Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет**

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Методические указания к лабораторным работам для студентов бакалавриата направления 21.03.02

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020**

УДК 519.25 (073)

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ. Проверка статистических гипотез: Методические указания к лабораторным работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева.* СПб, 2020. 39 с.

Приведены необходимые теоретические сведения и примеры выполнения заданий по некоторым разделам теории вероятностей и математической статистики, которые являются теоретической основой применения корреляционно-регрессионного анализа. Все решения выполнены с использованием электронных таблиц MS Excel, в том числе с применением надстройки «Пакет анализа».

Предназначены для студентов бакалавриата направления 21.03.02 «Городской кадастр», а также быть могут использованы и для студентов других направлений, изучающих статистику.

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

Рецензент канд. техн. наук *К.В. Столяров* (Телум Инк)

ВВЕДЕНИЕ

Корреляционно-регрессионный анализ является одним из самых применяемых математических методов при решении задач, возникающих при рассмотрении проблем городского кадастра. Например, такой проблемой является массовая оценка объектов. Одним из краеугольных камней, лежащих в основе корреляционно-регрессионного анализа, является математическая статистика. *Математическая статистика* является частью статистики (от лат. *status* - состояние) - науки, изучающей, обрабатывающей и анализирующей количественные данные о самых разнообразных массовых явлениях окружающей нас жизни.

Одной из основных задач математической статистики является проверка статистических гипотез.

К числу таких гипотез относятся гипотезы относительно законов распределения или значений их параметров.

В подавляющем большинстве реальных ситуаций проверяемая статистическая гипотеза является гипотезой об отсутствии того или иного эффекта:

- об отсутствии различий, например, о равенстве нулю разности средних;
- об отсутствии тех или иных эффектов, связей, соответствий, зависимостей и т.п.

В настоящей работе описано применение этих методов с использованием электронных таблиц MS Excel.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Цель: Получить понятия о проверке статистических гипотез о виде распределения, о равенстве средних значений и дисперсий двух нормально распределенных совокупностей.

1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Часто в процессе исследований требуется по выборочным данным определить закон распределения генеральной совокупности. При этом есть основания предполагать, что этот закон распределения имеет определенный вид. В других случаях закон распределения совокупности известен, и нужно оценить величину параметров. При этом предполагают, что неизвестные параметры распределения равны некоторым определенным значениям.

Пусть H_0 (нулевая гипотеза) – выдвинутая гипотеза о виде распределения или о значении параметров распределения. Вместе с гипотезой H_0 всегда рассматривается альтернативная (конкурирующая) гипотеза H_1. Гипотеза H_1 часто, но не всегда, является противоположной проверяемой гипотезе H_0.

Статистическим критерием называют случайную величину T, которая используется для проверки нулевой гипотезы.

Множество возможных значений T разбито на два непересекающихся подмножества. Одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза принимается, другое – при которых H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1. *Критической областью* называется совокупность значений критерия, при которых гипотезу отвергают. Область принятия гипотезы H_0 - совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 принимают. Критическая точка $T_{крит.}$ отделяет критическую область от области принятия гипотезы.

Уровень значимости α - достаточно малая вероятность (0.05; 0.01). Значение $T_{крит.}$ вычисляется таким образом, чтобы при справедливости гипотезы H_0 вероятность того, что значение T превзойдет значение $T_{крит}$ была равна α. *Таким образом при проверке многих статистических гипотез (но не всех), следуют правилу: если* *найденное значение* T меньше $T_{крит}$ ($T < T_{крит}$), то гипотезу H_0 принимают, в противоположном случае отвергают и принимают гипотезу H_1 .

При проверке статистических гипотез возможны четыре исхода, в том числе могут быть допущены ошибки двух родов (табл.1):

Таблица 1

Возможные результаты проверки статистической гипотезы H_0

Гипотеза H_0	*H_0 - верная гипотеза*	*H_0 -ложная гипотеза*
H_0 -отвергается	Верная гипотеза H_0 отвергается (ошибка первого рода), событие A.	Ложная гипотеза H_0 отвергается (правильное решение)
H_0 -принимается	Верная гипотеза H_0 принимается (правильное решение)	Ложная гипотеза H_0 принимается (ошибка второго рода), событие B.

Ошибка первого рода возникает, когда отвергается гипотеза H_0, хотя она верна. Уровень значимости α - это вероятность того, что допускается ошибка первого рода, т.е. $P(A)= \alpha$. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть верную гипотезу. Обычно значение α полагают равным 0.05 (5%-ный уровень значимости) или 0.01 (1%-ный уровень значимости).

Ошибка второго рода возникает, когда принимается гипотеза H_0, когда она неверна. Вероятность недопущения ошибки второго рода называется *мощностью критерия*, эта вероятность равна $1-P(B)$. Мощность критерия – вероятность того, что гипотеза H_0, будет принята, когда верна альтернативная H_1.

Результат проверки не доказывает истинность или ложность гипотезы H_0, но говорит лишь о том, что экспериментальные данные противоречат или не противоречат этой гипотезе.

На практике часто производится проверка следующих гипотез:

- о предполагаемом законе распределения неизвестного распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка (критерий согласия Пирсона χ^2 (хи–квадрат));
- о равенстве дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей (критерий Фишера);
- о равенстве двух средних нормально распределенных генеральных совокупностей (критерий Стьюдента (t–критерий).

Критерием согласия называют критерий для проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Наиболее распространен критерий согласия Пирсона χ^2 («хи–квадрат»). При использовании критерия «хи–квадрат» предполагают, что выборочные данные получены из генеральной совокупности с известным законом распределения (гипотеза H_0). Альтернативной гипотезой является H_1: выборочные данные получены из генеральной совокупности с другим законом распределения.

При проверке по этому критерию находят теоретические частоты, сравнивают их с эмпирическими частотами. Если расхождение случайно, то гипотезу H_0 принимают, иначе принимают гипотезу H_1 .

Пусть N наблюдений распределены по k разрядам, m_i – количество наблюдений в i-том разряде. Пусть известен закон распределения генеральной совокупности, из которой предположительно получена выборка, и p_i - вероятность попадания в i-ый разряд. Тогда $N \cdot p_i$ - теоретическая частота i-го разряда.

Меру расхождения между эмпирическими (фактическими) частотами и предполагаемыми теоретическими определяют как:

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k} \frac{(m_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i}, \tag{1}$$

где k – количество разрядов, в которые сведены результаты опытов; m_i – количество наблюдений в i-том разряде; p_i – теоретическая вероятность (в соответствии с предполагаемым законом распределения) i-го разряда.

Далее определяется число степеней свободы r:

$$r = k - c - 1, \tag{2}$$

где: c – число параметров теоретического распределения. Для закона распределения Пуассона и показательного закона распределения $c = 1$; для нормального, непрерывного равномерного − $c = 2$; для непрерывного дискретного − $c = 0$.

По заданным значениям α и r с помощью специальной таблицы находят $\chi^2_{крит.}$ В случае отсутствия таблиц можно использовать встроенную функцию MS Excel ХИ2ОБР, которая имеет следующий формат:

ХИ2ОБР (вероятность; число степеней свободы)

например: ХИ2ОБР(0.05; 5).

Сравнивают найденное значение χ^2 с значением $\chi^2_{крит}$.

Если $\chi^2 \le \chi^2_{крит,}$ то гипотезу H_0 о совпадении эмпирического распределения с теоретическим принимают.

В противном случае ($\chi^2 > \chi^2_{крит}$), гипотезу H_0 отвергают, принимают гипотезу H_1.

Практически m_i должны быть больше или равны 5, если в некотором интервале это условие нарушается, то интервал объединяется с соседним.

Пример 1

В результате 300 бросков кости (кубика с 6 гранями) были получены следующие результаты (табл.2):

Таблица 2

Число очков	1	2	3	4	5	6
Кол-во повторений	38	38	50	52	57	65

Проверить гипотезу о том, что кость «правильная».

