Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов бакалавриата направлений
12.03.01, 15.03.04, 23.03.01 и 27.03.03*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 517.1+517.2(073)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Л.В. Бакеева, Е.Г. Булдакова*. СПб, 2021. 37 с.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Методические указания содержат основные теоретические сведения теории вероятностей, примеры, задания для работы на практических занятиях.

Методические указания могут быть использованы на практических занятиях для студентов бакалавриата направлений 12.03.01 «Приборостроение», 15.03.04 «Машиностроение», 23.03.01 «Технология транспортных процессов» и 27.03.03 «Системный анализ и управление» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент д.ф.-м. наук *С.И. Перегудин* (СПбГУ)

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает общие закономерности случайных явлений массового характера, обладающие статистической устойчивостью частот, независимо от их конкретной природы. Теория вероятностей использует методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления, знание которых позволяют предвидеть, как эти события будут протекать в реальном опыте. Изучение различного рода случайных явлений является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадёжной продукции и т.п. Методы теории вероятностей и математической статистики находят всё большее применение, например, к анализу ошибок разного рода измерений, а также в физике, биологии, экологии, социологии, в телефонии и процессах обслуживания и т.д.

Методические указания имеют следующую структуру. В начале каждого параграфа дается краткое теоретическое введение, содержащее основные определения, формулировки теорем и необходимые формулы. Далее приводятся примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения (с ответами).

Цель предлагаемых методических указаний – помочь студенту приобрести навыки применения методов теории вероятностей к решению прикладных задач; дать обучающимся некоторые методические рекомендации, разъясняющие подход к решению задач; активизировать самостоятельную работу обучающихся на практических занятиях.

Настоящие методические указания рекомендуются в помощь студентам при изучении дисциплины «Теории вероятностей и математическая статистика», а также преподавателям – при подготовке к практическим занятиям.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Наблюдаемые нами события могут быть трех видов: достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется **достоверным**, если в результате данного опыта оно обязательно произойдет. Событие **невозможное**, если в результате данного испытания оно произойти не может.

Событие называется **случайным**, если в результате данного опыта оно может либо произойти, либо не произойти.

Два события A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Два события A и B называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает возможность появления другого.

Группа событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ называется **группой несовместных событий**, если события, входящие в группу, попарно несовместны.

Группа событий называется **группой совместных событий**, если совместны хотя бы два события из этой группы.

События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называют **единственно возможными**, если при испытании обязательно произойдет только одно из этих событий.

События $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют **полную группу событий**, если они являются единственно возможными и несовместными исходами некоторого испытания.

События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называются **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно из этих событий является более возможным, чем другие.

Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность. Наиболее широкое распространение получили определения вероятности события: классическое, геометрическое и статистическое.

Классическое определение вероятности связано с понятием **благоприятствующего исхода**. Исход называется благоприятствующим данному событию, если его появление влечет за собой наступление этого события.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу равновозможных и несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m – число благоприятствующих событию A исходов;
n – общее число возможных исходов.

Из определения вероятности события следуют её свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице: $P(A) = \frac{m}{m} = 1$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

3. Вероятность случайного события выражается положительным числом, которое меньше единицы. Так как для случайного события $0 < m < n$, то $0 < \frac{m}{n} < 1$, т.е. $0 < P(A) < 1$.

Пример 1.1. Маршрутное такси приходит на остановку с интервалом в 15 минут. Какова вероятность уехать в течение 3 минут?

Решение. По условию $n = 15$, $m = 3$, тогда $P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{1}{5}$.

Пример 1.2. Автобус, курсирующий по кольцу, на котором 10 остановок в какой-то момент сломался. Найти вероятность того, что автобус остановился, достигнув остановки №7, не доехав до остановки №1.

Решение. По условию $n = 10$, $m = 4$ (4 промежутка между остановками №7 и №1, всего 10 промежутков), тогда $P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Ответ. $0{,}4$.

Классическое определение вероятности дает возможность рассматривать лишь события, которые распадаются на конечное число равновероятных исходов. Это недостаток классического определения вероятности. Рассмотрим понятие вероятности события для случаев с бесконечным множеством исходов испытания.

Пусть на плоскости имеется область G и некоторая область g в ней. Их площади равны соответственно S_G и S_g. В область G бросается наугад точка. Вероятность того, что точка окажется в области g принимается равной $P = \dfrac{S_G}{Sg}$. Вероятность, определенная по такой схеме, называется геометрической.

Статистическое определение вероятности связано с понятием относительной частоты появления события A в опытах. Относительная частота появления события A вычисляется по формуле:

$$P^*(A) = \frac{m_1}{n_1}, \tag{1.2}$$

где m_1 – число появлений события A в серии из n_1 опытов (испытаний).

