ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель программы аспирантуры
профессор С.М. Судариков

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
Современные методы геофильтрационных исследований

Подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Область науки:	1. Естественные науки
Группа научных специальностей:	1.6. Науки о Земле и окружающей среде
Научная специальность:	1.6.6. Гидрогеология
Направленность (профиль):	Гидрогеология
Отрасли науки:	Геолого-минералогические, технические
Форма освоения программы аспирантуры:	Очная
Срок освоения программы аспирантуры:	3 года
Составители:	д. г-м.н., проф. С.М. Судариков

Санкт-Петербург

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Математические основы теории движения подземных вод

Основным законом фильтрации подземных вод является закон Дарси, который связывает расход подземного потока с потерями энергии при его движении. В дифференциальной форме закон Дарси имеет вид:

$$Q = -K \cdot \omega \cdot \frac{dH}{dl}\ , \tag{14}$$

где Q – расход фильтрационного потока; ω – площадь фильтрации; K – коэффициент фильтрации; $\frac{dH}{dl}$ – гидравлический градиент в направлении l.

Как видно из формулы (14), закон Дарси указывает на линейную зависимость расхода фильтрации от гидравлического градиента. Параметром этой линейной зависимости является коэффициент фильтрации, который зависит как от свойств горной породы, так и от свойств фильтрующейся жидкости. Физически коэффициент фильтрации отражает работу сил трения при движении жидкости в пористой среде.

При рассмотрении процессов фильтрации жидкостей с различными свойствами вводится понятие о коэффициенте проницаемости k, который связан с коэффициентом фильтрации соотношениями:

$$k = \frac{K \cdot \nu}{g} \qquad \text{и} \quad k = \frac{K \cdot \mu}{\rho_0 \cdot g}.$$

В физической системе размерность коэффициента проницаемости k [см^2]. В гидрогеологии более употребительной единицей проницаемости является дарси, причем 1D = $1{,}02 \cdot 10^{-8}$ см^2. Принимая для воды коэффициент кинематической вязкости равным примерно 0,01 см^2/с, получим, что приближенно проницаемость в 1D соответствует коэффициенту фильтрации в 1 м/сутки.

Коэффициент проницаемости в целом не зависит от гидродинамических свойств фильтрующейся жидкости и определяется лишь свойствами горной породы. Это положение экспериментально подтверждено для условий отсутствия физико-химического взаимодействия минеральных частиц породы и жидкости. Вместе с тем на проницаемость пород, включающих глинистые минералы, которые вступают с водой в физико-химическое взаимодействие, существенно влияет состав фильтрующейся жидкости. Так, проницаемость песчаников для пресной воды ниже чем для соленой, причем в чистых песчаниках это расхождение еще сравнительно невелико, а в глинистых песчаниках оно может достигать двух порядков.

Если в законе Дарси (14) разделить величину фильтрационного расхода на площадь фильтрации, то мы получим величину, называемую скоростью фильтрации. Закон Дарси в скоростном выражении имеет вид:

$$v = \frac{Q}{\omega} = -K \cdot \frac{dH}{dl}\ ,$$

где v – скорость фильтрации; К – коэффициент фильтрации.

Скорость фильтрации является фиктивной величиной, поскольку при ее определении рассматривается вся площадь фильтрации, в том числе и площадь, занятая минеральными частицами горной породы. Таким образом, под скоростью фильтрации понимают скорость фиктивного потока, заполняющего пространство целиком.

Средняя скорость течения жидкости в отдельных порах характеризует так называемая действительная скорость фильтрации $v_д$, которая связана со скоростью фильтрации отношением

$$v_д = \frac{v}{n}.$$

Закон Дарси справедлив для относительно небольших скоростей фильтрации. При значительных скоростях фильтрации он нарушается за счет влияния инерционных сил и турбулентности потока. В этих условиях закономерности фильтрации могут быть описаны двучленной формулой:

$$I = a \cdot v + b \cdot v^2 \quad \text{или} \quad I = \frac{v}{K} \cdot (1 + \alpha \cdot v), \qquad (15)$$

где I – гидравлический градиент; a и b – константы; α – параметр нелинейности закона фильтрации, приближенно:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{K}{\nu \cdot g}};$$

α_o – параметр, зависящий от пористости и структуры порового пространства, для сравнительно однородных несцементированных пород

$$\alpha_0 = \frac{0{,}09}{n^2 \cdot \sqrt{1-n}}.$$

При движении жидкости в пористой среде число Рейнольдса может быть вычислено по формуле Н.Н.Павловского:

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{0{,}75n + 0{,}23} \cdot \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \qquad (16)$$

где d - действующий диаметр частиц. Критическое число Рейнольдса при этом находится в пределах 7-9.

При фильтрации жидкости через очень тонкие капилляры (например, при фильтрации через глины) на движение влияют не только силы трения, но и силы молекулярного притяжения со стороны минеральных частиц горной породы. Поэтому для фильтрации в глинистых породах характерно появление так называемого начального градиента фильтрации, т.е. градиента, при превышении которого начинается движение жидкости в глинистой породе.

Решение задач

Пример 1. Используя модельные представления об идеальном грунте, вывести зависимость для коэффициента фильтрации и проницаемости, указать их взаимосвязь.

Решение. При использовании модели идеального грунта горная порода представляется в виде набора прямолинейных капиллярных трубочек одинакового диаметра, при этом суммарный расход через породу представляется в виде суммы расходов по отдельным капиллярам, заменяющим реальную пористую среду:

$$Q = \sum_1^N Q_K^i,$$

где Q^i_k – расход воды, протекающей через один капилляр; N – число капилляров.

Расход воды, протекающей через один капилляр, может быть определен по формуле Гагена-Пуазейля:

$$Q_K^i = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{8\mu} \cdot I \cdot r_K^4,$$

где r_k – радиус капилляра.

Чтобы найти число капилляров, рассмотрим сечение F, через которое фильтруются подземные воды. Площадь пор в этом сечении nF, где n – пористость. Та же площадь в модели идеального грунта равна $\pi r_k^2 N$. Приравняв площади пор в природном грунте и его идеальной модели, получим $nF = \pi r_k^2 N$, откуда $N = \frac{n \cdot F}{\pi \cdot r_K^2}$.

Расход подземного потока, фильтрующегося через пористую среду, при использовании модели идеального грунта:

$$Q = \frac{n \cdot \rho \cdot g \cdot F}{8\mu} r_K^2 \cdot I$$

Сравнив эту формулу с законом Дарси, получим следующие выражения для коэффициентов фильтрации и проницаемости:

$$K = \frac{n \cdot \rho \cdot g}{8\mu} r_K^2; \qquad k = \frac{n}{8} \cdot r_K^2 .$$

Следовательно, $k = \dfrac{K \cdot \mu}{\rho \cdot g}$.

Полученные выражения для коэффициентов фильтрации и проницаемости, естественно, не могут быть использованы для практических расчетов, однако они могут быть полезны при анализе физических особенностей процессов фильтрации.

Пример 2. В естественный фильтрационный поток в одну из скважин запущен индикатор. Во второй скважине, находящейся на расстоянии ι от первой индикатор был обнаружен через время t. Определить пористость водоносного горизонта при следующих значениях параметров (по вариантам):

Вариант	1	2	3	4	5
К, м/сутки	10	15	20	25	30
l, м	10	15	20	25	30
t, сутки	30	30	45	45	60
I · 100	1	1	0,5	0,5	0,3

Решение. Средняя действительная скорость движения подземных вод $\upsilon_д = l/t$. Скорость фильтрации естественного потока подземных вод $\upsilon = KI$.

