушения устойчивости стенок скважины

1.2. Оптимизация как способ повышения эффективности управления бурением.

Специфика управления процессом бурения состоит в том, что бурильщик, лишенный возможности непосредственно контролировать процессы, происходящие на забое и в стволе скважины, в своей практической деятельности оперирует с информационной моделью реального объекта. Процесс управления включает три основных комплекса операций:

1) сбор, передача и обработка информации;

2) принятие решений и выработка управленческих директив;

3) реализация управленческих директив в соответствии с выработанным алгоритмом.

По принципу действия система управления процессом бурения является *кибернетической системой* с обратной связью (рис. 1). К кибернетическим системам относятся человеко-машинные системы управления, использующим современные информационно-измерительные системы, вычислительную технику, автоматизированные информационные системы (банки данных), а также системы проектирования и планирования на основе математических и физических методов.

Обработка и

Таким образом, задача оптимизации сводится к выбору *оптимального решения* на основе имеющихся данных о процессе бурения, а также априорной – экспериментальной и аналитической – информации. Под «оптимальным решением» в данном случае понимается какое-то мероприятие или мероприятия, обеспечивающие наиболее эффективное достижение поставленной цели.

Как правило, оптимальное решение выбирается из нескольких более-менее равнозначных мероприятий, составляющих *область* решений. Само решение может состоять из совокупности параметров – различных числовых значений, функций, признаков и т.д.

1.3. Типы оптимизационных задач

Показателем эффективности выбранных решений служит *критерий оптимизации* – характеристика процесса, отражающая состояние системы и заданная количественно.

Все задачи в области оптимизации можно разделить на два типа: прямые и обратные.

Прямые задачи позволяют ответить на вопрос, что произойдет и чему будет равен критерий оптимизации, если принимается некоторое решение. Для решения прямой задачи необходимо построить математическую модель, которая позволяет рассчитать критерий оптимизации в зависимости от заданных условий.

Обратные задачи позволяют выбрать такое решение, при котором критерий оптимизации примет экстремальное значение. Таким образом, решение обратных задач требует, чтобы сначала была решена прямая задача.

Математически прямая оптимизационная задача имеет вид:

$$W = f(p_1, p_2, \dots; r_1, r_2, \dots; s_1, s_2, \dots), \tag{1}$$

где: W – критерий оптимизации; p_1, $p_2, \dots$ – управляемые факторы; r_1, $r_2, \dots$ – неуправляемые или неизвестные факторы; s_1, $s_2, \dots$ – постоянные (заранее известные) факторы.

Зависимость от неуправляемых или неизвестных факторов (свойств разбуриваемой горной породы, катастрофических природных явлений, так называемого человеческого фактора и др.) формируют состояние математической неопределенности. Для поиска оптимального решения в этих условиях необходимо установить природу неопределенности и ее возможное влияние на критерий оптимизации.

Часто группой неуправляемых или неизвестных факторов пренебрегают или переводят их в группу постоянных факторов. Например, свойства горных пород с высокой степенью вероятности могут быть предопределены на основе геологических, геофизических и других данных. При этом исследуют модель типа

$$W = f(p_1, p_2, \dots; s_1, s_2, \dots). \tag{2}$$

Если зависимость (2) известна, то прямая задача оптимизации решена. Обратная задача в этом случае имеет вид:

$$W_{\max(\min)} = \max(\min)[W(p_1, p_2, \dots; s_1, s_2, \dots)], \tag{3}$$

где: $W_{max(min)}$ – критерий оптимизации, имеющий экстремальное значение.

Различают одномерные и многомерные задачи оптимизации.

Одномерная задача рассматривает изменение лишь одного фактора, в то время как другие независимы от него и стабилизированы. На практике таких задач сравнительно мало.

В *многомерной задаче* в объекте изменяются одновременно несколько факторов. Эта группа является более широко распространенной и более сложной для исследования.

2. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ.

2.1. Критерии оптимизации.

В качестве критерия оптимизации принимается некий математический эквивалент, зависящий от определяющих факторов. К критерию оптимизации предъявляется ряд требований:

1) эффективность с точки зрения поставленной цели;

2) статистическая однозначность;

3) универсальность – он должен достаточно полно и всесторонне описывать объект;

4) способность количественного выражения.

Конечной целью процесса геологоразведочного бурения скважин является получение комплексной информации о геологическом строении и вещественном составе изучаемого разреза. Однако из-за отсутствия конструктивной модели зависимости целевой функции, выраженной в виде максимума получения информации, от многочисленных технических, технологических и организационных факторов процесса бурения за критерий оптимизации принимают различные экономические, технико-технологические и статистические показатели.

В практике геологоразведочных работ сформирован набор критериев оптимизации, которые разделены в зависимости от целевой направленности на следующие группы:

1) технико-технологические критерии, направленные на повышение производительности процесса бурения скважины в целом или в пределах некоторых интервалов;

2) экономические критерии, направленные на снижение стоимости буровых работ;

3) критерии качества буровых работ.

Выбор критерия оптимизации – сложная задача, т.к. цели при проектировании любого объекта, как правило, противоречивы (обеспечение минимальной стоимости и максимальной надежности, максимальной производительности и минимальной энергоемкости и т.д.).

Если оптимизация осуществляется по одному какому-либо критерию, то такие критерии называются *частными*, а задачи – *однокритериальными*.

При решении однокритериальной задачи проводят ранжирование критериев по степени важности и выбирают один основной критерий, по которому проводится оптимизация при условии, что все остальные критерии не выходят за рамки допустимых значений. При этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, поскольку практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого.

Типичным примером неправильной постановки задачи оптимизации может служить следующий: «*Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости*». Ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимума двух величин, противоречащих друг другу по своей сути. Правильная постановка задачи могла быть следующая:

1) *Получить максимальную производительность при заданной себестоимости*;

2) *Получить минимальную себестоимость при заданной производительности*.

В первом случае критерий оптимизации – производительность, а во втором – себестоимость.

Если оптимизация осуществляется по нескольким критериям, то решаемая при этом задача называется *многокритериальной*. Этот метод позволяет свести в один отклик несколько характеристик. На практике такие задачи возникают, когда объект не может быть описан однокритериальной зависимостью, или объединить отдельные критерии в единый критерий не представляется возможным. Такое объединение, как правило, бывает формальным, искусственным. С математической точки зрения не существует идеального способа, метода решения таких задач. Каждый из них имеет преимущества и недостатки.

2.2. Однокритериальные задачи.
2.2.1. Технико-технологические критерии.

Критерий максимальной механической скорости бурения

Механическая скорость $v_м$ (м/ч) бурения интервала *dh* (м) за время *dt* (ч) определяется соотношением:

$$v_м = \frac{dh}{dt}. \quad (4)$$

Механическая скорость, определяемая зависимостью (4), является так называемой мгновенной механической скоростью, и в достаточной степени изменяется в зависимости от колебаний бурильной колонны и других факторов. Поэтому для получения достоверного значения следует увеличить интервал замера

$$v_м = \frac{\Delta h}{\Delta t}, \quad (5)$$

где: □h – выбранный для расчета интервал бурения (□h = 1-2 м для мягких и средних по твердости горных пород; □h = 0,3-0,5 м для крепких пород); □t – время чистого бурения выбранного интервала, ч.

Механическая скорость бурения зависит от управляющих параметров, а также от свойств горных пород и породоразрушающего инструмента. В общем виде можно записать

$$v_{\text{м}} = f(P, n, Q, j, q) \to \max. \tag{6}$$

где: P – осевая нагрузка на породоразрушающий инструмент; n – частота вращения породоразрушающего инструмента; Q – расход очистного агента; j – свойства горных пород, влияющие на буримость; q – степень износа породоразрушающего инструмента.

Несмотря на простоту, этот критерий имеет существенный недостаток – он не учитывает влияние рейсовой проходки и некоторых других факторов. Не исключен вариант, при котором получение максимальной механической скорости бурения при незначительной рейсовой проходке окажется менее эффективным, чем увеличение рейсовой проходки.

Критерий максимальной рейсовой скорости бурения

Более полным критерием является критерий максимальной рейсовой скорости бурения (м/рейс)

$$v_{\text{р}} = \frac{h_{\text{р}}}{t_{\text{б}} + t_{\text{спо}} + t_{\text{в}}} \to \max, \tag{11}$$

где: $h_р$ – рейсовая проходка, м; $t_б$ – время чистого бурения за рейс, ч; $t_{СПО}$ – время, затрачиваемое на спуско-подъемные операции за рейс, ч; $t_в$ – время, затрачиваемое на вспомогательные операции за рейс, ч.

Использование этого критерия позволяет оптимизировать процесс бурения в совокупности со вспомогательными и спуско-подъемными операциями. С другой стороны его использование имеет предел, поскольку длина рейса обычно ограничивается условиями получения качественного керна и максимально возможной длиной колонковой трубы. Более того, при малых глубинах критерий дает неадекватные результаты.

Критерии максимальной производительности бурения и минимального времени проходки скважины (*Т-критерий*)

Основной целью бурового процесса является достижение буровым снарядом конечной глубины за наименьшее время при минимальных затратах. Поэтому более приемлемым следует считать критерий максимальной производительности бурения (м/сутки)

$$v_{\text{пр}} = \frac{24(H - H_0)}{\sum_{i=1}^{m} t_{\text{б}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{СПО}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{в}_i} + t_{\text{н}}} \to \max, \tag{18}$$

или критерий минимального времени проходки скважины (T-критерий) (ч)

$$\text{Т} = \sum_{i=1}^{m} t_{\text{б}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{СПО}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{в}_i} + t_{\text{н}} \to \min. \tag{19}$$

где: H и H_0 – соответственно конечная и начальная глубина скважины, м; $\sum_{i=1}^{m} t_{\text{б}_i}$, $\sum_{i=1}^{m} t_{\text{СПО}_i}$ и $\sum_{i=1}^{m} t_{\text{в}_i}$ – суммарное время соответственно на бурение, спуско-подъемные и вспомогательные операции, ч; m – число рейсов; $t_н$ – непроизводительные затраты времени (геофизические исследования в скважине, ремонт, техобслуживание, ликвидация осложнений, простои), ч.

Точный прогноз величины непроизводительных затрат времени $t_н$ провести достаточно сложно, а иногда и невозможно, поскольку многие из них относятся к так называемым неуправляемым или неизвестным факторам. Поэтому целесообразно учитывать непроизводительные затраты времени путем введения дополнительного коэффициента $k_н$, учитывающего увеличение общего времени проходки скважины за счет этих простоев.

С учетом общеизвестных соотношений, связывающих затраты времени с технологическими параметрами бурения, получаем следующие зависимости для расчета критерия максимальной производительности бурения:

$$v_{\text{пр}} = \frac{24}{k_{\text{н}}\left(\frac{1}{v_{\text{м}}}+\frac{H+H_0}{3600 h_{\text{р}} v_{\text{СПО}}}+\frac{t_{\text{в}}}{h_{\text{р}}}\right)} \qquad (20)$$

и критерия минимального времени проходки скважины

$$T = k_{\text{н}}\left(\frac{H^2-H_0^2}{h_{\text{р}} v_{\text{СПО}}} + \frac{H-H_0}{h_{\text{р}}} t_{\text{в}} + \frac{H-H_0}{v_{\text{м}}}\right), \qquad (21)$$

где: $k_н$ – коэффициент, учитывающий непроизводительные затраты времени ($k_н$=1,2-2,0); $v_м$ – механическая скорость бурения, м/ч; $h_р$ – рейсовая проходка, м; $v_{СПО}$ – средняя скорость спуско-подъемных операций в скважине, м/с; $t_в$ – время на вспомогательные операции, кратное рейсу, ч.