Вероятностью события A называется число относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота $P^*(A)$ при неограниченном увеличении числа опытов.

В практических задачах за вероятность события A принимается относительная частота $P^*(A)$ при достаточно большом числе испытаний.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часто при вычислении вероятности события с использованием формулы (1.1) применяют правила суммы и произведения, а также формулы комбинаторики, с использованием которых находят число благоприятствующих исходов и общее число возможных исходов.

Правило суммы. Если объект X можно выбрать n способами, а объект Y можно выбрать m способами, причём эти способы выбора несовместны, то объект «X ***или*** Y» можно выбрать $n+m$ способами.

Несовместность способов выбора означает, что ни один способ выбора объекта X не совпадает ни с одним способом выбора объекта Y.

Правило произведения. Пусть объект X может быть выбран n способами и после каждого такого выбора объект Y может быть выбран m способами. Тогда пара «X ***и*** Y» может быть выбрана $n \cdot m$ способами.

Пример 2.1. Из села Ивановское в село Матвеевское ведут три дороги, а из села Матвеевское в село Першино – четыре дороги. Сколькими способами можно попасть из села Ивановское в село Першино через Матвеевское?

Решение. Для проезда из села Ивановское в Матвеевское можно выбрать одну из трех дорог; после этого для проезда из Матвеевского в Першино можно выбрать одну из четырех дорог. Каждый вариант первого выбора может сочетаться с каждым вариантом второго выбора, потому по правилу произведения общее количество вариантов равно: $3 \cdot 4 = 12$.

Ответ. 12.

Пример 2.2. В области есть три города A, B и C. Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город C – 4 дороги. Построили еще один город – D и несколько новых дорог – две из A в D и две из D в C. Сколькими способами можно теперь добраться из города A в город C?

Решение. Выделим два случая: путь проходит через город B или через город D. В каждом из случаев по правилу произведения легко найти количество возможных маршрутов: в первом – 24, во втором – 4. Складывая, получаем общее количество маршрутов – 28.

Ответ. 28.

2.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Размещениями из n различных элементов по m элементов ($m \le n$) A_n^m называются упорядоченные выборки, объемом m элементов, отобранные из n элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком расположения элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующие размещения: ab, ac, bc ba, cb, ca.

Число размещений из n элементов по m элементов определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2.1)$$

Пример 2.3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение. Т.к. все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются номером), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где $n = 9$, $m = 4$.

Получим $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

*Ответ.*3024.

Если размещения из n элементов взяты по n (т.е. отличаются только порядком расположения элементов), то такие размещения называются **перестановками** – P_n.

Перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$. Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n! \qquad (2.2)$$

Пример 2.4. В автосервис одновременно приехали 4 машины для ремонта. Сколько существует способов выстроить их в очередь для обслуживания?

Решение. Искомое число способов равно 24, т.к. размещаем 4 машины в очередь из 4-х приехавших в автосервис: $P_4 = 4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

*Ответ.*24.

Пример 2.5. В купе железнодорожного вагона имеются два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров 4 желают сидеть по ходу поезда, 3 против движения, а остальным безразлично, где сидеть. Найти число способов размещения пассажиров.

Решение. Один человек может сесть на любое из 10-ти мест. Второй сядет на любое из оставшихся 9-ти, т.е. 90 вариантов. Третий на любое из 8-ми оставшихся – 720 вариантов. И так далее. В итоге получаем всего $10!$, что дает 3628800 вариантов. Но для решения этой задачи такой ответ не совсем верный, потому что в задаче 4 из 10 принципиально желают сидеть по ходу движения поезда. Поэтому, справедливы следующие рассуждения. На 5-ти местах 4 человека разместятся $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ вариантами. Три человека на 5-ти местах – $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ вариантов. Остальным безразлично, но $3! = 6$ вариантов. Перемножим все полученные варианты. $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$.

Ответ. 43200.

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов C_n^m называются неупорядоченные выборки объемом m элементов из n элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad (2.3)$$

Отметим особенность формулы (2.3): $C_n^m = C_n^{n-m}$. Этим свойством удобно пользоваться, когда $m > \frac{n}{2}$.

Пример 2.6. В полуфинале первенства по автогонкам участвует 20 команд. В финал выходят лишь три команды. Сколькими способами можно определить эту тройку?

Решение. В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки, вышедшие в финал, являются сочетаниями из 20 по 3.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140.$$

Ответ. 1140.

Пример 2.7. (Задача о выборке).

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение: Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т.е. C_N^m. Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $m-k$ деталей должны быть нестандартными; взять же $m-k$ нестандартных деталей из $N-n$ нестандартных можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$.

Тогда вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных равна: $P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ (гипергеометрическая формула).

