Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра машиностроения

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания к практическим занятиям для студентов бакалавриата направления 15.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 621.7 (073)

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ: Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Л.Б.Алексеева*, *А.Е.Ефимов.* СПб, 2019. 39 с.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Основы научных исследований» предназначены для студентов бакалавриата направления 15.03.01 «Машиностроение» профиля программы «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств».

Научный редактор проф. *В.В. Максаров*

Рецензент проф. *Д.В. Васильков* (Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова)

Практическое занятие № 1
Обработка экспериментальных данных при технических прямых и косвенных измерениях

Цель: уменьшение влияния случайных погрешностей на результат измерения.

Для изучения физических явлений проводят эксперименты (испытания, наблюдения). Их результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин. При повторении испытаний обнаруживается разброс их результатов, так как повторяя точные измерения одной и той же величины даже в строго одинаковых условиях, мы получаем различающиеся результаты. Это дает основание рассматривать все экспериментальные величины как случайные.

Определение экспериментальных величин можно проводить способами: на основе единичных измерений, на основе измерений сериями. Единичные измерения имеют недостоверный характер, и по характеру одного измерения нельзя предсказать результат следующего. При многократном повторении наблюдений (измерениях сериями) выявляются вполне определенные закономерности, основанные на законе статистической устойчивости средних. Многократные измерения проводятся с целью уменьшения влияния случайных погрешностей на результат измерения.

1. Порядок обработки прямых многократных измерений.

Провести n измерений x_i измеряемой величины x (табл. 1).

Таблица 1

Порядковый номер измерений	1	2	3	…	i	…	n
Результат измерений	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n

Вычислить среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\overline{X} = \frac{x_1 + \ldots + x_i + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Вычислить оценку среднего квадратичного отклонения (СКО) результата измерения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} .$$

Рассчитать доверительный интервал случайной погрешности (случайную погрешность), задав доверительную вероятность (для большинства инженерных экспериментов выбирают α = 0,95): $\Delta\overline{x} = t(\alpha, n)\, S_{\bar{x}}$, где $t(\alpha, n)$ – коэффициент Стьюдента, который учитывает требуемую доверительную вероятность и количество проводимых измерений.

Округлив соответствующие результаты, записать ответ в виде $X = \overline{X} \pm \Delta x$ при доверительной вероятности α.

При косвенных измерениях искомое значение измеряемой величины получают расчетным путем по результатам нескольких прямых измерений.

При косвенных измерениях искомая величина z определяется зависимостью $z = f(a, b, c, \ldots)$, где a, b, c,... прямо измеряемые величины, являющиеся аргументами функции z. При косвенных измерениях за измеренное значение принимается $\bar{z} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots)$.

2. Порядок обработки косвенных измерений

Найти значения величин:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a ,\; b = \bar{b} \pm \Delta b ,\; c = \bar{c} \pm \Delta c$$

Вычислить значение $\bar{z} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots)$.

Определить абсолютную погрешность косвенных измерений:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \ldots},$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial a}, \dfrac{\partial f}{\partial b}, \dfrac{\partial f}{\partial c}$ частные производные функции z, вычисленные при значении переменных соответствующих средним значениям $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, …

Определить относительную погрешность результата серии косвенных измерений:

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z} 100\,\%.$$

Окончательный результат записывается в виде

$$z = f\,(a, b, c, ..., A, B, C, ...) = \overline{z} \pm \Delta z\ .$$

Пример выполнения косвенного измерения плотности материала детали, изображенной на рис. 1. Длинная сторона детали имеет неровные края.

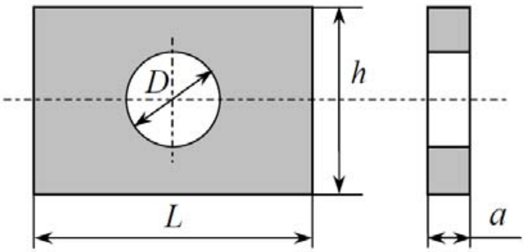


Рис. 1. Измерение плотности материала детали

Расчет плотности материала проводим по формуле

$$\rho = \frac{m}{a\left(Lh - \dfrac{\pi D^2}{4}\right)}$$

где m – масса, a – толщина, L – длина, h – ширина, D – диаметр отверстия.

Проведем измерения всех величин m, a, L, h, D, входящих в расчетную формулу, и определим их абсолютные и относительные погрешности.

Размеры D, L, h детали измеряем штангенциркулем с инструментальной погрешностью $\Delta_и = 0{,}1$ мм; толщину детали a – микрометром с инструментальной погрешностью $\Delta_и = 0{,}01$ мм; массу m детали определяем взвешиванием на технических весах с инструментальной погрешностью $\Delta_и = 50$ мг. Так как длинная сторона детали имеет неровные края, ширину h с целью уменьшения случайной погрешности измеряем пять раз.

В результате получаем экспериментальные данные: $h_1 = 59{,}5$ мм; $h_1 = 60{,}1$ мм; $h_1 = 58{,}9$ мм; $h_1 = 60{,}5$ мм; $h_1 = 60{,}0$ мм.

Рассчитываем среднее арифметическое значение

$$\overline{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n=5} h_i = \frac{1}{5}(59{,}3 + 60{,}1 + 58{,}9 + 60{,}5 + 60{,}0) = 59{,}76 \text{ мм.}$$

В среднем арифметическом значении оставляем младший разряд – сотые.

Найдем оценку СКО результата измерения

$$S_{\overline{h}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n=5}\left(h_i - \overline{h}\right)^2}{n(n-1)}} = 0{,}289 \text{ мм.}$$

В оценке СКО результата измерения оставляем три значащие цифры, т. е. на одну больше, чем может содержать абсолютная погрешность.

Для $n = 5$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n} = 2{,}78$ и рассчитываем доверительный интервал случайной погрешности (случайную погрешность)

$$\Delta_{\overline{h}} = t_{\alpha,n} S_{\overline{h}} = 2{,}78 \cdot 0{,}289 = 0{,}804 \text{ мм.}$$

Определяем абсолютную погрешность результата измерения с учетом случайной и инструментальной погрешностей

$$\Delta_h = \sqrt{\Delta_{\bar{h}}^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta_{иh}\right)^2} = \sqrt{0{,}804^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}1\right)^2} = 0{,}8067 \approx 0{,}807 \text{ мм.}$$

В промежуточном расчете оставляем три значащие цифры.

Найдем относительную погрешность

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta_h}{\bar{h}}100\% = \frac{0{,}807}{59.76}100\% = 1{,}35\%.$$

Ограничиваем количество значащих цифр в погрешностях Δ_h и ε_h, также в измеренном значении $\bar{h}$. В абсолютной погрешности оставляем одну значащую цифру: $\Delta_h = 0{,}8$ мм. В измеренном значении оставляем также десятые доли числа. Таким образом, получаем $\bar{h} = 59{,}8$ мм.