Используя формулу, связывающую скорость фильтрации со средней действительной скоростью, можно оценить пористость пород:

$$n = \frac{v}{v_д} = \frac{K \cdot t}{l} \cdot I .$$

Пример 3. Оценить режим движения подземных вод в непосредственной близости от фильтра водозаборной скважины (см. пример I темы I). Пористость пород в прифильтровой зоне равна 0,35, действующий диаметр частиц 1 мм, длина рабочей части фильтра l = 10 м.

Решение. Прежде всего необходимо оценить скорость фильтрации подземных вод в непосредственной близости от фильтра водозаборной скважины. Зная расход воды, откачиваемой из скважины, можно вычислить искомую скорость фильтрации

$$v = \frac{Q}{\pi \cdot d \cdot l}$$

Далее для оценки режима движения подземных вод, по формуле Н.Н.Павловского вычислим число Рейнольдса и сопоставим его с критическим.

Задачи и вопросы для самостоятельной работы

1. Используя выражение для гидростатического напора, выразить расход фильтрационного потока через градиент гидростатического давления.

2. В напорном водоносном горизонте работает водозаборная скважина. Произойдет ли при этом изменение коэффициента фильтрации пород вблизи скважины? Оценить возможный диапазон изменений.

3. Как изменяется коэффициент фильтрации пород с изменением температуры подземных вод?

4. Используя зависимости (15), выразить постоянные a и b. Проанализировать, дать их физическую интерпретацию.

5. Сосуд с пористым дном заполнен грунтом на высоту l. В сосуд залита вода до высоты h_o, причем $h_o > l$. Пористое дно обеспечивает свободное вытекание воды под действием силы тяжести. Оценить величину фильтрационного расхода воды, вытекающей через пористое дно.

6. Для образца песчано-глинистых пород определен коэффициент проницаемости при фильтрации воздуха и воды. Какое из двух значений коэффициента проницаемости больше? Почему?

7. Обосновать требования к минимальному объему, для которого справедлив закон Дарси, при фильтрации в трещиноватых горных породах.

8. Какова зависимость коэффициента проницаемости глинистых пород от минерализации и температуры фильтрующихся подземных вод?

9. Привести примеры статистического обоснования закона Дарси. Рассмотреть рекомендуемые при этом формулы для оценки коэффициента фильтрации; указать причины, исключающие возможность их использования в инженерных расчетах.

10. Используя известные в настоящее время выражения для оценки числа Рейнольдса в пористых средах, оценить возможный верхний предел закона Дарси.

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл коэффициента фильтрации?
2. Каково соотношение между коэффициентом фильтрации и проницаемости?
3. Что такое скорость фильтрации?
4. Что такое действительная скорость движения подземных вод?
5. Каково соотношение между скоростью фильтрации и действительной скоростью движения?
6. Напишите двучленную формулу фильтрации.
7. Что такое параметр нелинейности закона фильтрации?
8. Как зависит коэффициент фильтрации от вязкости и температуры жидкости?
9. В чем заключаются особенности фильтрации в глинах?
10. Каковы верхняя и нижняя границы применимости закона Дарси?
11. Что такое начальный градиент фильтрации?
12. Какова размерность коэффициентов фильтрации и проницаемости?
13. Напишите формулу Н.Н.Павловского для оценки числа Рейнольдса в пористой среде.
14. Будет ли происходить фильтрация в глинах при градиенте меньшем, чем начальный?

Тема 2 Одномерная плановая стационарная фильтрация

Одномерная параллельно-плановая стационарная фильтрация подземных вод описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{W}{T} = 0, \tag{18}$$

где W – коэффициент инфильтрационного питания; Т – водопроводимость пласта.

Решение уравнения (18) может быть получено, если заданы соответствующие граничные условия. При граничных условиях первого рода (рис. 10) напор подземных вод:

$$H = H_0 + \frac{H_L - H_0}{L} \cdot x + \frac{W \cdot x}{2T} \cdot (L - x).$$

При этом удельный расход подземного потока, протекающего через сечение, находящееся на расстоянии x от нулевой точки,

$$q_x = T\frac{H_0 - H_L}{L} + W(0{,}5L - x),$$

где q_x – удельный расход через сечение x.

Исходное дифференциальное уравнение безнапорного одномерного потока имеет вид:

$$\frac{d}{dx}(Kh\frac{dH}{dx}) + W = 0, \tag{19}$$

где h – мощность безнапорного потока.

Уравнение (19) является нелинейным, и для его аналитического решения применяют различные способы линеаризации. Наиболее известным методом линеаризации являются способы Буссинеска и Багрова – Веригина.

Для однородного по вертикали грунтового водоносного горизонта, залегающего на горизонтальном водоупоре (рис. 11), уравнение (19) может быть линеаризовано и представлено в виде:

$$\frac{d^2h^2}{dx^2} + \frac{W}{K} = 0. \tag{20}$$

Для граничных условий первого рода уровень подземных вод может быть вычислен по выражению:

$$h^2 = h_0^2 + \frac{h_L^2 - h_0^2}{L} \cdot x + \frac{W \cdot x}{K}(L - x). \tag{21}$$

Удельный расход потока в сечении x для данной схемы:

$$q_x = K\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} + W(0{,}5L - x).$$

При W = 0 получаем известную формулу Дюпюи.

Для расчета безнапорной фильтрации в слоистых водоносных горизонтах вводится в рассмотрение функция (потенциал) Гиринского:

$$G = \sum_1^n K_i m_i (h - x_i),$$

где K_i, m_i *и* z_i – соответственно коэффициент фильтрации, мощность и расстояние от середины слоя до водоупора для i-го слоя; n – число слоев.

В условиях радиальной стационарной фильтрации исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot \frac{dH}{dr}) = 0.$$

При работе скважины (рис. 12), находящейся в центре кругового пласта радиусом R, величины понижения в любой точке:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \ln\frac{R}{r}, \tag{22}$$

где Q – дебит скважины; S – понижение в точке, находящейся на расстоянии r от центра скважины; R – радиус кругового пласта.

В частности, понижение в самой скважине:

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \ln\frac{R}{r_c}, \qquad (23)$$

где r_c – радиус скважины.

При радиальной безнапорной фильтрации в однородном горизонте и горизонтальном водоупоре формулы (22) и (23) должны быть преобразованы путем следующей подстановки: вместо Н – $\frac{h^2}{2}$, вместо Т – К.

Решение задач

<u>*Пример 1*</u>. Грунтовый водоносный горизонт приурочен к разнозернистым пескам, коэффициент фильтрации которых равен 16 м/сутки. На горизонт пройдены две наблюдательные скважины, уровни подземных вод в которых равны 130 и 123 м (рис. 13). Построить депрессионную поверхность водоносного горизонта между скважинами. Расстояние между скважинами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5
l, м	2000	2000	2100	21000	2200

Решение. На основании зависимости (21) при W = 0 в обозначениях, более удобных для решения данной задачи, имеем:

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_0^2}{L} \cdot x},$$

причем начало координат совпадает с положением скважины 1.

