

# **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов бакалавриата направления 12.03.01*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2021**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра общей электротехники

# ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов бакалавриата направления 12.03.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2021

УДК 621.3 (073)

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА:** Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *И.Н. Войтюк, В.С. Добуш, С.В. Соловьев*. СПб, 2021. 79 с.

Методические указания к выполнению практических работ составлены в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования.

Представлены краткие теоретические сведения и задания к выполнению практических работ по дисциплине «Электротехника» для студентов бакалавриата направления 12.03.01 «Приборостроение» профиля программы «Приборы и методы контроля качества и диагностики». Методические указания могут быть использованы студентами других направлений и специальностей по указанной дисциплине.

Научный редактор проф. *Я.Э. Шклярский*

Рецензент канд. техн. наук *А.П. Шевчук* (ООО «ПО «Энергосистема»)

## ВВЕДЕНИЕ

Целью практических занятий по дисциплине «Электротехника» является закрепление теоретических знаний и умение применять полученные знания в практических задачах.

В указаниях к практическим занятиям приводятся краткие теоретические сведения о предмете исследования, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы.

Методические указания по данному разделу дисциплины включают 17 практических занятий общей трудоемкостью 34 часа.

Практические занятия проводятся под руководством преподавателя в учебной аудитории.

Для выполнения практических заданий рекомендуется пользоваться данными методическими указаниями, а также литературой.

Оформление самостоятельных работ можно выполнять в произвольной форме. На титульном листе обязательно указывается номер варианта студента. В содержание отчета должны быть представлены: условие задачи и схема цепи; все расчеты, в том числе и промежуточные; приведены формулы и промежуточные математические преобразования в общем виде.

Номер варианта задания для самостоятельной работы определяется по последней цифре студента по списку журнала (см. таблицы заданий).

### ЗАНЯТИЕ 1. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПО ЗАКОНУ ОМА

#### *Краткие теоретические сведения*

В электрической схеме соединения элементов образуют ветви, узлы, контуры.

*Ветвь* образуется одним или несколькими последовательно соединенными элементами, по которым протекает один и тот же ток.

*Узел* - место соединения 3-х или большего числа ветвей.

*Контур* - любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям в электрической схеме.

Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называются параллельными.

Закон Ома для участка цепи постоянного тока, содержащего сопротивление  $R$ , имеет вид

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad U = IR .$$

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью. Она обозначается  $G$  и измеряется в сименсах (См):

$$G = 1/R .$$

Простыми цепями постоянного тока называются цепи с одним источником при последовательном, параллельном и смешанном соединениях приемников.

Последовательное соединение приемников

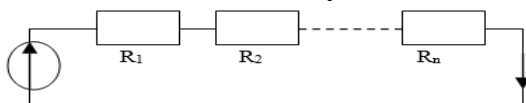


Рис. 1. Последовательное соединение приемников

Последовательное соединение приемников

$$E = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I( R_1 + R_2 + \dots + R_n ) = I R_{\text{экрв}}$$

$R_{\text{экрв}} = \Sigma R_i$  - при последовательном соединении сопротивления складываются (рис.1).

Параллельное соединение приемников

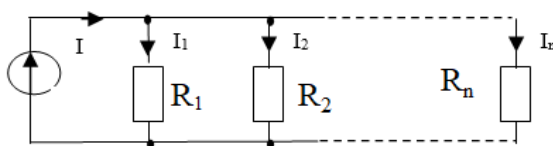


Рис. 2. Параллельное соединение приемников

При параллельном соединении приемников напряжение на всех приемниках одинаково (рис.2).

По закону Ома, токи в каждой ветви

$$I_1 = \frac{E}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2}, \quad I_n = \frac{E}{R_n} .$$

По первому закону Кирхгофа, общий ток

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = E \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = E(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = E g_{\text{ЭКВ}}$$

$$g_{\text{ЭКВ}} = g_1 + g_2 + \dots + g_n \quad R_{\text{Э}} = \frac{1}{g_{\text{Э}}}$$

При параллельном соединении суммируются проводимости.

*Смешанное соединение* - комбинация последовательного и параллельного (рис.3).

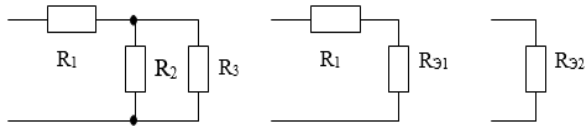


Рис. 3. Этапы свертывания схемы смешанного соединения приемников

$$R_{\text{Э1}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}; \quad R_{\text{Э2}} = R_1 + R_{\text{Э1}}.$$

**Пример 1.** Определить общее сопротивление  $R_{123456}$  цепи, имеющей последовательно и параллельно соединенные сопротивления.

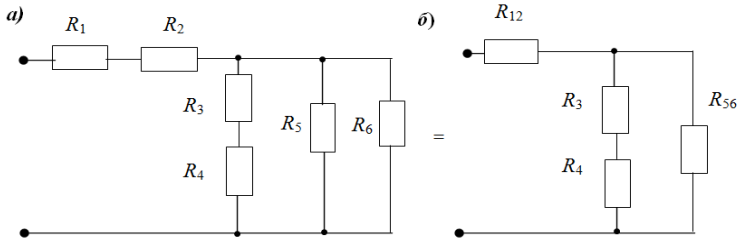


Рис.4. Цепь со смешанным соединением сопротивлений

Переходим от схемы рис.4, а к эквивалентной схеме рис.4, б

$$R_{12} = R_1 + R_2, \quad R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$$

На основании рис.4, б легко найти общее сопротивление  $R_{123456}$  цепи:

$$R_{123456} = R_{12} + \frac{R_{34} R_{56}}{R_{34} + R_{56}},$$

где  $R_{34} = R_3 + R_4$ .

**Пример 2.** Определить постоянные токи во всех сопротивлениях электрической схемы (рис.5). Параметры цепи:  $R_1=R_2=4$  Ом,  $R_3=R_4=1$  Ом,  $R_5=6$  Ом,  $E=9$  В.

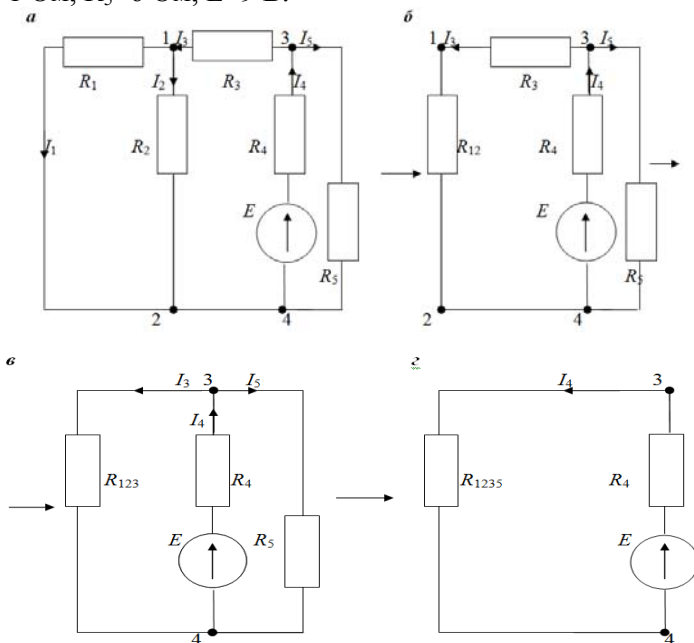


Рис. 5. Эквивалентирование простой цепи постоянного тока

**Решение.1.** Выберем произвольно в ветвях положительные направления токов и промаркируем их:  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ .

2. Преобразуем поэтапно исходную схему в одноконтурную схему. Последовательность преобразований наглядно представлена на рис.5, где, исходя из рис.5, б:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ Ом}; \quad \text{из рис.5, в:}$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 2 + 1 = 3 \text{ Ом}; \quad \text{из рис.5, г:}$$

$$R_{1235} = \frac{R_{123} \cdot R_5}{R_{123} + R_5} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом}.$$

3. Определим ток  $I_4$  и напряжение  $U_{34}$  на участке 3-4 для одноконтурной схемы (рис.5, г).

$$I_4 = \frac{E}{R_{1235} + R_4} = \frac{9}{2 + 1} = 3 \text{ А}; \quad U_{34} = I_4 \cdot R_{1235} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ В}.$$

4. Определим токи  $I_3$  и  $I_5$  (рис.5, в).

$$I_3 = \frac{U_{34}}{R_{12} + R_3} = \frac{6}{2 + 1} = 2 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{34}}{R_5} = \frac{6}{6} = 1 \text{ А}.$$

5. Определим напряжение  $U_{12}$  на сопротивлении  $R_{12}$  и токи  $I_1, I_2$ , (рис.5, б).

$$U_{12} = I_3 \cdot R_{12} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ В}; \quad I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А}.$$

Проверим полученные результаты с помощью первого закона Кирхгофа. Для узла 3 (рис.5, а) имеем:

$$I_4 - I_3 - I_5 = 3 - 2 - 1 = 0 \quad \text{— верно.}$$

### Задание для самостоятельной работы

Для схемы рис.6, а, б определите ток в сопротивлении  $R_2$ . При этом все сопротивления и  $E$  указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Исходные данные по вариантам

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Буква рисунка	а	а	а	а	а	б	б	б	б	б
$R_1 \dots R_6$ , Ом	2	4	6	8	10	12	8	6	4	2
$E$ , В	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26



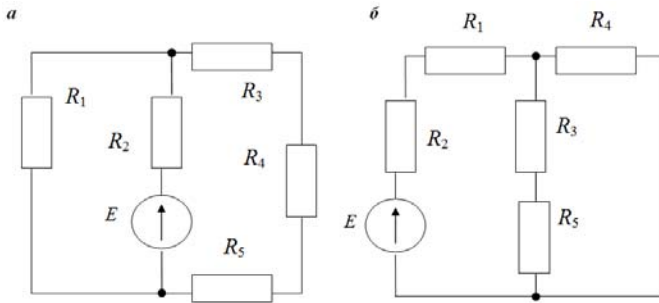


Рис.6. Схемы по вариантам

## ЗАНЯТИЕ 2. РАСЧЕТ ПРОСТОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА

### *Краткие теоретические сведения*

Для расчета простых цепей постоянного тока можно использовать законы Кирхгофа.

*Первый закон Кирхгофа* формулируется следующим образом: сумма притекающих к узлу токов равна сумме вытекающих из узла токов или алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0 .$$

*Второй закон Кирхгофа* гласит: в любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения на всех сопротивлениях этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре, т. е.

$$\sum_{k=1}^N R_k I_k = \sum_{q=1}^M E_q .$$

**Пример.** Определить токи, напряжения и мощности всех участков цепи (рис.7), потенциалы точек А,В,С,Д относительно точки О<sub>1</sub>. Основные параметры приведены в табл.2.

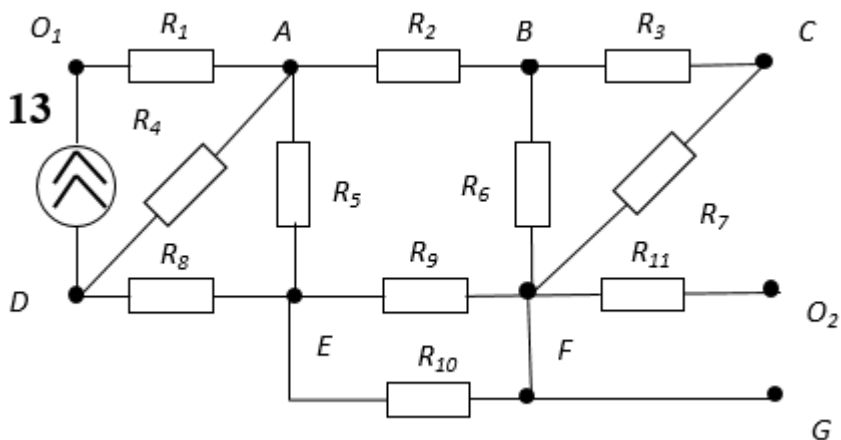


Рис. 7. Простая цепь постоянного тока

Таблица 2.

Источники тока		Исходные данные									
$U_0$	$I_0$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_7$	$R_8$	$R_9$	$R_{10}$
В	А	Ом									
-	10	4	3	2	15	24	4	10	2	8	24

Для решения задачи необходимо свернуть цепь до последовательного или параллельного соединения.

Развернув схему в обратном порядке, определить токи и напряжения отдельных участков цепи, пользуясь законом Ома.

Определить мощности на сопротивлениях по закону Джоуля-Ленца. Проверить баланс мощности  $U_0 I_0 = \sum I^2 R$

1. Нахождение эквивалентного сопротивления ( $R_{ЭКВ}$ )

$$R_{37} = R_3 + R_7 = 2 + 10 = 12 \text{ Ом},$$

$$R_{637} = \frac{R_6 \cdot R_{37}}{R_6 + R_{37}} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3 \text{ Ом},$$

$$R_{2637} = R_2 + R_{637} = 3 + 3 = 6 \text{ Ом},$$

$$R_{910} = \frac{R_9 \cdot R_{10}}{R_9 + R_{10}} = \frac{8 \cdot 24}{8 + 24} = 6 \text{ Ом},$$

$$R_{2637910} = R_{2637} + R_{910} = 6 + 6 = 12 \text{ Ом},$$

$$R_{26379105} = \frac{R_5 \cdot R_{2637910}}{R_5 + R_{2637910}} = \frac{12 \cdot 24}{12 + 24} = 8 \text{ Ом},$$

$$R_{263791058} = R_8 + R_{26379105} = 2 + 8 = 10 \text{ Ом},$$

$$R_{2637910584} = \frac{R_4 \cdot R_{263791058}}{R_4 + R_{263791058}} = \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 6 \text{ Ом},$$

$$R_{26379105841} = R_{ЭКВ} = R_1 + R_{2637910584} = 4 + 6 = 10 \text{ Ом}.$$

2. Нахождение токов и напряжений всех участков цепи

$$I_1 = I_0 = 10 \text{ А},$$

$$U_0 = I_0 \cdot R_{ЭКВ} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ В},$$

$$U_{01A} = I_1 \cdot R_1 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ В},$$

$$U_0 = U_{01A} + U_{AD},$$

$$\text{тогда } U_{AD} = U_0 - U_{01A} = 100 - 40 = 60 \text{ В},$$

$$I_4 = \frac{U_{AD}}{R_4} = \frac{60}{15} = 4 \text{ А},$$

$$I_8 = I_0 - I_4 = 10 - 4 = 6 \text{ А},$$

$$U_{AE} = U_{AD} - U_{ED} = 60 - 12 = 48 \text{ В},$$

$$U_{ED} = I_8 \cdot R_8 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В},$$

$$I_5 = \frac{U_{AE}}{R_5} = \frac{48}{24} = 2 \text{ А},$$

$$I_2 = I_0 - I_4 - I_5 = 10 - 4 - 2 = 4 \text{ А},$$

$$I_6 = I_2 \cdot \frac{R_3 + R_7}{R_3 + R_7 + R_6} = 4 \cdot \frac{2 + 10}{2 + 10 + 4} = 3 \text{ A},$$

$$I_3 = I_7 = I_2 - I_6 = 4 - 3 = 1 \text{ A},$$

$$I_9 = I_2 \cdot \frac{R_{10}}{R_9 + R_{10}} = 4 \cdot \frac{24}{8 + 24} = 3 \text{ A},$$

$$I_{10} = I_2 - I_9 = 4 - 3 = 1 \text{ A},$$

### 3. Нахождение мощностей всех участков цепи

$$P_0 = I_0 \cdot U_0 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ Вт},$$