Для реализации этих критериев необходимо выбрать такую стратегию, при которой затраты времени на бурение скважины будут минимальны. Анализ выражения (21) показывает, что время проходки скважины заданной глубины обратно пропорционально средним значениям скорости спуско-подъемных операций, рейсовой проходки и механической скорости бурения и прямо пропорционально времени вспомогательных операций, кратному рейсу. Следовательно, критерии максимальной производительности бурения и минимального времени проходки скважины не имеют явно выраженного экстремума от перечисленных факторов. Однако с учетом конкретных условий можно установить *рациональные* предельные значения факторов, превышение которых практически не влияет на производительность и общее время бурения.

Критерий постоянных проходок (*h_c-критерий*)

Критерий постоянных рейсовых проходок h_c □ *const* позволяет эффективно оптимизировать процесс бурения при малой интенсивности износа породоразрушающего инструмента. Суть его в том, что время, соответствующее наибольшей производительности при бурении скважины до некоторой глубины, вычисляется по определенному числу рейсов и постоянной проходке. Использование h_c-критерия наиболее целесообразно при небольших глубинах бурения (250-500 м) и в сравнительно некрепких и малоабразивных породах.

Время проходки скважины T_{h_c} (ч) в соответствии с h_c-критерием определяется по следующему соотношению:

$$T_{h_c} = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{\text{kH}}{\text{mv}_0}\right) + \text{mt}_{\text{СПО}} + \alpha m\frac{H}{2} + \beta H, \qquad (22)$$

где: m – число рейсов; k – декремент затухания; H – конечная глубина скважины, м; v_0 – начальная скорость бурения, м/ч; $t_{СПО}$ – время, затрачиваемое на спуско-подъемные операции за рейс, ч; □ и □ – постоянные коэффициенты, зависящие от типа буровой установки, ч/м.

Функция $T_{h_c} = f(m)$ имеет минимум по числу рейсов при наличии ограничения:

$$h_c = \frac{H}{m} = \text{const}. \qquad (23)$$

Оптимальное число рейсов $m_{опт}$, дающее минимум общего времени бурения скважины согласно h_c-критерию, определяется из условия $\text{dT}_{h_c}/\text{dm} = 0$. Это соотношение может быть представлено в виде следующего трансцендентного уравнения:

$$\ln(1-A) = k\left(t_{\text{спо}} + \frac{\alpha H}{2}\right) - \frac{A}{1-A}, \tag{24}$$

где: $A = kH/(m_{\text{опт}} v_0)$ (значения $m_{опт}$ при проведении расчетов – целые числа).

2.2.2. Экономические критерии.

Критерий минимальных приведенных затрат

Для сравнения различных вариантов применяемых технических средств и технологических приемов используется критерий минимальных приведенных затрат $E_{пр}$ (руб./год)

$$\text{Е}_{\text{пр}} = k\text{Е}_{\text{к}} + \text{Е}_{\text{т}} \to \min, \tag{25}$$

где: k – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений (равен обратной величине срока окупаемости, например, если срок окупаемости 6 лет, то k=1/6), год$^{-1}$; $E_к$ – капитальные затраты, руб.; $E_т$ – текущие затраты (себестоимость производства), руб./год.

Сами по себе приведенные затраты в практике учета, отчетности и планирования не применяются. Они нужны только для сравнения вариантов между собой. У всех сравниваемых вариантов годовой объем производства продукции и качество выпускаемой продукции должен быть одинаковым.

Критерий минимальных приведенных затрат широко применялся в СССР в условиях плановой экономики[1]. При планировании деятельности предприятий в условиях рыночной экономики он имеет ряд существенных недостатков.

Основной недостаток заключается в том, что для полного и объективного сопоставления приведенных затрат цены на используемые производственные ресурсы и нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений по годам жизненного цикла проекта должны оставаться постоянными. Поэтому этот критерий в настоящее время имеет ограниченное применение.

Критерий минимальной себестоимости бурения

Критерий минимальной себестоимости бурения C (руб./м) является одним из наиболее распространенных критериев при решении оптимизационных задач:

$$\text{C} = \frac{q\left(\sum_{i=1}^{m} t_{\text{б}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{СПО}_i} + \sum_{i=1}^{m} t_{\text{в}_i} + t_{\text{н}}\right) + \Sigma C_{\text{при}}}{H} \to \min, \tag{26}$$

или

$$C = \frac{24q}{v_{\text{пр}}} + \text{c}_{\text{при}} \to \min, \tag{27}$$

где: q – стоимость одного часа эксплуатации буровой установки, руб./ч; □$C_{при}$ – стоимость израсходованного породоразрушающего инструмента, руб.; H – конечная глубина скважины, м; $v_{пр}$ – производительность бурения, м/сутки; $c_{при}$ – стоимость израсходованного породоразрушающего инструмента, приведенная к 1 м проходки («удельная стоимость истирающих»), руб./м.

Этот критерий является самым полным и комплексным, поскольку учитывает большинство факторов, определяющих процесс бурения: затраты на эксплуатацию буровой установки, производительность бурения, расход истирающих и др.

Если в процессе бурения используются коронки различного типа и стоимости, то удельная стоимость истирающих рассчитывается по соотношению:

---

1 Одним из характерных примеров использования критерия приведенных затрат является обоснование строительства АВТОВАЗа в г. Тольятти, когда рассматривали 70 вариантов размещения этого предприятия на территории страны.

$$c_{\text{при}} = \frac{\Sigma C_{\text{при}}}{\text{Н}}. \quad (28)$$

При использовании породоразрушающего инструмента одного типоразмера удельная стоимость истирающих равна

$$c_{\text{при}} = \frac{C_{\text{при}}}{h_{\text{при}}}, \quad (29)$$

где: $C_{при}$ – стоимость одной коронки, руб.; $h_{при}$ – средняя проходка на коронку, м.

2.2.3. Критерии качества работ.

Эта группа критериев оптимизации используется в случаях, когда необходимо повысить информативность буровых работ, снизить степень сложности и тяжести труда на буровых, увеличить экологическую безопасность и т.д.

Примерами критерия качества работ могут быть:

- максимальный выход керна;
- максимальная интенсивность искривления скважины (при наклонно-направленном бурении);
- минимальная интенсивность искривления скважины (при бурении скважин с ограничением отклонения оси скважины от вертикали);
- минимальная кавернозность ствола скважины;
- максимальная механизация производства и др.

Вопрос о выборе критерия качества работ, если это необходимо, решается применительно к конкретным условиям бурения.

2.3. Многокритериальные задачи.
2.3.1. Метод Парето.

На практике чаще приходится иметь дело не с одним, а с несколькими критериями оптимизации, что существенно усложняет выбор оптимального решения. Рассмотрим основные методы решения многокритериальных задач оптимизации.

Изучение методов решения многокритериальных задач начнем с метода Парето[2]. Имеются два критерия оптимизации W_1 и W_2, которые оба требуется, например, максимизировать. Сразу необходимо отметить, что задача легко решается и для минимизации критериев. Критерии при использовании данного метода являются равнозначными.

Пусть имеется множество вариантов решения. По каждому из вариантов определены значения всех критериев. Представим множество оценок вариантов решения в пространстве критериев (рис. 7). Множество X состоит из конечного числа n возможных решений x_1, x_2, ..., x_n. Каждому решению соответствует определенные значения показателей W_1 и W_2.

---

2 Назван по имени В. Парето (1848-1923), итальянского экономиста и социолога.

Очевидно, из всего множества X, эффективными будут только те, что лежат на *правой верхней границе* области возможных решений: решения x_2, x_4, x_6, x_7. Для всякого другого решения существует хотя бы одно доминирующее решение, для которого либо критерий W_1, либо критерий W_2, либо оба критерия больше, чем для данного. И только для решений, лежащих на правой верхней границе, доминирующих не существует.

Метод Парето определяет не единственное решение, а сужает число альтернатив, когда из множества возможных решений выделяются наиболее эффективные. Дальнейший выбор может вестись уже в пределах этого «эффективного» множества. На приведенном рисунке его образуют четыре решения: x_2, x_4, x_6, x_7, из которых x_7 – наилучшее по критерию W_1, а x_2 – по критерию W_2. Дело лица, принимающего решение, выбрать тот вариант, который для него предпочтителен по обоим критериям.

При наличии более сложных многокритериальных задач выбирают другие методы принятия решений:

1) *аддитивный критерий*, если существенное значение имеют абсолютные значения критериев при выбранном множестве параметров X;

2) *мультипликативный критерий*, если существенную роль играет изменение абсолютных значений частных критериев при вариации множества параметров X;

3) *максиминный* (*минимаксный*) критерий, если стоит задача достижения равенства нормированных значений противоречивых (конфликтных) частных критериев.

2.3.2. Обобщенный аддитивный критерий.

Просто суммировать частные критерии не представляется возможным, поскольку частные критерии имеют различную физическую природу и различную размерность. Для того чтобы в одном показателе учесть разные критерии, используется обобщенный аддитивный критерий, при помощи которого удается определить единственный оптимальный вариант решения.

Действия производятся не с «натуральными» частными критериями, а с их *нормированными значениями*, представляющими собой отношение «натурального» критерия к некоторой нормированной величине, измеряемой в тех же единицах, что и сам критерий. При этом аддитивный критерий образуется сложением нормированных значений. Влияние того или иного частного критерия на обобщенный аддитивный критерий учитывается при помощи весового коэффициента.

В общем виде целевая функция обобщенного аддитивного критерия имеет следующий вид:

$$W = \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{W_i}{W_i^0} = \sum_{i=1}^{n} C_i w_i \to \min(\max), \qquad (31)$$

где: n – количество объединяемых частных критериев; C_i – весовой коэффициент i–го частного критерия; W_i – числовое значение i–го частного критерия; W_i^0 – i–й нормирующий делитель; w_i – нормированное значение i–го частного критерия.

При расчете обобщенного аддитивного критерия необходимо корректно выбирать нормирующие делители при переходе от абсолютных к нормированным значениям частных критериев. Существуют несколько подходов к их выбору:

• в качестве нормирующих делителей принимаются директивные значения параметров или критериев, заданные заказчиком (при этом считается, что значения параметров, заложенные в техническом задании, являются оптимальными);

• в качестве нормирующих делителей принимаются максимальные (минимальные) значения критериев, достигаемые в области допустимых решений.

Размерности самих частных критериев и соответствующих нормирующих делителей одинаковы, поэтому в итоге обобщенный аддитивный критерий получается безразмерной величиной.

Значения весовых коэффициентов целесообразно принимать в долях единицы (тогда их общая сумма будет равна единице). Следует сразу отметить, что одним из основных недостатков обобщенного аддитивного критерия является зависимость результатов оптимизации от назначаемых (зачастую достаточно субъективных!) величин весовых коэффициентов.

2.3.3. Весовые коэффициенты частных критериев.

Для выбора весовых коэффициентов частных критериев используется *метод экспертных оценок*[3], под которым понимается определение некоторых характеристик группой компетентных специалистов. Причины привлечения людей для оценивания весовых коэффициентов очевидны: их невозможно определить при помощи контрольно-измерительной аппаратуры или рассчитать при помощи формул.

Самым распространенным видом оценки является *метод ранжирования*. Под ранжированием понимается упорядочивание факторов в соответствии с убыванием их предпочтительности. Ранг, равный единице, приписывается наиболее важному, по мнению эксперта, фактору; ранг, равный двум, присваивается следующему по важности фактору и т.д. Порядковая шкала, получаемая в результате ранжирования, должна удовлетворять условию равенства числа рангов числу ранжируемых факторов.

