

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**Санкт-Петербургский горный университет**

**Кафедра общей и технической физики**

**ФИЗИКА**  
**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ**

*Методические указания к практическим занятиям*  
*для студентов бакалавриата направления 18.03.01*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2020**

УДК 532.1. (073)

**ФИЗИКА. Механика жидкости:** Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Н.Н. Смирнова, А.А. Страхова*. СПб, 2020. 38 с.

Представлены краткое теоретическое содержание раздела механики жидкости общего курса физики, рекомендации к решению и оформлению задач, примеры решения задач, контрольные вопросы, задачи для самостоятельного решения и справочные материалы.

Методическая разработка может быть использована для практических занятий студентов изучающих данный раздел в рамках учебной дисциплины «Физика», в соответствии с программами подготовки специалистов и бакалавров инженерно-технических направлений всех форм обучения.

Предназначены для студентов бакалавриата направления 18.03.01 «Химическая технология».

Научный редактор проф. *А.С. Мустафаев*

Рецензент доц. *Н.И. Егорова* (СПБУ МЧС РФ)

© Санкт-Петербургский  
горный университет, 2020

## **ФИЗИКА**

### **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ**

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов бакалавриата направления 18.03.01*

Сост.: *Н.Н. Смирнова, А.А. Страхова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой  
общей и технической физики

Ответственный за выпуск *Н.Н. Смирнова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 29.06.2020. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 2,2. Усл.кр.-отт. 2,2. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 50 экз. Заказ 408.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

## Введение

Достижения механики жидкости широко используем в прикладных физических задачах *гидростроительства* и *горнодобывающей отрасли* (обогащение полезных ископаемых, металлургия, нефтегазовое дело и др.).

Решение задач на практических занятиях – неотъемлемая часть образовательного процесса, эффективное средство усвоения изучаемого раздела, инструмент для контроля за степенью понимания физических законов.

При решении стандартных задач студенты приобретают базовые навыки обращения с понятиями, законами и уравнениями. Переход к более сложным задачам требует углублённых знаний, методов и приложений соответствующего раздела физики.

В методическое пособие включены задачи различного уровня сложности, что способствует глубокому пониманию изучаемого программного материала.

В механике, с большой степенью точности, жидкости рассматриваются как *сплошные*, непрерывно распределённые в части пространства, которую они занимают. Во многих задачах сжимаемостью жидкостей можно пренебречь и использовать единое понятие *несжимаемой жидкости*.

В ряде явлений поведение жидкостей определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями, поэтому используется *единый подход* при изучении равновесия и движения.

## 1. Методические указания к работе с учебным материалом

Необходимыми, для успешного решения задач, условиями являются: знание теории, единиц физических величин и их размерностей; умение построить идеализированную модель (явления, объекта, системы, условий в которых происходит процесс и т.д.); владение алгоритмами применения основных методов решений.

Перед решением задач и выполнением контрольных работ студент, *должен изучить и уметь использовать:*

основные понятия, законы и модели кинематики, гидростатики, гидродинамики, теоретические основы ламинарного и турбулентного режимов движения жидкости.

*При этом необходимо:*

изучать курс физики систематически в течение всего учебного процесса, так как в противном случае материал будет усвоен поверхностно;

проработать лекционный материал и соответствующие разделы учебника, учебного пособия и методических указаний;

ознакомиться и проработать задачи, представленные в разобранных примерах данных методических указаний и в рекомендуемой учебной литературе;

составить конспект, в который записывать законы и формулы, выражающие эти законы; определения основных физических понятий и сущность физических явлений;

для самоконтроля правильности усвоения теоретического материала ответить на контрольные вопросы, предложенные в рекомендуемой учебно-методической литературе.

## 2. Рекомендации к решению и оформлению задач

Выписать отдельно величины данные в условии задачи и величины, которые необходимо определить.

Числовые значения физических величин перевести в международную систему единиц измерений (СИ).

Выполнить рисунок или начертить схему (если требуется для решения задачи), сопровождая их пояснениями.

Окончательный результат представить в общем виде, т.е. преобразовать выражение для определяемой величины так, чтобы в него входили лишь буквенные обозначения величин, заданных в условии задачи или введенных самостоятельно, а также необходимые физические константы.

Не производить промежуточных вычислений физических величин.

Исследовать (если это возможно) асимптотическое поведение решения для частных случаев.

Получив решение в общем виде, выполнить проверку размерности, т.е. убедиться в правильности размерности искомой величины, подставив обозначения единиц измерения в окончательную формулу. Неверная размерность-признак ошибочности решения.

Подставить числовые значения, выраженные в единицах СИ, в окончательную формулу и произвести вычисления, используя при необходимости правила приближенных вычислений.

Ответ задачи в общем виде и числовое значение искомой величины с обязательным указанием размерности записать отдельно после решения.

### 3. Теоретическое содержание

#### 3.1. Действительная (реальная) и идеальная жидкости

Изучение различных форм движения и взаимодействия материальных тел значительно упрощается, если не учитывать их некоторых действительных свойств, то есть использовать *физическую модель*. Материальную систему можно рассматривать как состоящую из отдельных частиц (материальных точек). Такая система называется *дискретной*.

Возможен и другой подход: не учитывать прерывистого молекулярного строения вещества, а массу и физико-механические характеристики системы считать непрерывно распределёнными в

пространстве. В этом случае материальную систему называют *сплошной средой*.

Раздел механики, изучающий движение и равновесие упругих, пластических, жидких и газообразных тел называется *механика сплошной среды*.

В рамках представлений о жидкости (газе) , как сплошной среде, обычно рассматриваются две простейшие модели: *идеальная* и *вязкая*.

В *действительной (реальной)* жидкости между отдельными слоями внутри самой жидкости, а также между жидкостью и поверхностью обтекаемого тела действуют нормальные и касательные силы. Нормальные силы перпендикулярны поверхности соприкосновения слоёв. Касательные силы или, иначе, силы вязкого трения, лежат в плоскости касания и связаны со свойством жидкости, которое называется *вязкостью*.

При обтекании твёрдого тела реальной жидкостью результат действия касательных сил приводит к *прилипанию* жидкости к твёрдым стенкам. При движении *идеальной* жидкости (не обладающей трением) между её соприкасающимися слоями возникают только нормальные силы давления. Слои *скользят* относительно друг друга и обтекаемой поверхности. Это приводит к тому, что идеальная жидкость не оказывает внутреннего сопротивления изменению формы. Кроме того, так как течение идеальной жидкости происходит без трения, то оно не сопровождается *диссипацией* (рассеянием) энергии.

Согласно теории идеальной жидкости при равномерном прямолинейном движении тела в неограниченно распространённой жидкости результирующая сила в направлении движения отсутствует, и тело не испытывает сопротивления. Это утверждение, противоречащее опыту, получило название *парадокс Даламбера*.

Несмотря на это модель идеальной жидкости имеет разнообразные приложения, особенно при описании течения маловязких жидкостей. Например, вода, обладают очень малой вязкостью и её течения во многих случаях совпадают с течением идеальной жидкости.

Успешное применение модели идеальной жидкости связано с тем, что не учитывая количественную сторону внутреннего молекулярного обмена, проявляющегося в виде трения и теплопроводности, в этой модели сохраняется качественное следствие обмена – непрерывность распределения физических величин.

У любой сплошной среды кинематические элементы распределены в пространстве непрерывно. В механике сплошной среды существуют свои способы задания движения.