Решение

Если кость «правильная», то в таблице количество повторений числа выпавших очков должно быть почти одинаково. В этом случае имеет место равномерный закон распределения числа выпавших очков, и каждый из шести возможных исходов (число выпавших очков) равновероятен, т.е. P_i=1/6 для всех i=1,2…6.

Таким образом, задача оценки «правильности» кости сводиться к проверке гипотезы H_0, состоящей в том, что выборка, приведенная в табл.2, отобрана из равномерно распределенной генеральной совокупности. Альтернативной является гипотеза H_1 – данная выборка не является равномерно распределенной, точнее отобрана из совокупности распределенной, имеющей не равномерное распределение. Все расчеты сведены в табл.3.

Получено значение χ^2 =11,320. В нашем случае r = 6-1= 5, и при α=0.05 находим значение $\chi^2_{крит}$ = 11,07. Поэтому гипотеза H_0 о равномерном распределении отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1.

Таблица 3

Xi	*mi*	P_i	*N*Pi*	*(mi-N*Pi)^2/N*Pi*	
1	38	0,1667	50	2,88	
2	38	0,1667	50	2,88	
3	50	0,1667	50	0,00	
4	52	0,1667	50	0,08	
5	57	0,1667	50	0,98	
6	65	0,1667	50	4,50	
N=	300			11,32	*Xi-квадрат*

Приходим к выводу, что кость «неправильная». На рис.1. представлено сравнение экспериментального и теоретического распределений числа выпавших очков при бросании игральной кости.

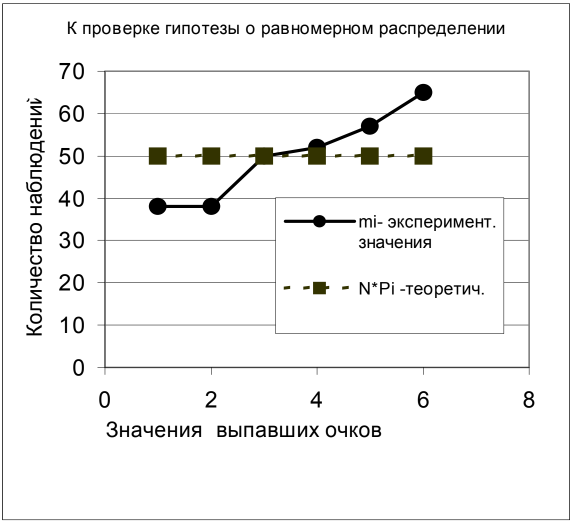

Рис. 1. Сравнение экспериментального и теоретического распределений числа выпавших очков при бросании игральной кости.

Пример 2

Проверить гипотезу о том, что распределение, представленное в таблице 4, является частным случаем нормального распределения (уровень значимости $\alpha = 0,05$)

Таблица 4

Интервал	Частота mi
[-4;-2]	1
[-2;0]	3
[0;2]	6
[2;4]	12
[4;6]	20
[6;8]	8
[8;10]	8
[10;12]	1
[12;14]	1

Решение

Построим полигон распределения (рис.2). Кривая имеет колоколообразную форму и симметрична, поэтому можно сделать предположение, что выборка получена из нормально распределенной генеральной совокупности. Выдвигаем гипотезу H_0: данное эмпирическое распределение следует нормальному закону распределения. Альтернативная гипотеза – H_1: эмпирическое распределение не следует нормальному закону распределения.

Воспользуемся результатами, полученными [4, рис.19].

Будем считать, что диапазон ячеек C67:L81 уже заполнен, т.е. уже вычислены среднее значение x_{cp}, равное 4,77, и стандартное отклонение σ, равное 3,03:

- в интервале ячеек D70:E78 указаны значения левой и правой границ интервала;
- в интервале ячеек F70:F78 – середины интервалов;
- в интервале ячеек G70:G78 - наблюдаемые значения частот m_i .

Случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если она имеет следующую плотность распределения (3).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

где m и σ – параметры распределения. Причем m - математическое ожидание, σ^2 -дисперсия случайной величины.

Оценкой параметра m генеральной совокупности является выборочное среднее $\bar{x}_{в}$, в данном случае $\bar{x}_{в} = 4{,}77$.

Оценкой параметра σ является среднее квадратическое отклонение $\sigma_{в}$, равное *3,04* .

Дальнейшие вычисления показаны на рис.2.*а* и рис.2.*б*.

Вычислим p_i - вероятность того, что случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $m = 4{,}77$ и $\sigma = 3.04$ попадает в *i*-ый интервал.

Для этого воспользуемся соотношением:

$$p_i = P(a_i \le x \le b_i) = F(b_i) - F(a_i), \tag{4}$$

где $F(x)$ – функция распределения. В MS Excel для нормального закона распределения с параметрами m и σ значение $F(x)$ можно найти, воспользовавшись встроенной функцией НОРМРАСП:

$F(x)$ = НОРМРАСП(x; m; σ; ИСТИНА).

Выполнение:

- В ячейки N70:N78 заносим значения $F(b_i)$;
- В ячейки M70:M78 заносим значения $F(a_i)$;
- В интервале O70:O78 получаем теоретические значения вероятности, вычисленные по формуле (4);

	C	D	E	F	G	K	L	M	N
67		Границы	интервал	середина		Средне	Дисперсия		
68		левая	правая	интерва	частот	относ.ч.			
69	№	a[i]	b[i]	x[i]	mi	mi*xi	mi*(xi-x c	F(a[i])	F(b[i])
70	1	-4	-2	-3.00	1	-3	60.32	0.001936	0.012893
71	2	-2	0	-1.00	3	-3	99.76	0.012893	0.058152
72	3	0	2	1.00	6	6	85.13	0.058152	0.181006
73	4	2	4	3.00	12	36	37.45	0.181006	0.400291
74	5	4	6	5.00	20	100	1.09	0.400291	0.657757
75	6	6	8	7.00	8	56	39.90	0.657757	0.856628
76	7	8	10	9.00	9	81	161.29	0.856628	0.957667
77	8	10	12	11.00	0	0	0.00	0.957667	0.991418
78	9	12	14	13.00	1	13	67.79	0.991418	0.998825
79	sum				60	286	552.73		
80	average					4.77	9.21		
81	Станд.откл.						3.035164		

Рис. 2.*а*. Проверка гипотезы о нормальности эмпирического распределения (начало).

	O	P	Q	R	S	T
67	Вероятность	Теоретич	Объединенны		Хи-квадрат	
68	теоретич.	частоты	интервалы			
69	pi=F(b[i])-F(a[i])	=N*pi	ni	=N*pi	Chi_squ	
70	0.0109565	0.657391				
71	0.0452589	2.715531				
72	0.1228544	7.371262	10	10.744	0.0515	
73	0.2192847	13.15708	12	13.157	0.1018	
74	0.2574658	15.44795	20	15.448	1.3414	
75	0.1988713	11.93228	8	11.932	1.2959	
76	0.1010394	6.062363	10	8.5318	0.2526	
77	0.0337508	2.025049				
78	0.0074073	0.444438				
79	0.99688903	59.81334	60	59.813	3.0432	наблюда
80						
81					5.9915	критичес

Рис. 2.*б*. Проверка гипотезы о нормальности эмпирического распределения (окончание).

- В интервал P70:P78 заносим теоретические значения частот, вычисленные по формуле $N \cdot p_i$.

Для визуального сравнения наблюдаемых m_i и теоретических $N \cdot p_i$ частот построим соответствующие графики – полигоны частот, по оси абсцисс отложим середины интервалов (рис.3). Заметим, что графики схожи: симметричны относительно оси, проходящей через максимум, и плавно убывают по мере удаления от максимума.