В относительной погрешности оставляем две значащих цифры, так как первая значащая цифра «1» меньше «3». Но поскольку отбрасывается одна цифра «5», то предыдущий разряд числа увеличиваем на единицу, чтобы цифра этого разряда была четной $\varepsilon_h = 1{,}35\% \approx 1{,}4\%$. Окончательный результат измерения высоты записываем в виде

$$\boxed{h = (59{,}8 \pm 0{,}8) \text{ мм}; \qquad \varepsilon_h = 1{,}4\%; \qquad \alpha = 0{,}95.}$$

В результате однократного измерения длины L детали штангенциркулем получено значение $\bar{L} = 81{,}6$ мм с абсолютной погрешностью $\Delta_L = \Delta_{иL} = 0{,}1$ мм. относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta_L}{\bar{L}}100\% = \frac{0{,}1}{81{,}6}100\% = 0{,}123\%.$$

Окончательный результат измерения длины для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{L = (81{,}6 \pm 0{,}1)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_L = 0{,}12\%; \qquad \alpha = 1.}$$

При однократном измерении диаметра отверстия D штангенциркулем получено значение $\overline{D} = 50{,}2$ мм, с абсолютной погрешностью $\Delta_D = \Delta_{иD} = 0{,}1$ мм. относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta_D}{\overline{D}} 100\% = \frac{0{,}1}{50{,}2} 100\% = 0{,}199\%.$$

Окончательный результат измерения диаметра для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{D = (50{,}2 \pm 0{,}1)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_D = 0{,}20\%; \qquad \alpha = 1.}$$

Для измерения толщины a детали с целью уменьшения относительной погрешности использовался микрометр.

В результате однократного измерения толщины a штангенциркулем получено значение $\overline{a} = 0{,}50$ мм с абсолютной погрешностью $\Delta_a = \Delta_{иa} = 0{,}01$ мм. Относительную погрешность определяем по формуле

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{\overline{a}} 100\% = \frac{0{,}01}{0{,}50} 100\% = 2{,}0\%.$$

Окончательный результат измерения толщины для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{a = (0{,}50 \pm 0{,}01)\ \text{мм}; \qquad \varepsilon_a = 2{,}0\%; \qquad \alpha = 1.}$$

Масса образца $\overline{m} = 3{,}84$ г получена взвешиванием на технических весах с инструментальной погрешностью $\Delta_m = \Delta_{\text{ит}} = 50$ мг. Рассчитываем относительную погрешность измерения массы

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta_m}{\overline{m}} 100\% = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{3{,}84} 100\% = 1{,}30\%.$$

Окончательный результат измерения массы образца для доверительной вероятности $\alpha = 1$ записываем в виде

$$\boxed{m = (3{,}84 \pm 0{,}05) \text{ г}; \qquad \varepsilon_m = 1{,}3\%; \qquad \alpha = 1.}$$

Для удобства проведения дальнейших расчетов представим полученные результаты прямых измерений в табл. 2.

Таблица 2

Измеряемая величина	Значение измеряемой величины	Абсолютная погрешность, Δ_x		Относительная погрешность, ε_x, %	
		$\alpha = 1$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0{,}95$
h	59,7 мм	–	0,8 мм	–	1,3
L	81,6 мм	0,1 мм	0,07 мм	0,12	0,08
D	50,2 мм	0,1 мм	0,07 мм	0,20	0,13
a	0,50 мм	0,01 мм	0,007 мм	2,0	1,34
m	3,84 г	50 мг	33 мг	1,2	0,9

Плотность материала образца согласно формуле равна

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{m}}{\overline{a}\left(\overline{L}\overline{h} - \dfrac{\pi \overline{D}^2}{4}\right)} = 2655 \text{ кг/м}^3.$$

Для получения расчетного соотношения относительной погрешности измерения плотности воспользуемся способом, предварительно представив формулу в виде одночлена

$$\rho = \frac{m}{aS} = m^{+1} a^{-1} S^{-1},$$

где $S = Lh - \dfrac{\pi D^2}{4}$.

Тогда получаем

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{(+1\cdot\varepsilon_m)^2 + (-1\cdot\varepsilon_a)^2 + (-1\cdot\varepsilon_S)^2} = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_S^2}.$$

Погрешности величины S определим, пренебрегая погрешностью числа π. В соответствии с формулой абсолютная погрешность величины S равна

$$\Delta_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial L}\Delta_L\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\Delta_h\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial D}\Delta_D\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\bar{h}\Delta_L\right)^2 + \left(\bar{L}\Delta_h\right)^2 + \left(-\frac{2\pi\bar{D}}{4}\Delta_D\right)^2}.$$

Подставляем погрешности прямых измерений, пересчитанные для доверительной вероятности α = 0,95 и определяем

$$\Delta_S = \sqrt{(59{,}7\cdot 0{,}07)^2 + (81{,}6\cdot 0{,}8)^2 + \left(-\frac{2\pi\cdot 50{,}2}{4}\cdot 0{,}07\right)^2} = 65{,}6\ \text{мм}^2.$$

Относительную погрешность величины S определяем по формуле

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta_S}{\bar{L}\bar{h} - \frac{\pi\bar{D}^2}{4}} 100\% = 2{,}27\%.$$

Относительную погрешность измерения плотности ρ определяем по формуле

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_S^2} = \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}34^2 + 2{,}27^2} = 2{,}81\%.$$

Абсолютная погрешность измерения плотности равна

$$\Delta_\rho = \frac{\varepsilon_\rho\bar{\rho}}{100} = \frac{2{,}81}{100}\cdot 2655 = 74{,}6\ \text{кг/м}^3.$$

Окончательный результат измерения записываем в виде

$$\rho = (2{,}66 \pm 0{,}07)\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3; \qquad \varepsilon_\rho = 2{,}8\%; \qquad \alpha = 0{,}95.$$

Практическое занятие №2
Статистическая обработка результатов измерений с помощью функции распределения

Цель: ознакомление с методикой статистических исследований для оценки точности обработки деталей.

Точное значение размеров при механической обработке из-за случайных погрешностей заранее определить невозможно. В пределах одной партии деталей, обработанных по методу автоматического получения размеров, каждая деталь будет иметь свой размер. Размеры деталей будут меняться в некоторых пределах и группироваться около некоторого центра. Это явление в математической статистике называется рассеянием случайных величин. Величина, в пределах которой изменяются случайные величины, обозначается ω_x и называется полем рассеивания, или полем распределения.

Рассеяние размеров может привести к тому, что у некоторой части изделий размеры выйдут за пределы допуска. В этой связи при изготовлении деталей большими партиями на предварительно настроенных станках необходимо прогнозировать, какая часть изделий из-за случайных погрешностей может оказаться бракованной. Анализ точности механической обработки методом кривых распределения дает возможность по результатам измерений малого количества деталей, изготовленных на предварительно настроенных станках, сделать такой прогноз, т.е. оценить вероятность получения годных и бракованных деталей уже при массовом производстве деталей по той же технологии.

Методика построения эмпирической кривой распределения

Пусть на предварительно настроенном станке по методу автоматического получения размеров изготовлена партия из n деталей с размерами $x_1, x_2, \ldots, x_{1-n}, x_n$. Из-за случайных погрешностей размеры деталей в этой партии являются случайными величинами. Эмпирическая кривая распределения размеров деталей в пределах поля их рассеяния. Рассмотрим методику построения этой кривой.

1. Проводится измерение деталей. Для этого используется прибор с ценой деления шкалы $ц_д$.