Для запоминания этой формулы, которая находит применение при выборочном контроле, можно построить графовую схему (рис. 1):

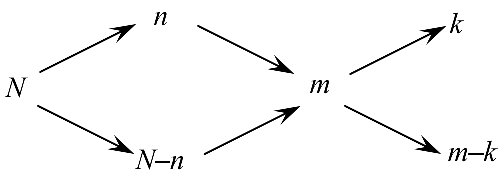

Рис. 1. Схема к задаче о выборке

Например, в ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 без брака. Сборщик наудачу извлекает три детали найти вероятность того, что одна их них окажется бракованной. Схема будет иметь вид (рис.2):

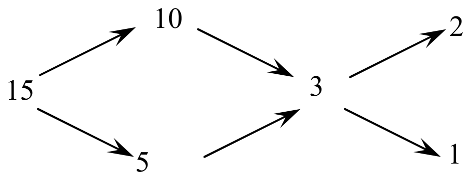

Рис. 2. Схема к задаче о выборке

Формула для вычисления вероятности: $P = \dfrac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{1}}{C_{15}^{3}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.Из города A в город B ведут 5 дорог, а из B в C -3 дороги. Сколько существует путей из A в C, проходящих через B?

Ответ. 15.

2. Из Москвы до Новосибирска можно добраться поездом и самолетом; из Новосибирска в Томск - поездом, самолетом, автобусом, пароходом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Москва - Новосибирск-Томск?

Ответ. 8.

3. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить из 30 букв и 10 цифр?

Ответ. $9 \cdot 10^6$.

4. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 57. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

*Ответ.*20.

5. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Ответ. 840.

6. Сколькими способами можно распределить 10 специалистов по четырем цехам, чтобы в них попало соответственно 1, 2, 3, 4 специалиста?

Ответ. 12600.

7. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой – 6 мужчинам, по третьей – 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Ответ. 1680.

8. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

Ответ. 60.

9.Три автомашины №1,№2,№3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой машины позволяет взять товар сразу для всех магазинов, и если две машины сразу в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину №1?

Ответ. 3^6, $6!$.

10. Сколькими способами можно сформировать состав из 15 вагонов, если на первых 4 местах стоят почтово-багажные вагоны, затем 8 купейных вагонов, и в конце – плацкартные?

1).если перестановка одинаковых вагонов между собой не считается за дополнительный вариант комбинации;

2) если перестановки одинаковых вагонов между собой учитывается.

Ответ. 96; $4!\cdot 8!\cdot 3!$.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

1. Маршрутное такси ездит с интервалом в 5 минут. Какова вероятность уехать в течение 7 минут?

Ответ. 1.

2. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором поочередно 1 минуту горит зелёный свет и 0,5 минуты красный. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Найти вероятность того, что

1) он проедет перекрёсток без остановки;

2) автомобилю придется затормозить у перекрестка.

Ответ. $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$.

3. Через точку пересечения маршрутов в горловине станции Б пропускается 20 поездов в сутки. Каждый поезд занимает маршрут 5 минут. Определить вероятность занятия маршрута передвижением.

Ответ. $\frac{5}{72}$.

4. По графику на участке X проложено 100 ниток для грузовых поездов. В среднем в сутки с этого участка прибывает 50 разборочных и 20 транзитных грузовых поездов. Определить вероятность прибытия разборочного поезда или транзитного поезда по какой-либо нитке графика.

Ответ. 0,7.

5. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Ответ. $\frac{2}{9}$.

6. На сортировочном пути в ожидании подачи на подъездной путь стоят (без подборки) 10 вагонов для 10 различных грузовых пунктов. Определить вероятность того, что вагоны стоят в нужном для подачи порядке.

Ответ. $\frac{1}{10!}$.

7. Число пассажиров мужчин и женщин, отправляемых со станции N пассажирским поездом, одинаково. Определить вероятность того, что в купе поезда будут либо одни мужчины, либо одни женщины.

Ответ. $2C_{n/2}^{4} \big/ C_{n}^{4}$.

Указание: в задачах 8 – 10 использовать определение геометрической вероятности.

8. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение светового дня (10 часов). Время стоянки первого парохода один час, второго – два часа. Найти вероятность того, что одному из них придётся ожидать освобождения причала.

Ответ. 0,725.

9. После сильного ливня на перегоне между 40-м и 70-м км произошел размыв железнодорожного полотна. Какова вероятность того, что размыв произошел между 50-м и 55-м километрами пути?

Ответ. $\frac{1}{6}$.

10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится 10 мин., другое – t мин. Определить вероятность того, что:

а) события «перекрываются» по времени;

б) события «не перекрываются» по времени, если $T_1 = 1100$, $T_2 = 1300$, $t = 15$.