Как следует из рис.2.*б*, значения теоретических частот в ряде интервалов меньше 5. Такие интервалы обычно объединяют. Объединим интервалы 1 - 3 и 7- 9 включительно, суммируя значения наблюдаемых и теоретических частот. Найденные суммы занесем в ячейки Q72:R72 и Q76:R76.

Объединим интервалы с 7 по 9 включительно, соответствующие значения наблюдаемых и теоретических частот также суммируются, результат в ячейках Q76:R76.

Ячейки Q73:R75 заполняют обычным образом.

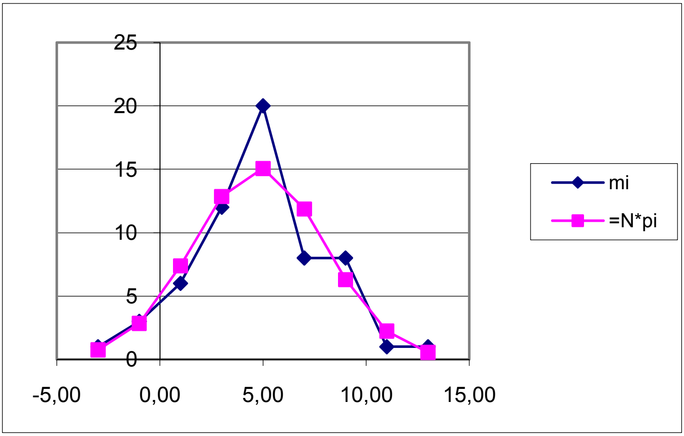

Рис. 3. Сравнение экспериментального и соответствующего нормального (теоретического) распределений

После объединения ячеек число интервалов сократилось до 5, т.е. теперь k=5.

Вычислим значение χ^2 по формуле (1). Для этого в ячейку S72 заносим формулу

=(Q72-R72)^2/R72,

копируем её в ячейки диапазона S72:S76.

Сумму чисел из ячеек S72:S76 помещаем в ячейку S79 – это искомое значение «хи–квадрат» ($\chi^2 = 3.04$.).

Определим число степеней свободы r по формуле (2). Поскольку k=5 , c=2, то r = 2.

Для $\alpha = 0{,}05$ и $r = 2$ найдем $\chi^2_{крит}$, используя встроенную функцию MS Excel ХИ2ОБР. Тогда $\chi^2_{крит}$ =ХИ2ОБР(0.05;2) = *5.99*

Поскольку найденное значение $\chi^2 < \chi^2_{крит}$, то гипотезу H_0 о соответствии распределения случайной величины x нормальному закону распределения принимаем. Согласно выборочным экспериментальным данным нет оснований отвергнуть гипотезу H_o.

2 КРИТЕРИЙ ФИШЕРА

F - критерий Фишера используют для сравнения дисперсий двух генеральных совокупностей, распределенных по нормальному закону.

По независимым выборкам объема из этих совокупностей найдены выборочные дисперсии σ_1^2 и σ_2^2. Выдвигается гипотеза H_0 - дисперсии равны, альтернативная гипотеза H_1 - дисперсии не равны.

Вычисляется $F_{набл.}$ по формуле:

$$F_{набл.} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \tag{5}$$

где σ_1^2 - большая дисперсия, σ_2^2 - меньшая дисперсия.

По заданному уровню значимости α и числам степеней свободы r_1 и r_2 (r_1 число степеней свободы числителя и r_2 число степеней свободы знаменателя) - определяем $F_{крит.}$ по таблицам или используя встроенные функции MS Excel.

Число степеней свободы числителя определяется по формуле:

$$df_1 = n_1 - 1, \tag{6}$$

где n_1- число вариант для большей дисперсии.

Число степеней свободы знаменателя определяется по формуле:

$$df_2 = n_2 - 1, \tag{7}$$

где n_2 - число вариант для меньшей дисперсии.

Если $F_{набл.} \le F_{крит.}$ (вычисленное значение критерия $F_{набл.}$ ***не*** больше критического), то принимается гипотеза H_0 (дисперсии равны), в противном случае ($F_{\text{набл.}} > F_{\text{крит.}}$) принимается гипотеза H_1 (дисперсии различны).

Пример 3

При проведении тестирования двух одинаковых приборов были проведены измерения эталона. При этом первым прибором было проведено n_1 =13 измерений, а вторым - n_2=15.

Результаты были записаны в виде отклонений от значения эталона. Требуется выяснить: одинаковой ли точностью обладают приборы.

Решение

Величина отклонений от эталонного значения для первого прибора (n_1 =13) внесена в столбец ***B*** рабочего листа книги MS Excel**,** а для второго прибора (n_2=15) результаты - в столбец ***C*** (рис.4 - рис.5).

Средние значения отклонений одинаковы и равны нулю. Следовательно, у приборов отсутствует систематическая ошибка.

Проверка точности приборов сводится к проверке совпадения дисперсий. Если дисперсии отклонений от эталонного значения статистически равны, то приборы обладают одинаковой точностью.

Выдвигается гипотеза H_0 - дисперсии выборок равны, альтернативная гипотеза H_1 - дисперсии не равны.

В результате расчета были получены соответственно следующие значения дисперсий: σ_1^2 =60,67 (ячейка B25) и σ_2^2 =20,00 (ячейка C25).

Значение критерия $F_{\text{набл.}}$ вычислим в ячейке B27 по формуле =60,67 /20,00 = 3,0333.

Для уровня значимости α=0.05; числа степеней свободы числителя df_1 =13-1=12 и числа степеней свободы знаменателя df_2 = 15-1= 14 находим $F_{\text{крит}}$ с помощью встроенной функции FРАСПОБР(). $F_{крит}$= 2,5342.

Поскольку $F_{\text{набл.}} = 3{,}0333 > F_{\text{крит.}} = 2{,}5342$ то гипотеза H_0 *отклоняется*, и принимается альтернативная гипотеза H_1 (дисперсии различны).

Следовательно, приборы имеют различную точность.

	A	B	C	D	E
1	**Критерий Фишера F-критерий)**				
2	**Сравнение двух независимых выборок**				
3	Гипотеза H_0 : **дисперсии выборок равны**				
4	альтернативная гипотеза H1: дисперсии не равны				
5	№№ измерения	Первый прибор	Второй прибор		
6		x	y		
7	1	-12	-7		
8	2	-10	-6		
9	3	-8	-5		
10	4	-6	-4		
11	5	-4	-3		
12	6	-2	-2		
13	7	0	-1		
14	8	2	0		
15	9	4	1		
16	10	6	2		
17	11	8	3		
18	12	10	4		
19	13	12	5		
20	14		6		
21	15		7		
22	Сумма	0	0		
23	Объем выборки	13	15		
24	Ср.значение	0	0		
25	Дисперсия	60,667	20		
26					
27	Fнабл=	3,03333		alfa=	0,05
28					
29	$F_{набл.} > F_{крит}$			Fкрит=	2,53424
30					
31	Гипотеза H0 отклоняется, принимаем гипотезу H1.				

Рис. 4. Сравнение двух выборочных дисперсий
(фрагмент рабочего листа MS Excel в режиме отображения данных)

	A	B	C	D
1	**Критерий Фи**			
2	**Сравнение двух**			
3	Гипотеза H_0 : д			
4	альтернативная			
5	№№ измерения	Первый прибор	Второй прибор	
6		x	y	
7	1	-12	-7	
8	2	-10	-6	
20	14		6	
21	15		7	
22	Сумма	=СУММ(B7:B19)	=СУММ(C7:C21)	
23	Объем выборки	=СЧЁТ(B7:B19)	=СЧЁТ(C7:C21)	
24	Ср.значение	=B22/B23	=C22/C23	
25	Дисперсия	=ДИСП(B7:B19)	=ДИСП(C7:C21)	
27	Fнабл=	=B25/C25		
29	alfa=	0,05		
30				
31	Fкрит=	=FРАСПОБР(B29;B23-1;C23-1)		

Рис. 5. Сравнение двух выборочных дисперсий
(фрагмент рабочего листа MS Excel в режиме отображений формул)

Средство анализа «Двухвыборочный F-тест для дисперсии» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

Средство анализа «Двухвыборочный F-тест для дисперсии» надстройки «Пакет анализа» MS Excel служит для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух выборок. Для проверки необходимо заполнить диалоговое окно, приведенное на рис.6, назначение всех полей ввода очевидно.