2. Из совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_{1-n}, x_n$ размеров определяются наибольший $x_{\max}$ и наименьший $x_{\min}$ размеры, а также разность, которая называется размахом выборки

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

3. Размах выборки разбивается на равные интервалы. Величину интервала определяют по формуле

$$x = \frac{R}{1 + 3{,}222 \lg n}.$$

Полученное значение округляют до величины, кратной $ц_д$ по правилу $\Delta x = ц_д (1+k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

4. За начало первого интервала принимает величину $x_{1н} = x_{\min} - \Delta x / 2$. Полученное значение округляют до величины, удобной для расчетов. Конец первого интервала определяется сложением этого значения с величиной интервала: $x_{1к} = x_{1н} + \Delta x$. Конец первого интервала совпадает с началом второго интервала $x_{1к} = x_{1н}$. Конец второго интервала определяется как $x_{2к} = x_{2н} + \Delta x$. Таким образом, конец каждого интервала определяется сложением начала интервала с величиной интервала Δx, а начало следующего интервала совпадает с концом предыдущего интервала $x_{jк} = x_{jн} + \Delta x$, $x_{(j+1)н} = x_{jк}$. Количество интервалов определяется неравенством $x_{pк} \geq x_{\max}$, где p – номер последнего интервала. Таким образом, первый интервал содержит значение $x_{\max}$, последний – значение $x_{\min}$.

5. Определяют количество деталей, размеры которых попадают в той или иной интервал $[x_{jк}; x_{jи}]$. Это количество

обозначают f_j и называют частотой. Отношение $k_j = f_j / n$ и называется частостью.

6. Полученные результаты оформляют в виде таблицы распределения размеров. По данным таблицы строят ступенчатый график, состоящий из прямо-угольников шириной Δx, высотой или k . Этот график называется гистограммой распределения.

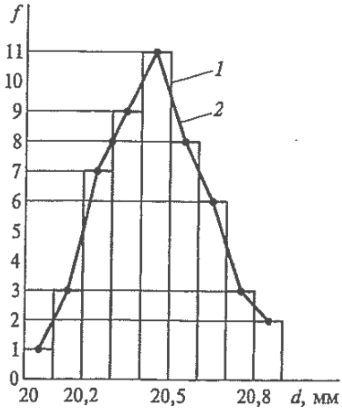


Рис. 2. Распределение размеров обработанных деталей: 1 – гистограмма распределения; 2 – полигон распределения

Если соединить середину верхней стороны каждого прямоугольника отрезками прямых линий, то получим ломаную, которая называется эмпирической кривой распределения, или полигоном (рис. 2). Графическая интерпретация полученных результатов позволяет сделать вывод, что размеры деталей группируются около центральной величины (центра группирования), причем, чем больше отклонение между этой величиной и выделенным интервалом, тем меньше частота регистрации размеров на данном интервале. Эта центральная величина называется средним арифметическим значением случайных величин и определяется по следующим формулам:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} x_j f_j \; ; \; x_j = (x_{j\text{н}} + x_{j\text{к}})/2 ,$$

где $x_{j\text{н}}$, $x_{j\text{к}}$ – начальное и конечное значение случайной величины в интервале под номером *j*; x_j – значение случайной величины в середине этого интервала, *p* – количество интервалов.

Другой характеристикой кривой распределения случайных величин является среднее квадратичное отклонение этих величин от среднего арифметического значения, которое определяется по формулам

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}\ ;\ \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}(x_j - \overline{X})^2 f_j}\ .$$

Среднее квадратическое отклонение является мерой рассеивания случайных величин. Среднее арифметическое и среднее квадратичное отклонение называются статистическими параметрами эмпирической кривой распределения.

В математической статистике доказано и подтверждено многочисленными экспериментами, что для случайных процессов теоретическая частность подчиняется закону нормального распределения. Функция

$$y(x,\sigma,\overline{X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}\right)}$$

называется дифференциальной функцией нормального распределения или плотностью вероятности непрерывной случайной величины.

Плотность вероятности следует рассматривать как вероятность появления случайной величины x на бесконечно малом отрезке в области ее определения, т.е. в точке. Чтобы определить вероятность появления случайной величины x на некотором интервале, $x_1 \le x \le x_2$, необходимо вычислить интеграл от плотности вероятности

$$P(x) = \int_{x_1}^{x_2}(x,\sigma,\overline{X})\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\left(\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}\right)}dx\ ;\ x_2 > x_1$$

Это выражение называется интегральной функцией нормального распределения (или интегралом вероятности). В геометрическом смысле этот интеграл представляет собой площадь под кривой нормального распределения.

Для достаточного узкого интервала, согласно теореме о среднем, имеем

$$P(x) = y(x_{\text{ср}}, \sigma, \overline{X})(x_2 - x_1) \;\; x_{\text{ср}} = (x_2 - x_1)/2 .$$

Плотность вероятности имеет следующие свойства:

1. Ось x является асимптотой для ветвей ее графика

2. При $x = \overline{X}$ плотностью вероятности имеет максимальное значение

$$y_{\max} = y(x, \sigma, \overline{X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0{,}4}{\sigma} .$$

3. График функции имеет две точки перегиба *A* и *B*, которые находятся на расстоянии σ от оси симметрии. Ординаты их соответственно равны

$$y_A = y_B = \frac{y_{\max}}{\sqrt{e}} = 0{,}6\, y_{\max} .$$

Если случайная величина может принимать любые числовые значения в интервале $-\infty \le x \le +\infty$, то независимо от $\overline{X}$ и σ:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}\right)} dx = 1$$

Положение кривой относительно начала координат и ее форма определяются двумя параметрами – $\overline{X}$ и σ.

Критерии для определения точности механической обработки. Данная оценка проводится путем сопоставления величины и расположения поля допуска размера *T* с величиной и расположением поля рассеяния размеров ω_x для теоретической кривой нормального распределения. Однако допуск размера является конечной величиной. Поле рассеяния размера для теоретической кривой нормального распределения – величина бесконечно большая, т.к. кривая уходи своими ветвями в бесконечность. Сравнивать такие величины нельзя.

В то же время исследованиями установлено, что если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то вероятность появления ее в интервале $\overline{X}-\sigma \le x \le \overline{X}+\sigma$ составляет около 68%. Для интервала $\overline{X}-2\sigma \le x \le \overline{X}+2\sigma$ эта вероятность достигает примерно 95%, а для интервала $\overline{X}-3\sigma \le x \le \overline{X}+3\sigma$ – 99,73%. Таким образом, вероятность появления случайной величины вне последнего интервала составляет менее 0,3 %.

Поэтому при механической обработке принимают

$$\omega_x = \omega_x^{\text{в}} - \omega_x^{\text{н}}\,;\ \omega_x^{\text{н}} = \overline{X} - 3\sigma\,;\ \omega_x^{\text{в}} = \overline{X} + 3\sigma$$

где $\omega_x^{\text{в}}$ и $\omega_x^{\text{н}}$ – нижнее и верхнее граничные значения поля рассеяния. Такой выбор ω_x называется правилом «шесть сигм». В этом случае ширина кривой распределения равна 6σ (рис. 3).