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 10^2 \cdot 4 = 400 \text{ Вт},$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 4^2 \cdot 3 = 48 \text{ Вт},$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 1^2 \cdot 2 = 2 \text{ Вт},$$

$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 1^2 \cdot 2 = 2 \text{ Вт},$$

$$P_4 = I_4^2 \cdot R_4 = 4^2 \cdot 15 = 240 \text{ Вт},$$

$$P_5 = I_5^2 \cdot R_5 = 2^2 \cdot 24 = 96 \text{ Вт},$$

$$P_5 = I_5^2 \cdot R_5 = 2^2 \cdot 24 = 96 \text{ Вт},$$

$$P_6 = I_6^2 \cdot R_6 = 3^2 \cdot 4 = 36 \text{ Вт},$$

$$P_7 = I_7^2 \cdot R_7 = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ Вт},$$

$$P_7 = I_7^2 \cdot R_7 = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ Вт},$$

$$P_8 = I_8^2 \cdot R_8 = 6^2 \cdot 2 = 72 \text{ Вт},$$

$$P_9 = I_9^2 \cdot R_9 = 3^2 \cdot 8 = 72 \text{ Вт},$$

$$P_{10} = I_{10}^2 \cdot R_{10} = 1^2 \cdot 24 = 24 \text{ Вт},$$

### 4. Проверка баланса мощностей

$$\sum_{i=1}^{10} P_i = 1000 \quad \text{Вт} = P_0$$

В табл. 3 приведены рассчитанные значения токов, напряжений и мощностей всех участков цепи.

Таблица 3.

Рассчитанные значения токов, напряжений и мощностей всех участков цепи

№п/п	Участок цепи	I, А	U, В	P, Вт
1	DO <sub>1</sub> ,	10	10	1000
2	O <sub>1</sub> A	10	40	400
3	AB	4	12	48
4	BC	1	2	2
5	CF	1	10	10
6	BF	3	12	36
7	EF(R <sub>9</sub> )	3	24	72
8	EF(R <sub>10</sub> )	1	24	24
9	AE	2	48	96
10	ED	6	12	72
11	AD	4	60	240

5. Определение потенциалов узлов A, B, C, D относительно узла O<sub>1</sub>

Примем потенциал узла O<sub>1</sub> равным нулю, то есть  $\varphi_{O_1} = 0$ , тогда

$$\varphi_A = \varphi_{O_1} - U_1 = 0 - 40 = -40 \text{ В,}$$

$$\varphi_B = \varphi_A - U_2 = -40 - 12 = -52 \text{ В,}$$

$$\varphi_C = \varphi_B - U_3 = -52 - 2 = -54 \text{ В,}$$

$$\varphi_D = \varphi_{O_1} - U_0 = -100 \text{ В.}$$

### ЗАНЯТИЕ 3,4. РАСЧЕТ СЛОЖНОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### *Краткие теоретические сведения*

Сложной электрической цепью называют такую цепь, которая не может быть сведена только к последовательному или парал-

лельному соединению источников и приемников электрической энергии.

Сложные электрические цепи имеют несколько узлов и ветвей, а также могут иметь и несколько источников питания. Расчет сложной линейной электрической цепи заключается в определении токов во всех ветвях и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа для данной электрической цепи.

Решение системы алгебраических уравнений представляет собой достаточно трудоемкую работу, объем которой возрастает с увеличением числа неизвестных при увеличении сложности электрической цепи.

В целях сокращения числа уравнений, решение которых даст искомые величины и определит режим электрической цепи, разработаны различные методы расчета линейных электрических цепей: например, метод контурных токов, где уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа, или метод узловых потенциалов, когда уравнения составляются только по первому закону Кирхгофа.

В любой электрической цепи выполняется закон сохранения энергии, т. е. мощность, развиваемая источниками электрической энергии равна сумме мощностей, потребляемых приемниками электрической энергии. Этот баланс мощностей записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^M P_{\text{кист}} = \sum_{q=1}^N P_{\text{пр}}$$

$$\text{или} \quad \sum_{k=1}^M E_k I_k = \sum_{q=1}^N R_q I_q^2 .$$

**Пример.** Определить токи ветвей методом контурных токов, узловых потенциалов. Составить баланс мощности. Расчеты выполнить для схемы сложной цепи постоянного тока, приведенной на рис. 8. Параметры схемы:

Источники питания:  $E_1 = 120 \text{ В}$ ,  $E_2 = 30 \text{ В}$ ,  $E_3 = E_4 = 90 \text{ В}$ ,  $E_6 = 120 \text{ В}$ .

Сопротивления:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = R_7 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 24 \text{ Ом}$ .

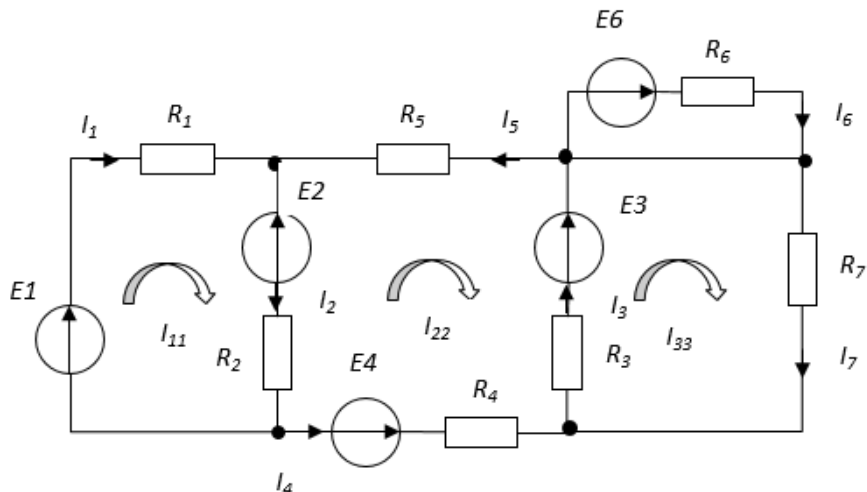


Рис.8. Схема сложной цепи постоянного тока

### **1. Расчет электрической цепи методом контурных токов**

Контур, состоящий из источника  $E_6$  и сопротивления  $R_6$ , можно отделить от остальной схемы, т.к. связь закорочена.

Для этого контура определим ток  $I_6$  по закону Ома

$$I_6 = \frac{E_6}{R_6} = \frac{120}{24} = 5 \text{ А.}$$

Величины токов в остальных ветвях схемы определяем методом **контурных токов**. Выберем три независимых контура (рис.8). Направления обхода контуров контурными токами  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  показаны на рисунке. Составляем систему контурных уравнений на основании второго закона Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{12} \cdot R_{12} + I_{13} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{21} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{23} \cdot R_{23} = E_{22}, \\ I_{31} \cdot R_{31} + I_{32} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33} \end{cases} \quad (1)$$

$R_{11} = R_1 + R_2$ - собственное сопротивление 1-го контура,

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5$ - собственное сопротивление 2-го контура,

$R_{33} = R_3 + R_7$  - собственное сопротивление 3-го контура,

$R_{12} = R_{21} = - R_2$  - взаимное сопротивление между 1-м и 2-м контурами.

Поскольку контурные токи  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , протекающие через сопротивление  $R_2$ , направлены навстречу друг другу, сопротивление  $R_2$  берется со знаком минус.