Результаты расчета представлены на рис.7.

Сравним полученные результаты с результатами, полученными вручную.

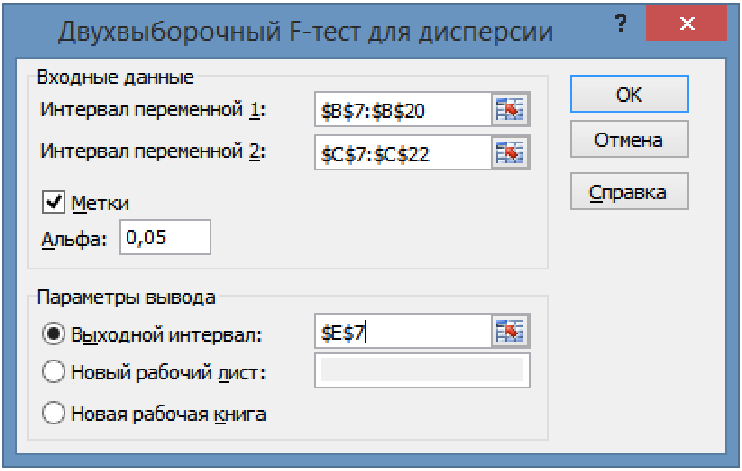

Рис. 6. Диалоговое окно средства анализа «Двухвыборочный F-тест для дисперсии» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

	D	E	F	G	H
7		Двухвыборочный F-тест для дисперсии			
8					
9			*x*	*y*	
10		Среднее	0	0	
11		Дисперсия	60,67	20,00	
12		Наблюдения	13	15	
13		df	12	14	
14		F	3,0333		
15		P(F<=f) одностороннее	0,0256		
16		F критическое одностороннее	2,5342		
17					

Рис. 7. Результат применения инструмента «Двухвыборочный F-тест для дисперсии» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

При анализе результатов следует помнить, что значение $F_{\text{набл.}}$ (3,0333), которое содержится в ячейке F14, должно быть не меньше единицы. В противоположном случае адреса ячеек с исходными данными следует поменять местами.

Значение $F_{\text{крит.}}$ (равное 2,5342) содержится в ячейке F16. Поскольку содержимое ячейки F14 больше содержимого ячейки F16, то приходим к выводу, совпадающему с выводом, полученным ранее: гипотеза H_0 *отклоняется*, и принимается альтернативная гипотеза H_1 (дисперсии различны).

Тот же вывод (даже более глубокий) можно получить, анализируя содержимое ячейки F15. Конкретно в этом тесте это значение названо «P(F<=f) одностороннее», но в других тестах подобную величину называют «p – значение» или «p - value».

Величина p – значение имеет следующий вероятностный смысл: p – значение - это вероятность допустить ошибку первого рода в случае когда верна гипотеза H_0, а наблюдаемое значение критерия принимает значение больше $F_{\text{набл.}}$. Т.е. это вероятность события $P(X > F_{\text{набл.}})$, где случайная величина X имеет F-распределение, т.е. $X \sim F(df_1, df_2)$.

Приведенное выше утверждение имеет простую геометрическую трактовку: $p-$ значение - это площадь правого хвоста функции плотности случайной величины $X \sim F(df_1, df_2)$, хвост начинается с $F_{\text{набл.}}$ (рис.8).

Вспомним геометрическую трактовку связи между $F_{\text{крит.}}$ и уровнем значимости α : площадь правого хвоста функции плотности случайной величины $X \sim F(df_1, df_2)$ равна α, хвост начинается с $F_{\text{крит.}}$ (рис. 9).

Проведем сравнение на рис.10 площади хвостов подграфиков, совместив показанные на рисунках 8 и 9. Очевидно, что будет справедливо следующее утверждение.

Неравенство $F_{\text{набл.}} > F_{\text{крит.}}$ равносильно неравенству «p – значение меньше уровня значимости α ».

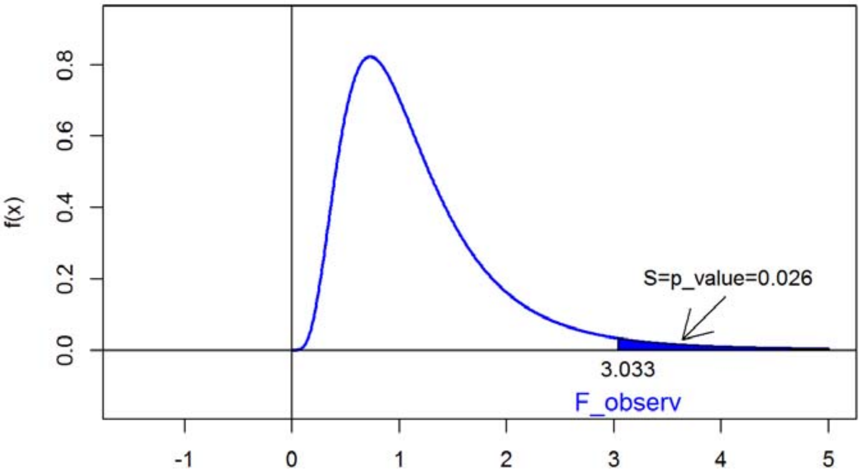

Рис. 8. Геометрический смысл величины *p* – значение и ее связь с величиной $F_{\text{набл.}}$

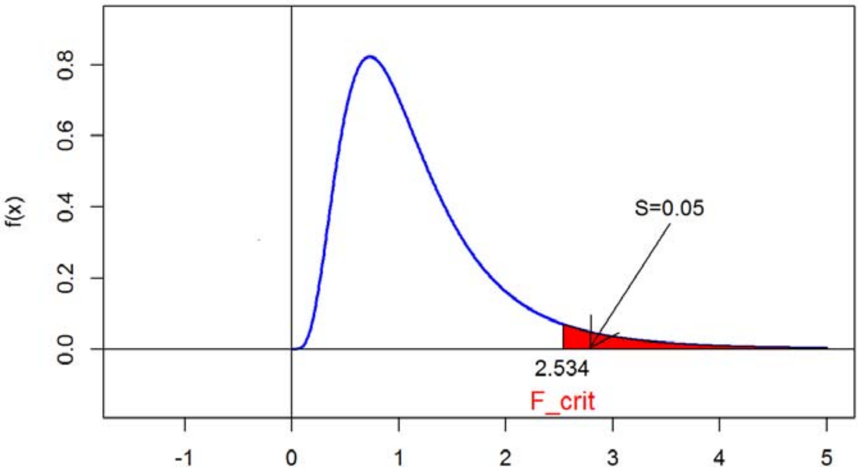

Рис. 9. Геометрический смысл величины уровня значимости α =0.05 и ее связь с величиной $F_{\text{крит.}}$

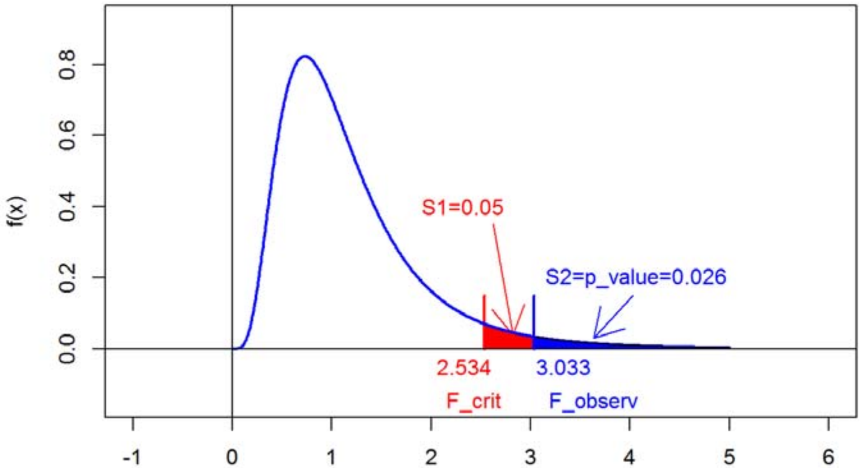

Рис. 10. Сравнение площадей хвостов подграфика.