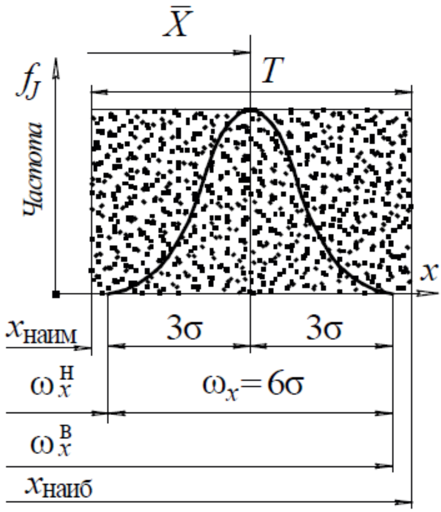


Рис. 3. К определению критериев при оценке точности механической обработки

Пример. По результатам выборки (n = 50 шт) получены диаметральные размеры валов, изготовленных на автоматизированном производстве. Измеренные значения диаметров валов представлены в табл. 3.

Построить гистограмму распределения размеров в MC Excel.

Таблица 3

7,98	7,99	7,98	7,97	7,97	7,97	7,95	7,97	7,93	7,98
7,96	7,98	7,97	7,94	7,98	7,96	8,01	7,94	7,99	7,97
8,02	7,96	7,99	7,96	7,98	7,94	7,96	7,99	8,02	7,98
8,00	7,97	7,98	8,01	7,96	7,97	7,99	7,95	7,96	8,00
8,02	7,99	7,95	7,98	7,95	7,94	7,98	8,01	7,99	7,98

Таблица, записанная в MC Excel представлена на рис. 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Исходные данные								
2										
3	7,98	7,99	7,98	7,97	7,97	7,97	7,95	7,97	7,93	7,98
4	7,96	7,98	7,97	7,94	7,98	7,96	8,01	7,94	7,99	7,97
5	8	7,97	7,98	8,01	7,96	7,97	7,99	7,95	7,96	8
6	8,02	7,96	7,99	7,96	7,98	7,94	7,96	7,99	8,02	7,98
7	8,02	7,99	7,95	7,98	7,95	7,94	7,98	8,01	7,99	7,98

Рис. 4. Таблица в MC Excel

По полученным данным производим ранжирование по возрастанию (табл. 4).

Таблица 4

7,93	7,94	7,94	7,94	7,94	7,95	7,95	7,95	7,95	7,96
7,96	7,96	7,96	7,96	7,96	7,96	7,97	7,97	7,97	7,97
7,97	7,97	7,97	7,97	7,98	7,98	7,98	7,98	7,98	7,98
7,98	7,98	7,98	7,98	7,98	7,99	7,99	7,99	7,99	7,99
7,99	7,99	8,00	8,00	8,01	8,01	8,01	8,02	8,02	8,02

Объём данных (50 шт.) записываем в MC Excel (рис.5).

10	1) Объём данных	
11	n	50

Рис. 5. Объёмные данные в MC Excel

Определяем минимальное и максимальное значение измеренных диаметров.

$$X_{\min} = 7{,}93\,, \quad X_{\max} = 8{,}02\,.$$

Среднее значение рассчитываем при помощи формулы в МС Excel: «=СУММ(A3:J7)/B11»

Данные также вносим в МС Excel (рис. 6)

13	2) Минимальное и максимальное значение					
14						
15	X min	7,93			среднее значение	
16	X max	8,02			7,975	

Рис. 6. Минимальные и максимальные значения

Находим размах варьирования признака по формуле

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 8{,}02 - 7{,}93 = 0{,}09\,.$$

Варьирование признака по формуле в МС Excel: «=B16-B15» (рис. 8).

18		3) Варьирование признака				
19						
20	R	0,09				

Рис. 7. Варьирование признака в МС Excel

4) Определяем число групп

$$k = 1 + 3{,}32\lg(n) = 1 + 3{,}32\lg(50) = 6{,}64 \approx 7\,.$$

Расчёт числа групп в МС Excel представлен на рис. 8. Формула для расчёта «=1+3,32*LOG10(B11)» в ячейке B24, формула для округления «=ОКРУГЛ(B24;0)» в ячейке C24.

22		4) Определяем число групп			
23					
24	K	6,640580414	7		

Рис. 8. Расчёт числа групп в МС Excel

Определяем длину интервала

$$h = \frac{R}{k} = \frac{0{,}09}{7} = 0{,}013\,.$$

Определение длины групп в MC Excel представлено на рис. 9. Формула в ячейке B28 - «=B20/C24».

26	5) Определяем длину интервала		
27			
28	h	0,013	

Рис. 9. Определение длины групп в MC Excel

Определяем границы интервалов

$$a_1 = x_{\min}; \quad a_{i+1} = b_i = a_i + h; \quad b_k = x_{\max}$$

и группируем данные по соответствующим интервалам.

Заносим данные в табл. 5.

Таблица 5

№ интервала	Граница		Середина интервала	Частота
	Нижняя	Верхняя		
1	2	3	4	5
1	7,930	7,943	7,936	5
2	7,943	7,956	7,949	4
3	7,956	7,969	7,962	7
4	7,969	7,981	7,975	19
5	7,981	7,994	7,988	7
6	7,994	8,007	8,001	2
7	8,007	8,020	8,014	6

Таблица в MC Excel представлена на рис. 10.

32	№	Нижняя	Верхняя	Среднее	Частота
33	1	7,930	7,943	7,936	5
34	2	7,943	7,956	7,949	4
35	3	7,956	7,969	7,962	7
36	4	7,969	7,981	7,975	19
37	5	7,981	7,994	7,988	7
38	6	7,994	8,007	8,001	2
39	7	8,007	8,020	8,014	6

Рис. 10. Данные для построения гистограммы

Формулы: в ячейке B33 «=B15», в ячейке C33 «=B33+$B$28», в ячейке D33 «=(C33+B33)/2».

По данным таблицы 5 стоим гистограмму распределения (рис. 11). Для постройки гистограммы в МС Excel необходимо:

Создать график гистограммы с группировкой во вкладке «Вставка». Далее выбираем данные для графика. В открывшемся окне в графе «Значение» выбираем ячейки E33-E39 и D33-D39.

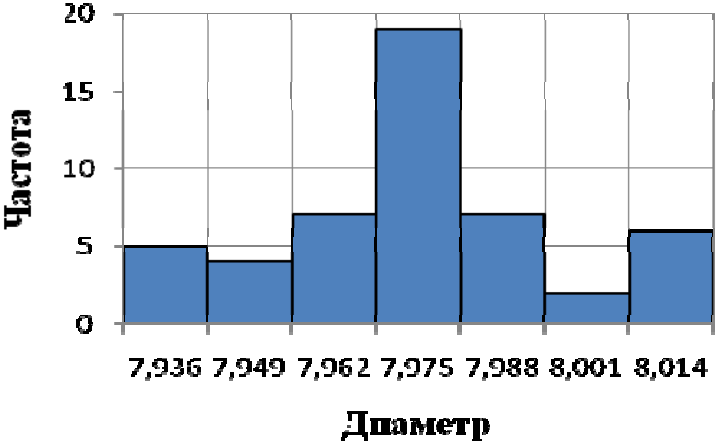


Рис. 11. Гистограмма распределения

Практическое занятие № 3
Описание экспериментальных результатов функциональными зависимостями (моделями)

Цель: аппроксимация линейной зависимости с помощью метода наименьших квадратов.