$R_{23} = R_{32} = - R_3$  - взаимное сопротивление между 2-м и 3-м контурами,  $R_{13} = R_{31} = 0$ , т.к. 1-ый и 3-ий контуры не имеют непосредственной связи,

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 12 + 3 = 15 \text{ Ом},$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 3 + 6 + 6 + 6 = 21 \text{ Ом}.$$

Запишем численные значения сопротивлений:

$$R_{33} = R_3 + R_7 = 6 + 6 = 12 \text{ Ом},$$

$$R_{12} = R_{21} = 3 \text{ Ом},$$

$$R_{23} = R_{32} = 6 \text{ Ом}.$$

С учетом направлений э.д.с. источников и направления обхода соответствующих контурных токов запишем:

$E_{11} = E_1 - E_2 = 120 - 30 - 90 \text{ В}$  (с учетом направлений э.д.с. и направления обхода первого контура контурным током  $I_{11}$ ),

$$E_{22} = E_2 - E_3 - E_4 = 30 - 90 - 90 = -150 \text{ В}, E_{33} = E_3 = 90 \text{ В}.$$

Подставляем полученные значения сопротивлений и э.д.с. в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} 15I_{11} - 3I_{12} + 0 = 90 \\ -3I_{21} + 21I_{22} - 6I_{23} = -150 \\ 0 - 6I_{32} + 12I_{33} = 90 \end{cases} \quad (2)$$

Имеем 3 уравнения с тремя неизвестными, которые определяем с помощью главного определителя системы и соответствующую



щих дополнений. Контурные токи определяем из следующих формул.

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

Главный определитель системы  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -3 & 0 \\ -3 & 21 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 3132 \end{aligned}$$

Дополнение  $\Delta_1$  получается заменой первого столбца главного определителя столбцом свободных членов

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 90 & -3 & 0 \\ -150 & 21 & -6 \\ 90 & -6 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} = 15660 \end{aligned}$$

Дополнение  $\Delta_2$  получается заменой второго столбца главного определителя столбцом свободных членов

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 90 & 0 \\ -3 & -150 & -6 \\ 0 & 90 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = -15660 \end{aligned}$$

Дополнение  $\Delta_3$  получается заменой третьего столбца главного определителя столбцом свободных членов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -3 & 90 \\ -3 & 21 & -150 \\ 0 & -6 & 90 \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 15660$$

Величины контурных токов

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15660}{3132} = 5 \text{ A}, \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{15660}{3132} = -5 \text{ A},$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15660}{3132} = 5 \text{ A},$$

Токи в ветвях определяем через контурные токи. Выберем произвольное направление токов в ветвях (см. рис.1)

Величина и направление тока 1-ой ветви  $I_1$  совпадает с контурным током  $I_{11}$ . Соответственно  $I_1 = I_{11} = 5 \text{ A}$ . Аналогично  $I_7 = I_{33} = 5 \text{ A}$ .

Токи в 4-ой и в 5-ой ветвях направлены навстречу контурному току  $I_{22}$ , поэтому  $I_4 = I_5 = -I_{22} = 5 \text{ A}$ .

Токи во 2-ой и в 3-ей ветвях - есть разность соответствующих контурных токов  $I_2 = I_{11} - I_{22} = 10 \text{ A}$ ,  $I_3 = I_{33} - I_{22} = 10 \text{ A}$ .

Знак (-) перед значением тока ветви означает, что на самом деле ток протекает в противоположном направлении.

Проверка баланса мощностей источников и приемников энергии.

$$\sum_{k=1}^M E_k I_k = \sum_{q=1}^N R_q I_q^2,$$

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 =$$

$$= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7,$$

$$120 \cdot 5 - 30 \cdot 10 + 90 \cdot 10 + 90 \cdot 5 + 120 \cdot 5 =$$

$$= 5^2 \cdot 12 + 10^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 24 + 5^2 \cdot 6,$$

2250 Вт=2250 Вт.

Баланс мощностей сошелся, следовательно, задача решена правильно.

**2. Расчет электрической цепи методом узловых потенциалов (рис.9)**

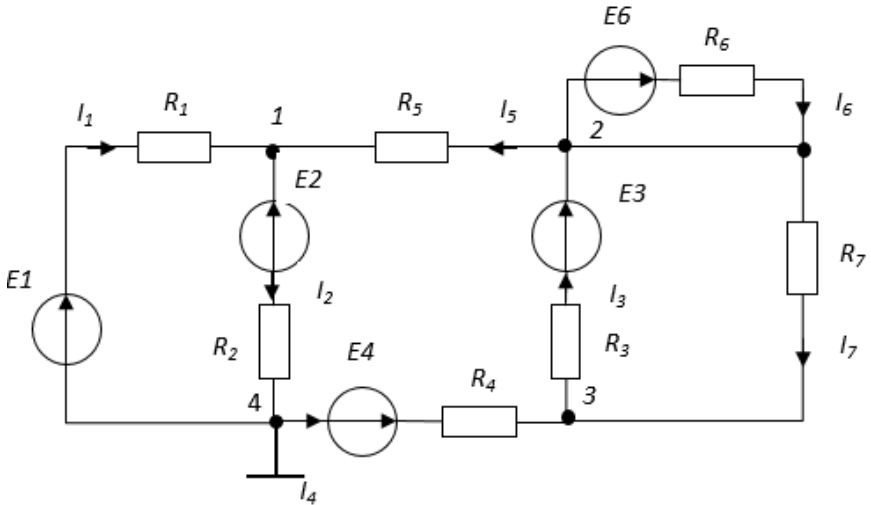


Рис.9. Схема сложной цепи постоянного тока

Ветвь с э.д.с.  $E_6$  закорочена, поэтому можем сразу определить ток  $I_6$  по закону Ома,  $I_6 = \frac{E_6}{R_6} = \frac{120}{24} = 5 \text{ А}$ .

Примем потенциал узла 4 равным нулю ( $\varphi_4 = 0$ ). Число уравнений в нашем случае равняется числу узлов минус два. Составляем три уравнения для узлов 1,2,3.

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 \cdot G_{12} + \varphi_3 \cdot G_{13} = I_{11} \\ \varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} + \varphi_3 \cdot G_{23} = I_{22} \\ \varphi_1 \cdot G_{31} + \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} = I_{33} \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  - потенциалы узлов 1,2,3;  $G_{11}, G_{22}, G_{33}$  - суммы проводимостей ветвей, сходящихся в соответствующем узле;  $G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{23}, G_{32}, G_{31}$  - суммы проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих соответствующие узлы, взятые со знаком минус. Если между какими-либо узлами ветвь отсутствует, то соответствующая проводимость равна нулю;  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  - узловые токи. Если э.д.с. ветви направлена к соответствующему узлу, то она записывается с плюсом, если э.д.с. направлена от узла, то она записывается с минусом.

Подсчитаем проводимости

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} = 0,5833 \text{ См,}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ См,}$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ См,}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_5} = -\frac{1}{6} = -0,1667 \text{ См,}$$

$G_{13} = G_{31} = 0$ , поскольку нет связи между 1 и 3 узлами.

$$G_{23} = G_{32} = -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7}\right) = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = -0,3333 \text{ См.}$$

Узловые токи

$$I_{11} = E_1 G_1 + E_2 G_2 = 120 \cdot \frac{1}{12} + 30 \cdot \frac{1}{3} = 20 \text{ А,}$$

$$I_{22} = E_3 G_3 = 90 \cdot \frac{1}{6} = 15 \text{ А,}$$

$$I_{33} = -E_3 G_3 + E_4 G_4 = -90 \cdot \frac{1}{6} + 90 \cdot \frac{1}{6} = 0 \text{ А.}$$

Подставляем полученные значения проводимостей и узловых токов в систему уравнений (3):

$$\begin{cases} 0,5833\varphi_1 - 0,1677\varphi_2 - 0\varphi_3 = 20 \\ -0,1677\varphi_1 + 0,5\varphi_2 - 0,3333\varphi_3 = 15 \\ 0\varphi_1 - 0,3333\varphi_2 + 0,5\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