Аналогично, справедливо утверждение: неравенство $F_{\text{набл.}} < F_{\text{крит.}}$ равносильно неравенству «p – значение больше уровня значимости α».

Приведенное выше рассуждение позволяет прийти к выводу гипотеза H_0 принимается если «p – значение больше уровня значимости α»; альтернативная гипотеза H_1 принимается если «p – значение меньше уровня значимости α».

Указанный механизм реализован в большинстве математических пакетов, в надстройке «Пакет анализа» MS Excel в том числе. Большим плюсом этого механизма является отсутствие необходимости вычисления критического значения и возможность оценки величины уровня значимости, при котором гипотеза будет подтверждена или отвергнута.

3 КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА (t- КРИТЕРИЙ)

Критерий используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок, взятых из нормально распределенных совокупностей.

Пусть заданы две генеральные совокупности ***x*** и ***y***, имеющие нормальное распределение, из них взяты выборки $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{n_2}$, т.е. n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборки соответственно. Выдвигается гипотеза H_0, что средние значения выборок равны (альтернативная гипотеза H_1 - средние значения не равны).

Значение $t_{набл}$ вычисляют по формуле:

$$t_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S}, \tag{8}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — средние арифметические выборок $\{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{n_2}$;

S - стандартная ошибка разности средних значений.

Число степеней свободы вычисляют по формуле:

$$df = n_1 + n_2 - 2. \tag{9}$$

Из таблиц для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы k определяют $t_{крит}$ (критическое значение).

Если $|t_{набл}| < t_{крит}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае принимается альтернативная гипотеза.

Стандартная ошибка разности средних значений S вычисляется различными способами в зависимости от поставленной задачи:

- сравнение двух выборок;
- сравнение двух зависимых выборок;
- сравнение более двух независимых выборок.

3.1 СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК

Требуется сравнить средние значения двух независимых выборок. Здесь возможны два варианта:

1. Дисперсии выборок равны.
2. Дисперсии выборок не равны.

Рассмотрим первый вариант (дисперсии выборок равны). В этом случае значение S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2 + \sum(y_i - \overline{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \tag{10}$$

где n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборки; $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние арифметические выборок.

Пример 4

В двух группах учащихся — экспериментальной и контрольной — применялись две различные методики обучения: экспериментальная и традиционная. После завершения обучения был проведен тест и получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; см. табл.4).

Таблица 4

Результаты эксперимента

Первая группа (экспериментальная), N_1=11 человек										
12	14	13	16	11	9	13	15	15	18	14

Вторая группа (контрольная), N_2=9 человек								
13	9	11	10	7	6	8	10	11

Имеет ли экспериментальный метод обучения преимущество по сравнению с традиционным?

Решение

Для выявления преимущества экспериментального метода обучения по сравнению с традиционным можно проверить совпадения средних оценок в двух группах. Если средние отличаются незначимо, то преимущества нет, в противном случае преимущество есть.

Гипотеза H_0: средние значения выборок равны, альтернативная гипотеза H_1 : средние значения не равны.

Решение приведено на рис.11 - 12.

Общее количество членов выборки: n_1=11, n_2=9; средние значения: $\boldsymbol{x}$=13,636; $\boldsymbol{y}$=9,444.

По формуле (10) находим стандартную ошибку разности средних значений:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\frac{60.545 + 38.222}{11 + 9 - 2}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9}\right)} = 1.053$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Критерий Стьюдента (t-критерий)**						
2							
3	**Сравнение двух независимых выборок**						
4		x	(x-xcp)^2	y	(y-ycp)^2		
5		12	2.677686	13	12.641975		
6		14	0.132231	9	0.1975309		
7		13	0.404959	11	2.4197531		
8		16	5.586777	10	0.308642		
9		11	6.950413	7	5.9753086		
10		9	21.49587	6	11.864198		
11		13	0.404959	8	2.0864198		
12		15	1.859504	10	0.308642		
13		15	1.859504	11	2.4197531		
14		18	19.04132				
15		14	0.132231				
16	Сумма	150	60.54545	85	38.222222		
17	Объем выборки	11		9			
18	Ср.значение	13.6363636		9.444444			
19	Дисперсия	6.05454545		4.777778			
20							
21	Вспомогательная проверка, чтобы выснить какой t-тест следует применять.						
22	Гипотеза Hip_0 : дисперсии выборок равны						
23	альтернативная гипотеза Hip1: дисперсии не равны						
24	Fнабл=	1.26723044		alfa=	0.05		
25							
26	$F_{набл.} < F_{крит.}$			Fкрит=	3.3471679		
27							
28	Принимаем гипотезу Hip0	=> можем использовать t-тест с равными дисперсиями.					
29							
30							
31	Гипотеза H_0 : средние значения выборок равны						
32	альтернативная гипотеза H1: средние значения не равны						
33	Используем критерий Стьюдента для проверки основной гипотезы H0.						
34							
35	S=	1.05285501		k=	18		
36	tнабл=	3.98147813		alfa=	0.05		
37							
38	$\lvert t_{набл} \rvert > t_{крит}$			tкрит=	2.1009237		
39							
40	Гипотеза H0 отклоняется, принимаем гипотезу H1.						

Рис. 11. Проверка гипотезы о совпадении двух выборочных средних (фрагмент рабочего листа MS Excel в режиме отображения данных)

Вычисляем значение $t_{набл}$

$$t_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S} = \frac{13.636 - 9.4444}{1.053} = 3.981$$

Вычислим табличное значение $t_{\text{крит}}$ с помощью встроенной функции СТЬЮДРАСПОБР(). Для этого определим число степеней свободы по формуле $k = n_1 + n_2 - 2 = 11 + 9 - 2 = 18$, и с учетом уровня значимости α =5% (или α =0,05) получим $t_{\text{крит}} = 2{,}100$.

Так как $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{крит}}$, гипотеза H_0 отклоняется, принимается гипотеза H_1. Из этого следует вывод о преимуществе экспериментального обучения.

	B	C
4	x	(x-xcp)^2
5	12	=(B5-B18)^2
13	15	=(B13-B18)^2
14	18	=(B14-B18)^2
15	14	=(B15-B18)^2
16	=СУММ(B5:B15)	=СУММ(C5:C15)
17	=СЧЁТ(B5:B15)	
18	=B16/B17	
19	=C16/(B17-1)	
24	=B19/D19	
25		
26		
27		
28	=> можем использовать t-тест с равными диспе	
35	=КОРЕНЬ((C16+E16)/(B17+D17-2)*(1/B17+1/D17))	
36	=(B18-D18)/B35	
38		

Рис. 12.*а*. Проверка гипотезы о совпадении двух выборочных средних (начало) (фрагмент рабочего листа MS Excel в режиме отображения формул)

	D	E
4	y	(y-ycp)^2
5	13	=(D5-D18)^2
13	11	=(D13-D18)^2
14		
15		
16	=СУММ(D5:D15)	=СУММ(E5:E15)
17	=СЧЁТ(D5:D15)	
18	=D16/D17	
19	=E16/(D17-1)	
24	alfa=	0.05
25		
26	Fкрит=	=FРАСПОБР(E24;B17-1;D17-1)
27		
28		
35	k=	=(B17+D17-2)
36	alfa=	0.05
38	tкрит=	=СТЬЮДРАСПОБР(E36;E35)

Рис. 12.*б*. Проверка гипотезы о совпадении двух выборочных средних (окончание) (фрагмент рабочего листа Excel в режиме отображения формул)

Средство анализа «Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

Средство анализа «Двухвыборочный *t*-тест с одинаковыми дисперсиями» служит для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух независимых нормально распределенных выборок с одинаковыми дисперсиями. Для проверки необходимо заполнить диалоговое окно, приведенное на рис.13. Результат работы представлен на рис.14. Сравните полученные результаты с результатами, полученными вручную.