При большом числе оцениваемых факторов их «различимость», с точки зрения эксперта, уменьшается. Поэтому число факторов не должно быть более 20, а наибольшая надежность процедуры ранжирования обеспечивается при $n<10$.

Допускается указание на равноценность некоторых факторов, когда эксперт затрудняется провести четкое разграничение между ними. В этом случае вводятся так называемые *связанные ранги* $r_{св}$, вычисляемые по соотношению:

$$r_{св} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} N_k, \tag{33}$$

где: K – количество одинаковых рангов, определенных экспертом; N_k – порядковый номер, занимаемый фактором в ранжированном ряду.

Результат опроса m экспертов относительно n факторов сводятся в таблицу, которая называется *матрицей опроса* (табл. 1).

Таблица 1
Матрица опроса

Эксперты	**Факторы**						**Общая сумма рангов**
	1	2	…	i	…	n	
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1i}	…	r_{1n}	S_r1
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2i}	…	r_{2n}	S_r2
…	…	…	…	…	…	…	…

3 Классическими примерами метода экспертных оценок являются дегустация, судейство спортивных соревнований, выставление оценок на экзаменах и т.п.

j	r_{j1}	r_{j2}	…	r_{ji}	…	r_{jn}	S_{rj}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mi}	…	r_{mn}	S_{rm}

Если в таблице каким-либо экспертом установлены одинаковые ранги, то они пересчитываются в связанные ранги. Затем вычисляется общая сумма рангов S_{rj} по каждому j-му эксперту.

$$S_{r_j} = \sum_{i=1}^{n} r_{\mathrm{ji}}, \tag{34}$$

где: r_{ji} – ранг i-го фактора, данный j-м экспертом: $i=(1,n)$, $j=(1,m)$.

Правильность заполнения таблицы контролируется следующим образом: во-первых, суммы рангов по каждому эксперту должны быть равны между собой $S_{r1} = S_{r2} = \ldots = S_{rj} = \ldots = S_{rm}$; и, во-вторых, сумма рангов равна сумме чисел натурального ряда:

$$S_{r_j} = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{35}$$

Затем ранги, установленные экспертами, пересчитывают в форму *преобразованных рангов* по зависимости:

$$R_{\mathrm{ji}} = r_{\max} - r_{\mathrm{ji}}, \tag{36}$$

где: R_{ji} – преобразованный ранг, r_{max} – максимальный ранг матрицы опроса.

При этом матрица опроса преобразуется в матрицу преобразованных рангов (табл. 2).

Таблица 2

Матрица преобразованных рангов

Эксперты	**Факторы**					
	1	2	…	i	…	n
1	R_{11}	R_{12}	…	R_{1i}	…	R_{1n}
2	R_{21}	R_{22}	…	R_{2i}	…	R_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
j	R_{j1}	R_{j2}	…	R_{ji}	…	R_{jn}
…	…	…	…	…	…	…
m	R_{m1}	R_{m2}	…	R_{mi}	…	R_{mn}
Сумма	S_{R1}	S_{R2}	…	S_{Ri}	…	S_{Rn}
Весовой коэффициент	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
Итоговый ранг (от 1 до *n*)	...	...	…	...	…	...

Матрица преобразованных рангов дополняется тремя строками, в которых вписывают следующие величины:

1) сумму преобразованных рангов для каждого фактора:

$$S_{R_i} = \sum_{j=1}^{m} R_{\mathrm{ji}}; \tag{37}$$

2) весовой коэффициент:

$$C_i = \frac{S_{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} S_{R_i}}, \qquad \text{где } \sum_{i=1}^{n} C_i = 1; \tag{38}$$

3) итоговые ранговые оценки на основе распределения весовых коэффициентов (большему значению весового коэффициента присваивается высший ранг r=1, а фактор с самым низким весовым коэффициентом получает наименьший ранг r=n).

Для анализа экспертных оценок определяют *конкордацию*[4] – согласованность мнений экспертов. Критерием согласованности является *коэффициент конкордации Кендалла*, рассчитываемый для матрицы, не имеющей связанных рангов, по зависимости:

$$K = \frac{12P}{m^2(n^3 - n)}, \tag{39}$$

где: P – сумма квадратов отклонений сложенных преобразованных рангов S_{Ri} от среднего значения $\bar{S}_R$, определяемых по соотношениям:

$$\bar{S}_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{R_i}}{n}; \tag{40}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(S_{R_i} - \bar{S}_R\right)^2. \tag{41}$$

Для матрицы, имеющей связанные ранги, коэффициент конкордации имеет вид

$$K = \frac{12P}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j}, \tag{42}$$

где: T_j – показатель, вычисляемый для каждого j-го эксперта, имеющего связанные ранги.

Этот показатель численно равен

$$T_j = \sum_{\ell=1}^{L} \left(N_\ell^3 - N_\ell\right), \tag{43}$$

где: N_ℓ – количество рангов, объединенных в связанный ранг; L – число групп связанных рангов.

Коэффициент конкордации K изменяется в диапазоне $0 \le K \le 1$, причем 0 свидетельствует о полной несогласованности, 1 – о полном единодушии. Если K<0,4, то говорят о слабой согласованности экспертов; если K=0,4-0,6, то согласованность экспертов средняя; если K>0,6, то согласованность экспертов – сильная.

Конечно, приведенное описание экспертных оценок не является исчерпывающим, но даже такое, неполное изложение дает достаточное представление о многообразии возможностей оценивания при проведении экспертизы.

2.3.4. Мультипликативный критерий.

Для того чтобы исключить нормирование частных критериев, используют мультипликативный критерий, который образуется путем простого перемножения частных критериев:

$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i \rightarrow \min(\max). \tag{44}$$

Целевая функция при введении весовых коэффициентов C_i (как правило, C_i □ 1) запишется следующим образом:

[4] от лат. *concordare* – привести в соответствие, упорядочить.

$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i^{C_i} \rightarrow \min(\max). \quad (45)$$

Мультипликативный критерий имеет сложную размерность, не имеющую какого-либо физического смысла.

При использовании мультипликативного критерия практически всегда определяется одно оптимальное решение. Однако небольшие изменения одного критерия могут компенсироваться чрезмерным изменением другого. Также происходит нивелирование критериев, имеющих малое значение. Другим недостатком является и субъективизм в определении весовых коэффициентов.

В качестве мультипликативного критерия оптимизации часто принимают различные величины, направленные на минимизацию энергопотребления:

$$W = \mathrm{Nt} \rightarrow \min, \quad (46)$$

или

$$W = \mathrm{Nt}^2 \rightarrow \min, \quad (47)$$

где: N – мощность, расходуемая на бурение определенного интервала или всей скважины, кВт; t – время бурения, ч;

Критерий минимального энергопотребления может использоваться в виде относительной величины – энергопотребления, приходящейся на единицу длины скважины:

$$W = \frac{\mathrm{Nt}}{l} \rightarrow \min, \quad (48)$$

где: l – пробуренный интервал, м.

Для дополнительного учета материалоемкости оборудования используют критерий:

$$W = \mathrm{NtM} \rightarrow \min, \quad (49)$$

где: M – совокупная масса оборудования, кг.

При сопоставлении эффективности работы различных видов породоразрушающих инструментов может быть использовано соотношение:

$$W = v_{\text{м}} h_{\text{к}} \rightarrow \max, \quad (50)$$

или

$$W = \frac{v_{\text{м}}}{\mathrm{E}_{\text{уд}}} \rightarrow \max, \quad (51)$$

где: $v_м$ – механическая скорость, м/ч; $h_к$ – проходка на коронку или долото, м; $E_{уд}$ – удельная энергия, затрачиваемая на разрушение породы на забое скважины, Дж/м^3.

Экономическая целесообразность бурения на жидкие или газообразные полезные ископаемые оценивается при помощи простого соотношения:

$$W = \frac{Q}{\Sigma K} \rightarrow \max, \quad (52)$$

где: Q – количество добытого полезного ископаемого, м^3 или т; □K – суммарная стоимость разведки и добычи, руб.

2.3.5. Максиминный (минимаксный) критерий.

При проектировании сложных систем, характеризующихся большим числом частных критериев, установить между ними аналитическую взаимосвязь довольно трудно. Максиминный (минимаксный) критерий основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших.

Формально максиминный критерий формулируется следующим образом: выбирают такой набор переменных, при котором реализуется максимум из минимальных нормированных значений частных критериев:

$$W = \max\min w_i. \tag{53}$$

Такой принцип выбора переменных иногда носит название гарантированного результата. Он заимствован из теории игр, где является основным принципом принятия решений с позиции крайнего пессимизма. Выбранный вариант полностью исключает риск. Этот критерий нашел широкое распространение в технике как один из базовых.

Если частные критерии необходимо минимизировать, то самым отстающим критерием является тот, который принимает максимальное значение. В этом случае применяют минимаксный критерий:

$$W = \min\max w_i. \tag{54}$$

Для получения результата с помощью максиминного критерия необходимо:

1) матрицу результатов дополнить еще одним столбцом из наименьших результатов каждой строки $\min w_i$;

2) выбрать тот вариант, в строке которого стоит наибольшее значение.

На основе максиминного критерия следует выбрать буровой станок типа *B*.

2.4. Метод линейного программирования.
2.4.1. Общая задача линейного программирования.

В случаях, когда оптимизационная задача может быть описана в виде некоторого множества алгебраических уравнений и неравенств, она решается с помощью *метода линейного программирования*[5]. Задачи линейного программирования, охватывают самые разнообразные управленческие ситуации, требующие расчета оптимальных решений.

Основная задача линейного программирования заключается в нахождении таких неотрицательных значений переменных x_1, x_2, …, x_i, которые обращали бы в максимум или минимум линейную (*целевую*) функцию этих переменных

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n \to \max(\min). \tag{55}$$

При этом переменные должны удовлетворять некоторой системе линейных неравенств, называемой *системой ограничений*:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \text{ при } j=1, 2, \ldots, m. \tag{56}$$

Иногда на x_i также накладывается некоторый набор ограничений в виде равенств, но от них можно избавиться, последовательно выражая одну переменную через другие и подставляя ее во всех остальных равенствах и неравенствах. Такую задачу называют "*основной*" или "*стандартной*".

5 Термин «*программирование*» нужно понимать в смысле «*планирования*». Он был предложен в середине 1940-х годов математиком Дж. Данцигом еще до того, как компьютеры стали использоваться для решения линейных задач оптимизации.

Решение задач методом линейного программирования включает в себя ряд последовательных шагов:

1) выделение переменных, целевой функции и системы ограничений;
2) выражение целевой функции и системы ограничений через переменные;
3) рассмотрение множества возможных наборов величин переменных, получение и оценка оптимального решения.

Решение задач линейного программирования осуществляется при помощи ряда специальных методов: графического, симплекс-метода, метода обратной матрицы и др. Исследование сложных, многомерных задач базируется на использовании пакетов прикладных программ.

2.4.2. Графический метод.