Ответ. 0,197; 0,803.

2.2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ И СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ И ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Суммой $A+B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении либо события A, либо события B, либо обоих этих событий вместе (рис.3).

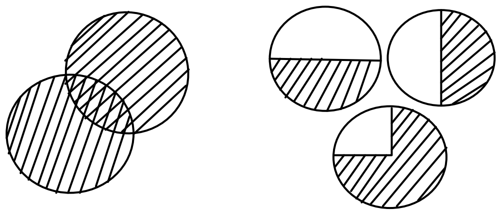

Рис. 3. Сумма событий

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{2.4}$$

Теорема. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) \tag{2.5}$$

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \dots A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1 \tag{2.6}$$

Пример 2.8. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение. События A - «в автобусе меньше 15 пассажиров» и B - «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма - событие $A+B$ - «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Тогда, используя данные задачи, получим: $0{,}94=0{,}56+P(B)$, следовательно, $P(B)=0{,}94-0{,}56=0{,}38$.

Ответ. 0,38.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B) \qquad (2.7)$$

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении и события A, и события B (рис. 4).

Пусть события A и B – зависимые события. **Условной вероятностью** $P_A(B)$ события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Событие B называют **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B.

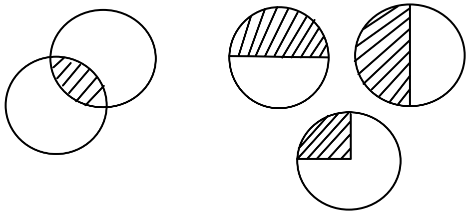

Рис. 4. Произведение событий

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \qquad (2.8)$$

В частности, для независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.9}$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 2.9. В гараже автобазы три диспетчера. Каждый из них занят с водителем с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три диспетчера заняты одновременно (водители заходят независимо друг от друга).

Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три диспетчера заняты равна $(0{,}3)^3 = 0{,}027$.

Ответ. 0,027.

Пример 2.10. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Решение: Введем обозначение событий. Пусть A – первым отобран мужчина, B – вторым отобран мужчина, C – третьим отобран мужчина. Тогда

$$P(A) = \frac{7}{10},\ P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},\ P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

Ответ. $\frac{7}{24}$.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1,\ A_2, \ldots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n) \tag{2.10}$$

Пример 2.11. На автостанции стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Ответ. 0,9975.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

НЕСОВМЕСТНЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

1. В гараже автобазы три диспетчера. Каждый из них занят с водителем с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени три диспетчера свободны одновременно (водители заходят независимо друг от друга).

Ответ. 0,343.

2. Пассажир может доехать до своей станции поездами двух назначений. Вероятность наличия в кассе билетов на поезд первого назначения равна 0,7, на поезд второго назначения – 0,8. Найти вероятность того, что пассажир купил билет.

Ответ. 0,94.

3. Вероятность того, что новый электрический прибор прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ. 0,08.

4**.** Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ. 0,14.

5. Под погрузку поданы платформа, полувагон и крытый вагон. Грузоподъёмность платформы используется с вероятностью 0,9; полувагона –0,8; крытого вагона – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) грузоподъемность всех трёх вагонов будет использована полностью;

б) грузоподъемность только одного из трёх вагонов будет использована полностью;

в) грузоподъемность двух вагонов будет использована полностью;

г) грузоподъемность трех вагонов не будет использована полностью.

Ответ. 0,504; 0,092;0,398;0,496.

6. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

Ответ. 0,251.

7. В электрическую цепь последовательно включены 5 элементов, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказов первого, второго, третьего, четвертого, пятого элементов соответственно равны 0,1; 0,.2; 0,3; 0,2; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Ответ. 0,63712.

8. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в I, II, III, IV ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что сборщику придется проверить все 4 ящика.

Ответ. 0,024.

9. При каждом включении стартера двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что для запуска двигателя нужно не более двух включений.

Ответ. 0,96.

10. Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему, в течение заданного времени составляет 0,8. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы блока с учетом резервного.

Ответ. 0,96.

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

1. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Ответ. 0,94.

2. Вероятность занятости каждого пути прибывающим поездом постоянна и независима от занятости других путей. Известно, что вероятность того, что хотя бы один их четырех путей свободен, равна 0,7599. Найти вероятность занятости каждого пути.

Ответ. 0,7.

3. На сортировочной платформе 8 специализированных мест. К платформе без подборки подается 8 вагонов. Определить вероятность того, что хотя бы один вагон будет стоять на своем месте.

Ответ. $1-\left(\frac{7}{8}\right)^8$.

4. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для певого эскалатора равна 0,9; для второго – 0,95; для третьего – 0,85. Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не менее одного эскалатора.

Ответ. 0,99925.