Большинство технологических экспериментов представляют собой многофакторную статистическую систему, при исследовании которой используют методы регрессионного анализа.

Регрессионной анализ – это способ описания зависимости между переменными по экспериментальным результатам. В отличие от корреляционного анализа, в котором также анализируются связи между переменными, в регрессионном анализе одна из переменных должна быть неслучайной (варьируемой), т.е. она выступает в роли фактора, от которого зависит исследуемый параметр (функция, отклик).

Задача регрессионного анализа – описать зависимость уравнением (моделью) и доказать адекватность уравнения экспериментальным результатам.

Метод наименьших квадратов – основа регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов заключается в том, что сумма квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений изучаемого признака при фиксированном значении фактора должен быть минимальным.

Пусть в результате эксперимента были получены ряд величин y_1, y_2, …, y_n, соответствующих значениям фактора $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые могут быть представлены в виде точек на координатной плоскости. Необходимо подобрать функцию (уравнение) регрессии, описывающую зависимость y от x.

Для решения этой задачи необходимо знать критерий, который определил бы меру соответствия опытных данных значениям регрессии для тех же факторов.

Допустим, что средние экспериментальные значения функции y расположились, как показано на рис. 12.

Проведем прямую линию и предположим, что она описывает зависимость y от x. Тогда в соответствии с критерием МНК:

$$\sum_{i=1}^{n}(y'_{эi} - y'_{pi})^2 = \sum_{i=1}^{n}\Delta y_i^2 \to \min$$

где $y'_{эi}$ и y'_{pi} – экспериментальные и расчетные значения функции при определенных x_i.

В данном случае уравнение регрессии – это уравнение прямой линии: $y_p = b_0 + b_1 x$ (рис. 12).

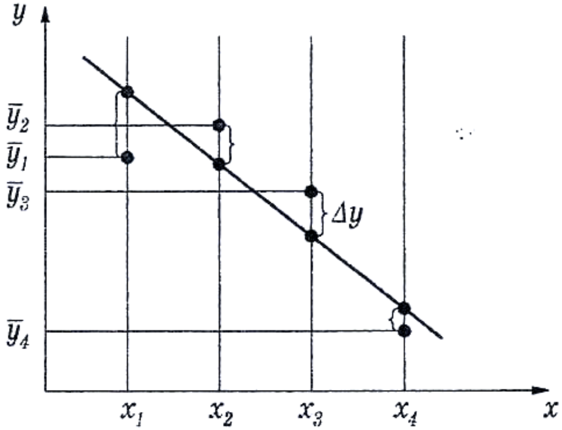


Рис. 12. Экспериментальные, расчетные точки и уравнение регрессии

Подставим это уравнение в критериальное выражение, обозначив его функционалом Q:

$$\sum_{i=1}^{n}(y'_{эi} - b_0 - b_1 x_i)^2 \to \min .$$

В этом выражении в качестве неизвестных выступают коэффициенты уравнения b_0 и b_1. Для определения экстремума функции нескольких переменных необходимо обращение в нуль ее частных производных первого порядка, т.е.

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0}=0;\ \frac{\partial Q}{\partial b_1}=0.$$

Возьмем первые производные

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0}=2\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-b_0-b_1x_i\right)(-1)\right]=0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1}=2\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-b_0-b_1x_i\right)(-x_i)\right]=0.$$

Проведя упрощения, получим систему двух уравнений (систему нормальных уравнений)

$$\begin{cases} nb_0+b_1\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ b_0\sum_{i=1}^{n}x_i+b_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{cases}$$

Теперь для нахождения коэффициентов уравнения модели необходимо рассчитать по экспериментальным данным значения следующих сумм:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i;\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2;\ \sum_{i=1}^{n}y_i;\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

подставить в уравнения и решить их.

Для линейной зависимости для расчета коэффициентов используем формулы:

$$b_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n},$$

$$b_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 / n - b_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n = \bar{y} - b_1\bar{x}\ .$$

Пример. аппроксимация линейной зависимости с помощью метода наименьших квадратов в табличном процессоре MS Excel.

При проведении серии опытов по определению усилий резания, получены значения силы резания $P_{\text{эксп.}}$ при заданных значениях глубины резания t (табл. 6).

Таблица 6

Исходные данные

№ опыта/ t, мм	1	2	3	4
$P_{z\,\text{эксп}}$	140	210	220	310

Многочисленные исследования показали, что зависимость силы резания от параметров резания (глубины резания t, подачи s, скорости резания υ) может быть описана степенной функцией:

$$P = C\,z^k\ ,$$

где P – значения силы резания; z – параметр резания либо t, либо s, либо υ; C, k – постоянные, требующие определения.

Уравнение приведем к линейному виду при помощи логарифмирования:

$$lg\,P = lg\,C + k\,lg\,z.$$

Обозначив $lg\,P = y$; $lg\,C = A_0$; $k = A_1$; $lg\,z = x$, придем к виду:

$$y = A_0 + A_1 x.$$

Следовательно, для определения коэффициентов C, k степенной функции можно использовать систему нормальных уравнений.

Для расчета коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} y_i \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

создадим новый файл в табличном процессоре MS Excel и введём в первые два столбца таблицы имеющиеся исходные значения (рис. 13, 14).

Таблицы | Иллюстрации | Прило:

B5 | f_x | 310

	A	B	C	D	E	F	G
1	*t, мм*	*P эксп, Н*	*x*	*y эксп*	*x^2*	*x·y*	
2	1	140					
3	2	210					
4	3	220					
5	4	310					
6							

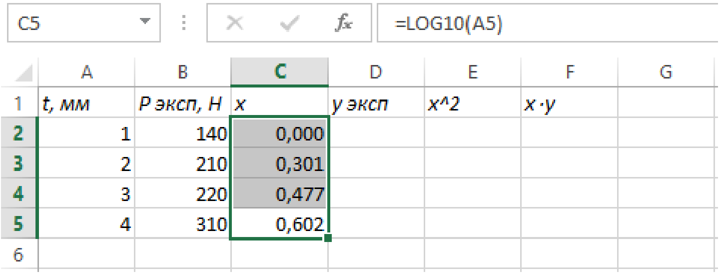
Рис. 13. Ввод исходных данных

C2 | f_x | =LOG10(A2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*t, мм*	*P эксп, Н*	*x*	*y эксп*	*x^2*	*x·y*	
2	1	140	0				
3	2	210					
4	3	220					
5	4	310					
6							

Рис. 14. Ввод формулы вычисления десятичного логарифма от аргумента

В третий и четвертый столбцы необходимо внести значения x_i и $y_i^{эксп}$; для этого в ячейке С2 введём формулу =LOG10(A2), позволяющую получить десятичный логарифм от значения глубины резания t в первом столбце. Чтобы получить значения x относительно других t, нужно выделить ячейку С2, содержащую в себе нужную формулу, и, удерживая за её правый нижний угол, потянуть вниз на 3 ячейки (рис. 15).