Графический метод решения задач линейного программирования применяется, когда в задачу входят только две переменные. Рассмотрим задачу с двумя переменными следующего вида

$$f(x) = (\mathrm{ax}_1 + \mathrm{bx}_2) \to \max, \tag{57}$$

при условии, что

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 \le c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_mx_1 + b_mx_2 \le c_m, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{58}$$

Возьмем одно из неравенств системы ограничений:

$$a_ix_1 + b_ix_2 \le c_i. \tag{59}$$

Множество решений неравенства, то есть множество пар (x_1, x_2), компоненты которых удовлетворяют неравенству, геометрически представляет собой полуплоскость. Для того чтобы определить граничную прямую этой полуплоскости, следует знак неравенства заменить знаком равенства:

$$a_ix_1 + b_ix_2 = c_i. \tag{60}$$

Построенная на графике прямая делит плоскость на две части, то есть определит две полуплоскости, одна из которых является множеством решений неравенства. На рис. 9 построены графики четырех линейных уравнений системы ограничений, каждый из которых задает свою полуплоскость.

Последние неравенства системы (58), требующие "неотрицательности" значений переменных, определяют правую и верхнюю полуплоскости, граничными прямыми которых являются координатные оси.

Множеством решений системы неравенств является пересечение всех полуплоскостей, соответствующих отдельным неравенствам системы. Это пересечение определяет выпуклый многоугольник, расположенный в первой координатной четверти, который называется *областью допустимых решений*. Точки, лежащие внутри области допустимых решений, а также на ее границе удовлетворяют всем условиям-неравенствам.

В заключении на границе области допустимых решений необходимо найти оптимум (в нашем случае, максимум). Обратимся к целевой функции и приравняем ее какой-нибудь константе *c*

$$ax_1 + bx_2 = c. \tag{61}$$

Это уравнение определяет некоторую прямую, все точки которой соответствуют одному и тому же значению целевой функции, равному *c*. Такая прямая называется *линией уровня* целевой функции. Изменяя величину *c*, получим другую линию уровня, параллельную предыдущей. При увеличении *c* линия будет смещаться в одну сторону, при уменьшении – в другую. Придавая величине *c* разные конкретные числовые значения, можно установить, какое направление смещения линии уровня соответствует увеличению значения целевой функции, а какое – уменьшению.

Существует и другой, более простой способ определения направления увеличения целевой функции. Изобразим в координатной плоскости вектор, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке с координатами (*b*, *a*), где *a* и *b* – коэффициенты при переменных в целевой функции. Этот вектор называется *градиентом* целевой функции. Он перпендикулярен всем линиям уровня целевой функции, а его направление указывает направление роста значений функции.

На рис. 9 изображен градиент, направленный вовнутрь первого координатного угла. Это означает, что коэффициенты *a* и *b* положительны.

Для того чтобы найти оптимальное решение, нужно взять одну из линий уровня, пересекающих область допустимых решений, и параллельным переносом смещать ее в направлении градиента до ее крайнего положения. Крайнее положение линии уровня соответствует максимальному допустимому значению целевой функции.

В примере, изображенном на рис. 9, максимум целевой функции представляет собой единственную точку – вершину многоугольника X_{max}.

Если бы задача решалась на определение минимума, то смещать линию уровня следовало в направлении уменьшения ее значений, то есть в направлении, противоположном градиенту или, как иногда говорят, в направлении *антиградиента*. Линия уровня в новом крайнем положении прошла бы через точку X_{min}.

3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В БУРЕНИИ.

3.1. Основные понятия планирования эксперимента.

Под *экспериментом* (от лат. *experimentum* – проба, опыт) понимается совокупность операций совершаемых над объектом исследования с целью получения информации о его свойствах. В бурении эксперименты, связанные с исследованиями новой техники или технологических процессов, часто называют *испытаниями*.

Эксперименты бывают абсолютными и сравнительными.

Абсолютные эксперименты проводятся с целью определения какого-либо технического или технологического параметра. Например, могут быть проведены эксперименты по определению прочности цементного камня, вязкости промывочной жидкости, износостойкости породоразрушающего инструмента и т.п.

Сравнительные эксперименты, как следует из названия, дают возможность сравнивать работу двух или более технических средств или технологий в одинаковых условиях. Например, показатели бурения разработанной алмазной коронки можно сравнить с показателями работы серийной коронки.

В зависимости от степени воздействия на объект исследований эксперименты делят на активные и пассивные.

Эксперимент, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, называется *активным экспериментом*. Если исследователь не может самостоятельно изменять условия его проведения, а лишь регистрирует их, то это *пассивный эксперимент*.

Пассивные эксперименты характеризуются излишне большим объемом исследований, поэтому на практике они имеют ограниченное применение, например, при изучении горно-геологических условий бурения. При проведении активного эксперимента объем и точность исследований определяются с использованием методов математической статистики, а после постановки первой серии экспериментов в план эксперимента могут вводиться коррективы.

Опыт – это отдельная экспериментальная часть.

Планирование эксперимента – совокупность действий направленных на разработку стратегии экспериментирования от получения априорной информации[6] до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий. Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

В более узком понимании под планированием эксперимента понимают составление *плана эксперимента*, т.е. выбор числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Рассмотрим последовательность проведения экспериментальных исследований (рис. 19).

Считаем, что объект исследования выбран. Это может быть процесс разрушения горной породы на забое скважины, устойчивость стенок скважины, эффективность работы породоразрушающего инструмента и т.п. Целью эксперимента является изучение и оценка некоторого свойства этого объекта. Для процесса разрушения это может быть работа, необходимая для разрушения; для устойчивости стенок скважины – их деформация; для эффективности работы породоразрушающего инструмента – его износостойкость. Цель исследования может быть задана заказчиком или выбрана самим исследователем.

Пусть интересующее нас свойство y объекта зависит от нескольких n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и мы хотим выяснить характер этой зависимости

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \ \ , x_n) \tag{66}$$

Величина y называется *параметром*, сама зависимость $\hat{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *целевой функцией*, а независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *факторами*. Параметр должен быть определен количественно (однако могут встречаться и качественные признаки). Факторы также должны иметь количественную оценку. Если используются качественные факторы, то каждому их уровню должно быть присвоено какое-либо число.

Следующий этап исследований – анализ априорной информации. Этот этап подразумевает сбор и изучение опубликованных данных, электронных ресурсов, размещенных в Интернете, а

6 Априорная информация или априори (от лат. *a priori* – от предшествующего) – это знание, полученное до эксперимента и независимо от него.

также анкетный опрос специалистов, например, при помощи метода экспертных оценок, описанного разделе 2.3.3. В результате исключаются малозначащие факторы, выявляются однозначные факторы, оказывающие наибольшее влияние на параметр исследования, и проводится их ранжирование по степени влияния на параметр.

В ряде случае необходимо провести так называемый *отсеивающий эксперимент*, основная цель которого – выделение из всей совокупности факторов группы наиболее существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению.

Кроме того, на основе анализа априорной информации предварительно должно быть сформулировано хотя бы ориентировочное представление о математической модели изучаемого процесса.

После выбора факторов, включенных в исследование, определяется диапазон их варьирования, а затем из этого диапазона выбираются значения (*уровни факторов*) для экспериментирования.

Если априори известно, что исследуемый параметр зависит от фактора линейно, то достаточно выбрать два уровня изменения фактора, взяв их возможно ближе к концам области варьирования. Эти уровни принято кодировать через +1 и –1.

В случае, когда целевая функция априори представляет собой квадратное уравнение в определенном интервале факторов, то лучшую схему дают три уровня (+1; 0; –1), расположенные последовательно на одинаковом расстоянии: два на концах области варьирования и один посередине.

Когда о виде целевой функции мы не имеем даже ориентировочного представления, то лучше всего выбрать по возможности больше уровней или выборочно провести предварительные эксперименты для выяснения вопроса о характере поведения параметра.

В любом случае, уровни факторов должны быть выбраны такими, чтобы эксперимент, как говорят, «*шёл*», т.е. при любом сочетании выбранных уровней факторов была возможность изучения процесса

Затем составляется план эксперимента (*матрица планирования*), определяется количество экспериментов и уровни сочетания факторов. На основе этого составляется *рабочая матрица* – таблица, в которой для каждого опыта приведены конкретные значения факторов и определена последовательность их изменения.

В ходе проведения экспериментов тщательному измерению подвергаются факторы и параметр исследования. Факторы, включенные в план эксперимента, должны измеряться с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении параметра. Надо помнить, что большая ошибка в определении параметра объясняется не столько несовершенством измерительных приборов, сколько тем, что кроме факторов, включенных в исследования, имеются еще факторы, которые по тем или иным причинам были исключены из рассмотрения.

Полученная в ходе поведения экспериментов информация анализируется и обрабатывается. Применение статистических методов обработки экспериментальных данных позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то проводят вторую серию опытов при лучшем сочетании влияющих факторов, в результате чего получают новую модель. Цикл повторяется до тех пор, пока не будет получена модель, адекватная изучаемому механизму явлений.

На заключительном этапе становится возможным провести анализ полученной целевой функции, статистическая однозначность которой доказана (в частности, можно провести итоговое ранжирование факторов, определить экстремальные значения параметра, провести экстраполяцию целевой функции и т.д.).

В зависимости от методов планирования различают экстремальные и факторные эксперименты. Планирование и проведение *экстремального эксперимента*, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования, в реальных условиях бурения скважин, где существует большое число неконтролируемых факторов, затруднительно, а во многих случаях и невозможно. Поэтому основным методом планирования эксперимента в бурении, применяемым на разных этапах исследования, является *факторный эксперимент*, который заключается в определении параметра при заранее определенном варьировании факторов.

3.2. Полный факторный эксперимент.
3.2.1. Общие сведения о полном факторном эксперименте.

Эксперимент, включающий все возможные комбинации изучаемых факторов при выбранном числе уровней, называется *полным факторным экспериментом*. Этот эксперимент позволяет установить степень влияния каждого фактора на исследуемый параметр и получить целевую функцию, адекватно описывающую исследуемый процесс в выбранных интервалах варьирования факторов. Недостатком полного факторного эксперимента является необходимость проведения большого количества опытов, так как его план не дает возможности определения кратчайшего направления движения к оптимальной области. При числе факторов большем пяти полный факторный эксперимент становится практически невозможным из-за непомерно большого количества необходимых опытов.

Общее число опытов полного факторного эксперимента определяется соотношением:

$$N = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \qquad (67)$$

где: $□_i$ – число уровней i-го фактора; n – число рассматриваемых факторов.

Если число уровней изменения всех факторов одинаково и равно □, то общее число опытов будет равно

$$N = \lambda^n. \tag{68}$$

Если все факторы изменяются на двух уровнях, то общее число опытов будет равно $N=2^n$. В зависимости от величины n такие эксперименты обозначаются как полный факторный эксперимент 2^2, 2^3 и т.п.

Пространство с координатами, соответствующим рассматриваемым факторам называется *факторным пространством*. Его размерность зависит от числа факторов. При $n=2$ геометрическим отображением полного факторного эксперимента будет квадрат, при $n=3$ – куб; при n □ 3 – гиперкуб.

План полного факторного эксперимента (табл. 3) легко построить для любого количества факторов с учетом следующих правил:

- число строк равно числу опытов N, которое определяется по соотношению (68);
- число столбцов равно числу факторов, включенных в исследования;
- в каждом столбце число плюсов (+1) равно числу минусов (–1);
- в первом столбце знаки чередуются через один: +1, –1,…; во втором столбце через два: +1, +1, –1, –1,…; далее – через 4, 8, 16 и т.д.

Таблица 3

План полного факторного эксперимента

Номер опыта	x_1	x_2	...	x_i	…	x_n	y_j
1	+1	+1	...	+1	…	+1	y_1
2	–1	+1	...	+1	…	+1	y_2
…	…	…	…	…	…	…	…
j	x_{1j}	x_{2j}	…	x_{ij}	…	x_{nj}	y_j
…	…	…	…	…	…	…	…
N	–1	–1	…	–1	…	–1	y_N
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	0	0	0	0	0	0	–

Выполнение этих правил позволяет гарантировать, что ни одно возможное сочетания факторов в опытах не пропущено и в то же время не будет повторений одинаковых сочетаний.