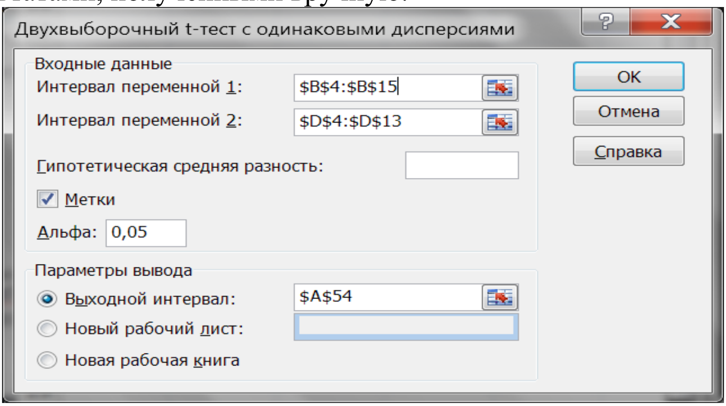

Рис. 13. Диалоговое окно средства анализа «Двухвыборочный *t*-тест с одинаковыми дисперсиями» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

	A	B	C
54	**Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями**		
55			
56		*x*	*y*
57	Среднее	13.6363636	9.444444444
58	Дисперсия	6.05454545	4.777777778
59	Наблюдения	11	9
60	Объединенная дисперсия	5.48709315	
61	Гипотетическая разность средни	0	
62	df	18	
63	t-статистика	3.98147813	
64	P(T<=t) одностороннее	0.0004376	
65	t критическое одностороннее	1.73406306	
66	P(T<=t) двухстороннее	0.0008752	
67	t критическое двухстороннее	2.10092367	

Рис. 14. Результат работы средства анализа «Двухвыборочный *t*-тест с одинаковыми дисперсиями» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

Рассмотрим второй вариант (дисперсии выборок не равны).

Требуется сравнить средние значения двух независимых выборок, если выборочные дисперсии не равны.

В этом случае значение S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)} \qquad (11)$$

где S_1^2 и S_2^2 - выборочные дисперсии. Число степеней свободы определяется довольно сложным способом. На практике, как правило, оно вычисляется с помощью статистических пакетов в явной или в неявной форме, например, в MS Excel .

Средство анализа «Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

Средство анализа «Двухвыборочный *t*-тест с различными дисперсиями» служит для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок, взятых из нормально распределенных совокупностей с различными дисперсиями. Для проверки необходимо заполнить диалоговое окно, приведенное на рис.15, назначение всех полей очевидно.

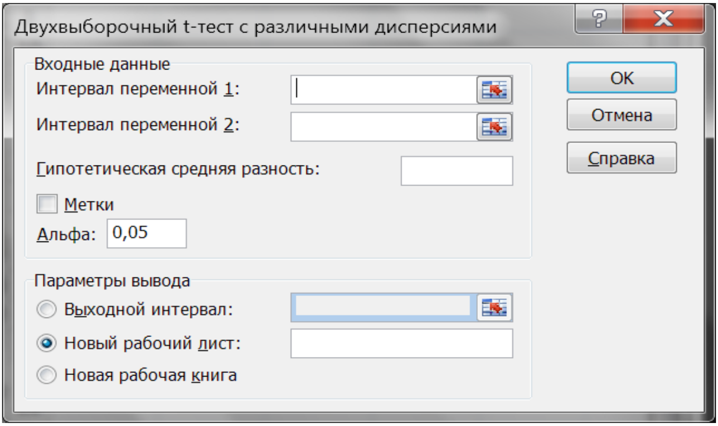

Рис. 15. Диалоговое окно средства анализа «Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

3.2. СЛУЧАЙ ДВУХ ЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК

Требуется сравнить средние значения двух зависимых выборок, полученных из нормально распределенной совокупности. Объем выборок одинаков.

В этом случае значения $t_{набл}$ вычисляют по формуле (11), которая в данном случае примет вид:

$$t_{набл} = \frac{\overline{d}}{S_d}, \tag{12}$$

где $\overline{d} = x_i - y_i$ — разности между соответствующими значениями переменной $\boldsymbol{x}$ и переменной y;

$\overline{d}$ - среднее значение этих разностей;

S_d - стандартная ошибка разности средних значений.

S_d вычисляется по формуле:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^{\,2} - \frac{\left[\sum d_i\right]^2}{n}}{n \cdot (n-1)}}. \tag{13}$$

Число степеней свободы k определяется по формуле $k = n - 1$, где n - объем выборки.

Рассмотрим пример использования *t*-критерия Стьюдента для связанных и, очевидно, равных по численности выборок.

Пример 5

Исследовали влияния тренинга на частоту сердечных сокращений (ЧСС) у группы пациентов, страдающих тахикардией. В первом случае пациенты принимали традиционные лекарства, тренинг не проводился, величина ЧСС обозначена через X (рис.16). В другом случае эти же пациенты принимали традиционные лекарства после проведения сеанса тренинга, величина ЧСС обозначена через *Y*. Требуется оценить эффективность проведения сеанса тренинга на ЧСС.

Решение

В столбце **B** (рис.16) содержатся значения $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ ЧСС после приема лекарств у пациентов без тренинга, в столбце **C** $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ ЧСС при приеме лекарств после сеанса тренинга (n =10). Поскольку группа пациентов одна и та же, в данном примере применима методика для связанных и равных по численности выборок.

Вначале произведем расчет $\bar{d}$ (ячейка D20): $\bar{d} = 2.1$

Затем по формуле (13), получим:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^{\,2} - \frac{\left[\sum d_i\right]^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{103 - \frac{[21]^2}{10}}{10 \cdot (10-1)}} = 0.809$$

Далее следует применить формулу (12). Получим:

$$t_{набл} = \frac{\bar{d}}{S_d} = \frac{2.1}{0.809} = 2.596$$

Число степеней свободы: $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$. С помощью встроенной функции находим $t_{\text{крит}}$ =СТЬЮДРАСПОБР(2*D23;D22). При вычислении $t_{\text{крит}}$ следует учесть, что в данной задаче следует рассматривать одностороннюю критическую область.

Множитель, равный 2, перед значением уровня значимости добавлен в силу конструктивной особенности этой функции $t_{\text{крит}}$ =1,83.