Положение частиц среды в момент времени  $t$  может быть задано координатами декартовой системы, зависящих от времени и криволинейных координат  $l_x, l_y, l_z$ , связанных с начальным положением частиц  $x_0, y_0, z_0$ . Величины  $t, l_x, l_y, l_z$  называются *переменными Лагранжа*

$$\begin{aligned} x &= v_x(l_x, l_y, l_z, t) \\ y &= v_y(l_x, l_y, l_z, t) \\ z &= v_z(l_x, l_y, l_z, t) \end{aligned} \tag{1}$$

Другой способ задания движения среды заключается в выражении скорости каждой из частиц в функции от времени  $t$  и координат  $x, y, z$  точек пространства. Величины  $t, x, y, z$  называют *переменными Эйлера*.

Функции изменения скоростей всех частиц во времени  $\vec{v}(t)$  или её проекции  $v_x, v_y, v_z$ , определены для каждой точки пространства. Совокупность векторов  $\vec{v}(t)$

для всех точек пространства называется *полем вектора скорости*.

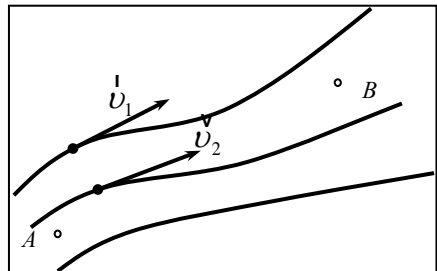


Рис. 1 Линии тока

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_x(x, y, z, t) \\
 v_y &= v_y(x, y, z, t) \\
 v_z &= v_z(x, y, z, t)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

В методе Лагранжа величины  $x, y, z$  являются переменными координатами движущейся частицы жидкости, а в методе Эйлера – это координаты фиксированных точек пространства, мимо которых в данный момент времени проходят различные частицы жидкости.

Наглядно поле изображают с помощью линий тока (рис. 1). Линия тока – это такая линия, в каждой точке которой скорость в данный момент направлен по касательной к ним. Густота линий тока характеризует модуль скорости и численно равна количеству линий на единицу площади перпендикулярного сечения. В соответствии с определением на рисунке 1 в точке А модуль скорости больше, чем в точке В.

Поле скоростей называют *стационарным*, если оно не изменяется со временем, а изменяется только в пространстве.

При стационарном поле скоростей линии тока совпадают с траекториями частиц. Течение называется *ламинарным* (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних не перемешиваясь с ними. Если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости, течение называют *турбулентным*.

### 3.2. Основные законы и соотношения гидростатики

Раздел механики, рассматривающий свойства неподвижных жидкостей, называется *гидростатикой*.

Большой класс жидкостей обладает малой вязкостью и неизменной плотностью, поэтому для приближенного описания свойств таких жидкостей используется понятие идеальной жидкости.



Примером веществ со сравнительно малой вязкостью является вода, эфир и ряд других. Свойства этих жидкостей весьма близки к свойствам идеальной жидкости (газа).

Если в жидкости (газе) отсутствуют движения, то ее вязкость вовсе не проявляется, и в этом случае для любой неподвижной жидкости, как с малой, так и с большой вязкостью выполняются некоторые общие соотношения.

Среди этих соотношений важнейшими являются закон Паскаля, соотношение для гидростатического давления и закон Архимеда.

**Закон Паскаля.** Неподвижная жидкость или газ передают внешнее давление по всему объему жидкости и по всем направлениям одинаково.

В законе Паскаля идет речь только о неподвижной жидкости (газе) и о внешнем давлении, которое действует на жидкость или газ. Кроме внешнего давления в жидкости или газе могут наблюдаться и давления, вызванные другими причинами, например, силы, действующие на некоторой глубине в неподвижной жидкости, силы, связанные с проявлением движения слоев жидкости, и рядом других причин.

На использовании закона Паскаля основано действие гидравлического пресса. Простейший гидравлический пресс состоит из двух сообщающихся сосудов, в каждом из которых имеется поршень (рис. 2). Пространство под поршнями заполнено жидкостью. Площади поршней  $S_1$  и  $S_2$  различны,  $S_1 < S_2$ .

Если на поршень площади  $S_1$  действовать силой  $F_1$ , то в жидкости создастся давление  $p = F_1 / S_1$ .

Такое же давление

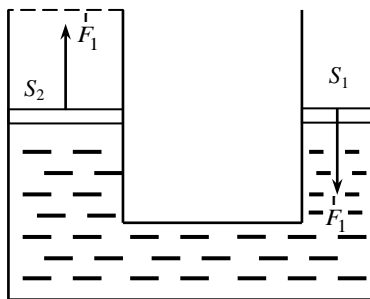


Рис. 2 Гидравлический пресс

согласно закону Паскаля будет действовать во всем объеме жидкости, в том числе и на поршень площадью  $S_2$ . Тогда величина силы, действующей на поршень площадью  $S_2$

$$F_2 = pS_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad (3)$$

Откуда следует, что сила  $F_2$ , действующая на поршень  $S_2$ , может во много раз превосходить силу, приложенную к поршню  $S_1$ , если отношение  $S_2/S_1$  достаточно велико.

**Гидростатическое давление.** Если неподвижная жидкость находится в поле сил тяжести, то на дно сосуда действует давление

$$p = \rho_{\text{ж}} gh \quad (4)$$

где  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – высота столба жидкости в сосуде. Это давление называется гидростатическим. Давление на стенки сосуда определяется аналогичной формулой, но высота столба жидкости в этом случае отсчитывается от уровня стенки до поверхности жидкости. Давление определяется только соответствующими высотами и совершенно не зависит от формы сосуда.

**Закон Архимеда.** На тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости или газа.

Закон выполняется в том случае, если в жидкости или газе отсутствуют движения, т.е. для гидростатических условий.

Закон Архимеда является проявлением гидростатического давления, действующего в жидкости, в которой отсутствуют внутренние движения и сама жидкость находится в поле тяготения Земли.

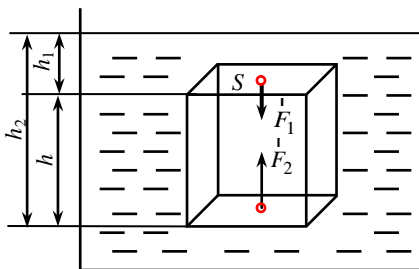


Рис. 3 Силы, действующие на погруженное в жидкость тело

На рисунке 3 параллелепипед погружен в жидкость. Силы, действующие на боковые грани параллелепипеда, взаимно уравновешиваются. Сила, действующая на верхнюю грань, определяется величиной гидростатического давления на соответствующей этой грани глубине  $h_1$ . Величина силы

$$F_1 = p_1 S, \quad (5)$$

где  $p_1 = \rho_{\text{ж}} g h_1$ ;  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости;  $S$  – величина площади верхней грани параллелепипеда.

Подставляя выражение для давления в формулу (5), получим

$$F_1 = \rho_{\text{ж}} g h_1 S. \quad (6)$$

Сила, действующая на нижнюю грань, определяется величиной гидростатического давления на соответствующей этой грани глубине  $h_2$ . Величина этой силы больше, чем сила, действующая на верхнюю грань,

$$F_2 = \rho_{\text{ж}} g h_2 S. \quad (7)$$

Выталкивающая сила Архимеда определяется разностью сил, действующих на нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда:

$$F_{\text{арх}} = F_2 - F_1 = \rho_{\text{ж}} g S (h_2 - h_1) = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{ж}}, \quad (8)$$

где  $V_{\text{ж}} = S(h_2 - h_1)$  – объем вытесненной параллелепипедом жидкости. Следовательно, сила Архимеда

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{ж}}. \quad (9)$$

Необходимо обратить внимание на то, что сила Архимеда определяется *весом* вытесненной жидкости, а не *силой тяжести* вытесненной жидкости. Поэтому, если сосуд с жидкостью, в которую погружено тело, движется с ускорением в гравитационном поле Земли, то меняется вес вытесненной жидкости и, как следствие, меняется величина силы Архимеда. Если жидкость, в которую погружено тело, находится в состоянии невесомости, то сила Архимеда равна нулю.