План полного факторного эксперимента характеризуется тремя свойствами:

1) алгебраическая сумма элементов столбца равна нулю (свойство симметричности относительно центра эксперимента):

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0, \tag{69}$$

где: x_{ij} – кодированный фактор +1 или –1 (j – номер опыта: $j=1, 2, \dots N$; i – номер фактора: $i=1, 2, \dots, n$);

2) сумма квадратов элементов столбца равна числу опытов (условие нормировки):

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 = N. \tag{70}$$

3) сумма почленных произведений любых двух столбцов равна нулю (свойство ортогональности):

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{uj} = 0, \tag{71}$$

где: u – номер фактора ($u \neq i$ и u=1, 2, …, n).

Важным следствием первого свойства является *ротатабельность* плана эксперимента, которая означает равнозначность движения от центра эксперимента во всех направлениях. В геометрическом смысле – это равномерное распределение информации по исследуемой сфере факторного пространства.

На первом этапе проведения полного факторного эксперимента в качестве математической модели принимается линейное уравнение вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n, \tag{72}$$

где: b_0 – свободный член уравнения; b_1, b_2,…, b_n – коэффициенты, характеризующие степень влияния факторов x_1, x_2, …, x_n на величину y.

Следующий этап исследований связан с вычислением коэффициентов уравнения (72). Характерные свойства полного факторного эксперимента позволяют вычислять коэффициенты линейного уравнения по следующему простому соотношению:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j}{N}, \tag{73}$$

где: y_i – измеренные значения параметра.

Если коэффициент линейного уравнения имеет знак плюс, то это означает, что с увеличением значения фактора параметр увеличивается; если знак минус – то параметр уменьшается. Степень влияния данного фактора на значение параметра оценивается величиной коэффициента.

Свободный коэффициент b_0 рассчитывается также по соотношению (70), но во всех случаях кодированный фактор принимается равным +1. Таким образом, свободный коэффициент численно равен среднему арифметическому параметра исследования:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{N}. \tag{74}$$

Последовательность дальнейших этапов исследования условно показана на рис. 20. Получив в качестве модели линейное уравнение, определяют относительную погрешность расчетных значений параметра:

$$\delta y_j = \frac{|y_j - \hat{y}_j|}{|y_j|} \cdot 100\%. \tag{75}$$

Считается допустимым, если $\delta y \leq$ 5-10 %. В этом случае можно сделать предварительный вывод о том, что линейная модель достаточно точно отражает исследуемую зависимость. Окончательное утверждение об адекватности модели с принятой доверительной вероятностью можно провести только после проверки статистической гипотезы с помощью F-критерия Фишера (об этом будет рассказано ниже).

При δy>5-10 % исследуемая зависимость по своей природе отклоняется от линейной формы. В ходе проведения эксперимента часто приходится сталкиваться с *взаимодействием* *факторов*, которое означает, что эффект одного фактора зависит от уровня другого. Поэтому на втором этапе обработки результатов экспериментов с явно выраженной нелинейностью исследуемой функции следует учесть взаимодействие факторов, и проверить адекватность новой, «улучшенной» модели.

Если априори известно, что принятые во внимание факторы взаимодействуют между собой, то исследование начинают сразу с построения такой модели.

Для учета взаимодействия факторов составляется план, в котором число столбцов (число различных сочетаний факторов) равно числу строк плана (числу опытов N) и равняется числу членов уравнения (табл. 4).

В первый столбец вводят фиктивный фактор x_0, имеющий все урони +1 (формально этот фактор определяет свободный член уравнения b_0). В следующем, втором столбце заносят уровни фактора x_1 с чередующимися через один знаками: –1, +1,…(в таком плане принято начинать с –1); в третьем столбце через два: –1, –1, +1, +1,…; далее – через 4, 8, 16 и т.д.

Затем следуют столбцы парного взаимодействия x_1x_2, x_1x_3,…, $x_{n-1}x_n$, уровни которых получаются простым перемножением уровней соответствующих факторов. Далее следуют столбцы тройного взаимодействия, четверного и т.д.

В общем случае при учете эффекта взаимодействия факторов целевая функция будет иметь вид *неполного квадратичного полинома* – суммы линейной части уравнения (72) и членов, содержащих произведения факторов в первой степени:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} b_{ikl} x_i x_k x_l + b_{12 \ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n, \quad (76)$$

где: b_{ik} – коэффициенты парного взаимодействия; b_{ikl} – коэффициент тройного взаимодействия; $b_{12\ldots n}$ – коэффициент взаимодействия n факторов.

Таблица 4.

План полного факторного эксперимента с учетом взаимодействия факторов.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	...	x_i	…	x_n	x_1x_2	…	$x_{n-1}x_n$	…	y_j
1	+1	–1	–1	...	–1	…	–1	+1	…	+1	…	y_1
2	+1	+1	–1	...	–1	…	–1	–1	…	+1	…	y_2
…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
j	+1	x_{1j}	x_{2j}	…	x_{ij}	…	x_{nj}	$x_{1j}x_{2j}$	…	$x_{(n-1)j}x_{nj}$	…	y_j
…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	+1	+1	+1	…	+1	…	+1	+1	…	+1	…	y_N
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–

Коэффициенты эффектов взаимодействия определяются аналогично линейным эффектам по формуле (73). При этом коэффициенты при линейных факторах и свободный коэффициент уравнения (76) численно равны соответствующим коэффициентам уравнения (72).

Если проверка точности вычислений по полученному уравнению опять оказывается неудовлетворительной, то рекомендуется использовать методы *линеаризации*, позволяющие свести решение нелинейных задач к линейным. Следует подобрать такое преобразование параметра y ($\ln y$, $\sqrt{y}$ и т.п.), чтобы функция описывалась уравнениями вида (72) или (76).

Если линеаризация не дает удовлетворительных результатов, то следует вернуться к началу планирования экспериментов, скорректировать ранжирование и уровни варьирования факторов и провести более тщательно подготовленные повторные эксперименты. Если и в этом случае погрешность вычисленных значений параметра является высокой, то переходят к плану эксперимента второго порядка.

В случаях, когда погрешность вычисленных значений считается приемлемой, переходят к статистическому анализу коэффициентов построенного уравнения и проверке адекватности полученной модели.

3.2.2. Полный факторный эксперимент 2^2.

Для полного факторного эксперимента 2^2 число факторов и число уровней равно двум. Общее число опытов равно

$N=2^2=4$.

План эксперимента представляет собой таблицу с четырьмя строками (табл. 5).

Таблица 5.
План полного факторного эксперимента 2^2.

Номер опыта	x_1	x_2	y_j
1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	y_2
3	+1	–1	y_3
4	–1	–1	y_4
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	0	0	–

Геометрическая интерпретация плана полного факторного эксперимента 2^2 представляет собой квадрат (рис. 21). В вершинах квадрата указаны номера опытов и рядом – соответствующие им уровни факторов.

Линейная модель для полного факторного эксперимента 2^2 имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \tag{77}$$

Пользуясь соотношениями (73) и (74), рассчитывают коэффициенты этого уравнения:

$$b_1 = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}, \tag{78}$$

$$b_2 = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (-1)y_4}{4}, \tag{79}$$

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}. \tag{80}$$

Вычисленные значения параметра могут отличаться от экспериментальных значений параметра. Введение в модель эффекта взаимодействия факторов позволяет повысить адекватность модели, а также использовать их при небольших отклонениях от линейного закона. В этом случае модель принимает вид неполного квадратичного полинома:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2. \tag{81}$$

План полного факторного эксперимента 2^2 для этого уравнения представляет собой расширенную таблицу (табл. 6), в которой число столбцов с кодированными факторами равно числу опытов N=4. Элементы столбца соответствующего произведению факторов получаются путем перемножения элементов двух предыдущих столбцов.

Таблица 6

План полного факторного эксперимента 2^2 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y_j
1	+1	–1	–1	+1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	y_3

4	+1	+1	+1	+1	y_4
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	4	0	0	0	–

3.2.3. Полный факторный эксперимент 2^3.

Для полного факторного эксперимента типа 2^3 число факторов равно трем. Общее количество опытов при этом равно

$$N = 2^3 = 8.$$

План эксперимента показан в табл. 7. В третьем столбце (i=3) записываются единицы с чередующимися знаками через четыре элемента. Легко заметить, что план полного факторного эксперимента 2^2 является частью плана 2^3 (эта часть выделена более темным цветом). Такая тенденция сохраняется и при дальнейшем увеличении количества факторов.

Геометрически полный факторный эксперимент типа 2^3 представляет собой совокупность точек, находящихся в вершинах куба (рис. 22).

Таблица 7.
План полного факторного эксперимента 2^3.

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y_j
1	+1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	y_3
4	–1	–1	+1	y_4
5	+1	+1	–1	y_5
6	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	–1	y_7
8	–1	–1	–1	y_8
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	0	0	0	–

Линейная модель для такого эксперимента (в случае, когда взаимодействие факторов пренебрежимо мало) имеет следующий вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \tag{82}$$

Пользуясь соотношением (73) и данными табл. 7 можно подсчитать коэффициенты b_1, b_2 и b_3:

$$b_1 = \frac{(+1)y_1+(-1)y_2+(+1)y_3+(-1)y_4+(+1)y_5+(-1)y_6+(+1)y_7+(-1)y_8}{8}, \tag{83}$$

$$b_2 = \frac{(+1)y_1+(+1)y_2+(-1)y_3+(-1)y_4+(+1)y_5+(+1)y_6+(-1)y_7+(-1)y_8}{8}, \tag{84}$$

$$b_3 = \frac{(+1)y_1+(+1)y_2+(+1)y_3+(+1)y_4+(-1)y_5+(-1)y_6+(-1)y_7+(-1)y_8}{8}. \tag{85}$$

Свободный коэффициент b_0 рассчитывается по соотношению (74):

$$b_0 = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8}{8}. \tag{86}$$

Если изменение результата на различных уровнях одного фактора не одинаково для всех уровней другого фактора, то необходимо использовать расширенный план полного факторного эксперимента. Формируется план из восьми строк и восьми столбцов (табл. 8). План составляется аналогичным образом плану 2^2.

Таблица 8
План полного факторного эксперимента 2^3 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_j
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	8	0	0	0	0	0	0	0	–

Целевая функция в данном случае может содержать до восьми членов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \tag{87}$$

3.2.4. Рандомизация полного факторного эксперимента.

Рабочая матрица, в которой одним фактором варьируют при постоянных значениях других факторах и затем повторяют эту процедуру для каждого фактора, методически неверна. Такой план может вызвать появление систематической ошибки в определении параметра исследований.

Эксперимент должен быть спланирован так, чтобы уменьшить влияние факторов, по тем или иным причинам не включенных в исследования. К таким факторам могут быть отнесены факторы, не поддающиеся измерениям (например, так называемый человеческий фактор) или факторы, априори не влияющие на объект исследования.

Влияние не включенных в рассмотрение факторов достигается тем, что порядок проведения опытов выбирается чисто случайным образом – опыты рандомизируются[7]. Есть несколько методов извлечения выборки: применение таблиц случайных чисел, метод перемешивания генеральной совокупности, стратифицированная случайная выборка и др.