5. Партия самолётов содержит 10 самолётов Ил-62 и 10 самолётов Ту-154. Из этой партии случайным образом отбирают 4 самолёта для испытаний. Найти вероятность того, что для испытаний будут отобраны не менее одного самолёта типа Ил-62.

Ответ $\frac{309}{323}$.

6. В составе поезда из 30 вагонов 5 шестиосных, а остальные – четырехосные. При расформировании состав делятся на две равные (по числу вагонов) части. Определить вероятность того, что в первой половине состава будет хотя бы один шестиосный вагон.

*Ответ.*0,9923.

2.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема. Если события $H_1, H_2, \ldots H_n$ образуют полную группу несовместных событий и событие A может наступить лишь при условии появления одного из событий H_i ($i = 1,2,...,n$), то имеет место формула, которая называется **формулой полной вероятности**:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) \qquad (2.11)$$

Входящие в формулу события $H_1, H_2, \ldots H_n$ называют гипотезами.

Пример 2.12. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 1%. Найди вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное равно $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$. Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное равно $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$. По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным, равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Ответ. 0,019.

2.4. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Теорема. Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) H_1, $H_2, \ldots H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по **формуле Байеса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \ (i = 1,2,...,n), \qquad (2.12)$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$.

Пример 2.13. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежит классу A, 50% – классу B и 20% – классу C. Вероятность того, что водитель класса A в течение года попадет хотя бы в одну автомобильную аварию, равна 0,01; для водителей класса B – 0,03, а для водителей класса C – 0,1. Владелец застрахованной машины n лет ездит без происшествий. Какова вероятность того, что этот водитель из класса A?

Решение. Введем следующие обозначения:

Событие D – владелец застрахованной машины n лет ездит без происшествий;

H_1 – водитель из класса A, $P(H_1)=0{,}3$, $P_{H_1}(D)=0{,}99$;

H_2 – водитель из класса B, $P(H_2)=0{,}5$, $P_{H_2}(D)=0{,}97$;

H_2 – водитель из класса C, $P(H_3)=0{,}2$, $P_{H_3}(D)=0{,}9$,

Воспользуемся формулой полной вероятности для вычисления вероятности события D:

$$P(D)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(D)=0{,}3\cdot 0{,}99+0{,}5\cdot 0{,}97+0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}967,$$

и формулой Байеса для вычисления $P_A(H_1)$:

$$P_D(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(D)}{P(D)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}99}{0{,}967}\approx 0{,}307.$$

Ответ. $0{,}307$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ. 0,0296.

2. Из 1000 ламп 380 принадлежат к первой партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй – 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

Ответ. 0,0443.

3. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

Ответ. 0,958.

4. В группе из 10 экипажей имеются два отличных, пять хороших и три удовлетворительных. Вероятность выполнения упражнения отличным экипажем 0,9; хорошим – 0,8; удовлетворительным – 0,5. Какова вероятность того, что наудачу выбранный экипаж выполнит упражнение?

Ответ. 0,73.

5. Производится посадка самолёта на аэродром. Если позволяет погода, лётчик сажает самолёт, пользуясь, помимо приборов, ещё и визуальным наблюдением. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1. Если аэродром затянут низкой облачностью, то лётчик сажает самолёт, ориентируясь только по приборам. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_2, $p_2 < p_1$. Приборы, обеспечивающие слепую посадку, имеют надёжность (вероятность безотказной работы) p. При наличии низкой облачности и отказавших приборах слепой посадки вероятность благополучной посадки равна p_3, $p_3 < p_2$. Статистика показывает, что в $k\%$ случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью.

Найти полную вероятность события A – благополучной посадки самолёта.

Ответ. $P(A)=\frac{100-k}{100}\cdot p_1+\frac{k}{100}(p\cdot p_1+(1-p)\cdot p_3)$.

6. Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит изделий в 2 раза больше второго цеха и в 3 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 6%, во втором – 10%, в третьем – 14%. Для контроля из контейнера берется одно изделие. Какова вероятность того, что изделие окажется стандартным (без брака). Ответ округлить до тысячных.

Ответ. 0,915.

7. На станции два грузовых пункта. Один из них ежесуточно отправляет в 3 подачах по 20 вагонов, а второй – в 5 подачах по 16 вагонов. В каждой группе вагонов, сформированной первым пунктом, 4 вагона недогружены, а в группе со второго пункта 2 вагона недогружены. Найти вероятность того, что взятый наудачу вагон недогружен.

Ответ. $\frac{11}{70}$.

8. Прибор может работать в нормальном и аварийном режимах; нормальный наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора, аварийный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме – 0,1; в аварийном – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время T.

Ответ. 0,22.