### 3.3. Основные законы гидродинамики идеальной жидкости

Раздел механики жидкостей, рассматривающий свойства движущихся жидкостей, называется *гидродинамикой*.

Состояние движения идеальной жидкости можно определить, указав для каждой точки пространства вектор скорости.

Совокупность этих векторов скорости, заданных во всех точках пространства, где движется жидкость, образует поле скоростей (рис. 1).

В общем случае величина и направление вектора скорости в каждой точке пространства могут меняться со временем, соответственно меняется и картина линий тока.

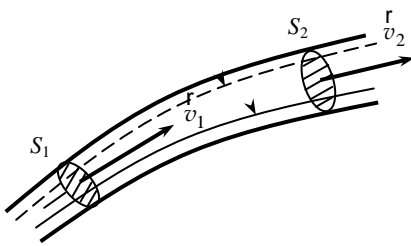


Рис. 4. Трубка тока

При стационарном течении картина линий тока не изменяется, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Часть движущейся жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока* (рис. 4).

Частицы жидкости при движении не пересекают поверхности трубки тока, так как их скорости направлены по касательным к поверхности трубки тока.

#### **Теорема о неразрывности струи**

На рисунке 4, трубка тока, с указанными двумя сечениями, перпендикулярными скорости течения жидкости.

Можно допустить, что в сечении  $S_1$  величина скорости жидкости равна  $v_1$ , а в сечении  $S_2$  величина скорости равна  $v_2$ . Если считать, что жидкость не подвержена разрывам и несжимаема, то количество жидкости, проходящее через оба сечения за малый промежуток времени  $dt$ , должно быть одинаковым. Следовательно

$$S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt \quad (10)$$

Рассмотренные сечения произвольны, и поэтому для любого сечения конкретной трубки тока имеем соотношение

$$Sv = \text{const} \quad (11)$$

Полученный результат представляет собой содержание *теоремы о неразрывности струи*.

Из теоремы о неразрывности струи следует, что при изменении сечения меняется скорость жидкости, т.е. частицы жидкости должны двигаться с ускорением. Это ускорение вызывается изменением давления вдоль оси трубки тока, т.е. давление вдоль оси трубки тока в общем случае изменяется. Теорема о неразрывности струи справедлива также и для нестационарного потока жидкости.

### Уравнение Бернулли

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока малого сечения (рис. 5) и рассмотрим сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные линиям тока.

На эти сечения действуют силы

$$F_1 = p_1 S_1 \text{ и } F_2 = p_2 S_2 \quad (12)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – давления в соответствующих сечениях.

Эти силы за малый промежуток времени вызовут перемещение жидкости, которое в сечении  $S_1$  будет равно  $\Delta l_1$ , а в сечении  $S_2$  будет равно  $\Delta l_2$ . Работы сил, вызвавших эти перемещения, соответственно

$$\Delta A_1 = F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1; \quad \Delta A_2 = F_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 \quad (13)$$

где  $\alpha_1 = 0$  – угол между направлением силы  $F_1$  и направлением скорости  $v_1$  ( $\cos \alpha_1 = 1$ );  $\alpha_2 = \pi$  – угол между

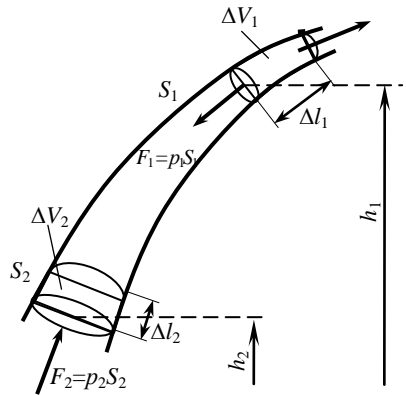


Рис. 5 Трубка тока

направлением силы  $\vec{F}_2$  и направлением скорости  $\vec{v}_2$  ( $\cos \alpha_1 = -1$ ).  
 Результирующая работа будет равна:  $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2$ .

После подстановки выражений (2.7.10) получим

$$\Delta A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \quad (14)$$

Так как жидкость несжимаема, то в любом из заштрихованных участков трубки тока объем жидкости будет  $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \Delta V$ , поэтому  $\Delta A = (p_1 - p_2) \Delta V$ .

Работа сил затрачивается на изменение запасов кинетических и потенциальных энергий, заштрихованных на рисунке участков жидкости, определяется выражением

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \left( \frac{\rho_{\text{ж}} \Delta V v_2^2}{2} + \rho_{\text{ж}} \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho_{\text{ж}} \Delta V v_1^2}{2} + \rho_{\text{ж}} \Delta V g h_1 \right) \quad (15)$$

Сокращая на  $\Delta V$  и перенося слагаемые с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим

$$\frac{\rho_{\text{ж}} v_1^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h_1 + p_1 = \frac{\rho_{\text{ж}} v_2^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h_2 + p_2 \quad (16)$$

Сечения  $S_1$  и  $S_2$  были взяты совершенно произвольно. Поэтому и в любом сечении выражение  $\left( \frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h + p \right)$  будет таким же.

Полученный результат формулируется следующим образом: в стационарно текущей жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие

$$\frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h + p = \text{const} \quad (17)$$

Это соотношение называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли получено для идеальной жидкости, т.е. для жидкости, в которой отсутствует внутреннее трение. Это же уравнение на практике часто используют для анализа движения

жидкостей с малой вязкостью, где оно выполняется с достаточной точностью.

Рассмотрим пример движения идеальной жидкости (или жидкости с весьма малой вязкостью) по горизонтально расположенному трубопроводу. В этом случае  $h_1 = h_2$  и уравнение (17) сводится к соотношению

$$\frac{\rho_{\text{ж}} v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho_{\text{ж}} v_2^2}{2} + p_2. \quad (18)$$

В тех сечениях трубопровода, где скорость течения жидкости больше, давление меньше. Уменьшение давления в местах трубопровода, где скорость потока жидкости достаточно велика, положено в основу устройства и работы водоструйного насоса.

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда.

В боковой стенке цилиндрического сосуда с жидкостью на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 6).

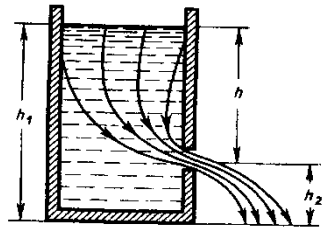


Рис. 6 истечения жидкости через отверстие

Рассмотрим два сечения (на уровне  $h_1$  свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне  $h_2$

выхода ее из отверстия) и напишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho_{\text{ж}} v_1^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h_1 + p_1 = \frac{\rho_{\text{ж}} v_2^2}{2} + \rho_{\text{ж}} g h_2 + p_2 \quad (19)$$

Так как давления в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т. е.  $p_1 = p_2$ , то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + g \cdot h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g \cdot h_2 \quad (20)$$

Из уравнения неразрывности следует, что  $v_2/v_1 = S_1/S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если  $S_1 \gg S_2$ , то членом  $v_1^2/2$  можно пренебречь и  $v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh_1$

$$\text{Отсюда} \quad v_2 = \sqrt{2gh_1} \quad (21)$$

Это выражение получило название: *формула Торричелли*.