Ниже рассмотрим способ применения таблиц случайных чисел, которые представляют собой такой набор цифр, что вероятность возникновения любой цифры от 0 до 9 одна и та же (табл. 9).

На первом этапе выбирают точку начала считывания случайных чисел – любое число таблицы. Затем, начав с выбранной точки и двигаясь по строкам таблицы, ряд цифр делится на числа, разряд которых равен количеству цифр в размеру выборки N. Например, если N=16, то ряд делится на двузначные числа; если N=108, то – на трехзначные и т.п.

Считывая подряд полученную последовательность чисел, выполняют следующие действия до тех пор пока не получают выборку нужного количества элементов:

1) если считываемое число находится в диапазоне между 1 и N, и элемент с таким номером еще не извлекался, его включают в выборку;

2) если полученное число 0 или больше N, то его не включают в выборку.

Таблица 9.
Таблица случайных чисел

2057	0762	1429	8535	9029	9745	3458	5023	3502	2436
6435	2646	0295	6177	2755	3080	3275	0521	6623	1133
3278	0500	7573	7426	3188	0187	7707	3047	4901	3519
7888	6411	1631	6981	1972	4269	0022	3860	1580	6751
4022	6540	7804	5528	4690	3586	9839	6641	0404	0735
0888	3504	2651	9051	5764	7155	6489	2660	3341	8784
0605	4640	8692	7712	9832	6607	0480	2557	3461	9755
4398	8857	0221	3844	1823	4407	5914	7545	2362	2428
7899	2623	9965	7366	0486	8185	5896	3985	3105	7210
5375	2213	8481	0919	2350	7310	7106	0046	1683	6269
1120	5436	8921	6457	8361	9849	9902	4244	2377	9213
4625	5978	5266	7521	8488	6854	9203	2598	2673	2399
5112	4318	5003	3532	6430	5679	5041	2108	1813	4235
3915	9380	3918	5957	3603	6553	6247	8907	5282	1106
9223	5629	6982	4138	2901	7592	1650	2580	5676	6470
0122	0820	2140	5291	8499	3653	1727	0453	3032	2902
4114	2462	2820	0414	7197	3854	2940	3500	8685	6131
0774	7788	5011	4971	0848	0748	7103	3262	5182	1185
1493	3425	0114	4662	0802	1125	8745	5513	9750	0695
5727	7577	8631	0759	5430	9953	1426	0405	2109	2304
5329	2475	8555	8172	1376	3459	6778	6917	0159	9635
7058	4886	2373	5937	9383	5763	8004	8602	2457	9134
0099	2200	2369	8140	4865	4874	4867	5206	0434	3845

7 Рандомизацией (от англ. *random* – случайный) называют статистическую процедуру, в которой решение принимают случайным образом.

0659	0499	3671	2771	2104	9275	2118	8024	1033	0528

3.2.5. Параллельные опыты и воспроизводимость.

Важным вопросом при проведении экспериментов является определение числа *параллельных опытов* (опытов с одинаковым сочетанием факторов), которые надо проводить для получения исследуемого параметра с определенной точностью. Ответ на поставленный вопрос зависит от типа распределения, принятого уровня надежности, величины рассеяния получаемых значений и т.д.

В предположении, что параметр исследований подчиняется нормальному закону распределения случайной величины, каждый опыт, предусмотренный планом, следует повторять m=2...5 раз. Рекомендуется число m принимать одинаковым для всех N точек плана. В результате проводится

$$L = mN \qquad (88)$$

опытов, предусматривающих рандомизацию этих опытов.

Повторные опыты при одних и тех же значениях факторов могут дать различные результаты. *Воспроизводимостью опыта* называется получение результата параллельных опытов с заранее установленной точностью, а *ошибкой воспроизводимости* – разброс результатов относительно оценки математического ожидания целевой функции. Эту ошибку оценивают при помощи дисперсии.

Для каждой строки плана находят *выборочное среднее*, равное среднему арифметическому полученных значений параметра параллельных опытов:

$$\overline{y}_j = \frac{\sum_{q=1}^{m} y_{jq}}{m} \qquad (89)$$

где: q – номер параллельного опыта; y_{jq} – значение параметра в q-ом параллельном опыте j-ой строки плана.

Для оценки отклонения параметра от ее среднего значения в каждой строке плана вычисляют *дисперсию воспроизводимости опыта*:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{q=1}^{m}\left(y_{jq} - \overline{y}_j\right)^2}{m-1}. \qquad (90)$$

Далее проверяют *однородность дисперсий*, которая означает, что среди всех дисперсий σ_j^2 нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Если количество сравниваемых дисперсий больше двух, а число повторных опытов во всех точках плана одинаково, то для проверки однородности дисперсий используется *G-критерий Кохрена*.

G-критерий Кохрена основан на распределении отношения максимальной дисперсии $\sigma_{j\max}^2$ к сумме всех дисперсий:

$$G = \frac{\sigma_{j\max}^2}{\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2}. \qquad (91)$$

Определив число степеней свободы[8] f_1=m–1 и f_2=N, находят табличное значение критерия Кохрена $G_{\square,f1f2}$ при выбранном уровне значимости □ (табл. 32). Обычно в прикладных

---

8 Число степеней свободы определяется разностью между числом опытов, по которым оценивается дисперсия, и числом констант, найденных по этим же опытам независимо друг от друга и используемых при оценке дисперсии.

технических задачах уровень значимости табличного критерия принимают равным 0,05, что соответствует допускаемой 5%-ной вероятности неверного решения и доверительной 95%-ной вероятности верного решения.

Если $G < G_{\square,f1,f2}$, то гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается. Следовательно, полученные результаты эксперимента – качественные, и могут быть использованы для построения модели. В противном случае следует увеличить число параллельных опытов или повторить эксперимент при строгом соблюдении методики и схемы проведения опытов, предприняв необходимые меры для исключения грубых ошибок.

В случае однородности дисперсий их усредняют и находят *дисперсию воспроизводимости эксперимента*:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2. \qquad (92)$$

3.2.6. Адекватность модели.

Установив воспроизводимость опытов, проверяют значимость отдельных коэффициентов построенного уравнения, а затем определяют дисперсию адекватности и проверяют адекватность модели.

Величину называют *статистически значимой*, если мала вероятность чисто случайного ее возникновения. Коэффициенты уравнения считаются значимыми, если их абсолютная величина больше доверительного интервала $\square b_i$, т.е.

$$|b_i| \square \Delta b_i, \qquad (93)$$

где: b_i – любой коэффициент уравнения вида (72) или (76), т.е. b_0, b_i, b_{ik}, b_{ikl},…, $b_{12\ldots n}$.

Доверительный интервал для каждого коэффициента уравнения может быть определен с помощью t-критерия Стьюдента

$$\Delta b_i = \pm t_{\alpha,f}\sigma_{b_i}, \qquad (94)$$

где: $t_{\square,f}$ – значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости □ и числе степеней свободы $f=N(m-1)$, с которым определяется оценка дисперсии эксперимента σ_y^2; σ_{b_i} – среднеквадратичная ошибка.

Значения t-критерия Стьюдента в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы выбираются по табл. 10.

Таблица 10.
Значения t-критерия Стьюдента для различных уровней значимости □ и числе степеней свободы f.

f	**□**							
	0,20	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	3,077	6,313	12,706	31,820	63,656	127,656	318,306	636,619
2	1,885	2,920	4,302	6,964	9,924	14,089	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,540	5,840	7,458	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,746	4,604	5,597	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,570	3,649	4,032	4,773	5,893	6,863
6	1,439	1,943	2,446	3,142	3,707	4,316	5,207	5,958
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,500	4,229	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,897	3,355	3,832	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,780

10	1,372	1,813	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,105	3,496	4,024	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,085	3,428	3,929	4,178
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,112	3,373	3,852	4,220
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,976	3,326	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,603	2,947	3,286	3,732	4,072
16	1,336	1,745	2,119	2,583	2,920	3,252	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,551	2,878	3,197	3,611	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,540	2,861	3,174	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	1,323	1,720	2,079	2,517	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,321	1,712	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	1,320	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	1,315	1,705	2,059	2,478	2,778	3,066	3,436	3,706
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,036	3,396	3,849
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,705	3,971	3,307	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,915	3,232	3,460
120	1,289	1,658	1,972	2,358	2,617	2,860	3,160	3,374
500	1,283	1,647	1,964	2,333	2,785	2,819	3,106	3,310

Чем меньше доверительный интервал □b_i при заданном уровне значимости □, тем с большей надежностью можно говорить о значимости коэффициентов уравнения. Уменьшить доверительный интервал при заданном плане эксперимента можно путем увеличения параллельных опытов.

Среднеквадратичная ошибка равна

$$\sigma_{b_i} = \sqrt{\sigma_{b_i}^2}, \tag{95}$$

где: $\sigma_{b_i}^2$ – дисперсия коэффициентов уравнения, которая в свою очередь рассчитывается по следующему соотношению:

$$\sigma_{b_i}^2 = \frac{\sigma_{y}^2}{L}. \tag{96}$$

Если какой-либо коэффициент оказался незначимым, то член с этим коэффициентом исключают из уравнения.

Остается ответить на вопрос: возможно ли с помощью полученной модели адекватно (верно и с необходимой точностью) описать изучаемый процесс. В качестве меры адекватности уравнения принимается *дисперсия адекватности*

$$\sigma_{\text{ад}}^2 = \frac{m\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{y}_j - \hat{y}_j\right)^2}{f_{\text{ад}}}, \tag{97}$$

где: $\hat{y}_j$ – значение параметра, рассчитанное по полученному уравнению с отсеянными незначимыми коэффициентами; $f_{ад}$ – число степеней свободы.

В данном случае число степеней свободы представляет собой разность между числом опытов N и числом коэффициентов P, входящих в уравнение после отбрасывания незначимых коэффициентов

$$f_{\text{ад}} = N - P. \tag{98}$$

Для адекватной модели оценки дисперсий воспроизводимости σ_y^2 и адекватности $\sigma_{\text{ад}}^2$ должны однородны. Проверка статистической гипотезы об однородности оценок двух дисперсий проводится с помощью F-критерия Фишера ($\sigma_{\text{ад}}^2$□σ_y^2)

$$F = \frac{\sigma_{\text{ад}}^2}{\sigma_y^2}. \tag{99}$$

Полученное значение сравнивают с табличным значением критерия $F_{□,f1,f2}$ (табл. 11) при выбранном уровне значимости □ и степенях свободы $f_1=N-P$ и $f_2=N(m-1)$.

Таблица 11.
Значения F-критерия Фишера для уровня значимости □=0,05 и числе степеней свободы f_1 и f_2.

f_2	f_1								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22

30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,06	2,02	1,96

Если вычисленное значение F-критерия меньше табличного, то с соответствующей доверительной вероятностью можно утверждать, что построенное уравнение адекватно описывает результаты эксперимента. Если $\sigma^2_{\text{ад}}$□σ^2_y, то вывод об адекватности модели может быть сделан и без проверки по F-критерию Фишера.

При неадекватности модели рекомендуется проведение повторных экспериментов, где изменены интервалы варьирования факторов, увеличено количество параллельных опытов, достроен план эксперимента с учетом новых факторов. Если в результате повторного эксперимента модель также окажется неадекватной, следует перейти к более сложным моделям – второго порядка, логарифмической и др.

3.3. Дробный факторный эксперимент.

Практически полный факторный эксперимент применяется при числе факторов n□5. При большем количестве факторов значительное сокращение объема опытов можно достичь, применив *дробный факторный эксперимент* – эксперимент, являющийся частью полного факторного эксперимента.