<u>*Пример 2*</u>. В центре кругового пласта в условиях стационарной фильтрации с некоторым постоянным дебитом Q работает водозаборная скважина. Определить величину расхода подземных вод, протекающих через любое сечение потока.

Решение. Расход воды, протекающей через любое сечение,

$$Q_r = -2\pi Tr \cdot \frac{\partial S}{\partial r},$$

где S – понижение потока, отсчитываемое от напора на границе области фильтрации.

Для вычисления $\frac{\partial S}{\partial r}$ воспользуемся формулой Дюпюи:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \ln\frac{R}{r},$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{1}{r}.$$

Следовательно, $Q_r = Q$, т.е. еще раз показано, что в условиях стационарного движения расход воды, протекающей по области фильтрации, постоянен и равен расходу на скважине.

Пример 3. Перпендикулярно к потоку подземных вод, разгружающегося в поверхностный водоток, пройдены две наблюдательные скважины (рис. 14). В меженный период уровни подземных вод в реке и в наблюдательных скважинах были равны H_0, H_1, H_2. Определить величину сопротивления ложа водотока ΔL, если L_1 = 100 м, L_2 = 200 м, а уровни подземных вод в реке H_0 и в скважинах H_1 и H_2 по вариантам следующие:

Вариант	1	2	3	4	5

H_0, м	25,3	24,6	25,8	26,3	24,0
H_1, м	29,6	30,3	31,7	32,0	33,2
H_2, м	30,5	31,4	32,3	33,1	34,2

Решение. В условиях стационарного движения, удельный расход на участке L_2:

$$q = Kh_{cp} \cdot \frac{H_2 - H_1}{L_2} ,$$

где h_{cp} – средняя мощность подземного потока.

Удельный расход между скважиной 1 и рекой с учетом перемещения уреза на величину ΔL:

$$q = Kh_{cp} \cdot \frac{H_1 - H_0}{L_1 + \Delta Д} ,$$

Решая совместно полученные равенства, получим:

$$\Delta L = \frac{H_1 - H_0}{H_2 - H_1} \cdot L_2 - L_1 .$$

Задачи и вопросы для самостоятельной работы

1. В условиях жесткого режима фильтрации граничные условия изменяются во времени. Возможен ли при этом установившийся режим фильтрации?
2. Как влияет уклон водоупора на движение безнапорного потока?
3. Одномерная фильтрация подземных вод происходит в неоднородных водоносных горизонтах. В одном случае граница неоднородности параллельна линиям тока, а во втором – перпендикулярна им. Выразить коэффициент фильтрации однородного водоносного горизонта, эквивалентного (в смысле равенства расходов) данным неоднородным пластам.
4. Обосновать вид подстановки при переходе от напорного движения к безнапорному.
5. Показать эквивалентность формул для оценки расходов и понижений в радиальном потоке при выполнении на скважине граничных условий первого и второго рода.
6. Вывести расчетную зависимость для параллельно-планового потока при выполнении на одной из границ граничных условий первого рода (H = const), а на второй – граничных условий второго рода (q = const).
7. Проиллюстрировать конкретным примером вывод выражения для потенциала Гиринского.
8. Обосновать вид подстановки при переходе от решений для однородных потоков к решениям для горизонтальнослоистых пластов (схема Гиринского).
9. Каковы физические причины появления промежутка высачивания?
10. Обосновать границы применимости решений без учета промежутка высачивания как в отношении оценки уровней, так и расходов подземных вод.

Контрольные вопросы

1. Что такое стационарная фильтрация?
2. Напишите исходные дифференциальные уравнения одномерной напорной и безнапорной фильтрации.
3. Напишите формулу Дюпюи для параллельно-планового потока.
4. Напишите выражение для оценки уровней безнапорного потока.
5. Что такое потенциал Гиринского?
6. Каков потенциал Гиринского для водоносного горизонта, представленного тремя однородными прослоями?
7. Как можно перейти от формул, описывающих напорное движение, к формулам безнапорного движения?
8. Каков физический смысл величины W?
9. Напишите формулу Дюпюи для радиального потока.
10. Напишите исходное дифференциальное уравнение для радиальной стационарной

фильтрации.

11. Охарактеризуйте вид депрессионной поверхности в напорном параллельно-плановом потоке.
12. Охарактеризуйте вид свободной поверхности в безнапорном параллельно-плановом потоке.
13. Что такое удельный расход?
14. Как линеаризуется уравнение (19)?

Тема 3 Одномерная плановая нестационарная фильтрация

Одномерная параллельно-плановая нестационарная фильтрация подземных вод описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \;, \tag{24}$$

где *a* – коэффициент пьезопроводности.

Для решения уравнения (24) необходимо задать так называемые краевые (т.е. начальные и граничные) условия.

Для полуограниченного пласта в условиях мгновенного скачка на границе (рис. 15), т.е. при следующих краевых условиях:

$$H\,(x,\, t = 0) = H^o;\; H\,(x = 0,\, t) = H_o;\; H\,(x = \infty,\, t) = H^o$$

и введении новой переменной вида:

$$\Delta H = H - H^o,$$

уравнение (24) и краевые условия могут быть преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial(\Delta H)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2(\Delta H)}{\partial x^2}; \tag{25}$$

$$\Delta H\,(x,\, t = 0) = 0;\; \Delta H\,(x = 0,\, t) = \Delta H^o;\; \Delta H\,(x = \infty,\, t) = 0. \tag{26}$$

Решение задачи (25)-(26) имеет следующий вид (так называемое фундаментальное решение):

$$\Delta H = \Delta H^0 \cdot erfc(\lambda), \tag{27}$$

где erfc(λ) – специальная функция (см. прил. 1),

$$erfc(\lambda) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\lambda} e^{-x^2} dx;$$

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

При линейном изменении уровня на границе x = 0, краевые условия для ΔH следующие:

$$\Delta H\,(x,\, t = 0) = 0; \qquad \Delta H\,(x = 0,\, t) = v\, t,$$

где ν – скорость изменения напора на границе области фильтрации.

Общий вид решения для этого случая:

$$\Delta H = v \cdot t \cdot R(\lambda), \tag{28}$$

где R(λ) – специальная функция (см. прил. 2).

$$R(\lambda) = (1 + 2\lambda^2) \cdot erfc(\lambda) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda^2}.$$

В случае ограниченного пласта с граничными условиями первого рода, когда на одной из границ напор претерпевает скачкообразное изменение, а на второй остается прежним (рис. 16), т.е. при

$$\Delta H\,(x = 0,\, t) = \Delta H^o; \qquad \Delta H\,(x = L,\, t) = 0,$$

(здесь L – длина области фильтрации), решение может быть представлено в виде:

$$\Delta H = \Delta H^0 \cdot F(\bar{x}, \tau), \tag{29}$$

где $F(\bar{x}, \tau)$ – специальная функция,

$$F(\bar{x},\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\pi^2 n^2 \tau} \cdot Sin(n\pi\bar{x});$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \qquad \tau = \frac{at}{L^2}.$$

Приведенные выше решения (27), (28) и (29) справедливы для напорной фильтрации подземных вод. В условиях безнапорной фильтрации в однородном водоносном горизонте при горизонтальном расположении водоупора данные решения следует преобразовать с использованием подстановки вида:

$$\Delta H = S\,(2h_o - S),$$

где h_o – первоначальная мощность безнапорного потока.