### 3.4. Движение вязкой жидкости

Реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуще внутреннее трение (вязкость).

Вязкость проявляется в том, что возникшее в жидкости или газе движение, после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается. Система приходит в равновесное состояние.

Нарушение равновесия приводит к переносу из одних мест среды в другие вещества, энергии или импульса.

Интенсивность таких процессов характеризуется потоком соответствующей величины. Поток скалярная величина.

*Плотностью потока* физической величины называется ее количество, переносимое в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса.

Процесс, при котором в системе от одного участка к другому передается количество движения (импульс), называется *вязкостью*. Другими словами, *вязкость* - явление переноса импульса.

Плотность потока импульса  $j_p$ , например, для одномерного движения в направлении оси  $z$ , перпендикулярной направлению скорости течения, определяется эмпирическим уравнением

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dz} \quad (22)$$



где  $S$  – площадь соприкосновения слоев;  $\eta$  коэффициентом динамической вязкости, а  $\frac{dv}{dz}$  показывает, как изменяется скорость в направлении  $z$ , перпендикулярном направлению движения слоя жидкости или газа.

При течении жидкости или газа в трубах и каналах для поддержания постоянного движения необходимо поддерживать между концами трубы (канала) разность давлений.

Так как установившееся течение это движение без ускорения, то силы давления должны быть уравновешены какими-то силами, тормозящими движение. Этими силами являются силы внутреннего трения на границе со стенкой трубы и на границах между слоями.

Обмен импульсом приводит к возникновению силы вязкого трения  $F_{mp}$  между соседними слоями жидкости. Ньютоном в 1687 году был экспериментально установлен основной закон для силы вязкого трения.

Модуль силы вязкого трения определяется формулой

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S \quad (23)$$

При этом  $\nu = \eta/\rho$ , где  $\rho$  — плотность;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $v$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости (газа) или скорость, набегающего потока при обтекании шара;  $d$  — характерный линейный размер тела (например диаметр трубы, шара, цилиндра и т.д.).

Закон изменения скорости  $v(r)$  от расстояния  $r$  (отсчитывается от оси трубы) можно получить из равенства сил давления и вязкого трения при установившемся течении

$$v(r) = v_0(1 - r^2/R^2) \quad (24)$$

Объём жидкости (поток), протекающий через поперечное сечение трубы в единицу времени определяется формулой Пуазейля.

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l} \quad (25)$$

При течении в трубах и каналах, а также при обтекании тел различной формы возможны ламинарный и турбулентный режимы течения.

Характер всевозможных течений вязкой жидкости или газа определяется безразмерной величиной  $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$ , которая называется *число Рейнольдса*.

При малых значениях  $Re$  течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения  $Re = Re_{кр}$ , которое называется *критическим*, течение приобретает турбулентный характер.

Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

Так, например, для гладких труб при значении числа Рейнольдса меньше чем  $Re_{кр} = 2300$  наблюдается ламинарное течение. При значениях числа Рейнольдса больше этого значения — течение турбулентное.

Течения, для которых число Рейнольдса весьма мало ( $Re < 1$ ), называются ползущими движениями. Примером ползущего движения является течение Стокса при обтекании шара.

Если начало отсчёта принять в центре шара движущегося в жидкости, то жидкость будет обтекать шар со скоростью его движения.

Стокс рассмотрел обтекание шара потоком жидкости, имеющим на бесконечности скорость  $U_{\infty}$  постоянную по численному значению и направлению.

Из решения системы уравнений Навье - Стокса для ползущего движения несжимаемой жидкости были получены зависимости для давления и составляющих скорости на поверхности шара.

Сила трения, отнесённая к единице площади поверхности, т. е. касательное напряжение или напряжение сдвига определяется законом трения Ньютона.

Проинтегрировав давление и касательное напряжение по всей поверхности шара радиуса  $R$ , Стокс определил величину полной силы сопротивления шара

$$F_c = 6\pi\eta U_\infty R \quad (26)$$

#### 4. Основные формулы

Кинематическая вязкость  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ .

Объемный расход  $Q = \frac{dV}{dt}$ .

Давление  $p = \frac{dF}{dS}$ .

Гидростатическое давление  $p_{\text{гидростат.}} = \rho gh$ .

Закон Архимеда  $F_{\text{Арх.}} = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр.}} g$ .

Уравнение неразрывности  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ .

Уравнение Бернулли  $\rho gh + \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$

Модуль силы вязкого трения между слоями жидкости или газа  $F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} S$ .

Число Рейнольдса  $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$ .

Закон изменения скорости  $v(r)$  по сечению трубы  
 $v(r) = v_0(1 - r^2/R^2)$ .

Формула Пуазейля для потока жидкости через поперечное сечение трубы  $Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l}$ .

Величина силы сопротивления Стокса  $F_C = 6\pi\eta r v$ .

## 5. Контрольные вопросы

1. Что такое давление в жидкости? Давление – величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?
2. Что называется динамическим давлением? гидростатическим давлением? полным давлением?
3. Какие приборы служат для измерения динамического давления? гидростатического давления? полного давления в жидкости?
4. Чем характерна модель идеальной жидкости? Приведите пример жидкости, которую можно приближенно считать идеальной.
5. Что называют линией тока в жидкости? Что называют трубкой тока?
6. Какая жидкость называется несжимаемой?
7. Что характерно для установившегося течения жидкости?
8. Что такое градиент скорости?
9. Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
10. Каким уравнением описывается стационарное движение идеальной жидкости?
11. Сформулируйте закон Паскаля и закон Архимеда.
12. Как изменяется скорость частиц жидкости при увеличении сечения трубки тока жидкости?
13. Как изменяется скорость течения жидкости и давление в местах сужения трубопровода?
15. Что такое вязкость?
16. Какое течение жидкости называется ламинарным, турбулентным?
17. Сформулируйте закон Ньютона для силы вязкого трения.
18. Сформулируйте закон Пуазейля.
19. По какой формуле определяется полная сила сопротивления для шара движущегося в жидкости?
20. Как определить характер движения жидкости или газа?

## 6. Примеры решения задач

**Пример 1.** В трубе с внутренним диаметром 3см течет вода. Определить максимальный массовый расход воды  $Q$  при ламинарном течении. Для трубы ламинарное движение жидкости сохраняется при числах Рейнольдса меньше критического  $Re_{кр.}=2300$ .

Дано:	<b>Решение</b> Мгновенное значение массового расхода жидкости или скорость изменения массы жидкости, протекающей через сечение трубы определяется по формуле $Q = \frac{dm}{dt}$
$d = 3\text{см} = 0,03\text{м}$	
$\eta = 0.001 \text{ Па}\cdot\text{с}$	
$Re_{кр.}=2300$	
$Q = ?$	

Так как  $m=\rho V$ , то  $Q = \rho \frac{dV}{dt}$  (27)

Критическое число Рейнольдса, определяющее режим движения

$$Re_{кр} = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (28)$$

где кинематическая вязкость  $\nu$  связана с динамической

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (29)$$

Элементарный путь, пройденный частицами воды за время  $dt$ :  $dl=vdt$ . Элементарный объем воды, протекающий через поперечное сечение трубы  $S$  за время  $dt$

$$dV=Sdl=Svdt. \quad (30)$$

Решая систему уравнений (27-29), получим

$$Q = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{Svdt}{dt} = \rho Sv = \rho S \frac{Re_{кр} \nu}{d} = \rho S \frac{Re_{кр} \eta}{\rho d} = S \frac{Re_{кр} \eta}{d} \quad (31)$$

Площадь сечения трубы  $S = \frac{\pi d^2}{4}$

Окончательно

$$Q = S \frac{Re_{кр} \eta}{d} = \frac{\pi d Re_{кр} \eta}{4} \quad (32)$$

Вязкость воды определим по таблице  $\eta = 0,001$  Па·с.