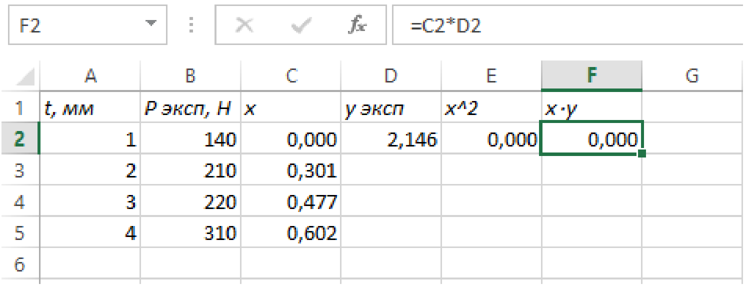


C5 | =LOG10(A5)

	A	B	C	D	E	F	G
1	t, мм	P эксп, Н	x	y эксп	x^2	x·y	
2	1	140	0,000				
3	2	210	0,301				
4	3	220	0,477				
5	4	310	0,602				
6							

Рис. 15. Копирование формулы в другие ячейки

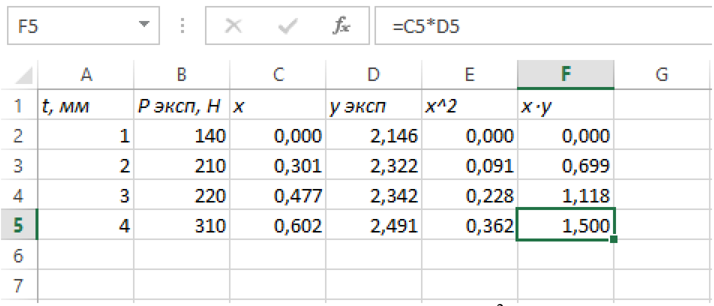
Проводим аналогичные операции со следующими столбцами таблицы, т.е. в ячейки D2, E2 и F2 вводим формулы =LOG10(B2), =C2^2 и =C2*D2 соответственно и получаем значения для оставшихся ячеек (рис. 16 и 17).



F2 | =C2*D2

	A	B	C	D	E	F	G
1	t, мм	P эксп, Н	x	y эксп	x^2	x·y	
2	1	140	0,000	2,146	0,000	0,000	
3	2	210	0,301				
4	3	220	0,477				
5	4	310	0,602				
6							

Рис. 16. Копирование значений $y_i^{эксп}$



F5 | =C5*D5

	A	B	C	D	E	F	G
1	t, мм	P эксп, Н	x	y эксп	x^2	x·y	
2	1	140	0,000	2,146	0,000	0,000	
3	2	210	0,301	2,322	0,091	0,699	
4	3	220	0,477	2,342	0,228	1,118	
5	4	310	0,602	2,491	0,362	1,500	
6							
7							

Рис. 17. Копирование значений x^2 и $x \cdot y$

Далее необходимо вычислить суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} y_i \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; .$$

Для этого можно использовать строку под полученной ранее таблицей.

Для вычисления суммы нескольких аргументов используем функцию СУММ: вводим в ячейке С6 формулу =СУММ(С2:С5) и «протаскиваем» вправо на 3 ячейки, получив значения сумм для остальных аргументов (рис. 18).

C6 =СУММ(C2:C5)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*t, мм*	*Р эксп, Н*	*x*	*y эксп*	*x^2*	*x·y*	
2	1	140	0,000	2,146	0,000	0,000	
3	2	210	0,301	2,322	0,091	0,699	
4	3	220	0,477	2,342	0,228	1,118	
5	4	310	0,602	2,491	0,362	1,500	
6	Σ		1,380	9,302	0,681	3,317	
7							

Рис. 18. Расчет значений сумм

Вводим в ячейки G2 и H2 формулы для вычисления значений коэффициентов A_1 и A_0 (рис. 19, 20).

Получим $A_1 = 0{,}523$ и $A_0 = 2{,}145$.

G2 | f_x | =(C6*D6-4*F6)/(C6^2-4*E6)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*t, мм*	*P эксп, Н*	*x*	*y эксп*	*x^2*	*x·y*	*A1*
2	1	140	0,000	2,146	0,000	0,000	0,523
3	2	210	0,301	2,322	0,091	0,699	
4	3	220	0,477	2,342	0,228	1,118	
5	4	310	0,602	2,491	0,362	1,500	
6	Σ		1,380	9,302	0,681	3,317	

Рис. 19. Вычисление коэффициента A_1

H2 | f_x | =(D6-G2*C6)/4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*t, мм*	*P эксп, Н*	*x*	*y эксп*	*x^2*	*x·y*	*A1*	*A0*
2	1	140	0,000	2,146	0,000	0,000	0,523	2,145
3	2	210	0,301	2,322	0,091	0,699		
4	3	220	0,477	2,342	0,228	1,118		
5	4	310	0,602	2,491	0,362	1,500		
6	Σ		1,380	9,302	0,681	3,317		
7								

Рис. 20. Вычисление коэффициента A_0.

Таким образом, мы получаем уравнение аппроксимирующей прямой:

$$y = 2,145 + 0,523\, x.$$

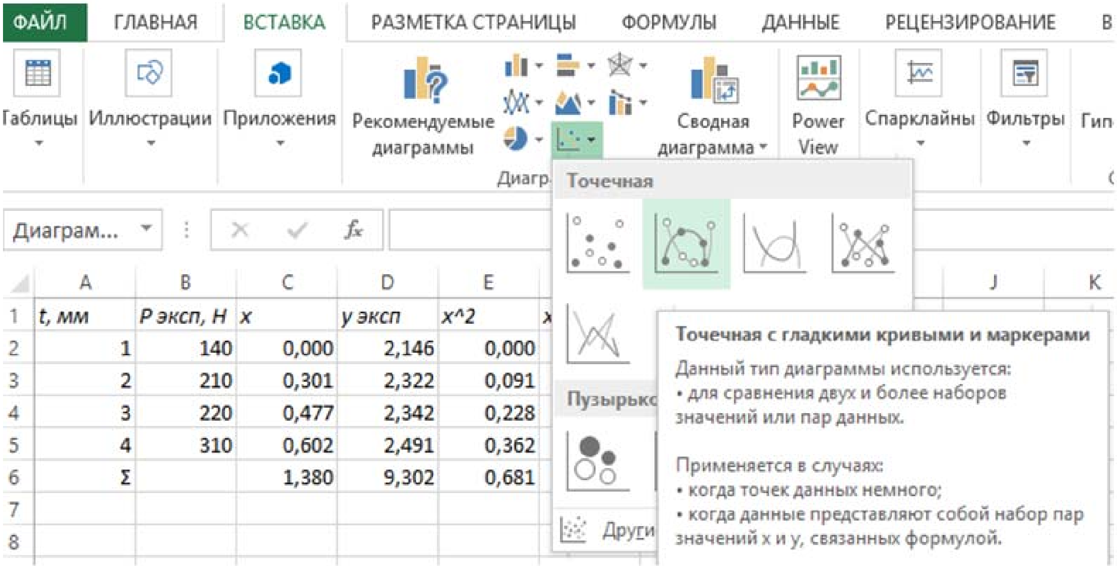


Рис. 21. Выбор типа диаграммы для построения графика

Для построения графика аппроксимирующей прямой необходимы координаты двух точек. Для этого внесём значения абсцисс точек в ячейки B10 и B11, а значения ординат рассчитаем в ячейках C10 и C11, введя в них формулы =$H$2+$G$2*B10 и =$H$2+$G$2*B11 соответственно. Таким образом, получим координаты точек (0,000; 2,145) и (0,602; 2,460).