В условиях радиальной нестационарной фильтрации исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial H}{\partial r}\right). \tag{30}$$

При откачке из скважины с постоянным дебитом Q в неограниченном изолированном напорном пласте понижение в любой момент времени в любой точке может быть определено по формуле Тейса:

$$S(r,t) = -\frac{Q}{4\pi T} \cdot Ei\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \tag{31}$$

где Ei (-x) – интегральная экспоненциальная функция (см. прил. 3).

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Если $\frac{r^2}{4at} \le 0{,}03$, функцию - *Ei (-x)* можно преобразовать к виду:

$$-Ei(-x) = \ln \frac{0{,}562}{x}.$$

С учетом последнего равенства для квазистационарного режима фильтрации формула Тейса примет вид:

$$S(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} \cdot \ln \frac{2{,}25at}{r^2}. \tag{32}$$

Полученное выражение часто называют формулой Джейкоба.

Решение задач

Пример 1. Аллювиальные отложения реки представлены песками со средней мощностью около 20 м (рис. 17). К аллювиальным отложениям приурочен водоносный горизонт средней мощностью 15 м, водоупором для которого служит мощная толща глин. Во время паводка уровень воды в реке повысился на 3 м. Коэффициент фильтрации аллювиальных отложений равен 10 м/сутки, коэффициент гравитационной водоотдачи ориентировочно -— 0,1. Расстояния между рекой и скважинами x_1 = 10 м, x_2 = 20 м; x_3 = 30 м. Оценить величину подпора подземных вод в скважинах 1-3 на моменты времени t_1, t_2 и t_3. Описать развитие процесса подпора подземных вод во времени. Значения t_1, t_2 и t_3 по вариантам следующие:

Вариант	1	2	3	4	5
t_1,сутки	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
t_2, сутки	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
t_3, сутки	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9

Решение. Поскольку в данном случае изменение уровня подземных вод незначительно, в качестве расчетной зависимости можно использовать решение линеаризованного уравнения фильтрации. В частности, предполагая мгновенный характер подъема уровня воды в реке, можно воспользоваться фундаментальным решением:

$$\Delta H = \Delta H^o erfc\ \lambda.$$

По условиям задачи $\Delta H^o = 3$ м. Коэффициент уровнепроводности $a = \frac{Kh_{cp}}{\mu} = 1{,}5 \cdot 10^3$ м^2/сутки.

Для анализа процесса развития подпора во времени необходимо построить графики $\Delta H = f(t)$ для каждой наблюдательной скважины и $\Delta H = f(x)$ на все расчетные моменты времени.

<u>*Пример 2*</u>. Створ наблюдательных скважин сооружен перпендикулярно реки (рис. 18), расстояние между рекой и скважинами $x_1 = 50$ м и $x_2 = 100$ м. Основным водоносным горизонтом является горизонт аллювиальных песчано-галечниковых отложений, подстилаемых толщей глин и суглинков. Во время паводка на моменты времени t были замерены величины подпора подземных вод в скважинах ΔH_1 и ΔH_2 и подъем воды в реке ΔH^o. Определить коэффициент уровнепроводности водоносного горизонта, а также сопротивление русла реки ΔL. Параметры горизонта и время замеров по вариантам следующие:

Вариант	1	2	3	4
ΔH^o, м	5	5	3	3
ΔH_1, м	1,29	2,86	0,45	0,75
ΔH_2, м	0,69	2,29	1,37	1,72
t, сутки	1	4	1	4

Решение. Согласно формуле (27), подпор подземных вод в наблюдательных скважинах:

$$\Delta H_1 = \Delta H^o\ erfc\ \lambda_1; \quad \Delta H_2 = \Delta H^o\ erfc\ \lambda_2.$$

Зная величины ΔH^o, ΔH_1, ΔH_2, можно найти erfc λ_1 и erfc λ_2 и по таблицам функции erfc x (см. прил. I) можно определить величины λ_1 и λ_2. В свою очередь,

$$\lambda_1 = (x_1 + \Delta L) / 2\sqrt{\alpha t}; \quad \lambda_2 = (x_2 + \Delta L) / 2\sqrt{\alpha t}.$$

Решив полученную систему относительно ΔL и α, найдем искомые параметры. В частности, расчетное значение:

$$\Delta L = (\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1) / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

<u>*Пример 3*</u>. В неограниченном изолированном водоносном горизонте с постоянным дебитом Q работает водозаборная скважина (рис. 19). Определить расход подземных вод, протекающих через зону, ограниченную расчетным радиусом влияния R_p, а также через зону квазистационарного движения $R_к$.

Решение. Расход подземного потока, протекающего через любую границу радиуса R,

$$Q_R = -2\pi TR \cdot \frac{\partial S}{\partial r}.$$

С другой стороны, в неограниченном изолированном пласте величина

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi T} \cdot \frac{2}{r} \cdot e^{\frac{r^2}{4at}}.$$

Следовательно, $Q_R = Q \cdot e^{-\frac{R^2}{4at}}$.

Расчетный радиус влияния $R_p = 1{,}5\sqrt{at}$, в этих условиях расход подземных вод, поступающих из внешней зоны через поверхность радиуса R_p,

$$Q_{R_p} = Q \cdot e^{-\frac{2{,}25}{4}}$$

Радиус зоны квазистационарного движения $R_p = 0{,}8\sqrt{at}$, тогда соответствующий расход подземных вод:

$$Q_{R_p} = Q \cdot e^{-\frac{0{,}64}{4}}.$$

Полученное решение наглядно показывает, что зона квазистационарного движения является по существу зоной транзита, в то время как внешняя зона служит областью формирования запасов подземных вод.

Заметим также, что $Q_R \to Q$, если $R \to 0$, т.е. решение Тейса предполагает бесконечно малые размеры водозаборной скважины.

Задачи и вопросы для самостоятельной работы

1. Найти расход подземных вод, протекающих через сечение x = 0, считая пласт полуограниченным.
2. Провести строгий вывод решения задачи для полуограниченного пласта в условиях безнапорного потока.
3. Рассмотреть возможности применения решения Тейса при наличии естественного потока.
4. Как изменится решение задачи при фильтрации напорных подземных вод в полуограниченном пласте при наклонном водоупоре? Отметить возможные изменения при безнапорном движении.
5. Упростить формулу фундаментального решения для условий квазистационарного движения.
6. Исследовать границы применимости понятия расчетного радиуса влияния.
7. Вывести условия аппроксимации функции Ei (-x) логарифмической зависимостью с точностью до 0,5; 1; 2; 3 и 5%.
8. Используя решение (29), вывести расчетные зависимости для ограниченного пласта, в котором вторая граница представляет собой непроницаемую границу (δH/δx = 0).
9. Сопоставить решения для откачки из неограниченного изолированного пласта в условиях граничных условий первого и второго родов на скважине.
10. Для схемы ограниченного пласта вывестиусловия применимости решения полуограниченного пласта, а также определить, начиная с какого момента времени можно использовать решение для стационарной фильтрации.

Контрольные вопросы

1. Что такое нестационарная фильтрация?
2. Напишите исходное дифференциальное уравнение параллельно-плановой нестационарной фильтрации, фундаментальное решение и дифференциальное уравнение радиальной нестационарной фильтрации.
3. Что такое квазистационарный режим фильтрации?