Имеем три уравнения с тремя неизвестными, которые определяем с помощью главного определителя системы и дополнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,5833 & -0,1667 & 0 \\ -0,1667 & 0,5 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,5833 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 0,5833 \cdot 0,3333 \cdot 0,3333 - 0,1667 \cdot 0,1667 \cdot 0,5 = 0,06713,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -0,1667 & 0 \\ 15 & 0,5 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

$$20 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,3333 \cdot 0,3333 + 0,1667 \cdot 15 \cdot 0,5 = 4,0285,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,5833 & 20 & 0 \\ -0,1667 & 15 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

$$0,5833 \cdot 15 \cdot 0,5 - 0,5833 \cdot 0,3333 \cdot 0,3333 + 20 \cdot 0,1667 \cdot 0,5 = 6,04175,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,5833 & -0,1667 & 20 \\ -0,1667 & 0,5 & 15 \\ 0 & -0,3333 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0,5833 \cdot 0,3333 \cdot 15 + 20 \cdot 0,1667 \cdot 0,3333 = 4,02743.$$

Имеем решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,5833 & -0,1667 & 0 \\ -0,1667 & 0,5 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,5 \end{vmatrix} =$$

$$0,5833 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 0,5833 \cdot 0,3333 \cdot 0,3333 - 0,1667 \cdot 0,1667 \cdot 0,5 = 0,06713,$$

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4,0285}{0,06713} = 60 \text{ В}, \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6,04175}{0,06713} = 90 \text{ В},$$

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4,02743}{0,06713} = 60 \text{ В}.$$

Заключительный этап состоит в подсчете токов в ветвях по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_1 - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R_1} = \frac{120 - (60 - 0)}{12} = 5 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{E_2 - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R_2} = \frac{30 - (60 - 0)}{3} = -10 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{E_3 - (\varphi_2 - \varphi_3)}{R_3} = \frac{90 - (90 - 60)}{6} = 10 \text{ А},$$

$$I_4 = \frac{E_4 - (\varphi_3 - \varphi_4)}{R_4} = \frac{90 - (60 - 0)}{6} = 5 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{R_5} = \frac{(90 - 60)}{6} = 5 \text{ А},$$

$$I_6 = \frac{E_6}{R_6} = \frac{120}{24} = 5 \text{ А},$$

$$I_7 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)}{R_7} = \frac{(90 - 60)}{6} = 5 \text{ А}.$$

Проверка баланса мощностей источников и приемников

$$\sum_{k=1}^M E_k I_k = \sum_{q=1}^N R_q I_q^2,$$

$$\begin{aligned}
& E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + E_6 I_6 = \\
& = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7, \\
& 120 \cdot 5 - 30 \cdot 10 + 90 \cdot 10 + 90 \cdot 5 + 120 \cdot 5 = \\
& = 5^2 \cdot 12 + 10^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 24 + 5^2 \cdot 6, \\
& \qquad \qquad \qquad 2250 \text{ Вт} = 2250 \text{ Вт}.
\end{aligned}$$

Баланс мощностей сошелся, следовательно, задача решена правильно.

## ЗАНЯТИЕ 5,6. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

### *Краткие теоретические сведения*

Любой синусоидальный процесс, изменяющийся по синусоидальному закону (ток, напряжение, ЭДС и т. д.), можно изобразить в виде вектора.

Для построения векторных диаграмм необходимо знать фазовые соотношения между током и напряжением в элементах цепи. На рис. 10 представлены фазовые соотношения на элементах R, L, C.

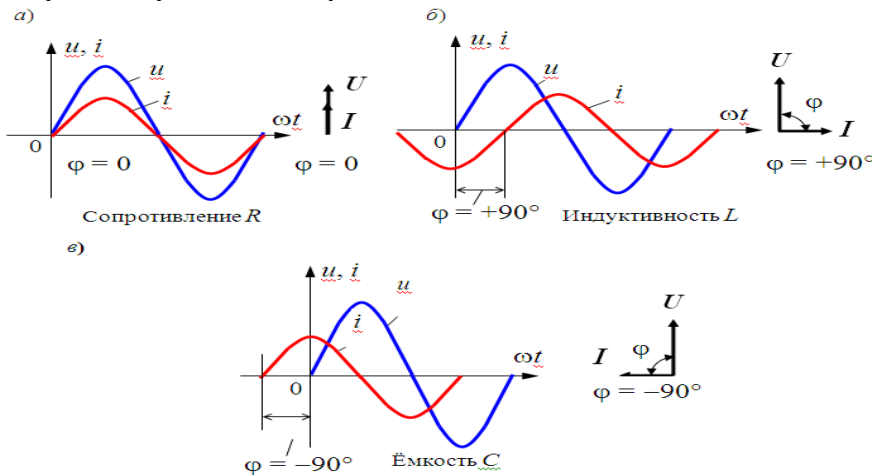


Рис. 10. Фазовые соотношения на элементах R, L и C.

При этом синусоидальные токи и напряжения изображены в виде мгновенных функций и соответствующих им векторов.

Кроме этого, рекомендуем проработать материал темы 3 опорного конспекта.

**Пример.** Катушка индуктивности с параметрами  $R$  и  $L$  соединена последовательно с сопротивлением  $R_1 = 100$  Ом и подключена к источнику синусоидального напряжения с частотой  $f = 50$  Гц (рис. 11). В цепь включены три вольтметра электромагнитной системы, показания которых известны:  $U_1 = 100$  В,  $U_2 = 100$  В,  $U = 175$  В.

Требуется определить параметры  $R$  и  $L$  катушки индуктивности, угол сдвига фаз  $\varphi_{RL}$  между напряжением и током катушки и угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током цепи. Задачу решить с помощью векторной диаграммы графически.

**Решение.** На основании второго закона Кирхгофа  $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$  строим векторную диаграмму напряжений (рис. 5).

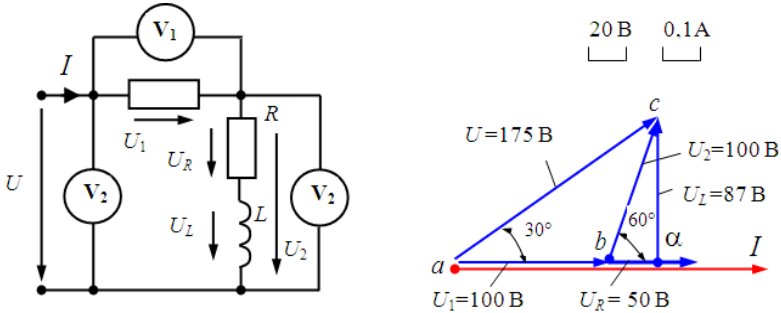


Рис.11. Векторная диаграмма для простой цепи переменного тока

Для этого проводим в произвольном направлении вектор тока  $\bar{I}$ , действующее значение которого

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А.}$$

Вектор напряжения  $\bar{U}_1$  совпадает по фазе с вектором тока  $\bar{I}$  (как напряжение на активном сопротивлении), поэтому откладывая



ем  $\bar{U}_1$  вдоль  $\bar{I}$  в принятом масштабе напряжений. Векторы  $\bar{U}$  и  $\bar{U}_2$  действующих значений напряжений опережают вектор  $\bar{I}$  тока по фазе (как напряжения индуктивной цепи), и поэтому откладываем их от вектора  $\bar{I}$  против часовой стрелки. Из начала вектора  $\bar{U}_1$  (точка а) описываем циркулем дугу окружности радиусом  $U$ , а из конца вектора  $\bar{U}_1$  (точка б) дугу окружности радиусом  $U_2$ . Пересечение этих двух дуг (точка с) определяет положение векторов  $\bar{U}$  и  $\bar{U}_2$  на векторной диаграмме. Затем из точки "с" опускаем перпендикуляр  $cd$  на направление вектора  $\bar{I}$  и таким образом разлагаем вектор  $\bar{U}$  на две составляющие: вектор  $\bar{U}_R$ , совпадающий по фазе с вектором тока  $\bar{I}$ , и вектор  $\bar{U}_L$ , опережающий  $\bar{I}$  на  $90^\circ$ . Измерив длину этих векторов линейкой, получаем  $U_R = 50$  В и  $U_L = 87$  В.