Вычисление

$$Q = \frac{\pi d Re_{кр} \eta}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,03 \cdot 2300 \cdot 0,001}{4} = 0,054 \text{ кг/с}$$

**Ответ:** максимальный массовый расход воды  $Q=0,054$  кг/с.

**Пример 2.** На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии  $h_1$  от дна сосуда и на расстоянии  $h_2$  от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии  $l$  от сосуда (по горизонтали) струя воды из отверстия падает на стол в случае, если:  $h_1 = 25$  см,  $h_2 = 16$  см?

Дано:  
 $h_1 = 25$  см  
 $h_2 = 16$  см

$l = ?$

Решение

По формуле Бернулли

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \quad \text{или} \quad v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h_2 = v_2^2.$$

По условию задачи уровень воды в сосуде поддерживается постоянным, значит  $v_1 = 0$ , тогда  $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}$ .

По горизонтали движение струи равномерное, по вертикали - равноускоренное.

Высота  $h_1 = \frac{g \cdot t^2}{2}$ , откуда время падения струи  $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}$ .

Расстояние  $l = v_2 \cdot t = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h_2 h_1}{g}} = 2 \cdot \sqrt{h_2 h_1} = 0,4 \text{ м.}$

**Ответ:** струя воды падает на стол на расстоянии 0,4 м.

**Пример 3.** По горизонтальной трубе АВ течет жидкость. Разность уровней  $a$  и  $b$  этой жидкости в трубках равна  $\Delta h = 10 \text{ см.}$  Диаметры трубок  $a$  и  $b$  одинаковы. Найти скорость  $v$  течения жидкости в трубе АВ.

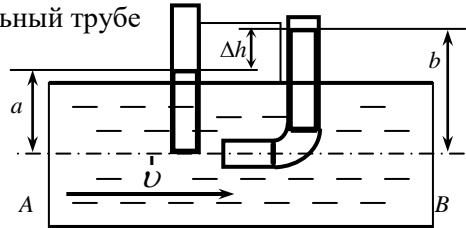


Рис. 7 Схема течения к примеру 3

Дано:

$$\Delta h = 10 \text{ см}$$

$$v = ?$$

Решение

Т.к. диаметры трубок  $d_a = d_b$ , то площади поперечного сечения  $S_a = S_b$ . Из уравнения неразрывности струи  $v_a \cdot S_a = v_b \cdot S_b$ , следовательно:  $v_a = v_b = v$ .

По формуле Бернулли: 
$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot a = \rho \cdot g \cdot b.$$

Отсюда

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Вычисление

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,1} = 1,4 \text{ м/с.}$$

**Ответ:** скорость течения жидкости в трубе 1,4 м/с.

## 7. Задачи для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Бак высотой 1,5 м наполнен до краев водой. На расстоянии 1 м от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии от бака падает на пол струя, вытекая из отверстия?

2. Свинцовая пуля в виде шарика диаметром 5 мм движется в воздухе. Принимая плотность воздуха равной  $0,0012 \text{ г/см}^3$ , определите число Рейнольдса, если мгновенная скорость пули равна 300 м/с. С каким ускорением движется при этой скорости пуля? Массой вытесненного воздуха и наличием поля тяготения пренебrecь. Принять, что при турбулентном обтекании твердого тела сила лобового сопротивления вычисляется по формуле  $F=cSv^2\rho$ , где безразмерный коэффициент  $c$  для шара равен 0,25,  $S$  – наибольшая площадь сечения тела в направлении, перпендикулярном скорости  $v$ ,  $\rho$  – плотность среды. Динамическая вязкость воздуха  $\eta = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , плотность свинца  $11300 \text{ кг/м}^3$ .

3. Какое давление создает компрессор в краскопультe, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью 25 м/с? Плотность краски  $800 \text{ кг/м}^3$ .

4. Стальной шарик диаметром 1 мм падает с постоянной скоростью 0,185 см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую вязкость масла. Плотности стали и масла  $7800 \text{ кг/м}^3$  и  $900 \text{ кг/м}^3$  соответственно.

5. По газопроводу течет метан ( $\text{CH}_4$ ) при давлении  $P=2 \cdot 10^6 \text{ Па}$  и температуре  $t = 17^\circ \text{ C}$ . За время  $t = 1 \text{ ч}$  транспортируется  $m = 32 \text{ кг}$  газа. Площадь поперечного сечения трубы газопровода  $S=6,0 \text{ см}^2$ . Какова скорость  $v$  движения газа в трубе?

### Вариант 2

1. Шар перекрывает отверстие радиусом  $r$  в плоской стенке, разделяющей жидкость. Плотность шара такая же, как и жидкости.



Давление в верхней и нижней части сосуда соответственно  $3P$  и  $P$  (рис. 8). С какой силой прижимается шар к отверстию?

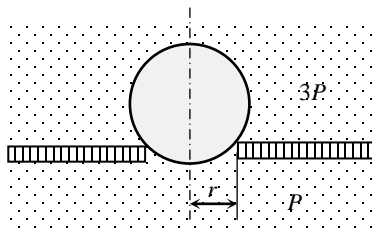


Рис. 8

2. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость воды в широкой части трубы  $0,2$  м/с. Определить скорость в узкой части трубы, диаметр которой в  $1,5$  раза меньше диаметра широкой части трубы.

3. В сосуд льется вода, причем за  $1$  с наливается объем воды  $0,2$  л. Каким должен быть диаметр отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне  $8,3$  см? По трубе течет машинное масло. Максимальная скорость, при которой движение масла в трубе остается еще ламинарным, равна  $3,2 \cdot 10^{-2}$  м/с. При какой скорости движение глицерина в той же трубе переходит из ламинарного в турбулентное? Коэффициент динамической вязкости машинного масла и глицерина  $0,5$  Па·с и  $1,48$  Па·с соответственно, а плотности  $0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $1,26 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

4. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром  $0,3$  мм, если динамическая вязкость воздуха  $1,72 \cdot 10^{-5}$  Па·с?

5. В восходящем потоке воздуха, скорость которого  $2$  см/с, находится пылинка, имеющая форму шарика диаметром  $0,01$  мм. Опускается или поднимается пылинка, если ее плотность на  $2,3$  г/см<sup>3</sup> больше плотности воздуха? Принять, что движение воздуха при обтекании пылинки является ламинарным. Вязкость воздуха  $1,72 \cdot 10^{-5}$  Па·с.

### Вариант 3

1. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни, сечение которых  $100$  и  $10$  см<sup>2</sup>. На меньший поршень ставят груз массы  $80$  кг. Какая по величине сила будет действовать на больший поршень?

2. В бочку заливается вода со скоростью  $200$  см<sup>3</sup>/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения

0,8 см. Пренебрегая вязкостью воды, определить уровень воды в бочке.

3. Шарик без начальной скорости погружается в среде, плотность которой  $\rho$ . Радиус шарика  $R$ , масса -  $m$  и плотность -  $\rho_T$ . Найти закон движения шарика,  $v = f(t)$ , считая, что сила сопротивления жидкости является функцией скорости погружения и определяется формулой Стокса.

4. Бак цилиндрической формы площадью основания  $S = 1 \text{ м}^2$  и объемом  $V = 3 \text{ м}^3$  заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время  $t$ , необходимое для опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью  $S_1 = 10 \text{ см}^2$ .

5. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом 2 см вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого равен 1 мм и длина 1,5 см. В сосуд налито касторовое масло, вязкость которого 1,2 Па·с, плотность –  $970 \text{ кг/м}^3$ . Найти зависимость скорости понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты  $h$  этого уровня над капилляром. Найти значение этой скорости при  $h=26 \text{ см}$ .

#### Вариант 4

1. Считая, что ламинарность движения жидкости или газа в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса  $Re < 3000$  (если в качестве  $d$  взять диаметр трубы), показать, что при кинематической вязкости газа  $1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , текущего по трубе диаметром 2 см, течение будет ламинарным. Плотность газа  $7,5 \text{ кг/м}^3$ . За 30 мин через поперечное сечение трубы протекает 0,51 кг газа. Газ считать несжимаемым.

2. Бак цилиндрической формы площадью основания  $10 \text{ м}^2$  и объемом  $100 \text{ м}^3$  заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью  $8 \text{ см}^2$ .

3. На тележке стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой. Высота воды в сосуде 1 м. В сосуде с противоположных сторон по ходу тележки сделано два крана с отверстиями площадью  $10 \text{ см}^2$

каждое, одно на высоте 0,25 м над дном сосуда, а другое на высоте 0,5 м. Какую горизонтальную силу нужно приложить к тележке, чтобы она осталась в покое при открытых кранах?

4. На столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой 50 см. Сосуд полностью заполнен водой. Пренебрегая вязкостью, найти на какой высоте от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие, чтобы струя из него била в поверхность стола на максимальное расстояние от сосуда. Определить это расстояние.

5. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течет со скоростью 2 м/с. Определить скорость нефти в узкой части, если разность давлений в широкой и узкой частях ее равна 6,65 кПа. Плотность нефти  $0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

### Вариант 5

1. В стоящий на столе широкий цилиндрический сосуд налита вода до высоты  $H$ . На какой высоте  $h$  следует сделать маленькое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя воды попадала на стол как можно дальше от сосуда? Каково при этом расстояние  $l$  от сосуда до точки попадания струи на стол? (Вязкостью жидкости пренебречь).

2. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости  $10 \text{ см}^2$ , коэффициент динамической вязкости жидкости равен  $10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ , а возникающая сила трения между слоями  $0,1 \text{ мН}$ . Определить градиент скорости.

3. В дне цилиндрического сосуда диаметром 50 см имеется круглое отверстие диаметром 1 см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты этого уровня. Найти значение этой скорости при высоте уровня воды 20 см.

4. Канал шириной 10 м перегороден плотиной. Глубина канала с одной стороны равна 5 м, с другой – 3 м. Определить в модуль силы давления неподвижной воды на плотину. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

5. По трубке длины  $l$  и радиуса  $R$  течёт стационарный поток жидкости, плотность которой  $\rho$  и вязкость  $\eta$ . Скорость течения жидкости зависит от расстояния  $r$  до **оси трубки по закону**

### Вариант 6

1. По длинной наклонной плоскости стекает широкий поток воды. На протяжении  $l$  глубина потока уменьшается вдвое. На протяжении какого пути глубина потока уменьшится в четыре раза?

2. При движении шарика радиуса  $r_1 = 1,2$  мм в глицерине ламинарное обтекание наблюдается при скорости шарика, не превышающей  $v_1 = 23$  см/с. При какой минимальной скорости  $v_2$  шара радиуса  $r_2 = 5,5$  см в воде обтекание станет турбулентным?

3. На столе стоит сосуд, в боковую поверхность которого вставлен горизонтальный капилляр на высоте 5 см от дна сосуда. Внутренний радиус капилляра равен 1 мм и длина 1 см. В сосуд налито машинное масло, вязкость которого 0,5 Па·с, а плотность  $900$  кг/м<sup>3</sup>. Уровень масла в сосуде поддерживается постоянным на высоте 50 см выше капилляра. На каком расстоянии от конца капилляра по горизонтали струя масла падает на стол?

4. В горизонтально расположенной трубе с площадью поперечного сечения  $20$  см<sup>2</sup> течет вода. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь сечения  $12$  см<sup>2</sup>. Разность уровней воды в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определить объемный расход жидкости.

5. Струя воды с площадью поперечного сечения  $4$  см<sup>2</sup> вытекает в горизонтальном направлении из брандспойта, расположенного на высоте 2 м над поверхностью Земли, и падает на эту поверхность на расстоянии 8 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха движению воды, найти избыточное давление воды в рукаве, если площадь поперечного сечения рукава  $50$  см<sup>2</sup>.

### Вариант 7

1. Латунный шарик диаметром 0,5 мм падает в глицерине. Определить 1) скорость установившегося движения шарика; 2) является ли при этом значении скорости обтекание шарика ламинарным? Плотность латуни и глицерина  $8,55 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $1,26 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> соответственно; динамическая вязкость глицерина 1,48 Па·с. Критическое значение числа Рейнольдса при падении шарика принять равным 0,5.

2. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого равен 1 мм и длина 1,5 см. В сосуд налит глицерин, вязкость которого 1,0 Па·с, плотность 1260 кг/м<sup>3</sup>. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте 18 см выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объем глицерина 5 мл?

3. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром 6 см со скоростью 10 см/с. Чему равно для этого потока воды в трубе число Рейнольдса? Каков характер движения воды? Вязкость воды 0,001 Па·с.

4. Вода течет по трубе, причем за 1 с через поперечное сечение трубы протекает объем воды 200 мл. Динамическая вязкость воды 0,001 Па·с. При каком предельном значении диаметра трубы движение воды остается ламинарным? Ламинарный режим движения жидкости или газа в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса  $Re < 3000$ .

5. Пробковый шарик радиусом 5 мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом, с постоянной скоростью 3,5 см/с. Найти динамическую и кинематическую вязкость масла, если плотность масла и пробки 900 кг/м<sup>3</sup> и 200 кг/м<sup>3</sup> соответственно.

## Вариант 8

1. С противоположных сторон широкого вертикального сосуда, наполненного водой, открыли два одинаковых отверстия, каждое площадью  $S = 0,50 \text{ см}^2$ . Расстояние между отверстиями по высоте  $\Delta h = 51 \text{ см}$ . Определить результирующую силу реакции вытекающей воды.

2. На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии  $h_1$  от дна сосуда и на расстоянии  $h_2$  от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случаях: 1)  $h_1=25 \text{ см}$ ,  $h_2=16 \text{ см}$ ; 2)  $h_1=16 \text{ см}$ ,  $h_2=25 \text{ см}$ ?

3. К поршню шприца, расположенного горизонтально, приложена сила 15 Н. Определить скорость истечения воды из наконечника шприца, если площадь поршня  $2 \text{ см}^2$ .

4. Бак высотой 2 м до краев наполнен жидкостью. На какой высоте должно быть проделано отверстие в стенке бака, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия, было на максимальном от бака расстоянии?

5. На столе стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой до уровня  $H = 20 \text{ см}$  от дна. Если в воду ( $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ) опустить плавать тонкостенный никелевый стакан ( $\rho_0' = 8,8 \text{ г/см}^3$ ), то уровень воды подымается на  $h = 2,2 \text{ см}$ . Определить уровень  $H_1$  воды в сосуде, если стакан утопить.

### Вариант 9

1. При движении шарика радиусом 2,4 мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорости, не превышающей 10 см/с. При какой минимальной скорости шарика радиусом 1 мм в глицерине обтекание станет турбулентным? Плотность касторового масла и глицерина  $0,96 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  и  $1,26 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

2. Определить работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом  $V = 1,5 \text{ м}^3$  в горизонтальной трубе от сечения с давлением  $p_1 = 40 \text{ кПа}$  до сечения с давлением  $p_2 = 20 \text{ кПа}$ .