4. Напишите формулы Тейса и Джейкоба.
5. При каких условиях наступает квазистационарный режим фильтрации?
6. Что такое краевые условия фильтрации?
7. Что характерно для режима фильтрации в условиях полуограниченного и ограниченного пласта?
8. Напишите решение для полуограниченного пласта при линейном изменении уровней на границе.
9. Как можно получить решение для безнапорной нестационарной фильтрации подземных вод?
10. Напишите граничное условиена скважине в схеме Тейса.
11. Что такое изолированный пласт?

<u>Тема 4</u> Интерпретация результатов опытных откачек

Методы интерпретации результатов опытных откачек могут быть подразделены на следующие основные группы [1, 4]:

1) прямые, основанные на использовании аналитических решений соответствующих фильтрационных задач;

2) интегральные, основанные на использовании решений для интегральных аналогов исходных дифференциальных уравнений, полученных с помощью специальных интегральных преобразований;

3) аналогового и численного моделирования;

4) комбинированные, включающие в себя элементы предыдущих групп

Наиболее разработаны прямые методы интерпретации опытных откачек. Среди этой группы методов могут быть выделены следующие способы расчета гидрогеологических параметров:

1) разности понижений;

2) отношения понижений;

3) характерных точек;

4) типовых кривых;

5) прямой линии (графоаналитический метод).

Способ разности понижений используется обычно в случае логарифмической зависимости понижения от обобщенных параметров, отражающих расстояние, время, фильтрационные свойства пород и геометрические формы области фильтрации. Составляя разности понижений для точек с заданными координатами r и t, можно исключить ряд неизвестных параметров и получить расчетную формулу для определения проводимости горизонта.

При откачках из неограниченного пласта для условий квазистационарного движения, разность понижений в точках пласта r_1 и r_2 в моменты времени t_1 и t_2:

$$\Delta S = S_1(r_1, t_1) - S_2(r_2, t_2) = \frac{Q}{4\pi T} \cdot \ln \frac{t_1 \cdot r_2^2}{t_2 \cdot r_1^2} \ , \tag{33}$$

откуда коэффициент проводимости:

$$T = \frac{Q}{4\pi \cdot \Delta S} \cdot \ln \frac{t_1 \cdot r_2^2}{t_2 \cdot r_1^2} \tag{34}$$

В частности, при $t_1 = t_2$ получаем известную формулу Дюпюи для оценки проводимости по двум наблюдательным скважинам.

Способ отношения понижений применяют, если в уравнение, описывающее распределение понижений при откачках, входят только два неизвестных параметра. Например, для неограниченного изолированного пласта в условиях, когда процесс фильтрации описывается формулой Тейса, отношение понижений:

$$\frac{S_1(r_1, t_1)}{S_2(r_2, t_2)} = \frac{Ei(-\frac{r_1^2}{4at_1})}{Ei(-\frac{r_2^2}{4at_2})} \ . \tag{35}$$

$4\alpha\ t_1$ $4\alpha\ t_2$

По этой формуле можно определить коэффициент пьезопроводности пласта.

Способ характерных точек пригоден для некоторых схем фильтрации, когда на графиках S = f (t) или S = f (r) имеются характерные точки (точки экстремальных значений, точки перегибов и т.п.). Зная координаты этих точек на графиках фактических данных и соответствующие этим точкам аналитические выражения экстремумов, можно определить фильтрационные параметры исследуемого горизонта. Например, для неограниченного пласта (схема Тейса) максимальная скорость снижения уровней отмечается в момент $t_0 = \frac{r^2}{4a}$. Отыскав t_0 по фактическим данным, можно определить коэффициент пьезопроводности, а затем найти проводимость горизонта по формуле Тейса.

Способ типовых кривых используют, когда конечные решения содержат табулированные функции, зависящие от одного или двух параметров. Координаты типового графика выбирают так, чтобы график фактических наблюдений, построенный в том же масштабе, был подобен типовому и совмещался с ним при простом смещении координатных осей. Фильтрационные параметры исследуемого водоносного горизонта вычисляются по смещению координатных осей типового и фактического графика.

Рассмотрим более подробно использование способа типовых кривых для схемы Тейса и схемы слоистого пласта.

Прологарифмировав формулу Тейса и выражение аргумента интегральной экспоненциальной функции, получим:

$$\lg S - \lg[-Ei(-\lambda)] = \lg\frac{Q}{4\pi T}; \tag{36}$$

$$\lg\frac{t}{r^2} - \lg\frac{1}{\lambda} = \lg\frac{1}{4a}\ . \tag{37}$$

Выражения (36) и (37) эквивалентны формулам:

$$y - y' = \text{const};\ \ x - x' = \text{const}, \tag{38}$$

где $x = \lg\frac{t}{r^2}$; $x'' = \lg\frac{1}{\lambda}$; $y = \lg S$; $y' = \lg[-Ei(-\lambda)]$.

В свою очередь, формулы (38) представляют собой условия подобия кривых $y = f(x)$ и $y' = f(x')$, получаемых простым смещением начала координат. Следовательно, кривые $\lg S = f(\lg\frac{t}{r^2})$ и $\lg[-Ei(-\lambda)] = f(\lg\frac{1}{\lambda})$, построенные в в одинаковом масштабе, сместятся друг относительно друга по оси абсцисс на $A = \lg 4a$, а по оси ординат на $B = \lg\frac{Q}{4\pi T}$.

Для определения величин А и В построенную типовую кривую накладывают на кривую фактических наблюдений и добиваются их совмещения при соблюдении параллельности координатных осей. Искомые фильтрационные параметры:

$$T = \frac{Q}{4\pi}\cdot 10^{-B};\quad a = \frac{1}{4}\cdot 10^{A}. \tag{39}$$

Аналогично, для схемы откачки с постоянным дебитом в пласте, подпитываемом из соседнего горизонта, при сохранении в нем постоянного напора и при жестком режиме перетекания (схема Хантуша), можно написать при $r\cdot\sqrt{\xi}$ = const.

$$\lg S - \lg[W(u, r\sqrt{\xi})] = \lg\frac{Q}{4\pi T}; \tag{40}$$

$$\lg\frac{t}{r^2} - \lg\frac{1}{u} = \lg\frac{1}{4a},$$

где $u = \frac{r^2}{4at}$; ξ – коэффициент связи, $\xi = \frac{K_0}{m_0\cdot T}$; K_o и m_o – коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемых пород; T – проводимость пород основного горизонта.

Следовательно, в координатах $\lg S = f(\lg\frac{t}{r^2})$ и $\lg[W(u, r\sqrt{\xi})] = f(\lg\frac{1}{u})$ мы получим подобные кривые (см. прил. 4). В одинаковом масштабе данные кривые сместятся друг относительно друга по оси абсцисс на $A = \lg\frac{1}{4a}$, а по оси ординат – на $B = \lg\frac{Q}{4T}$.

Конкретное определение параметров Т и а проводится аналогично предыдущему случаю, причем значение ξ находят подбором: совместив графики, нужно выбрать из серии кривых с различными значениями $r\sqrt{\xi}$ ту, которая лучше всего ложится на опытные точки, по ней и определяют ξ.

Способ прямой линии является разновидностью метода типовых кривых. Сущность этого метода заключается в преобразовании выражений для понижения таким образом, чтобы график зависимости понижения от обобщенных параметров при выполнении соответствующих условий представлялся прямой линией.