Количество опытов дробного факторного эксперимента при изменении факторов на двух уровнях равно

$$N=2^{n-k}, \tag{100}$$

где: k – показатель дробности плана.

При k=1 число опытов в плане дробного факторного эксперимента в два раза меньше, чем в плане полного факторного эксперимента, поэтому такие планы называют *полурепликой* плана полного факторного эксперимента и обозначают как 2^{n-1} или ½□2^n.

Так, при числе факторов n=6 и показателе дробности k=1 число опытов плана дробного факторного эксперимента будет равно $N=2^{6-1}=32$ вместо $N=2^6=64$ по плану полного факторного эксперимента.

При k=2 план дробного факторного эксперимента называют *четвертьрепликой*, при k=3 – 1/8 *реплики* и т.д.

При выборе дробности плана k необходимо учитывать, что число опытов должно быть больше числа членов уравнения

$$n + 1 \le 2^{n-k}. \tag{101}$$

План дробного факторного эксперимента строится также как и план полного факторного эксперимента, но с меньшим числом факторов. Оставшиеся факторы определяются по какому-либо *генерирующему соотношению* так, чтобы сохранялась ортогональность плана, т.е. так, чтобы сумма почленных произведений двух любых столбцов были равны нулю. В качестве генерирующего соотношения выбирают, как правило, произведение каких-либо факторов из первой группы.

Рассмотрим построение плана дробного факторного эксперимента 2^{3-1}. Здесь n=3, k=1, $N=2^{3-1}=4$. Первые два фактора изменяются, как и ранее в плане полного факторного эксперимента, а для третьего фактора выбирается генерирующее соотношение в виде $x_3 = x_1x_2$. Для того чтобы определить коэффициенты полинома вида (87), количество столбцов плана должно быть равно восьми (табл. 12).

Таблица 12.
План дробного факторного эксперимента 2^{3-1} .

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_j
1	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	4	0	0	0	0	0	0	4	–

План является ортогональным, но в нем оказались четыре пары одинаковых столбцов. Поэтому можно определить только четыре коэффициента, отражающие совместные влияния двух одинаковых столбцов

$$b_0 + b_{123} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{0j} y_j}{N}. \tag{102}$$

Суммарные значения коэффициентов $b_1 + b_{23}$, $b_2 + b_{13}$ и $b_3 + b_{12}$ определяются аналогично. В результате получают смешанные оценки, т.е. оценка коэффициента b_0 будет смешана с оценкой b_{123}, оценка b_1 – с оценкой b_{23} и т.д. Смешивание оценок является следствием того, что все восемь коэффициентов полинома определяются по недостаточному числу опытов (N=4).

Если априори известно, что нет взаимодействия между факторами и линейная модель (72) достаточно хорошо описывает факторное пространство, то все парные b_{12}, b_{13}, b_{23} и тройное b_{123} взаимодействия будут незначимы и могут быть приравнены нулю. Этого предположения достаточно, чтобы, пользуясь матрицей дробного факторного эксперимента 2^{3-1}, определить коэффициенты b_0, b_1, b_2 и b_3.

Если можно допустить, что какие-либо коэффициенты из их смешанной оценки сопоставимы и примерно равны, то для их расчета может быть использовано такое соотношение

$$b_0 = b_{123} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{0j} y_j}{2N}. \tag{103}$$

Графически планы дробного факторного эксперимента 2^{3-1} являются проекциями куба, который в свою очередь интерпретирует полный факторный эксперимент 2^3 (рис. 23). Формально из куба можно выбрать любые четыре точки, не лежащие в одной плоскости, и сформировать план дробного факторного эксперимента 2^{3-1}.

Достоинством плана дробного факторного эксперимента является то, что если построенный на его основе неполный полином не удовлетворяет требованиям по точности, то его план легко достраивается до плана полного факторного эксперимента без потери информации прежних опытах с формированием более точного полинома.

3.4. Планирование второго порядка.
3.4.1. Общие правила планирования второго порядка.

Ряд эмпирических зависимостей, устанавливающих связь параметра с основными факторами, может носить немонотонный характер. В таких случаях, когда линейного приближения для изучения параметра недостаточно, используют планирование второго порядка.

Такие эксперименты позволяют сформировать модель в виде *полного квадратичного полинома*, который содержит большее число членов, чем неполный квадратичный полином, сформированный по планам первого порядка, и поэтому требуют большего числа выполняемых опытов. Для получения квадратичной зависимости каждый фактор должен фиксироваться как минимум на трех уровнях.

В общем виде полный квадратичный полином второго порядка записывается как

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2, \qquad (104)$$

где: n – число факторов.

Например, при n=2 полный квадратичный полином состоит из 6 членов

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \qquad (105)$$

при n=3 – из 11 членов

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 + \\ + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \qquad (106)$$

Формально для нахождения коэффициентов квадратичной модели необходимо составить план полного факторного эксперимента 3^n, учитывая изменение каждого фактора на трех уровнях. Однако число экспериментов по плану 3^n превышают минимальное число опытов для нахождения коэффициентов полного квадратичного полинома. Так, при n=2 количество опытов по плану 3^n равно девяти, а минимальное число опытов – шесть (по числу коэффициентов уравнения); при n=3 количество опытов по плану 3^n равно 27, а минимум – 11 и т.д.

Чтобы сократить количество опытов, линейные планы последовательно достраивают до так называемого *композиционного плана*. Он предполагает реализацию опытов полного факторного эксперимента типа 2^n при n □ 5 или дробного факторного эксперимента при n □ 5 и добавление к нему некоторого количество опытов по заранее определенной схеме.

Дополнительные точки могут выходить за область плана первого порядка. В этом случае опыты в них реализуются при установлении факторов за пределами варьирования. Это надо учитывать при определении области совместимости факторов.

Если ранее уже был сформирован план полного факторного эксперимента 2^n, но адекватность построенной модели является неудовлетворительной, то этот план может быть достроен до композиционного плана второго порядка без потери информации о ранее сделанных опытах.

Расположение дополнительных точек целесообразно выбрать так, чтобы все точки были расположены симметрично относительно центра плана – такой план называют *центрально-композиционным*. Он состоит из плана полного факторного эксперимента 2^n (*ядра*), двух дополнительных точек по каждому выбранному фактору (их принято называть *звездными точками*) и опытов в центре плана.

Общее количество опытов в центрально-композиционном плане составляет

$$N = N_0 + 2n + n_0, \tag{107}$$

где: N_0 – число опытов ядра плана ($N_0=2^n$ для полного факторного эксперимента и $N_0=2^{n-k}$ для дробного эксперимента); n_0 – число опытов в центре плана (как правило, $n_0=1$).

Такое планирование требует значительно меньшего числа опытов по сравнению с планом полного факторного эксперимента 3^n (табл. 13).

Таблица 13.
Количество опытов различных планов эксперимента.

Число факторов n	**Центрально-композиционный план второго порядка** ($N_0=2^n, n_0=1$)	**План полного факторного эксперимента 3^n**
2	9	9
3	15	27
4	25	81
5	43	243
6	77	729
7	143	2187
8	273	6561

3.4.2. Центрально-композиционное планирование для двух факторов.

Рассмотрим центрально-композиционное планирование сначала на примере двух факторов. Геометрическая интерпретация такого плана представлена на рис. 24.

Ядром плана является план полного факторного эксперимента 2^2 (точки от 1 до 4). К плану добавлены звездные точки, находящиеся на расстоянии *звездного плеча* от центра эксперимента (на рис. 24 это точки от 5 до 8, выполненные в форме звезды). В начале координат расположен центр планирования – нулевая точка 9. Число уровней варьирования каждого фактора здесь равно пяти (–□, –1, 0, +1, +□).

При проведении экспериментов можно сначала поставить полный факторный эксперимент 2^2, и, если линейная модель окажется неадекватной, добавить звездные точки и опыт в центре. В табл. 14 приведен центрально-композиционный план такого эксперимента.

Таблица 14.
Центрально-композиционный план второго порядка (n=2).

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_j	**Часть плана**
1	+1	–1	–1	+1	+1	+1	y_1	Ядро – полный факторный эксперимент 2^2
2	+1	+1	–1	–1	+1	+1	y_2	
3	+1	–1	+1	–1	+1	+1	y_3	
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4	
5	+1	–□	0	0	□^{2}	0	y_5	Звездные точки
6	+1	+□	0	0	□^{2}	0	y_6	
7	+1	0	–□	0	0	□^{2}	y_7	
8	+1	0	+□	0	0	□^{2}	y_8	
9	+1	0	0	0	0	0	y_9	Нулевая точка
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	9	0	0	0	□0	□0	–	–

Для центрально-композиционного плана также как и для линейного плана требуется, чтобы выполнялись свойства симметричности (69) и ортогональности (71). Симметричность плана дает равномерное распределение информации по исследуемому факторному пространству. Ортогональность планирования позволяет получить оценки для коэффициентов уравнения независимыми друг от друга, что дает возможность отбрасывать те факторы, при которых коэффициенты оказываются незначимыми.

Симметричность плана выполняется, когда сумма элементов любого столбца (кроме i=0), включая столбцы, соответствующие квадратам фактора, равны нулю. Очевидно, что для столбцов с квадратичными членами сумма квадратов уровней факторов не может быть равна нулю. С целью соблюдения симметричности плана элементы этих столбцов преобразуются по типу

$$x_{kj} = x_{ij}^2 - a, \tag{108}$$

где: *a* – параметр преобразования, зависящий от числа факторов.

Тогда, сумма элементов столбца, соответствующего квадратам факторов, будет равна

$$\sum_{j=1}^{N} x_{kj} = \sum_{j=1}^{N}\left(x_{ij}^2 - a\right) = \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 - \mathrm{N}a = 0. \tag{109}$$

Откуда

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2}{N}. \tag{110}$$

Центрально-композиционный план с преобразованными квадратичными членами дан в табл. 15.