	A	B	C	D	E	F
1	**Критерий Стьюдента (t-критерий)**					
2						
3	**Сравнение двух зависимых выборок**					
4	**Гипотеза H_0 :** средние значения выборок равны					
5	**альтернативная гипотеза H1: среднее Y меньше среднег**					
6						
7	**Пациенты**	**x**	**y**	**d**	**(d)^2**	
8	Иванов	**80**	**76**	**4**	**16**	
9	Новиков	**92**	**92**	**0**	**0**	
10	Сидоров	**80**	**79**	**1**	**1**	
11	Пирогов	**89**	**85**	**4**	**16**	
12	Агапов	**87**	**80**	**7**	**49**	
13	Суворов	**86**	**86**	**0**	**0**	
14	Рыжиков	**85**	**85**	**0**	**0**	
15	Серов	**89**	**90**	**-1**	**1**	
16	Топоров	**90**	**86**	**4**	**16**	
17	Быстров	**92**	**90**	**2**	**4**	
18	**Сумма**	**870**	**849**	**21**	**103**	
19	**Объем выборк**	**10**	**10**	**10**		
20	**Ср.значение**	**87**	**84.9**	**2.1**		
21						
22	**S=**	**0.808977**	**k=**	**9**		
23	**tнабл=**	**2.59587**	**alfa=**	**0.05**		
24						
25	$\lvert t_{\text{набл}} \rvert > t_{\text{крит}}$		**tкрит=**	**1.83**		
26						
27	**Гипотеза H0 отклоняется, принимаем гипотезу H1.**					

Рис. 16. Проверка гипотезы о совпадении двух выборочных средних в случае двух зависимых выборок

Так как $t_{набл} = 2.596$, то возможно принять альтернативную гипотезу (H_1) о достоверном уменьшении ЧСС у пациентов группы Y. Отсюда можно сделать вывод об эффективности тренинга перед приемом лекарств.

В терминах проверки статистических гипотез полученный результат будет звучать так: на 5% уровне гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1 .

Средство анализа «Парный двухвыборочный t-тест для средних» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

Это средство анализа служит для проверки гипотезы о равенстве средних парных наблюдений, когда наблюдения собраны в пары, и нужно исследовать разницу между ними.

Для проверки необходимо заполнить диалоговое окно, приведенное на рис.17., назначение всех полей очевидно. Результат работы представлен на рис.18. Сравните полученные результаты с результатами, полученными вручную.

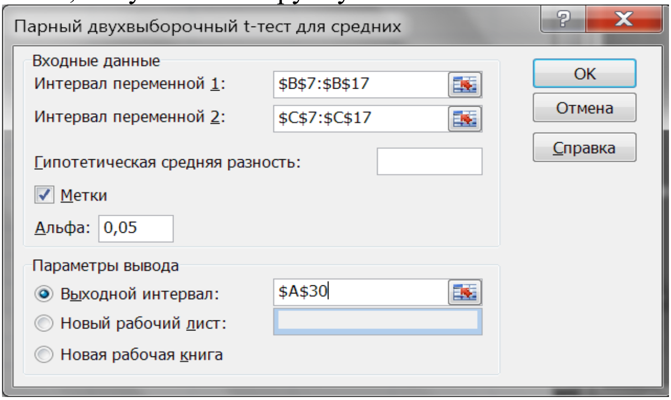

Рис. 17. Диалоговое окно средства анализа «Парный двухвыборочный *t*-тест для средних» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

	A	B	C
30	**Парный двухвыборочный t-тест для средних**		
31			
32		***x***	***y***
33	**Среднее**	**87**	**84.9**
34	**Дисперсия**	**18.8888889**	**26.98889**
35	**Наблюдения**	**10**	**10**
36	**Корреляция Пирсона**	**0.87103388**	
37	**Гипотетическая разность средних**	**0**	
38	**df**	**9**	
39	**t-статистика**	**2.59586978**	
40	**P(T<=t) одностороннее**	**0.01446678**	
41	**t критическое одностороннее**	**1.83311386**	
42	**P(T<=t) двухстороннее**	**0.02893356**	
43	**t критическое двухстороннее**	**2.26215889**	

Рис. 18. Результат работы средства анализа «Парный двухвыборочный *t*-тест для средних» надстройки «Пакет анализа» MS Excel

ЗАДАНИЕ

ЗАДАЧА 1

Проверка гипотезы о согласии выборочных данных с нормальным законом распределения. Имеется выборка объема *n* из непрерывно распределенной генеральной совокупности.

Требуется проверить гипотезу, состоящую в том, что выборочные данные получены из нормально распределенной генеральной совокупности.

Варианты заданий взять из лабораторной работы [4].

Решение задачи 1 приведено выше (см. пример 2) .

ЗАДАЧА 2

Текст задачи в зависимости от варианта приведен ниже.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ 2

В рабочей книге MS Excel *Лечебницы.xls* содержатся статистические данные, связанные с работой городских и загородных лечебниц, собранные Отделом здравоохранения штата Нью-Мексико.

Фрагмент этой книги приведен на рис.19.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Койки**	**Лечебные дни**	**Всего дней**	**Доход**	**Зарплаты**	**Расходы**	**Расположение**
2	244	128	385	23521	5230	5334	городская
3	59	155	203	9160	2459	493	загородная
51	60	48	213	10644	2820	1154	городская
52	54	119	144	7556	2088	245	загородная
53	120	217	327	20182	4432	6274	городская

Рис. 19. Фрагмент рабочего листа Excel с исходными данными для задачи 2

Выяснить, есть ли разница между доходами городских и загородных лечебниц.

Решение

Выдвигаем гипотезу H_0: средние значения доходов городских и загородных лечебниц равны, альтернативная гипотеза H_1 : доходы не равны. Чтобы проверить эту гипотезу с помощью t-критерия, необходимо выполнить ряд операций:

1. Разделить всю выборку на две части: для городских и для загородных лечебниц. Считать эти выборки самостоятельными;
2. Выяснить, имеют ли эти выборки одинаковую дисперсию, если «да», то перейти к пункту 3, в противном случае перейти к пункту 4;
3. Применить двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями;
4. Применить двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.

<u>*Пункт 1.*</u> Для разделения выборки воспользоваться командой *Данные* $\rightarrow$ *Сортировка*. Результат приведен на рис.20. В интервале строк 59:76 содержатся данные, относящиеся к городским лечебницам. В интервале строк 77:110 - данные, относящиеся к загородным лечебницам.

	A	B	C	D	E	F	G
58	**Койки**	**Лечебные дни**	**Всего дней**	**Доход**	**Зарплаты**	**Расходы**	**Расположение**
59	244	128	385	23521	5230	5334	городская
74	135	157	471	24274	7485	1344	городская
75	60	48	213	10644	2820	1154	городская
76	120	217	327	20182	4432	6274	городская
77	59	155	203	9160	2459	493	загородная
108	78	154	203	9327	3672	1242	загородная
109	83	224	390	12362	3995	1484	загородная
110	54	119	144	7556	2088	245	загородная

Рис. 20. Фрагмент рабочего листа Excel с данными для задачи 2 после сортировки

<u>*Пункт 2.*</u> Для проверки предположения, что эти выборки имеют одинаковую дисперсию, воспользуемся критерием Фишера.

Выдвигаем гипотезу H_0: дисперсии выборок равны, альтернативная гипотеза H_1: дисперсии не равны.

Воспользуемся надстройкой MS Excel «Пакет анализа» «Двухвыборочный F-тест для дисперсии». Результат расчета приведен на рис.21.

	A	B	C
113	Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
114		*Переменная 1*	*Переменная 2*
115	Среднее	16821.55556	12827.61765
116	Дисперсия	50334522.38	43541606.43
117	Наблюдения	18	34
118	df	17	33
119	F	1.156009769	
120	P(F<=f) одностороннее	0.34915504	
121	F критическое одностороннее	1.943000427	

Рис. 21. Фрагмент рабочего листа MS Excel с данными для проверки равенства дисперсий

Поскольку $F_{\text{набл.}} \le F_{\text{крит.}}$ (вычисленное значение критерия $F_{\text{набл.}}$ ***не больше*** критического), то принимается гипотеза H_0 (дисперсии выборок равны). Отсюда следует, что можно применить двухвыборочный *t*-тест с одинаковыми дисперсиями.

Выдвигаем гипотезу H_0: средние арифметические значения выборок равны, альтернативная гипотеза H_1: эти значения не равны.