9. Имеется два одинаковых ящика с деталями. В первом ящике 10 бракованных и 15 стандартных деталей, во втором 13 бракованных и 17 стандартных. Наудачу выбирают один ящик и извлекают из него деталь. Какова вероятность того, что извлеченная деталь окажется бракованной?

Ответ. $\frac{5}{12}$

10. В первой коробке 15 стандартных и 5 бракованных деталей, во второй – 14 стандартных и 6 бракованных деталей. Из второй коробки в первую переложили одну деталь, а затем из первой коробки вынули наугад одну деталь. Определить вероятность того, что вынутая деталь оказалась бракованной.

Ответ. $\frac{53}{210}$.

ФОРМУЛА БАЙЕСА

1. Два автомата производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым – 0,9. Производительность первого автомата впятеро выше производительности второго. Рабочий взял наугад деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность, что эта деталь изготовлена вторым автоматом?

Ответ. 0,184.

2. Прибор на борту самолета может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя во время полета в нормальном режиме равна 0,1; в условиях перегрузки 0,4. Какова надежность прибора во время полета?

Ответ. 0,16.

3. На маршруте полета из пункта M в пункт $Л$ вероятность встречного ветра равна 0,6, попутного – 0,3 и штиля – 0,1. Самолет, своевременно вылетающий из пункта M, прибывает в пункт $Л$ по расписанию с вероятностью 0,5 при встречном ветре, 0,8 при попутном ветре и 0,9 при штиле. Известно, что в пункт $Л$ самолет прибыл точно по расписанию. Вычислить вероятность того, что при этом ветер был встречным.

Ответ. 0,48.

4. На станции два грузовых пункта. Один из них ежесуточно отправляет в 3 подачах по 20 вагонов, а второй – в 5 подачах по 16 вагонов. В каждой группе вагонов, сформированной первым пунктом, 4 вагона недогружены, а в группе со второго пункта 2 вагона недогружены. Найти вероятность того, что недогруженный вагон будет со второго пункта.

Ответ. $\frac{5}{11}$

5. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то прибор регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если только помеха – то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал. Ответ округлить до тысячных.

Ответ. 0,903.

6. Однотипные приборы выпускаются 3 заводами в отношении 3:4:5, причем вероятность брака для этих заводов соответственно равны 0,04; 0,05; 0,03. Выбранный прибор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен третьим заводом. Ответ округдить до сотых.

Ответ. 0,32.

7. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежит классу A, 50% – классу B и 20% – классу C. Вероятность того, что в течение года водитель класса A попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,01; для водителя класса B эта вероятность равна 0,03; для водителя класса C – 0,1. Мистер D страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу A? Ответ округлить до сотых.

Ответ. 0,08.

8. На сортировочную станцию прибывают полувагоны, платформы, вагоны с вероятностями 0,35; 0,4; 0,25 соответственно. При осмотре их в парке приема установлено, что вероятность неисправности полувагона равна 0,015; платформы – 0,01; крытого вагона – 0,02. Найти вероятность того, что неисправным окажется полувагон.

*Ответ.*0,37.

9. Автопредприятие имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 35% общего объема поставок, B – 25% и C – 40%. Из практики известно, что 10% поставляемых фирмой A деталей – бракованные, B – 5% и C – 7%. Какова вероятность того, что взятая наугад и оказавшаяся стандартной деталь получена от фирмы B? Ответ округлить до сотых.

Ответ. 0,26.

10. В первой коробке 15 стандартных и 5 бракованных деталей, во второй – 14 стандартных и 6 бракованных деталей. Из второй коробки в первую переложили одну деталь, а затем из первой коробки вынули наугад одну деталь. Вынутая деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что была переложена стандартная деталь.

Ответ. $\frac{35}{53}$.

3. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

3.1. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Пусть в общем случае проводится n независимых испытаний. Поставим задачу: определить вероятность того, что в n испытаниях ровно m раз наступит событие A, если вероятность его наступления в каждом испытании равна p. Эта вероятность обозначается символом $P_n(m)$ и определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{3.1}$$

где $q = 1 - p$.

Формула (3.1) называется **формулой Бернулли**.

Пример 3.1. Из 100 аккумуляторов за год хранения 7 выходит из строя. Наудачу выбирают 5 аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них 3 исправных аккомулятора.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $p = \frac{7}{100} = 0.07$ (вероятность того, что аккумулятор выйдет из строя), $n=5$ (число испытаний), $m=5-3=2$ (число «успехов», т.е. неисправных аккумуляторов).

Используя формулу Бернулли, получим

$$P_5(2)=C_5^2\cdot(0{,}07)^2\cdot(0{,}93)^3\approx 0{,}0394.$$

Ответ. 0,0394.