Для схемы Тейса основными расчетными зависимостями в способе прямой линии являются следующие:

$$\begin{cases} S = A_t + C_t \ln t; \\ S = A_r + C_r \ln r; \\ S = A_K + C_K \ln\dfrac{t}{r^2}, \end{cases} \tag{41}$$

r²

где $A_t = C_t \cdot \ln\frac{2{,}25a}{r^2}$; $C_t = C_K = \frac{Q}{4\pi T}$; $A_r = C_r \cdot \ln 1{,}5\sqrt{at}$;

$C_r = \frac{Q}{2\pi T}$; $A_K = C_K \cdot \ln 2{,}25a$.

В заключение заметим, что интерпретация опытных откачек должна проводиться в два этапа: качественный анализ и вычисление параметров. При проведении качественного анализа важное значение приобретает проблема диагностики результатов откачек.

Решение задач

<u>*Пример 1.*</u> Опробуемый водоносный горизонт представлен песчаниками верхнемелового возраста мощностью 45 м. Сверху и снизу водоносный горизонт перекрыт мощной толщей глин. Напор в водоносном горизонте на 10 м выше поверхности земли. Для оценки параметров этого горизонта из опытной скважины проводилась откачка с Q = 233 м^3/сутки в режиме самоизлива. Расход регулировался задвижкой Лудло на устье скважины. Понижение измерялось в двух наблюдательных скважинах, находящихся на расстоянии 250 и 500 м от центральной скважины:

Время, ч	0,5	1	1,5	3	5	8	10	13	16	21	24
S_1, см	4	12	15	30	40	44	46	50	54	58	64
S_2, см	0	0	0	7	13	16	20	24	27	30	43

Используя способы разности и отношения понижений, а также способ типовой кривой определить гидрогеологические параметры водоносного горизонта.

Решение. Для интерпретации результатов данной откачки целесообразно применить способ отношений понижений. Для этих целей могут быть использованы данные наблюдательной скважины I в начальные моменты наблюдений (резко нестационарное движение). При подборе коэффициента пьезопроводности можно использовать график вида С = f (a), где

$$C = \frac{Ei(-\frac{r_1^2}{4at_1})}{Ei(-\frac{r_2^2}{4at_2})}$$

Метод разности понижений может быть использован для периода квазистационарного движения, т.е. при $\frac{r^2}{4at} \le 0{,}03$. Проверить, выполняется ли данное условие, можно, использовав значение а, найденное по способу отношений. При интерпретации способом разности понижений можно использовать площадное и временное прослеживание.

Для вычисления по способу эталонной кривой необходимо нанести точки, соответствующие величинам lgS и $\lg\frac{t}{r^2}$, на график, построенный в масштабе эталонной кривой. На построенный график накладывается эталонная кривая так, чтобы она совпадала с максимальным числом точк при сохранении параллельности координатных осей. После этого находят пересечение оси $\lg\frac{1}{\lambda}$ эталонной кривой с осью lgS в точке $\lg S^0 = \lg\frac{Q}{4\pi T}$ и точку пересечения оси lg [-Ei (-λ)] с осью $\lg\frac{t}{r^2}$ в точке $\lg(\frac{t}{r^2})^0 = \lg\frac{1}{4a}$. Параметры Т и а вычисляются по формулам (39).

Пример 2. Для условий примера 1 интерпретировать результаты опытной откачки графо-аналитическим методом с использованием способов временного, площадного и комбинированного прослеживания.

Решение. Необходимо построить индикаторные графики S = f (lg t) для каждой наблюдательной скважины. Конечные участки кривых необходимо аппроксимировать прямой линией и по параметрам прямой линии (угол наклона и отрезок, отсекаемый от оси ординат) вычислить их гидрогеологические параметры.

При расчетах по способу площадного прослеживания необходимо использовать период квазистационарного движения, что должно быть проверено путем вычисления соответствующих критериев.

При построении графика комбинированного прослеживания $S = f(\lg\frac{t}{r^2})$ все точки наблюдений по двум наблюдательным скважинам должны лечь на одну кривую, что является одним из диагностических критериев справедливости схемы неограниченного изолированного пласта.

Пример 3. Опытная откачка проводилась в условиях слоистой толщи. Скважины вскрыли три водоносных горизонта, сложенных песчаниками (рис. 20). Эти горизонты отделены друг от друга горизонтами глин и алевролитов мощностью 10-20 м. Откачка проводилась из среднего водоносного горизонта мощностью 50 м. Расход откачки 240 м^3/сутки. Снижение напоров наблюдалось в пьезометрах, оборудованных на средний водоносный горизонт (см. таблицу). В процессе опыта, длившегося 40 суток, понижения уровней в верхнем и нижнем водоносном горизонтах отмечены не были.

Результаты наблюдений за снижением напоров

Время, сутки	Понижение, м			
	S_1	S_2	S_3	S_4
0,1	0,16	0,02	0	0
0,15	0,24	0,06	0	0

0,2	0,31	0,09	0	0
0,3	0,43	0,14	0	0
0,4	0,49	0,20	0	0
0,5	0,50	0,21	0,06	0
0,7	0,56	0,28	0,06	0
1,0	0,64	0,35	0,08	0,03
1,5	0,72	0,43	0,12	0,06
2,0	0,80	0,45	0,16	0,09
3,0	0,85	0,48	0,19	0,10
4,0	0,86	0,49	0,20	0,12
5,0	0,86	0,50	0,22	0,12
7,0	0,86	0,50	0,23	0,10
10,0	0,86	0,49	0,24	0,14
15,0	0,86	0,49	0,24	0,16
20,0	0,86	0,50	-,25	0,16
30,0	0,85	0,49	0,24	0,17
40,0	0,85	0,49	0,24	0,17

Примечание. S_1, S_2, S_3 и S_4 - понижения в скважинах, находящихся на расстоянии 250, 500, 700 и 1500 м от центральной

Интерпретировать результаты опытной откачки с использованием метода эталонной кривой.

Решение. Для решения задачи эталонные кривые строят в логарифмическом масштабе в координатах $W(u, r \cdot \sqrt{\xi})$ и $\frac{1}{u}$ для различных значений параметра $r \cdot \sqrt{\xi}$. По опытным данным в масштабе эталонной кривой строят график в координатах lgS и $\lg\frac{t}{r^2}$. Совмещение точек этого графика с эталонными кривыми проводят так, чтобы точки, соответствующие понижению в наблюдательных скважинах, отстоящих от центральной на расстояния, отличающиеся между собой в 2, 3, 4 и 6 раз, хорошо ложились на кривые для значений $r \cdot \sqrt{\xi}$, отличающихся во столько же раз.

Задачи и вопросы для самостоятельной работы

1. Описать режим фильтрации в зоне откачки в условиях неограниченного изолированного пласта.
2. Описать режим фильтрации в зоне откачки в слоистых толщах.
3. Обосновать границы применимости графоаналитического метода интерпретации опытно-фильтрационных работ (ОФР).
4. Провести строгий вывод выражения $t_0 = \frac{r^2}{4a}$.
5. Провести строгий вывод расчетных зависимостей в способе прямой линии.
6. Указать возможные ошибки при изменении масштаба графика $\lg S - \lg\frac{t}{r^2}$ по сравнению с графиком типовой кривой.
7. Перечислить главные преимущества методов операционного исчисления, используемые для интерпретации ОФР.
8. Вывести расчетные зависимости для использования способа эталонных кривых при откачках в слоистых системах при упругом режиме фильтрации в подстилающих и перекрывающих водоупорах.
9. Кратко изложить основные положения методики интерпретации результатов ОФР Георгиевского.