Воспользуемся надстройкой MS Excel «Пакет анализа» «Двухвыборочный *t*-тест с одинаковыми дисперсиями»; результат работы приведен на рис. 22.

	A	B	C
124	Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
125		*Переменная 1*	*Переменная 2*
126	Среднее	16821.55556	12827.61765
127	Дисперсия	50334522.38	43541606.43
128	Наблюдения	18	34
129	Объединенная дисперсия	45851197.85	
130	Гипотетическая разность средни	0	
131	df	50	
132	t-статистика	2.023485074	
133	P(T<=t) одностороннее	0.024192394	
134	t критическое одностороннее	1.675905423	
135	P(T<=t) двухстороннее	0.048384789	
136	t критическое двухстороннее	2.008559932	

Рис. 22. Фрагмент рабочего листа MS Excel с данными для проверки равенства средних

В качестве $t_{\text{крит}}$ следует рассматривать двустороннее значение. Так как $t_{набл} = 2.02$, $t_{\text{крит}} = 2.008$, то $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{крит}}$, следовательно, гипотеза H_0 отклоняется, гипотеза H_1 - принимается. Из этого делаем вывод о том, что средние значения доходов городских и загородных лечебниц различны.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

В рабочей книге MS Excel *Лечебницы.xls* содержатся статистические данные о работе городских и загородных лечебниц, собранные Отделом здравоохранения штата Нью-Мексико. Определите, есть ли статистически значимая разница между количеством коек в загородных и городских лечебницах.

Вариант 2

В рабочей книге MS Excel *Лечебницы.xls* содержатся статистические данные о работе городских и загородных лечебниц, собранные Отделом здравоохранения штата Нью-Мексико. Верно ли утверждение, что загородные лечебницы используются реже, чем городские?

Указание. В качестве характеристики использования лечебницы ввести переменную «Дней_на_койку», равную отношению количества «Лечебные дни» к значению «Койки» для загородных и городских лечебниц.

Вариант 3

В рабочей книге MS Excel *Лечебницы.xls* содержатся статистические данные о работе городских и загородных лечебниц, собранные Отделом здравоохранения штата Нью-Мексико.

Верно ли утверждение, что загородные лечебницы имеют более низкий объем заработной платы, чем городские?

Вариант 4

В рабочей книге MS Excel *Лечебницы.xls* содержатся статистические данные о работе городских и загородных лечебниц, собранные Отделом здравоохранения штата Нью-Мексико.

Верно ли утверждение, что объем расходов в загородных лечебницах ниже, чем в городских?

Указание. В качестве характеристики объем расходов с учетом разницы в размерах лечебницы ввести переменную «Расход_на_койку», равную отношению количеству «Расходы» к значению «Койки» для загородных и городских лечебниц.

<u>Вариант 5</u>

В рабочей книге MS Excel *ПреподКолледж.xls* содержатся данные о заработной плате преподавателей колледжа. Верно ли утверждение, что преподаватели–женщины получают в среднем меньшую зарплату по сравнению с преподавателями-мужчинами?

<u>Вариант 6</u>

В рабочей книге MS Excel *ПреподКолледж.xls* содержатся данные о заработной плате преподавателей колледжа. Верно ли утверждение, что при поступлении на работу преподаватели со степенью получают в среднем большую зарплату, чем преподаватели без степени?

<u>Вариант 7</u>

В рабочей книге MS Excel *ПреподКолледж.xls* содержатся данные о заработной плате преподавателей колледжа. Верно ли утверждение, что поступающие на работу преподаватели со степенью имеют в среднем больший возраст по сравнению с поступающими на работу преподавателями без степени?

<u>Вариант 8</u>

Рабочая книга MS Excel *ПреподЗатраты.xls* содержит сведения о заработной плате учителей и затратах в общественных школах в пересчете на одного ученика. Верно ли утверждение, что средняя зарплата учителя в северных районах отличается от средней зарплаты учителя в остальных районах ?

<u>Вариант 9</u>

Рабочая книга MS Excel *ПреподЗатраты.xls* содержит сведения о заработной плате учителей и затратах в общественных школах в пересчете на одного ученика. Верно ли утверждение, что средние затраты в общественных школах в пересчете на одного ученика в южных районах отличаются от средних затрат в остальных районах?

<u>Вариант 10</u>

Рабочая книга MS Excel *ПреподЗатраты.xls* содержит данные о заработной плате учителей и затратах в общественных школах в пересчете на одного ученика. Верно ли утверждение, что средняя зарплата учителя в западных районах отличается от средней зарплаты учителя в остальных районах?

Вариант 11

Рабочая книга MS Excel *ПреподЗатраты.xls* содержит данные о заработной плате учителей и затратах в общественных школах в пересчете на одного ученика. Верно ли утверждение, что средние затраты в общественных школах в пересчете на одного ученика в западных районах отличаются от средних затрат в остальных районах?

Вариант 12

В 2007 году распределение спортсменов среди спортивных команд (драфт) было организовано с помощью лотереи: 366 возможных дат рождения спортсменов были помещены во вращающийся барабан и даты были выбраны случайным образом последовательно одна за другой. Первая выбранная дата получила номер 1, вторая – 2 и т.д. В рабочей книге MS Excel *Драфт.xls* содержатся данные о полученных таким образом номерах драфта. Верно ли что утверждение, спортсмены, родившиеся во второй половине года, в среднем имеют более низкие значения драфта, чем спортсмены, родившиеся в первой половине года?

Вариант 13

В 2007 году распределение спортсменов среди спортивных команд (драфт) было организовано с помощью лотереи: 366 возможных дат рождения спортсменов были помещены во вращающийся барабан, и даты были выбраны случайным образом последовательно одна за другой. Первая выбранная дата получила номер 1, вторая – 2 и т.д. В рабочей книге MS Excel *Драфт.xls* содержатся данные о полученных таким образом номерах драфта. Верно ли что утверждение, спортсмены, родившиеся во второй половине месяца в среднем имеют более низкие значения драфта, чем спортсмены, родившиеся в первой половине месяца?

Вариант 14

Рабочая книга MS Excel *Кредиты.xls* содержит данные об отказах в выдаче кредита для 20 кредитных учреждений в зависимости от расы получателя кредита и уровня его дохода. Предполагается, что кредитные учреждения гораздо чаще отказывают представителям национальных меньшинств. Проверьте обоснованность этого утверждения.

Вариант 15

Рабочая книга MS Excel *Кредиты.xls* содержит сведения об отказах в выдаче кредита для 20 кредитных учреждений в зависимости от расы получателя кредита и уровня его дохода. Предполагается, что кредитные учреждения гораздо реже отказывают клиентам с высоким уровнем доходов. Проверьте обоснованность этого утверждения.

Вариант 16

Рабочая книга MS Excel *Кредиты.xls* содержит данные об отказах в выдаче кредита для 20 кредитных учреждений в зависимости от расы получателя кредита и уровня его дохода. Есть ли основание предполагать, что для представителей национальных меньшинств не существует дискриминации?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика, изд.9. М.: Высшая школа, 2003, с.480.
2. *Господариков А.П.* Математический практикум. Ч.5. вероятностей и математическая статистика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория поля. СПб: СПГГИ(ТУ), 2003, с.187
3. *Бер К., Кэйри П.* Анализ данных с помощью Microsoft Excel. М.: Вильямс, 2004, с. 560.
4. *Беляев В.В*. Экономико-математические методы и моделирование. Описательная статистика / В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева. Методические указания для выполнения лабораторных работ. СПб: РИЦ Горного университета, 2020, с. 35

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Методические указания к лабораторным работам для студентов бакалавриата направления 21.03.02

Сост. *В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой информатики и компьютерных технологий

Ответственный за выпуск *В.В. Беляев*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 03.11.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,3. Усл.кр.-отт. 2,3. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 75 экз. Заказ 820.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2