Теперь находим активное  $R$  и индуктивное  $X_L$  сопротивления катушки:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{50}{1} = 50 \text{ Ом}; \quad X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{87}{1} = 87 \text{ Ом}.$$

Индуктивность катушки:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{87}{314} = 0,27 \text{ Гн, где } \omega = 2\pi f = 314 \text{ 1/с}.$$

Проверку расчетов производим по формуле (для катушки)

$$Z_K = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{50^2 + 87^2} = 100 \text{ Ом},$$

что совпадает с полным сопротивлением катушки, полученным в результате непосредственных измерений:

$$Z_K = \frac{U_2}{I} = \frac{100}{1} = 100 \text{ Ом}.$$

Угол сдвига фаз  $\varphi_{RL}$  между напряжением и током в катушке индуктивности и угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током

всей цепи определяем из векторной диаграммы путем непосредственных измерений с помощью транспортира:  $\varphi_{RL} = 60^\circ$ ;  $\varphi = 30^\circ$ .

**Задание для самостоятельной работы**

Схема электрической цепи (рис. 12) состоит из последовательно соединенных активного  $R$  и реактивного  $X$  сопротивлений.

Требуется определить параметры  $R$  и  $X$ , а также  $L$  или  $C$  этой цепи, используя дополнительное сопротивление  $R_1$ , величина которого известна, и только амперметры или только вольтметры электромагнитной системы. Частота  $f$  источника питания цепи известна.

Данные для расчета представлены в табл. 4

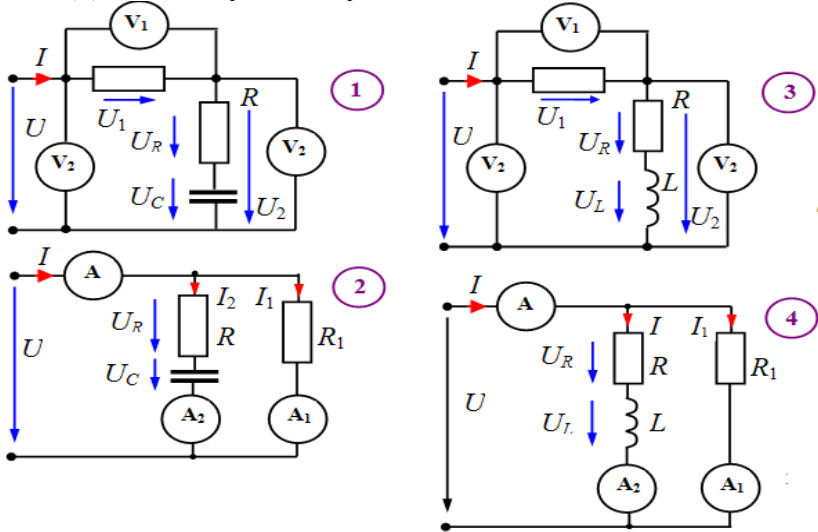


Рис.12. Электрические цепи с последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений

Таблица 4.

Исходные данные по вариантам

Последняя цифра студента по списку журнала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер схемы	2	1	4	2	1	2	4	2	1	4
$U_1, В$	20	10	20	15	10	20	15	10	15	10
$U_2, В$	20	20	14	14	14	11,5	11,5	11,5	20	30
$U, В$	34,5	26,5	31,5	27	22,5	30,5	25,5	21	30,5	35,5
$R_1, Ом$	10	5	4	10	2,5	10	3	2	7,5	5
$I_1, А$	10	15	10	10	15	20	15	10	15	15
$I_2, А$	16	16	20	16	20	20	24	20	16	20
$I, А$	25	30	27,5	22,5	32	38,5	34	26,5	27	31
$R_1, Ом$	5	2	4	6	3	5	3	4	6	2
$f, Гц$	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500

## ЗАНЯТИЕ 7,8. РАСЧЕТ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

### *Краткие теоретические сведения*

Схема цепи с последовательным соединением заданных величин  $RLC$  и выбранные для нее направления действующих значений тока и напряжений представлены на рис. 13,а. Для этой одноконтурной цепи справедлив второй закон Кирхгофа для действующих значений напряжений в векторной форме записи:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C. \quad (4)$$

При этом вектор  $\bar{U}_R$  совпадает с вектором тока  $\bar{I}$  цепи по фазе; вектор  $\bar{U}_L$  опережает вектор тока  $\bar{I}$  по фазе на  $90^\circ$ , вектор  $\bar{U}_C$  отстает от вектора тока  $\bar{I}$  по фазе на  $90^\circ$ . Откладывая векторы  $\bar{U}_R$ ,  $\bar{U}_L$  и  $\bar{U}_C$  друг за другом под указанными выше углами относительно тока, получаем векторную диаграмму, показанную на рис.

13, б. Векторы  $\bar{U}_R$ ,  $\bar{U}_L$  и  $\bar{U}_C$  образуют прямоугольный треугольник напряжений со сторонами  $\bar{U}$ ,  $\bar{U}_R$  и  $(\bar{U}_L - \bar{U}_C)$ . По теореме Пифагора имеем

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (5)$$

В этой формуле:

$$U_R = IR, \quad U_L = IX_L, \quad U_C = IX_C \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = Iz, \quad (7)$$

где  $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  – полное сопротивление данной цепи.

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током на входе цепи, как видно из треугольника напряжений, показанного на рис. 13,б, определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\text{или } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_L - U_C}{U_R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (8)$$

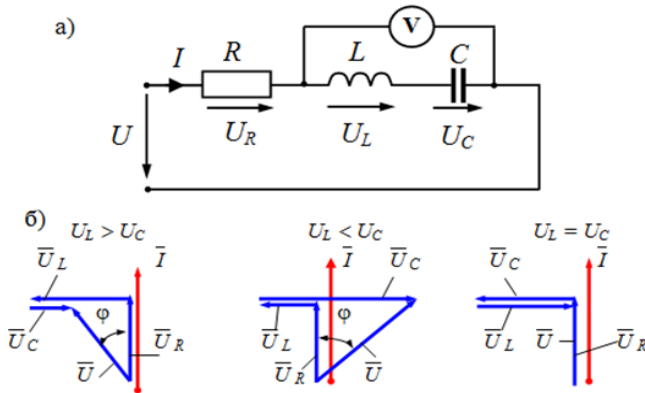


Рис.13. Схема цепи с последовательным соединением RLC-элементов

Заметим, что а) при  $U_L > U_C$   $\varphi > 0$  и цепь имеет индуктивный характер – вектор тока  $\bar{I}$  отстает от вектора напряжения  $\bar{U}$  по фазе; б) при  $U_L < U_C$   $\varphi < 0$  и цепь имеет емкостной характер – ток  $\bar{I}$  определяет напряжение  $\bar{U}$  по фазе; в) при  $U_L = U_C$ ,  $\varphi = 0$  цепь имеет чисто активный характер – ток и напряжение цепи совпадают по фазе. В исследуемой цепи наступает **резонанс напряжений**. При этом  $X_L = X_C$  (рис. 13,б) и полное сопротивление цепи  $Z = R$  является минимально возможным, а действующее значение тока цепи  $I = U / R$  – максимально (при неизменном значении  $U$ ).

Частота, при которой в цепи возникает резонанс, называется **резонансной частотой**. Из условия, что при резонансе напряжений  $X_L = X_C$  имеем  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  или  $\omega^2 LC - 1 = 0$ . Отсюда получаем, что угловая резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

**Частотными характеристиками цепи** называются зависимости от частоты величин, характеризующих свойства цепи: тока, напряжения, сопротивления, угла сдвига фаз и т.п.

Для цепи с последовательным соединением R L C рассмотрим следующие частотные характеристики:  $I(\omega)$ ;  $R(\omega)$ ;  $X_L(\omega)$ ;  $X_C(\omega)$ ;  $z(\omega)$ ;  $\varphi(\omega)$ . Используя формулы (5), (6), (7), (8) и изменяя в них значение  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , можно получить графики зависимости тока, сопротивлений и угла сдвига фаз от частоты  $\omega$ .