3. Определите, на какую высоту  $h$  поднимется вода в вертикальной трубе, впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром  $d_2 = 3 \text{ см}$ , если в широкой части трубы диаметром  $d_1 = 9 \text{ см}$  скорость газа  $v_1 = 25 \text{ см/с}$ .

4. Стальной шарик диаметром 3 мм опускается с нулевой начальной скоростью в прованском масле. Через сколько времени после начала движения скорость шарика будет отличаться от установившегося значения на 1 %?

5. Свинцовый шарик равномерно опускается в глицерине, вязкость которого  $\eta = 1,39 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание ещё остаётся ламинарным? Известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу

Рейнольдса  $Re = 0,5$ , при котором за характерный размер взят диаметр шарика.

### Вариант 10

1. Вода течет по круглой гладкой трубе диаметром 5 см со средней по сечению скоростью 0,1 м/с. Определить число Рейнольдса для потока жидкости в трубе и указать характер течения жидкости, если критическое значение числа Рейнольдса для водных систем 2000, а коэффициент динамической вязкости воды 0,001 Па·с.

2. Стальной шарик падает в широком сосуде с трансформаторным маслом, плотность которого  $900 \text{ кг/м}^3$  и динамическая вязкость 0,8 Па·с. Считая, что закон Стокса имеет место при числе Рейнольдса  $Re < 0,5$  (если при вычислении  $Re$  в качестве  $d$  взять диаметр шарика), найти предельное значение диаметра шарика. Плотность стали  $7800 \text{ кг/м}^3$ .

3. Медный шарик диаметром 1 см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением в нем шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса при падении шарика принять равным 0,5. Плотность меди и касторового масла  $8900 \text{ кг/м}^3$  и  $900 \text{ кг/м}^3$  соответственно; динамическая вязкость касторового масла 1,2 Па·с.

4. На дне широкого сосуда имеется небольшое отверстие. Сосуд заполнен водой и керосином. Толщина слоя воды 30 см, а слоя керосина 20 см. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекания воды.

5. В восходящем потоке воздуха, скорость которого 2 см/с, находится пылинка, имеющая форму шарика диаметром 0,01 мм. Опускается или поднимается пылинка, если ее плотность на  $2,3 \text{ г/см}^3$  больше плотности воздуха? Принять, что движение воздуха при обтекании пылинки является ламинарным.

### Вариант 11

1. В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность  $\rho = 1,26 \text{ г/см}^3$ , динамическая вязкость  $\eta = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ), падает

свинцовый шарик (плотность  $\rho = 11,3 \text{ г/см}^3$ ). Считая, что при числе Рейнольдса  $Re \leq 0,5$  выполняется закон Стокса (при вычислении  $Re$  в качестве характерного размера берется диаметр шарика), определите предельный диаметр шарика.

2. На столе стоит наполненный водой широкий цилиндрический сосуд высотой  $h = 40 \text{ см}$ . Пренебрегая вязкостью, определите, на какой высоте от дна сосуда должно располагаться небольшое отверстие, чтобы расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды, было максимальным.

3. Свинцовый шарик равномерно опускается в глицерине, вязкость которого  $\eta = 13,9 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание еще остается ламинарным? Известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу  $Re = 0,5$  (это значение числа  $Re$ , при котором за характерный размер взят диаметр шарика).

4. В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте  $h_1 = 10 \text{ см}$  от его дна капилляр с внутренним диаметром  $d = 2 \text{ мм}$  и длиной  $l = 1 \text{ см}$ . В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность  $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$ , динамическая вязкость  $\eta = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ) на высоте  $h_2 = 70 \text{ см}$  выше капилляра. Определите расстояние по горизонтали от конца капилляра до места, куда попадает струя масла.

5. Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне наполнен водой и керосином. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекающей воды, если толщина слоя воды  $h_1 = 30 \text{ см}$ , а слоя керосина  $h_2 = 20 \text{ см}$ .

## Вариант 12

1. В боковой поверхности цилиндрического сосуда, стоящего на горизонтальной поверхности, имеется отверстие, поперечное сечение которого значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии  $h_1 = 49 \text{ см}$  от уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии  $h_2 = 25 \text{ см}$  от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определите расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды.



2. В дне сосуда имеется отверстие диаметром  $d_1$ . В сосуде вода поддерживается на постоянном уровне, равном  $h$ . Считая, что струя не разбрызгивается, и пренебрегая силами трения в жидкости, определить диаметр струи, вытекающей из сосуда на расстоянии  $h_1 = 2h$  от его дна.

3. Определить число Рейнольдса и режим движения воды в водопроводной трубе диаметром  $d = 300$  мм при расходе  $Q = 0,136$  м<sup>3</sup>/с и температуре воды 10 °С.

4. На столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой 50 см. Сосуд наполнен водой. Пренебрегая вязкостью, найти, на какой высоте от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие, чтобы струя из него била в поверхность стола на максимальное расстояние  $l_{\text{макс}}$  от сосуда. Чему равно  $l_{\text{макс}}$ ?

5. С противоположных сторон широкого вертикального сосуда, наполненного водой, открыли два одинаковых отверстия, каждое площадью  $S = 0,50$  см<sup>2</sup>. Расстояние между ними по высоте  $\Delta h = 51$  см. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды.

### Вариант 13

1. В боковой стенке широкого цилиндрического вертикального сосуда высоты  $h = 75$  см сделана узкая вертикальная щель, нижний конец которой упирается в дно сосуда. Длина щели  $l = 50$  см, ширина  $b = 1$  мм. Закрыв щель, сосуд наполнили водой. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды непосредственно после того, как щель открыли.

2. При движении шарика радиуса  $r_1 = 1,2$  мм в глицерине ламинарное обтекание наблюдается при скорости шарика, не превышающей  $v_1 = 23$  см/с. При какой минимальной скорости  $v_2$  шара радиуса  $r_2 = 5,5$  см в воде обтекание станет турбулентным? Вязкости глицерина и воды равны соответственно  $\eta_1 = 1,39$  Па·с и  $\eta_2 = 0,001$  Па·с.

3. В трубе с внутренним диаметром  $d = 3$  см течет вода. Определить максимальный массовый расход воды при ламинарном течении.

4. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня  $S_1 = 20$  см<sup>2</sup>, правого -  $S_2 = 100$  см<sup>2</sup>. На какую высоту опустится левый

поршень, если на него поставить гирию массой  $m=1,5 \text{ кг}$ ? Плотность масла  $\rho=0,9 \text{ г/см}^3$

5. В горизонтально расположенной трубе с площадью  $S_1$  поперечного сечения, равной  $20 \text{ см}^2$ , течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь  $S_2$  сечения равна  $12 \text{ см}^2$ . Разность  $\Delta h$  уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна  $8 \text{ см}$ . Определить объемный расход жидкости.

### Вариант 14

1. Площадь соприкосновения слоев движущегося воздуха  $10 \text{ см}^2$ , а возникающая сила трения между слоями  $0,18 \text{ мкН}$ . Определить градиент скорости при температуре  $20^\circ\text{C}$ .