Далее открываем раздел «Вставка» – «Точечная диаграмма» и выбираем тип диаграммы «Точечная с гладкими кривыми и маркерами» (рис. 21). Выбираем «Выбрать данные…» (рис. 22). В открывшемся окне «Изменение ряда» необходимо отдельно выделить значения для оси x и оси y и нажать «ОК» во всех появившихся окнах, в результате чего в области диаграммы появится график аппроксимирующей прямой (рис. 23).

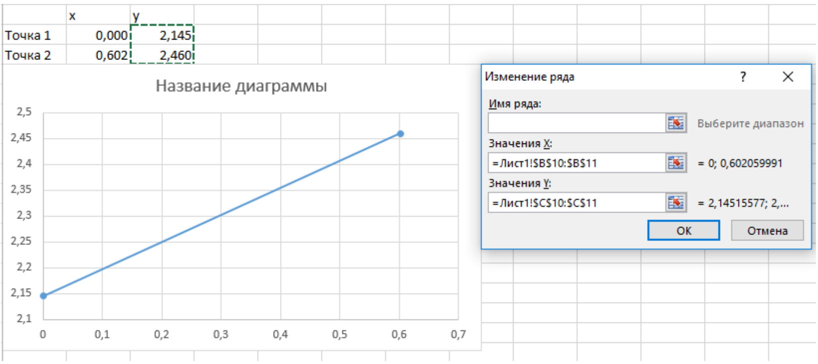


Рис. 22. Выбор данных для построения графика

Далее следует отразить на графике экспериментальные значения. Для этого нажимаем правой кнопкой мыши на область диаграммы и выбираем «Выбрать данные…». В появившемся окне в разделе «Элементы легенды (ряды)» нажимаем «Добавить». В окне «Изменение ряда» в качестве значений оси x выбираем значения из столбца x (ячейки C2:C5), а для оси y – значения из столбца $y_{эксп}$ (рис. 22).

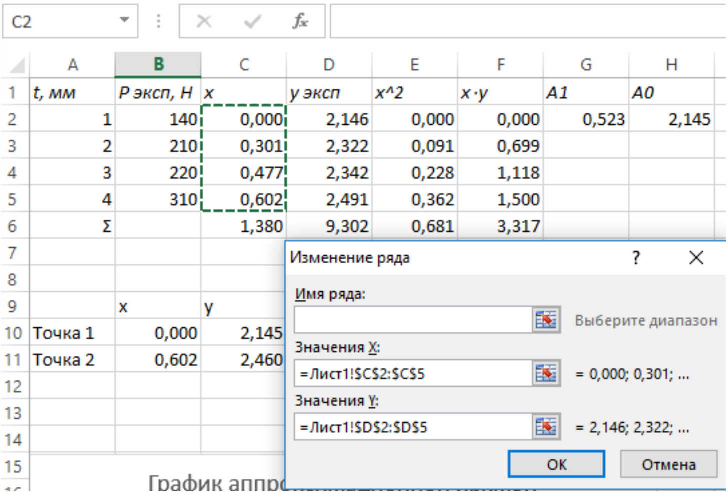


Рис. 23. Выбор данных для построения на графике экспериментальных точек

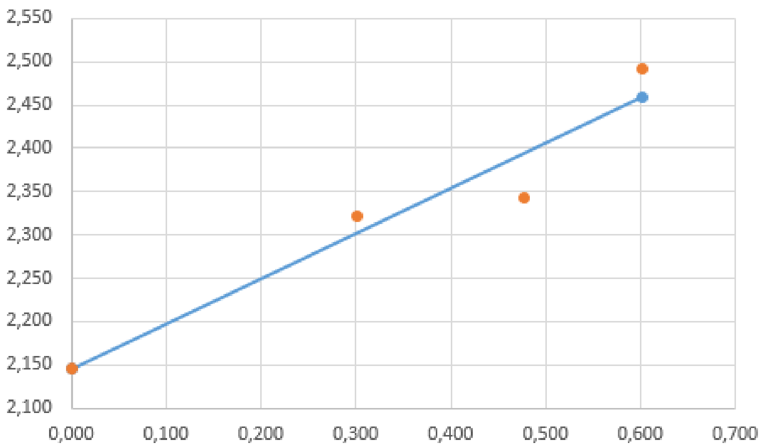
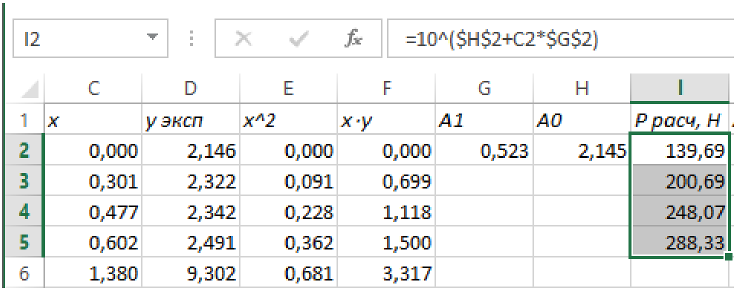


Рис. 24. Аппроксимирующая прямая

Найдём расчетные значения силы резания при помощи уравнения аппроксимирующей прямой и сравним их с экспериментальными (рис. 25).



I2 | =10^($H$2+C2*$G$2)

	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y эксп	x^2	x·y	A1	A0	P расч, Н
2	0,000	2,146	0,000	0,000	0,523	2,145	139,69
3	0,301	2,322	0,091	0,699			200,69
4	0,477	2,342	0,228	1,118			248,07
5	0,602	2,491	0,362	1,500			288,33
6	1,380	9,302	0,681	3,317			

Рис. 25. Вычисление расчетных значений силы резания

Практическое занятие № 4
Планирование многофакторных экспериментов

Цель: изучения методики планирования двухфакторного эксперимента.

Планирование эксперимента – это постановка опытов по некоторой заранее составленной схеме, обладающей какими-то оптимальными свойствами. При планировании эксперимента должны быть определены: необходимое число опытов, последовательность проведения эксперимента, математическая модель для описания эксперимента.

Планирование эксперимента начинается с выбора объекта исследования, который изучается с определенной целью. В наиболее общем случае исследуемый процесс можно изобразить в виде некоторого «черного ящика» (рис. 26).

Рис. 26. Представление процесса в виде «черного ящика»: x_i – входной параметр процесса (фактор), y_i – выходной параметр процесса (выход, целевая функция)

Уравнение, связывающее выход с факторами $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называют функцией отклика или моделью объекта исследования. Любая аналитическая функция может быть представлена в виде полинома. Например, для двух факторов можно выбрать полином

первой степени

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

второй степени

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \text{ и т.д.}$$

где b_0, b_i, b_{ij} – коэффициенты полинома.

Коэффициенты полинома определяются экспериментом.

Выбор интервалов варьирования факторов Реальные значения факторов X_i выбираются экспериментатором. При построении модели факторы необходимо перевести в кодированные значения, поскольку они имеют разные размерности. Кодированные значения факторов обозначаются x_i. Экспериментатор назначает максимальные и минимальные значения каждого фактора.