Наивероятнейшим числом m_0 появления события A в n независимых испытаниях называется число, для которого вероятность $P_n(m_0)$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытания. Это число определяется из неравенства

$$np-q\le m_0\le np+p,$$

где, если числа $np-q$ и $np+p$ – дробные, то число m_0 – единственное; если же числа $np-q$ и $np+p$ – целые, то будет два значения наивероятнейшего числа m_0.

Пример 3.2. При осмотре составов в каждом из них с вероятностью 0,2 есть вагоны, требующие ремонта. Определить наивероятнейшее число составов, в которых есть такие вагоны, если в сутки со станции отправляется 9 поездов.

Решение. По условию: $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $n=9$.

Тогда $np-q=9\cdot 0{,}2-0{,}8=1$; $np+p=9\cdot 0{,}2+0{,}2=2$. Откуда

$$1\le m_0\le 2.$$

Следовательно, наивероятнейшее число составов либо один, либо два.

Ответ. 1 или 2.

3.2. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Формула Бернулли используется при сравнительно небольшом числе испытаний n. При больших значениях n и малом значении вероятности p (например, $n>100$, $p<0{,}1$ и $\lambda=np\le 10$) хорошее приближение для формулы Бернулли дает **формула Пуассона**.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит m раз приближенно равна:

$$P_n(m) \cong \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (3.2)$$

где $\lambda = np$.

Пример 3.3. Завод отправил потребителю 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено три изделия.

Решении. Число $n = 500$ – велико, вероятность $p = 0{,}002$ – мала, а произведение $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Следовательно, применима формула Пуассона

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = 0{,}0613.$$

Ответ. 0,0613.

3.3. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях постоянна, то вероятность появления этого события в n независимых испытаниях ровно m раз определяется формулой Бернулли. Если число испытаний велико, то вычисление искомой вероятности по формуле Бернулли становится очень громоздким. В этом случае для нахождения вероятности $P_n(m)$ формулу Бернулли нецелесообразно использовать. В таких случаях применяют локальную теорему Муавра-Лапласа.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз находится по формуле:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (3.3)$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции Гаусса вычислены и занесены в специальную таблицу, которой нужно пользоваться при решении задач. Учитывая, что функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, в таблице приведены значения $\varphi(x)$ только для положительных значений аргумента. При использовании формулы (3.3) нужно иметь ввиду, что $\varphi(x>4)\approx 0$.

Пример 3.4. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Вычислим x:

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1400-2400\cdot 0{,}6}{\sqrt{2400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}=-\frac{40}{24}=-1{,}67,\ \varphi(-1{,}67)=\varphi(1{,}67).$$

По таблице найдем $\varphi(1{,}67)=0{,}0989$.

Тогда вероятность события A равна:

$$P_{2400}(1400)=\frac{1}{24}\cdot 0{,}0989=0{,}0041.$$

Ответ. 0,0041.

3.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

На практике часто нужно знать вероятность наступления события не одно определенное число раз, а вероятность того, что это число окажется заключенным в некотором интервале. Интегральная теорема Лапласа позволяет решить эту задачу.

Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1;m_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'), \qquad (3.4)$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа,

$$x'=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа для положительных значений x ($0\le x<5$) приведены в таблице; полагают $\Phi(x\ge 5)=0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Пример 3.5. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

Решение. Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75, либо 76,77,…,100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $m_1=75$, $m_2=100$. Тогда

$$x'=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}25,$$

$$x''=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5.$$

По таблице: $\Phi(1{,}25)=0{,}3944$, $\Phi(5)=0{,}5$.

Используя интегральную теорему Лапласа, получим

$$P_{100}(75;100)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=$$
$$=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944.$$

Ответ. 0,8944.

3.5. ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКЛОНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ ПОСТОЯННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Производится n независимых испытании, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p

($0 < p < 1$). Вероятность того, отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε определяется по формуле:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right) \tag{3.5}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Пример 3.6. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, $n = 400$, $p = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}03$. Тогда $q = 0{,}9$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right)$.

Пользуясь формулой (3.5), получим

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{400/0{,}1 \cdot 0{,}9}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9644\,.$$

Результат можно интерпритировать так: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Ответ. 0,9644.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

1. Из 100 аккумуляторов за год хранения 7 выходит из строя. Наудачу выбирают 5 аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них 3 исправных аккумулятора.

Ответ. 0,0394.

2. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов, включается за время T. Вероятность отказа каждого из них за это время равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут:

а) три элемента;

б) не менее четырех элементов;

в) хотя бы один элемент.

Ответ. а) 0,0512; б) 0,00672; в) 0,67232.

3. Пусть вероятность того, что прибор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 приборов:

а) не более одного потребует ремонта;

б) хотя бы один не потребует ремонта.

Ответ. а) 0,655; б) 0,9999.