10. Охарактеризовать основные положения методики решения обратных задач методами численного моделирования.

Контрольные вопросы

1. Какие основные методы интерпретации опытных откачек вы знаете?
2. В чем заключаются главные особенности прямых методов интерпретации ОФР?
3. В чем состоит сущность интегральных методов интерпретации ОФР?
4. Какие способы определения гидрогеологических параметров вы знаете?
5. Охарактеризуйте способ разности понижений.
6. В чем состоят главные особенности способа отношения понижений?
7. Каковы границы применимости схемы Тейса?
8.Что характеризует величина ??
9. Напишите выражения, используемые при расчетах по способу прямой линии в схеме Тейса.
10. Какими условиями ограничено использование схемы Хантуша?
11. Каковы главные этапы интерпретации ОФР?
12. В чем состоят условия подобия кривых в двух системах координат?
13. Напишите формулу Дюпюи для оценки проводимости по двум наблюдательным скважинам.
14. Какие графики необходимы для интерпретации результатов ОФР в условиях схем Тейса и Хантуша по способу типовых кривых?

Тема 5 Процессы массопереноса

Под миграцией подземных вод понимают процессы переноса некоторых компонентов (включая тепло) движущимся потоком подземных вод. В теории миграции подземных вод изучают процессы массо- и теплопереноса с учетом физико-химических изменений, происходящих при фильтрации и взаимодействии с горными породами.

Одну из главных ролей в миграции подземных вод играет конвективный перенос, при котором перенос элементов, происходящий за счет гидравлического переноса частицами воды, осуществляется с некоторой средней скоростью, которая зависит от действительной скорости фильтрации, а также от наличия или отсутствия процессов поглощения переносимых частиц минеральным скелетом горной породы.

Среди многообразных процессов поглощения следует прежде всего назвать сорбцию растворенных в воде солей твердой фазой горных пород.

Сорбционные процессы характеризуются сорбционной емкостью, которая представляет собой предельное количество сорбируемого в данных условиях компонента в единице объема породы при определенной его концентрации в воде. При относительно небольшой концентрации компонента сорбционная емкость пропорциональна самой концентрации, т.е.

$$N = \frac{C}{\beta}\ , \qquad (42)$$

где C – концентрация; β -коэффициент распределения, в конкретной физико-химической обстановке β = Const.

Влияние сорбционных процессов сводится к тому, что конвективный перенос солей происходит со скоростью, меньшей действительной скорости фильтрации. В наиболее простой постановке, когда миграцию подземных вод можно рассматривать по схеме поршневого вытеснения, предполагающей, что все частицы воды мигрируют с одинаковой средней скоростью и на границе раздела отсутствуют процессы дисперсии, скорость конвективного переноса:

$$u_c = \frac{v}{n_э}\ , \qquad (43)$$

где v - скорость фильтрации подземных вод; $n_э$ - эффективная пористость,

$$n_э = n_0 + \frac{1}{\beta}\ ; \qquad (44)$$

n_0 - активная пористость.

Эффективная пористость при конвективном переносе теплового потока:

$$n_э = n_0 \cdot (1 - n_0)\frac{\delta_{ск} \cdot C_{ск}}{\gamma \cdot C_в}\ , \qquad (45)$$

где $C_{ск}$, $C_в$ - удельные теплоемкости соответственно минерального скелета породы и воды; $\delta_{ск}$ - плотность минерального скелета породы.

Помимо конвективной составляющей, при миграции подземных вод существенную роль играют процессы молекулярной диффузии и гидродисперсии.

Экспериментально установлено, что процессы молекулярной диффузии в пористой среде развиваются аналогично процессам в свободной среде, т.е. диффузионный поток через поперечное сечение потока ω, согласно закону Фика,

$$Q_D = -Q_M \cdot \omega \cdot gradC, \qquad (46)$$

где D_M - коэффициент молекулярной диффузии.

Для песчаных пород:

$$D_M = \chi \cdot n_0 \cdot D_M^0\ ,$$

где χ - параметр, характеризующий извилистость пути движения частицы в пористой среде, для несцементированных песков χ = 0,5 ÷ 0,7; для сцементированных χ = 0,25÷0,5; D_M^0 - коэффициент молекулярной диффузии в свободной среде, D_M^0 = 10-4 м2/сутки.

Тепловой кондуктивный поток через сечение площадью ω в соответствии с законом Фурье:

$$Q_\theta = -\lambda \cdot \omega \cdot grag\theta,$$

где θ - температура; λ - коэффициент теплопроводности.

При значительных скоростях фильтрации диффузионно-кондуктивный перенос усиливается за счет перемешивания частиц воды в горных породах, что связано с внутрипоровой неоднородностью поля скоростей. Этот процесс может быть назван гидродисперсией. Исследования показывают, что гидродисперсия описывается теми же зависимостями, что и молекулярная диффузия, однако коэффициент дисперсии зависит от величины и направления вектора скорости фильтрации. Суммарный коэффициент микродисперсии (учитывающий процессы дисперсии):

$$D = D_M + \delta_1 \cdot v,$$

где v - скорость фильтрации; δ_1 - коэффициент, зависящий от характерных размеров частиц грунта, для однородных мелкозернистых песков $\delta_1 \approx 0{,}1$ см.

Исходное дифференциальное уравнение микродисперсии в однородном фильтрационном потоке имеет вид:

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - v \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{47}$$

При краевых условиях вида:

$$C\ (x,\ t = 0) = C_0; \quad C\ (x = 0,\ t) = C^0$$

решение (47) примет вид:

$$\overline{C} = \frac{C - C_0}{C^0 - C_0} = 0{,}5 \cdot (erfc\xi + e^{\eta} \cdot erfc\xi_1), \tag{48}$$

где

$$\xi = \frac{x - \frac{v}{n_0}t}{2\sqrt{\frac{D}{n_0}t}}; \quad \xi_1 = \frac{x + \frac{v}{n_0}t}{2\sqrt{\frac{D}{n_0}t}}; \quad \eta = \frac{v \cdot x}{D}.$$

Через некоторый, относительно небольшой, промежуток времени после начала процесса второй член уравнения (48) оказывается пренебрежимо малым, и тогда можно пользоваться упрощенным выражением:

$$\overline{C} = 0{,}5 \cdot erfc\xi.$$

Размер переходной зоны, возникающей за счет влияния гидродисперсии,

$$\Delta x = 4{,}4\sqrt{\left(\frac{D_M}{v} - \delta_1\right) \cdot x_0},$$

где $x_0 = \dfrac{v \cdot t}{n_0}$.

С практической точки зрения, представляют интерес закономерности распределения температур в разделяющем глинистом слое (рис. 21), где на кондуктивный тепловой поток, возникающий за счет геотермического градиента, накладывается вертикальный водообмен со скоростью v_z. В этих условиях тепловой поток через единичную площадку разделяющего слоя:

$$q_\theta = C_B \cdot v_z \cdot \theta - \lambda \cdot \frac{d\theta}{dz}. \tag{49}$$

В стационарной постановке при θ (z = 0) = θ_B и θ (z = m) = θ_m решение задачи о распределении температур в разделяющем слое имеет вид:

$$\Delta\theta = \frac{\overline{\theta} - 1}{\overline{\theta_ь} - 1} = \frac{\exp(\overline{v} \cdot \overline{z}) - 1}{\exp \overline{v} - 1}, \qquad (50)$$

где $\overline{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}$; $\overline{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\theta_0}$; $\overline{v} = \frac{C_B \cdot m \cdot v_z}{\lambda}$; $\overline{z} = \frac{z}{m}$.