Активное сопротивление цепи  $R$  остается неизменным; индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L$  изменяется прямо пропорционально частоте; емкостное сопротивление  $X_C = 1/\omega C$  изменяется обратно пропорционально частоте цепи. Полное сопротивление  $z$  цепи изменяется более сложным образом, чем  $X_L$  и  $X_C$ . При  $X_L = X_C$  сопротивление  $z = R$  минимально, а ток в цепи  $I = U/R$  – максимален. При уменьшении угловой частоты  $\omega$  от резонансной до нуля сопротивление  $z$  возрастает за счет увеличения емкостного сопротивления  $X_C$  от  $R$  до бесконечности; при увеличении угловой частоты  $\omega$  от резонансной до бесконечности сопротивление  $z$  возрастает от  $R$  до бесконечности за счет увеличения индуктивного сопротивления  $X_L$ .

Угол сдвига фаз  $\varphi$  (4.5) с изменением угловой частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  изменяется от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  и проходит через нулевое значение при резонансной угловой частоте  $\omega_0$ .

При исследовании радиотехнических цепей широко используются понятия о характеристическом (волновом) сопротивлении  $\rho$ , а также понятия о добротности  $Q$ , затухании  $d$  и абсолютной полосе пропускания  $(\omega_2 - \omega_1)$  цепи.

Сопротивление каждого из двух реактивных элементов исследуемой цепи при резонансе называется **характеристическим (волновым) сопротивлением цепи**:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10)$$

Добротностью  $Q$  цепи с последовательным соединением R L C называется отношение характеристического сопротивления к активному сопротивлению:

$$Q = \frac{P}{R}. \quad (11)$$

Величина добротности  $Q$  показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности и емкости при резонансе превышает напряжение  $U$  на входе цепи. Величина, обратная добротности  $d$ , называется затуханием цепи:

$$d = \frac{P}{Q}. \quad (12)$$

**Абсолютная полоса пропускания**  $(\omega_2 - \omega_1)$  – это полоса частот вблизи резонансной частоты, в границах которой действующее значение тока уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз; на границах этой полосы  $R = X$ , а угол сдвига фаз  $\varphi = 45^\circ$ . Заметим, что в формуле для полосы пропускания  $\omega_2 > \omega_0$ , а  $\omega_1 < \omega_0$ . Полоса пропускания  $(\omega_2 - \omega_1)$  связана с добротностью  $Q$  и затуханием  $d$  следующим соотношением:

$$(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 d. \quad (13)$$

Чем меньше эта полоса, тем больше добротность  $Q$  и тем круче изменяется кривая тока при изменении частоты  $\omega$  от резонансного значения. Для сокращения полосы пропускания цепь с последовательным соединением  $L$  и  $C$  должна иметь как можно меньшее значение  $R$  – формулы (11) и (13). Границы полосы пропускания можно определить экспериментально из графика  $I(\omega)$ , если на нем провести линию, параллельную оси  $\omega$  на уровне  $I/\sqrt{2}$ . Пересечение этой линии с кривой тока определяет значение частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  полосы пропускания (рис. 16).

**Схема цепи с параллельным соединением**  $R$   $L$   $C$  и выбранные направления токов и напряжений показаны на рис. 14,а.

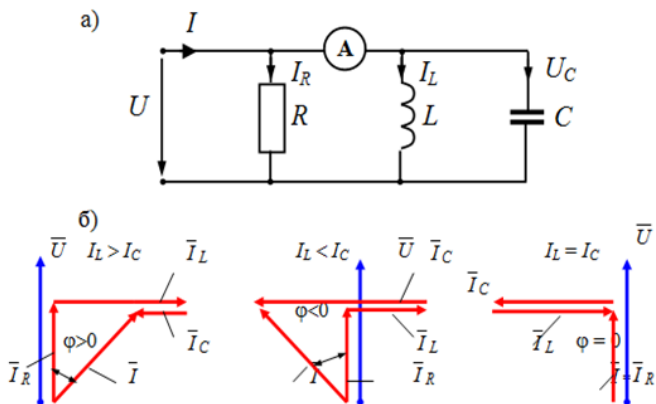


Рис. 14. Схема цепи с параллельным соединением RLC-элементов

Исследуемая цепь имеет всего два узла: 1 и 2. Для нее справедлив первый закон Кирхгофа в векторной форме записи:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C . \quad (14)$$

При этом  $\bar{I}_R$  совпадает по фазе с вектором  $\bar{U}$  напряжения цепи; вектор  $\bar{I}_L$  отстает от вектора  $\bar{U}$  на  $90^\circ$ ; вектор  $\bar{I}_C$  опережает вектор  $\bar{U}$  на  $90^\circ$ . Откладывая векторы  $\bar{I}_R$ ,  $\bar{I}_L$  и  $\bar{I}_C$  относительно вектора  $\bar{U}$  под указанными выше углами и выстраивая векторы  $\bar{I}_R$ ,  $\bar{I}_L$  и  $\bar{I}_C$  друг за другом, находим их сумму  $\bar{I}$  и получаем векторную диаграмму цепи, которая показана на рис. 14, б. На этой диаграмме векторы  $\bar{I}_R$ ,  $\bar{I}_L$ ,  $\bar{I}_C$  и  $\bar{I}$  образуют прямоугольный треугольник токов со сторонами  $I_R$ ,  $(I_L - I_C)$  и  $I$ .

По теореме Пифагора имеем

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} . \quad (15)$$

В этой формуле

$$I_R = \frac{U}{R} = UG ; \quad I_L = \frac{U}{X_L} = Ub_L ; \quad I_C = \frac{U}{X_C} = Ub_C . \quad (16)$$



Здесь  $G = \frac{1}{R}$  – активная проводимость цепи;

$b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$  – реактивная индуктивная проводимость цепи;

$b_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$  – реактивная емкостная проводимость цепи.

Подставляя (16) в (15), получим

$$I = U\sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = Uy, \quad (17)$$

где

$$y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} \quad (18)$$

– полная проводимость данной цепи.

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током на входе цепи данной цепи определяется, как это видно из треугольника токов, соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{b_L - b_C}{G} \quad \text{или} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_L - I_C}{I_R} = \operatorname{arctg} \frac{b_L - b_C}{G}. \quad (19)$$

Легко заметить, что а) если  $I_L > I_C$ , то  $\varphi > 0$  и цепь имеет индуктивный характер – вектор тока  $\vec{I}$  отстает по фазе от вектора  $\vec{U}$  приложенного напряжения; б) если  $I_L < I_C$ , то  $\varphi < 0$  и цепь имеет емкостной характер – вектор  $\vec{I}$  тока цепи опережает по фазе вектор  $\vec{U}$  приложенного напряжения; в)  $I_L = I_C$ , то  $\varphi = 0$  и цепь имеет чисто активный характер – вектор тока  $\vec{I}$  и вектор напряжения  $\vec{U}$  совпадают по фазе. В цепи при этих условиях возникает резонанс токов. При этом  $b_L = b_C$  (16), и полная проводимость цепи  $y_0 = G$  (17) является минимально возможной, и, следовательно, ток в цепи  $I = UG$  является также минимально возможным (при неизменной величине  $U$  действующего значения приложенного к цепи напряжения).

Для цепи с параллельным соединением R L C рассмотрим следующие частотные характеристики:  $I(\omega)$ ;  $G(\omega)$ ;  $b_L(\omega)$ ;  $b_C(\omega)$ ;  $y(\omega)$ ;  $\varphi(\omega)$ . Используя формулы (15), (16); (17) и (18) и изменяя в них частоту  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , можно получить графики зависимости тока, проводимостей и угла сдвига фаз между напряжением и током цепи от частоты  $\omega$ .