Интервал варьирования – это некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень, а вычисление – нижний. Для упрощения записи плана эксперимента и обработки экспериментальных данных, верхнему уровню соответствует код «$+1$», нижнему – «-1», а основному «0». Это достигается с помощью преобразования

$$x = \frac{\widetilde{x} - \widetilde{x}_0}{I},$$

где x – кодированное значение фактора; $\widetilde{x}$ – натуральное значение фактора; $\widetilde{x}_0$ – основного уровень; $I = \widetilde{x}_{\max} - \widetilde{x}_0 = \left|\widetilde{x}_{\min} - \widetilde{x}_0\right|$ – натуральное значение интервала варьирования; $\widetilde{x}_{\max}$, $\widetilde{x}_{\min}$ – соответственно натуральные значения верхнего и нижнего уровней.

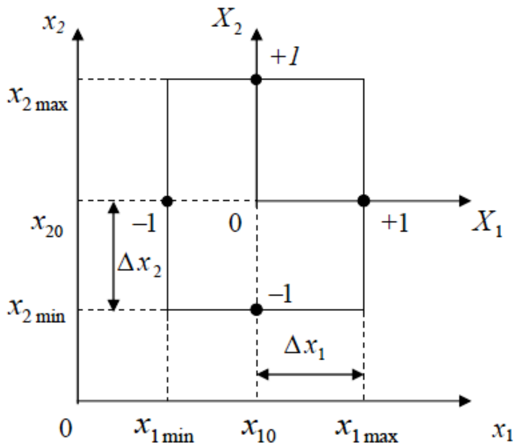


Рис. 27. Переход к кодированным факторам

Выбор плана и составление его матрицы. Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Модель такого эксперимента $N = R^k$, где N – число опытов, k – число факторов, R – число уровней факторов. План ПФЭ изображают в виде таблицы, столбцы которого отображают уровни факторов, а строки – номера опытов. Эти таблицы называют матрицами планирования эксперимента (МП). Приведена МП для ПФЭ типа 2^2, которую называют базовой, с ее помощью можно построить матрицы любого порядка (табл. 7).

Таблица 7

Матрица планирования ПФЭ

N	x_1	x_2	y
1	–	–	y_1
2	+	–	y_2
3	–	+	y_3
4	+	+	y_4

Вычисление коэффициентов уравнения регрессии. Эксперимент, содержащий конечное число опытов, дает только выборочные оценки коэффициентов. Их точность нуждается в статистической проверке. Поэтому формула, приведенная ниже, дает оценки коэффициентов уравнения регрессии

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N},$$

где y_i – значение выхода в «i» опыте; x_{ji} – значение «j» фактора в «i» опыте.

Пример. В результате эксперимента получены данные для $P_{z\,\text{эксп}}$ (табл. 8).

Таблица 8

Исходные данные

$P_{z\,\text{эксп}}$, Н	54	168	240	324	315	347	930	1250

Пусть элементы режима резания меняются в пределах:

$t = 0{,}1...2$ мм; $s = 0{,}15...1{,}2$ мм/об; $\upsilon = 25...140$ м/мин.

Кодируем варьируемые факторов в логарифмических координатах:

$$x_1 = \frac{2(\ln t - \ln 2)}{\ln 2 - \ln 0{,}1} + 1 = 0{,}67\ \ln t + 0{,}52;$$

$$x_2 = \frac{2(\ln S - \ln 1{,}2)}{\ln 1{,}2 - \ln 0{,}15} + 1 = 0{,}96\ \ln S + 0{,}85;$$

$$x_3 = \frac{2(\ln v - \ln 140)}{\ln 140 - \ln 25} + 1 = 1{,}16\ \ln v - 4{,}74.$$

Составляем кодовую матрицу (табл. 9).

Таблица 9

x_0	x_1	x_2	x_3	$\ln P_z$
1	–1	–1	–1	4,0
1	+1	–1	–1	5,1
1	–1	+1	–1	5,5
1	+1	+1	–1	5,8
1	–1	–1	+1	5,7
1	+1	–1	+1	5,8
1	–1	+1	+1	6,8
1	+1	+1	+1	7,1
1	0	0	0	6,3
1	0	0	0	6,3

Рассчитываем коэффициенты регрессии:

$$b_0 = \frac{1}{10}\left(4{,}0 + 5{,}1 + 5{,}5 + 5{,}8 + 5{,}7 + 5{,}8 + 6{,}8 + 7{,}1 + 6{,}3 + 6{,}3\right) = 5{,}84\,;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}\left(-4{,}0 + 5{,}1 - 5{,}5 + 5{,}8 - 5{,}7 + 5{,}8 - 6{,}8 + 7{,}1\right) = 0{,}225\,;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}\left(-4{,}0 - 5{,}1 + 5{,}5 + 5{,}8 - 5{,}7 - 5{,}8 + 6{,}8 + 7{,}1\right) = 0{,}575\,;$$

$$b_3 = \frac{1}{8}\left(-4{,}0 - 5{,}1 - 5{,}5 - 5{,}8 + 5{,}7 + 5{,}8 + 6{,}8 + 7{,}1\right) = 0{,}625\,.$$

Уравнение регрессии принимает вид:

$$y = 5{,}84 + 0{,}225\,x_1 + 0{,}575\,x_2 + 0{,}625\,x_3\,.$$

Подставим в уравнение регрессии кодовые значения x_1, x_2, x_3.

Получим:

$$y = \ln P_z = 5{,}84 + 0{,}225\left(0{,}67\ln t + 0{,}52\right) +$$
$$+ 0{,}575\left(0{,}96\ln S + 0{,}85\right) + 0{,}625\left(1{,}16\ln v - 4{,}74\right) =$$
$$= 3{,}487 + 0{,}150\ln t + 0{,}552\ln S + 0{,}725\ln v\,.$$

После потенцирования получаем формулу для расчета P_z:

$$P_z = 32{,}7 \cdot t^{0{,}150} \cdot S^{0{,}552} \cdot v^{0{,}725}\,.$$

Библиографический список

1. *Рыжков И.Б.* Основы научных исследований и изобретательства: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 224 с.
2. *Космин В.В.* Основы научных исследований (Общий курс) : учеб. пособие / В.В. Космин. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : РИОР : ИНФРА-М, 2017. - 227 с.
3. Основы научных исследований / Б.И. Герасимов, В.В. Дробышева, Н.В. Злобина и др. - М.: Форум, 2009. - 272 с.
3. *Болдин А.П.* Основы научных исследований: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/А.П.Болдин, В.А.Максимов. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 336 с.
4. *Кузнецов Н.Н.* Основы научных исследований: учебное пособие для бакалавров/Н.Н.Кузнецов. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2013. – 284с.
5. *Адлер Ю.П.* Методология и практика планирования эксперимента в России: монография: монография / Ю.П. Адлер, Ю.В. Грановский. - Москва: МИСИС, 2016. - 182 с.
6. *Должиков В.П.* Технологии наукоемких машиностроительных производств: учеб. пособие / В.П. Должиков. - Санкт-Петербург: Лань, 2016. - 304 с.

Содержание

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания к практическим занятиям для студентов бакалавриата направления 15.03.01

Сост.: *Л.Б. Алексеева, А.Е. Ефимов*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой машиностроения

Ответственный за выпуск *Л.Б. Алексеева*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 28.06.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,3. Усл.кр.-отт. 2,3. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 50 экз. Заказ 640. С 238.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2