2. Свинцовая пуля в виде шарика диаметром  $5 \text{ мм}$  движется в воздухе. Принимая плотность воздуха равной  $0,0012 \text{ г/см}^3$ , определите число Рейнольдса, если мгновенная скорость пули равна  $300 \text{ м/с}$ . С каким ускорением движется при этой скорости пуля? Массой вытесненного воздуха и наличием поля тяготения пренебречь. Принять, что при турбулентном обтекании твердого тела сила лобового сопротивления вычисляется по формуле  $F=CSv^2\rho$ , где безразмерный коэффициент  $C$  для шара равен  $0,25$ ;  $S$  – наибольшая площадь сечения тела в направлении, перпендикулярном скорости  $v$ ;  $\rho$  – плотность среды. Плотность свинца  $11300 \text{ кг/м}^3$ .

3. На границе раздела двух жидкостей плотностью  $\rho_1$  и  $\rho_2$  плавает шайба плотностью  $\rho$  ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ). Высота шайбы  $H$  (рис. 9). Определите глубину ее погружения во вторую жидкость.

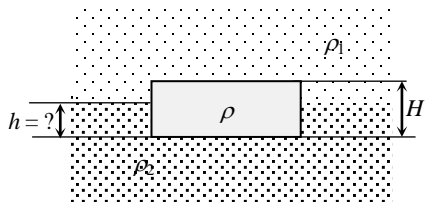


Рис. 9

4. На столе стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой до уровня  $H = 20 \text{ см}$  от дна. Если в воду ( $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ) опустить плавать тонкостенный никелевый стакан ( $\rho' =$

8,8 г/см<sup>3</sup>), то уровень воды поднимается на  $h = 2,2$  см. Определить уровень  $H_1$  воды в сосуде, если стакан утопить.

5. К поршню шприца, расположенного горизонтально, приложена сила 15 Н. Определить скорость истечения воды из наконечника шприца, если площадь поршня 2 см<sup>2</sup>.

### Вариант 15

1. Струя воды с площадью  $S_1$  поперечного сечения, равной 4 см<sup>2</sup>, вытекает в горизонтальном направлении из брандспойта, расположенного на высоте  $H=2$  м над поверхностью Земли, и падает на эту поверхность на расстоянии  $l=8$  м. Пренебрегая сопротивлением воздуха движению воды, найти избыточное давление  $P$  воды в рукаве, если площадь  $S_2$  поперечного сечения рукава равна 50 см<sup>2</sup>?

2. В боковой стенке широкого открытого бака вмонтирована суживающаяся трубка (рис.10), через которую вытекает вода. Площадь сечения трубки уменьшается от  $S_1 = 3$  см<sup>2</sup> до  $S_2 = 1$  см<sup>2</sup>. Уровень воды в баке на  $h = 4,6$  м выше уровня в трубке. Пренебрегая вязкостью воды, найти горизонтальную составляющую силы, вырывающей трубку из бака.

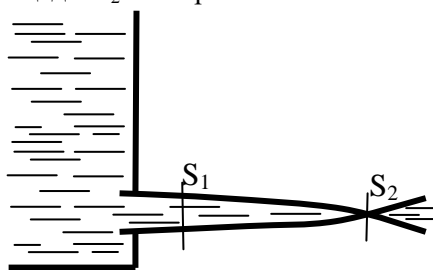


Рис.10

3. По трубе радиусом  $r = 1,5$  см течет углекислый газ ( $\rho = 7,5$  кг/м<sup>3</sup>) Определите скорость его течения, если за  $t = 20$  мин через поперечное сечение трубы протекает  $m = 950$  г газа.

4. В бочку заливается вода со скоростью 200 см<sup>3</sup>/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения 0,8 см<sup>2</sup>. Пренебрегая вязкостью воды, определить уровень воды в бочке.

5. Пробковый шарик (плотность  $\rho = 0,2$  г/см<sup>3</sup>) диаметром  $d = 6$  мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом (плотность  $\rho' = 0,96$  г/см<sup>3</sup>), с постоянной скоростью  $v = 1,5$  см/с. Определить для касторового масла: 1) динамическую вязкость  $\eta$ ; 2) кинетическую вязкость  $\nu$ .

## Справочные таблицы

Таблица 1

Основные физические величины в механике, их обозначения  
и единицы величин в СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			Международное	русское
Длина	$L$	метр	$m$	м
Время	$T$	секунда	$s$	с
Масса	$M$	килограмм	$kg$	кг

Таблица 2

Производные единицы СИ, имеющие наименование

Величина	Единица		
	наименование	Обозначение	Выражение через основные единицы СИ
Частота	Герц	Гц	$s^{-1}$
Сила	Ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление	Паскаль	Па	$м^{-1} кг \cdot с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	Джоуль	Дж	$м^2 кг \cdot с^{-2}$
Мощность, поток энергии	Ватт	Вт	$м^2 кг \cdot с^{-3}$

Таблица 3

Множители и приставки для образования  
десятичных и кратных единиц

Множитель	Приставка		Множитель	Приставка	
	Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение
$10^{12}$	Тера	Т	$10^{-2}$	Санتي	с
$10^9$	Гига	Г	$10^{-3}$	Милли	м
$10^6$	Мега	М	$10^{-6}$	Микро	мк
$10^3$	Кило	к	$10^{-9}$	Нано	н
$10^{-1}$	Деци	д	$10^{-12}$	Пико	п

Таблица 4

Коэффициент динамической вязкости при температуре 20<sup>0</sup>С

Вещество	$\eta$ , кг·м <sup>-1</sup> ·с <sup>-1</sup>
Глицерин	1,48
Касторовое масло	0,87
Прованское масло	0,09
Воздух	$17,2 \cdot 10^{-3}$
Вода	$1,002 \cdot 10^{-3}$

## Рекомендательный библиографический список

### Учебники и учебные пособия

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. СПб., М.: Лань, 2009.
2. *Детлаф А.А.* Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. М.: Высшая школа, 2009.
3. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. СПб., М.: Лань, 2009.
4. *Савельев И.В.* Курс физики. Т. 2, 3. СПб.: М.: Лань, 2008.
5. *Трофимова Т.И.* Курс физики. М.: Высшая школа, 2009.
6. *Яворский Б.М.* Основы физики т.1,2. / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. М.: Наука, 2009.

### Сборники задач

7. *Рогачев Н.М.* Решение задач по курсу общей физики. СПб., М.: Лань, 2008.
8. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. СПб., М.: Лань, 2007.
9. *Трофимова Т.И.* Курс физики: задачи и решения. М.: Академия, 2009.
10. *Трофимова Т.И.* Сборник задач по курсу физики с решениями. М.: Высш. школа, 2009.
11. *Фирганг Е.В.* Руководство к решению задач по курсу общей физики. М.: Лань, 2009.
12. *Чертов А.Г.* Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. М.: Физматлит, 2009.

### Дополнительная литература

13. *Калашников Н.П.* Физика. Интернет-тестирование базовых знаний / Н.П. Калашников, Н.М. Кожевников. СПб., М.: Лань, 2009. Сайт Росаккредагенства [www.fepo.ru](http://www.fepo.ru)
14. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977.
15. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, тт. 1-5, М.: Наука, 2009.
16. *Трофимова Т.И.* Краткий курс физики. М.: Высшая школа, 2010.

## Содержание

Введение .....	3
1. Методические указания к работе с учебным материалом .....	4
2. Рекомендации к решению и оформлению задач.....	4
3. Теоретическое содержание .....	5
3.1. Действительная (реальная) и идеальная жидкости.....	5
3.2. Основные законы и соотношения гидростатики .....	8
3.3. Основные законы гидродинамики идеальной жидкости ..	12
3.4. Движение вязкой жидкости .....	16
4. Основные формулы.....	19
5. Контрольные вопросы .....	20
6. Примеры решения задач.....	21
7. Задачи для самостоятельного решения.....	24
Справочные таблицы .....	36
Рекомендательный библиографический список .....	37