5. На определенном участке трассы ожидается пролет десяти воздушных судов. Для каждого воздушного судна вероятность выхода за пределы назначенного коридора составляет 0,05 и не зависит от характера движения остальных судов. Определить:

а) вероятность того, что число воздушных судов, вышедших за пределы назначенного коридора, не превышает двух;

б) наиболее вероятное число воздушных судов, вышедших за пределы коридора.

Ответ. а) 0,988; б)0.

6. На автовокзале 10 автобусов. Для каждого из них вероятность поломки за день составляет 30 %. Определить вероятность того, что за день:

а) выйдет из строя 7 автобусов;

б) останется рабочим хотя бы один из них.

Ответ. а) 0,009; б) 0,999994.

7. Вероятность получения хорошего результата при проведении маркетинговых исследований равна 0,6. Найти наивероятнейшее число удачных исследований и вероятность этого числа исследований, если общее их количество равно 7.

Ответ. 4; $\approx 0{,}29$.

8. Вероятность поступления вагонов с каждым поездом для грузового двора равна 0,3. Найти вероятность того, что в каждом из 3-х взятых составах:

а) есть вагоны для грузового двора;

б) нет вагонов для грузового двора;

в) есть в одном составе;

г) есть в двух составах.

Ответ. а)0,027; б)0,343; в)0,441; г)0,189.

9. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 885 пассажиров.

Ответ. 17.

10. При осмотре составов в парке отправления, в каждом из них с вероятностью 0,1 есть вагоны, требующие ремонта. Найти наивероятнейшее число составов, в которых нет таких вагонов, если в сутки со станции отправляется 120 поездов.

Ответ. 108.

ФОРМУЛА ПУАССОНА

1. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

Ответ. 0,18.

2. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено:

а) три ошибочно укомплектованных пакета;

б) не более трех ошибочно укомплектованных пакетов.

Ответ. а) 0,0072, б) 0,9992.

3. В каждом полете вероятность того, что воздушное судно встретится с грозой, равна 0,005. Какова вероятность того, что из 1000 полетов встреча с грозой произойдет ровно в 40 случаях?

Ответ. 0,0197.

4. У страховой компании 5000 клиентов. Вероятность наступления страхового случая в год составляет 0,1%. Найти вероятность того, что компании придётся делать три страховые выплаты в году. Ответ округлите до сотых.

Ответ. 0,14.

5. Вероятность изготовления нестандартной детали на станке-автомате равна 0,003. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется не более 2 нестандартных. Ответ округлите до сотых.

*Ответ.*0,31.

ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА

1. Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента за смену равна 0,024. Найти вероятность, что за смену откажут 6 элементов.

Ответ. 0,000084.

2. На конвейер за смену поступает 300 изделий. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна, равна 0,75. Найти вероятность того, что стандартных деталей на конвейер за смену поступило ровно 240.

Ответ. 0,007.

3. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

а) ровно 10;

б) не менее 20;

в) менее 28;

г) от 14 до 26.

Ответ. а) 0,4375; б)0,5; в) 0,95994; г) 0,86638.

4. Станок-автомат штампует детали. Известно, что в среднем на 1000 деталей приходится 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди 50 взятых наудачу деталей:

а) две бракованные детали;

б) все деталей окужутся без брака.

Ответ. а) 0,016375; б) 0,818731.

5. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными

а) от 70 до 86 станков;

б) 80 станков.

Ответ. а) 0,92698; б) 0,0997.

6. Вероятность безотказной работы автосцепного оборудования цистерны равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 обследованных вагонов автосцепное оборудование не требует ремонта у 380 вагонов.

Ответ. 0,0005(3).

7. Вероятность того, что поезд прибудет на станцию с отклонением от графика, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных поездов от 70 до 100 прибудут не по графику?

Ответ. 0,8882.

8. Вероятность того, что в прибывшем на станцию поезде есть неисправные вагоны, равна 0,1. Найти процент того, что в случайно отобранных 576 поездах относительная частота появления неисправных вагонов отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Ответ. 57,62%.

9. В парке порожних вагонов с вероятностью 0,9 каждый из них требует очистки. Сколько следует проверить вагонов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты требующих очистки вагонов от вероятности того, что вагон требует очистки, не превысит 0,01?

Ответ. 3458.

10. Вероятность того, что деталь не стандартна, равна 0,1. Сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности р по абсолютной величине не более чем иа 0,03?

*Ответ.*400.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов бакалавриата направлений
12.03.01, 15.03.04, 23.03.01 и 27.03.03

Сост. *Л.В. Бакеева, Е.Г. Булдакова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
высшей математики

Ответственный за выпуск *Л.В. Бакеева*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 03.09.2021 . Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,2. Усл.кр.-отт. 2,2. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 75 экз. Заказ 781.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2