Таблица 15
Центрально-композиционный план второго порядка (n=2) с преобразованными квадратичными членами

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_3 = x_1^2 - a$	$x_4 = x_2^2 - a$	y_j
1	+1	–1	–1	+1	$1-a$	$1-a$	y_1
2	+1	+1	–1	–1	$1-a$	$1-a$	y_2
3	+1	–1	+1	–1	$1-a$	$1-a$	y_3
4	+1	+1	+1	+1	$1-a$	$1-a$	y_4
5	+1	–□	0	0	□^2-a	$-a$	y_5
6	+1	+□	0	0	□^2-a	$-a$	y_6
7	+1	0	–□	0	$-a$	□^2-a	y_7
8	+1	0	+□	0	$-a$	□^2-a	y_8
9	+1	0	0	0	$-a$	$-a$	y_9
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	9	0	0	0	0	0	–

Для определения неизвестных *a* и □ нужно сформировать и решить систему из двух уравнений. Одно из них, для параметра преобразования *a*, записано раннее в виде соотношения (110). Другое уравнение получим из условия ортогональности для столбцов x_3 и x_4:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{3j} x_{4j} = N_0(1-a)^2 - 4a(\alpha^2 - a) + a^2(2n-4) + n_0 a^2 = 0.$$

После простейших преобразований с учетом того, что $N = N_0 + 2n + n_0$ – общее число опытов в плане, получаем уравнение

$$\frac{N_0}{N} - \frac{2a\left(N_0 + 2\alpha^2\right)}{N} + a^2 = 0. \tag{111}$$

Параметр преобразования *a* может быть выражен как (см. план)

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2}{N} = \frac{N_0 + 2\alpha^2}{N}. \tag{112}$$

Подставив это выражение в уравнение (111), получаем

$$\frac{N_0}{N} - 2a^2 + a^2 = 0. \qquad (113)$$

Преобразуем это соотношение относительно *a*:

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}}, \qquad (114)$$

или, учитывая соответствующие выражения для N и N_0,

$$a = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}}. \qquad (115)$$

Приравняв выражения (112) и (114), можно записать

$$\frac{N_0 + 2\alpha^2}{N} = \sqrt{\frac{N_0}{N}}. \qquad (116)$$

Из этого соотношения выразим звездное плечо

$$\alpha = \sqrt{0{,}5\left(\sqrt{\mathrm{NN_0}} - N_0\right)}. \qquad (117)$$

Пользуясь выражениями (115) и (117), определяют параметры *a* и □ центрально-композиционного плана для любого числа факторов *n* (табл. 16). Для центрально-композиционного плана при числе факторов *n*=2 имеем следующие параметры плана

$$N_0 = 2^2 = 4;\ N = 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 9,$$

$$a = \sqrt{\frac{4}{9}} \approx 0{,}67;\ \alpha = \sqrt{0{,}5\left(\sqrt{9 \cdot 4} - 4\right)} = 1;$$

$$1 - a = 0{,}33;\ -a = -0{,}67;\ \alpha^2 - a = 0{,}33.$$

Таблица 16.
Значения параметров центрально-композиционного плана второго порядка ($N_0=2^n$, $n_0=1$)

Число факторов *n*	**Параметр преобразования *a***	**Звездное плечо □**
2	0,67	1
3	0,73	1,215
4	0,80	1,414
5	0,86	1,596
6	0,91	1,761
7	0,95	1,909
8	0,97	2,045

Сам центрально-композиционный план второго порядка примет вид, помещенный в табл. 17.

Таблица 17.
Центрально-композиционный план второго порядка (n=2) с преобразованными квадратичными членами и уровнями факторов.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_3 = x_1^2 - a$	$x_4 = x_2^2 - a$	y_j
1	+1	–1	–1	+1	0,33	0,33	y_1
2	+1	+1	–1	–1	0,33	0,33	y_2
3	+1	–1	+1	–1	0,33	0,33	y_3
4	+1	+1	+1	+1	0,33	0,33	y_4
5	+1	–1	0	0	0,33	–0,67	y_5
6	+1	+1	0	0	0,33	–0,67	y_6
7	+1	0	–1	0	–0,67	0,33	y_7
8	+1	0	+1	0	–0,67	0,33	y_8
9	+1	0	0	0	–0,67	–0,67	y_9
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	9	0	0	0	0	0	–

Таким образом, при n=2 центрально-композиционный план совпадает с планом полного факторного эксперимента 2^3. Звездные точки в этом случае лежат на границах варьирования факторов. Очевидно, что план является ортогональным. В отличие от планов полного факторного эксперимента 2^n для центрально-композиционного плана сумма квадратов факторов по столбцам не является одинаковой.

В результате обработки экспериментальных данных формируется полный квадратичный полином вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_3(x_1^2 - a) + b_4(x_2^2 - a). \tag{118}$$

Коэффициенты полинома $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_3, b_4$ определяются по общей зависимости

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2}. \tag{119}$$

Уравнение (118) можно преобразовать к более удобному для обработки и анализа полиному вида

$$\hat{y} = b_0' + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2, \tag{120}$$

где: $b_0' = b_0 - a(b_3 + b_4)$.

В заключении также как и в случае применения линейной модели оценивается значимость коэффициентов и проверяется адекватность модели по критерию Фишера.

3.4.3. Центрально-композиционное планирование для трех факторов.

Рассмотрим составление центрально-композиционного плана второго порядка при трех факторах (n=3). Графическое представление такого плана приведено на рис. 25. Ядром плана является полный факторный эксперимент 2^3 (точки 1-8). К ядру добавлены звездные точки

(точки 9-14), находящиеся на расстоянии звездного плеча □ от центра эксперимента, а также нулевая точка 15.

Общий вариант центрально-композиционного плана при трех факторах приведен в табл. 18.

Таблица 18.
Центрально-композиционный план эксперимента второго порядка (n=3).

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y_j	**Часть плана**
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	1	1	1	y_1	Ядро – полный факторный эксперимент 2^3
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	1	1	1	y_2	
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	1	1	1	y_3	
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	1	1	1	y_4	
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	1	1	1	y_5	
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	1	1	1	y_6	
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	1	1	1	y_7	
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	1	1	1	y_8	
9	+1	–□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	0	0	y_9	Звездные точки
10	+1	+□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	0	0	y_{10}	
11	+1	0	–□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	0	y_{11}	
12	+1	0	+□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	0	y_{12}	
13	+1	0	0	–□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	y_{13}	
14	+1	0	0	+□	0	0	0	0	0	0	□^{2}	y_{14}	
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}	Нулевая точка
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	15	0	0	0	0	0	0	0	□0	□0	□0	–	–

Чтобы обеспечить симметричность плана в столбцах с квадратичными членами введем параметр преобразования *a* по схеме, выраженной соотношением (108). Результаты преобразования отражены в табл. 19.

Таблица 19.
Центрально-композиционный план эксперимента второго порядка (n=3) с преобразованными квадратичными членами.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$x_4 = x_1^2 - a$	$x_5 = x_2^2 - a$	$x_6 = x_3^2 - a$	y_j
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	y_8
9	+1	–□	0	0	0	0	0	0	□^2-a	$-a$	$-a$	y_9
10	+1	+□	0	0	0	0	0	0	□^2-a	$-a$	$-a$	y_{10}
11	+1	0	–□	0	0	0	0	0	$-a$	□^2-a	$-a$	y_{11}
12	+1	0	+□	0	0	0	0	0	$-a$	□^2-a	$-a$	y_{12}
13	+1	0	0	–□	0	0	0	0	$-a$	$-a$	□^2-a	y_{13}
14	+1	0	0	+□	0	0	0	0	$-a$	$-a$	□^2-a	y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	$-a$	$-a$	$-a$	y_{15}
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–

Тогда, для центрально-композиционного плана при числе факторов n=3 имеем следующие параметры:

$$N_0 = 2^3 = 8;\ N = 8 + 1 \cdot 3 + 1 = 15,$$

$$a = \sqrt{\frac{8}{15}} \approx 0{,}73;\ \alpha = \sqrt{0{,}5\left(\sqrt{15 \cdot 8} - 8\right)} \approx 1{,}215;$$

$$1 - a = 0{,}27;\ -a = -0{,}73;\ \alpha^2 - a = 1{,}215^2 - 0{,}73 \approx 0{,}75.$$

С учетом полученных значений параметров план будет таким, как показано в табл. 20.

По результатам экспериментов формируется полином вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + \\ +b_4(x_1^2 - a) + b_5(x_2^2 - a) + b_6(x_3^2 - a). \quad (121)$$

Таблица 20.
Центрально-композиционный план эксперимента второго порядка (n=3) с преобразованными квадратичными членами и уровнями факторов.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$x_4 = x_1^2 - a$	$x_5 = x_2^2 - a$	$x_6 = x_3^2 - a$	y_j
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	y
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	y
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	y
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	y
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	y
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	y
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	y
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	y
9	+1	–1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	y
10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	y
11	+1	0	–1,215	0	0	0	0	0	–0,73	0,75	–0,73	y
12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	0	–0,73	0,75	–0,73	y
13	+1	0	0	–1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	0,75	y
14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	0,75	y
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	–0,73	–0,73	–0,73	y
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–

Коэффициенты полинома $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}, b_4, b_5, b_6$ определяются по общей зависимости (119).

Уравнение (121) можно преобразовать к следующему виду:

$$\hat{y} = b_0' + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + \\ + b_4x_1^2 + b_5x_2^2 + b_6x_3^2. \quad (122)$$

где: $b_0' = b_0 - a(b_4 + b_5 + b_6)$.

Следует отметить, что мы рассмотрели лишь один способ выбора звездного плеча и числа нулевых точек – при помощи центрально-композиционного плана. Существует ряд других планов второго порядка – *G-, E-*, *A-*, *D*-оптимальные, которые используют исходя из конкретных требований к плану эксперимента (минимума наибольшей ошибки предсказания, размещения наименьшего возможного числа точек и др.).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Все существующие факторы, определяющие состояние процесса бурения, при некотором упрощении можно разделить на какие группы?
2. Процесс управления включает три основных комплекса операций, какие?
3. Что такое критерий оптимизации?
4. Все задачи в области оптимизации можно разделить на два типа, какие?
5. Какие различают задачи оптимизации?
6. Какие требования предъявляется к критерию оптимизации?
7. В практике геологоразведочных работ сформирован набор критериев оптимизации, которые разделены в зависимости от целевой направленности на какие группы?
8. Какие критерии называются частными?
9. Какие задачи называются однокритериальными?
10. Перечислите технико-технологические критерии.
11. Перечислите экономические критерии.
12. Перечислите критерии качества работ.
13. В чём заключается метод Парето?
14. Что такое аддитивный критерий?
15. Что такое мультипликативный критерий?
16. Что такое максиминный (минимаксный) критерий?
17. В чём заключается метод экспертных оценок?
18. В чём заключается метод ранжирования?
19. Что такое матрица опроса?
20. Что такое конкордация?
21. В каком диапазоне изменяется коэффициент конкордации?
22. В чём заключается метода линейного программирования?
23. Чему перпендикулярен градиент целевой функции?
24. На что указывает направление градиента целевой функции?
25. Планирование эксперимента это?
26. Что такое факторный эксперимент?
27. Что такое ротатабельность плана эксперимента?
28. Что такое рандомизация полного факторного эксперимента?
29. Чему равно число факторов для полного факторного эксперимента типа 2^3?
30. Что такое воспроизводимостью опыта?
31. Что такое ошибка воспроизводимости?
32. Что такое дисперсия воспроизводимости?
33. На чём основан *G*-критерий Кохрена?
34. Какую величину называют статистически значимой?
35. Что такое дробный факторный эксперимент?
36. Какие планы называют полурепликой?
37. Какие планы называют четвертьрепликой?
38. Что такое композиционный план?
39. Какой план называют центрально-композиционным?
40. Что такое звездное плечо?

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. М.: Наука, 1976. 280 с.
2. *Башкатов Д.Н.* Планирование эксперимента в разведочном бурении. М.: Недра, 1985. 181 с.
3. *Башкатов Д.Н.* Оптимизация процесса бурения. – Нижний Новгород, изд. Красная книга, 2006. – 331 с.
4. *Ганджумян Р.А.* Математическая статистика в разведочном бурении: Справочное пособие. М.: Недра, 1990. 218 с.
5. *Горшков Л.К.* Оптимизация буровых работ и планирование эксперимента: Методические указания к расчетно-графическим работам. СПб: Санкт-Петербургский государственный горный институт, 2009. 28 с.
6. *Игнатов В.И.* Организация и проведение эксперимента в бурении. М.: Недра, 1978. 94 с.
7. *Козловский А.Е.* Оптимизация процесса бурения (структура и элементы управления). – СПб: Изд-во картографической фабрики ВСЕГЕИ. 2000. 246 с.
8. *Козловский Е.А***.** Автоматизация процесса геолого-разведочного бурения / Е.А. Козловский, Р.Х. Гафиятуллин. М.: Недра. 1977. 216 с.
9. *Справочник инженера по бурению геологоразведочных скважин*: В 2-х томах / Под общ. ред. проф. Е.А. Козловского. – Том 2. – М.: Недра. 1984. 437 с.