Для упрощения вычислений обычно пользуются эталонными графиками зависимости $\Delta\theta = f(z)$ при различных значениях v.

Решение задач

Пример 1. В центре кругового пласта с постоянным дебитом Q = 1000 м^3/сутки работает нагнетательная скважина. Водоносный горизонт представлен мелкозернистыми песками, коэффициент фильтрации которых 5 м/сутки, средняя мощность водоносного горизонта 20 м. На границе кругового пласта радиусом R = 1000 м выполняются граничные условия первого рода. В результате закачки промышленных отходов возможно загрязнение поверхностных вод в районе внешней границы (рис. 22). В условиях схемы поршневого вытеснения определить время полного вытеснения естественных подземных вод закачиваемыми промстоками.

Решение. Исходное дифференциальное уравнение для схемы поршневого вытеснения может быть представлено в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{n_0} \cdot I_r,$$

где I_r - гидравлический градиент в точке, соответствующей положению границы вытеснения.

Величину I_r оценим, используя решение Дюпюи:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \ln\frac{R}{r},$$

где S = H_0 - H; H_0 - напор на границе пласта; H - напор в точке, находящейся на расстоянии r от центра пласта.

Тогда

$$I = \frac{dH}{dr} = -\frac{dS}{dr} = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{1}{r}.$$

Чтобы найти положение границы вытеснения, необходимо решить уравнение:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{n_0} \cdot \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{1}{r},$$

откуда:

$$r = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi n_0 m}},$$

где m - мощность пласта.

Время полного вытеснения:

$$t = \frac{\pi \cdot n_0 \cdot m \cdot R^2}{Q}.$$

Пример 2. Для условий примера 1 рассчитать дисперсию границы раздела чистых и загрязненных вод (пренебрегая радиальностью потока) для момента прохождения этой границей расстояния $\frac{R}{2}$. При расчетах принять D_M^0 = 1 см2/сутки; n_o = 0,33; χ = 0,6; δ_1 = 0,1 см.

Решение. Прежде всего вычислим момент времени, в который граница поршневого вытеснения пройдет расстояние $\frac{R}{2}$, т.е.

$$\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot n_0 \cdot m}} \text{ , откуда } t = \frac{\pi \cdot n_0 \cdot m \cdot R^2}{4Q}.$$

Для расчета дисперсии границы можно воспользоваться решением:

$$\overline{C} = 0{,}5 \cdot erfc\xi,$$

где $\xi = \dfrac{x - \frac{v}{n_0}t}{2\sqrt{\frac{D}{n_0}t}}$

Пример 3. Два напорных водоносных горизонта разделены между собой слабопроницаемым прослоем глин мощностью 110 м (рис. 23). Напор в нижнем водоносном горизонте оказался на 12 м выше, чем в верхнем. В скважине, полностью вскрывшей водоупорный слой, были измерены температуры на различных глубинах:

z, м	0	22	44	66	88	110
θ, ºC	6,50	7,65	8,95	9,75	10,30	10,90

В теплофизическом отношении разделяющий слой может считаться относительно однородным, причем расчетное значение коэффициента теплопроводности λ = 1,2 Вт / (м · К).

Определить скорость перетекания в разделяющем слое и оценить коэффициент фильтрации пород этого слоя.

Решение. Необходимо вычислить для каждой точки наблюдений относительные величины расстояний и температур по формулам:

$$\overline{z} = \frac{z}{m} = \frac{z}{110}; \quad \Delta\theta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_{m\text{ь}} - \theta_0} = \frac{\theta - 10{,}90}{6{,}50 - 10{,}90}.$$

Далее, по полученным данным строят график зависимости Δθ от $\overline{z}$ в масштабе эталонного графика; накладывая этот график на эталонный, определяют значения v_z, соответствующие обрабатываемой термограмме.

Вертикальная скорость фильтрации $v_z = \dfrac{\overline{v}_z \cdot \lambda}{C_B \cdot m}$, причем для подземных вод удельная теплоемкость воды C_B = 4,2 · 106 Дж (кг · К).

По найденному значению скорости фильтрации и известной разности напоров определяют коэффициент фильтрации разделяющего слоя.

Задачи и вопросы для самостоятельной работы

1.Используя схему поршневого вытеснения, вывести выражение для оценки расстояния, пройденного фронтом загрязнения в условиях одномерного параллельно-планового стационарного потока.

2. Используя схему поршневого вытеснения, вывести выражение для оценки скорости продвижения фронта загрязнения при закачке промстоков в неограниченный пласт в условиях нестационарного режима фильтрации.

3. Оценить диффузионный вынос солей через толщу глинистых пород мощностью 200 м из водоносного горизонта, представленного мелкозернистыми песками мощностью 120 м.

4. Охарактеризовать роль процессов гидродисперсии в лабораторных и полевых экспериментах. Привести некоторые оценочные расчеты.

5. Эксперименты по изучению молекулярной диффузии в глинах показывают, что коэффициент молекулярной диффузии существенно зависит от размеров и минерального состава глинистых частиц. Как это объяснить?

6. С физических позиций охарактеризовать коэффициент макродисперсии в гетерогенных средах.

7. Разделяющая толща глин представлена слоями с различными теплофизическими свойствами. Как в этих условиях меняется распределение температур при наличии вертикального потока перетекания?

8. Указать возможные пределы необходимости учета кинетики сорбции при изучении процессов миграции подземных вод.

9. Охарактеризовать методы оценки миграционных параметров и указать наиболее рациональное сочетание полевых и лабораторных экспериментов по их оценке.

10. В подземный поток запущен пакет поверхностно-активных веществ. Отметить главные трудности, возникающие при прогнозе миграции подобных веществ.

Контрольные вопросы

1. Что такое миграция подземных вод?
2. В чем заключаются особенности конвективного переноса?
3. Что такое сорбционная емкость?
4. Что такое коэффициент распределения?
5. Какие допущения принимаются в схеме поршневого вытеснения?
6. Напишите выражение для скорости конвективного переноса.
7. Что такое эффективная пористость?
8. Что такое молекулярная диффузия?
9. Что такое гидродисперсия?
10. Напищите законы Фика и Фурье.
11. Напишите выражение для коэффициента молекулярной диффузии в пористой среде.
12. Что такое коэффициент суммарной микродисперсии?
13. Что такое переходная зона в процессах микродисперсии?
14. Какие физические процессы влияют на распределение температур в разделяющем глинистом слое?

Литература

1. Методические указания по определению гидрогеологических параметров при освоении угольных месторождений. Л., изд. ВНИМИ, 1974.

2. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. М., Недра, 2005.

3. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. М., Недра, 1974.

4. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М., Недра, 1979.

5. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М., Изд-во МГУ, 1979.

6. Шестаков В.М., Кравченко И.П., Пашковский И.С. Практикум по динамике подземных вод. М., Изд-во МГУ, 1975.