Активная проводимость  $G$  в пределах частот остается величиной неизменной; емкостная проводимость  $b_C = \omega C$  изменяется прямо пропорционально частоте  $\omega$ , индуктивная проводимость  $b_L = \frac{1}{\omega L}$  изменяется обратно пропорционально частоте. Полная проводимость  $y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2}$  изменяется более сложным образом, чем  $b_L$  и  $b_C$ . При резонансе, когда  $\frac{1}{\omega L} = \omega C$ , проводимость цепи минимальна и равна активной проводимости  $y = G$ , а угол сдвига фаз  $\varphi = 0$  (19). При уменьшении частоты  $\omega$  от резонансной до нуля кривая  $y(\omega)$  возрастает до бесконечности за счет увеличения индуктивной проводимости  $b_L = \frac{1}{\omega L}$ ; при увеличении частоты цепи  $\omega$  от резонансной до бесконечности кривая  $y(\omega)$  возрастает до бесконечности за счет увеличения емкостной проводимости  $b_C = \omega C$ . Частотная характеристика тока  $I = Uy$  при неизменной величине  $U$  повторяет по форме частотную характеристику  $y(\omega)$ .

Частота, при которой в цепи наступает резонанс, называется **резонансной частотой**. Из условия резонанса  $b_L = b_C$  имеем

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \text{ или } \omega^2 LC - 1 = 0$$

Отсюда получаем, что резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{20}$$

**Характеристической (волновой) проводимостью** цепи с параллельным соединением R L C называется проводимость каждого из двух реактивных элементов цепи при резонансе

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (21)$$

Легко видеть, что волновая проводимость  $\gamma$  и волновое сопротивление цепи  $\rho$  (10) взаимно-обратные величины.

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (22)$$

Добротность Q параллельного контура определяется как отношение характеристической проводимости  $\gamma$  к активной проводимости G.

$$Q = \frac{\gamma}{G} = \frac{1}{d} = \frac{R}{\rho}. \quad (23)$$

Здесь d – затухание цепи.

Добротность параллельного контура показывает, во сколько раз токи в реактивных элементах больше общего тока цепи при резонансе. В отличие от цепи с последовательным соединением R L C чем меньше R, тем ниже добротность параллельной цепи (контура). Поэтому для увеличения добротности, здесь следует увеличить активное сопротивление R цепи.

Понятие о полосе пропускания для цепи с параллельным соединением R L C такое же, как и для цепи с последовательным соединением R L C.

Границы полосы пропускания можно определить из графика  $I(\omega)$ , если на нем провести линию, параллельную оси  $\omega$  на уровне  $I_0 \sqrt{2}$ . Пересечение этой линии с кривой тока дает значения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  полосы пропускания.

**Пример.** Для цепи, изображенной на рис. 13,а, известны следующие величины: R = 400 Ом; L =  $80 \cdot 10^{-3}$ , Гн; C =  $0,125 \cdot 10^{-6}$  Ф; U = 20 В.

Требуется определить: 1) угловую резонансную частоту  $\omega_0$ ; 2) действующее значение  $I$  тока цепи и действующие значения напряжений на активном сопротивлении  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  при резонансе; 3) построить векторную диаграмму цепи при резонансе; 4) определить при резонансе показание вольтметра электромагнитной системы, включенного так, как это показано на рис. 13,а; 5) построить частотные характеристики полного сопротивления  $z$ , действующего значения тока  $I$  цепи и угла сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током в пределах от  $0,3\omega_0$  до  $2\omega_0$  при неизменном действующем значении приложенного к цепи напряжения; 6) определить величину добротности  $Q$  цепи аналитически и графически; сравнить полученные результаты между собой.

### Решение

1. Определяем угловую резонансную частоту цепи:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 10^{-3} \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10000 \frac{1}{\text{с}}.$$

2. Определяем действующее значение тока в цепи при резонансе:

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{20}{400} = 0,05 \text{ А}.$$

3. Определяем действующие значения напряжений на каждом из элементов цепи при резонансе:

$$U_R = I_0 R = 0,05 \cdot 400 = 20 \text{ В};$$

$$U_L = I_0 X_{L0} = I_0 \omega_0 L = 0,05 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ В};$$

$$U_C = I_0 X_{C0} = I_0 \frac{1}{\omega_0 C} = 0,05 \cdot \frac{1}{10^4 \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ В}.$$

Проверку вычислений производим по формуле (5):

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{20^2 + (40 - 40)^2} = 20 \text{ В}.$$

4. Строим на основании полученных данных векторную диаграмму цепи (рис. 15). Предварительно выбираем масштабы тока и напряжения так, чтобы диаграмма расположилась на половине тетрадного листа. В нашем примере принимаем, что масштаб тока  $m_i = 0,01$  А/см, а масштаб напряжения  $m_u = 2,5$  В/см. Из диаграммы видно, что при резонансе векторы действующих значений напряжений на индуктивности и на емкости численно равны между собой и находятся в противофазе друг к другу (т. е. под углом  $180^\circ$ ). При этом  $U_L - U_C = 0$ , поэтому показания вольтметра электромагнитной системы составляет ноль вольт.

5. Рассчитываем и строим частотные характеристики полного сопротивления цепи  $z(\omega)$ , тока  $I(\omega)$  и угла сдвига фаз  $\varphi(\omega)$  в пределах от  $0,3/\omega_0$  до  $2/\omega_0$ . Для их построения воспользуемся формулами (6), (7) и (8). Результаты расчетов сведем в табл. 5.

Частотные характеристики, построенные по данным табл. 5, показаны на рис. 16.

Таблица 5.

Результаты расчета частотных характеристик

Расчетные величины частота $1/c$	$X_L$ , Ом	$X_C$ , Ом	$z$ , Ом	$I$ , А	$\varphi$ , град
0,3 $\omega_0 = 3000$	240	2667	2459	0,0081	-81
0,6 $\omega_0 = 6000$	480	1330	942	0,021	-65
0,8 $\omega_0 = 8000$	640	1000	538	0,037	-42
1 $\omega_0 = 10000$	800	800	400	0,05	0
1,3 $\omega_0 = 13000$	1040	615	583	0,034	+47
1,6 $\omega_0 = 16000$	1280	500	877	0,023	+63
2 $\omega_0 = 20000$	1600	400	1265	0,016	+71

Пример расчета для угловой частоты  $\omega = 0,6 \omega_0$ :

$$X_L = \omega L = 6000 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 480 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6000 \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}} = 1330 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{400^2 + (480 - 1330)^2} = 942 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{480 - 1330}{400} = -65^\circ;$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{20}{942} = 0,021 \text{ А.}$$

6. Рассчитываем величину добротности Q по соотношению (12)

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{80 \cdot 10^{-3}}{0,125 \cdot 10^{-6}}}}{400} = 2.$$

7. Определяем величину добротности Q по графику тока I, представленному на рис. 16. Для этого на уровне  $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707I_0$  проводим горизонтальную линию до пересечения ее с кривой тока I.

Отрезок ab этой линии определяет величину абсолютной полосы пропускания  $(\omega_2 - \omega_1) = 5000 \text{ 1/с}$ . В соответствии с (14) имеем

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{10000}{5000} = 2.$$

Эта величина сходится со значением Q, полученным аналитически в п. 6 решения данной задачи.

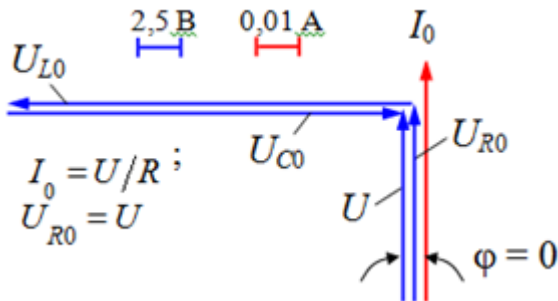


Рис.15. Векторная диаграмма цепи с последовательным соединением RLC-элементов

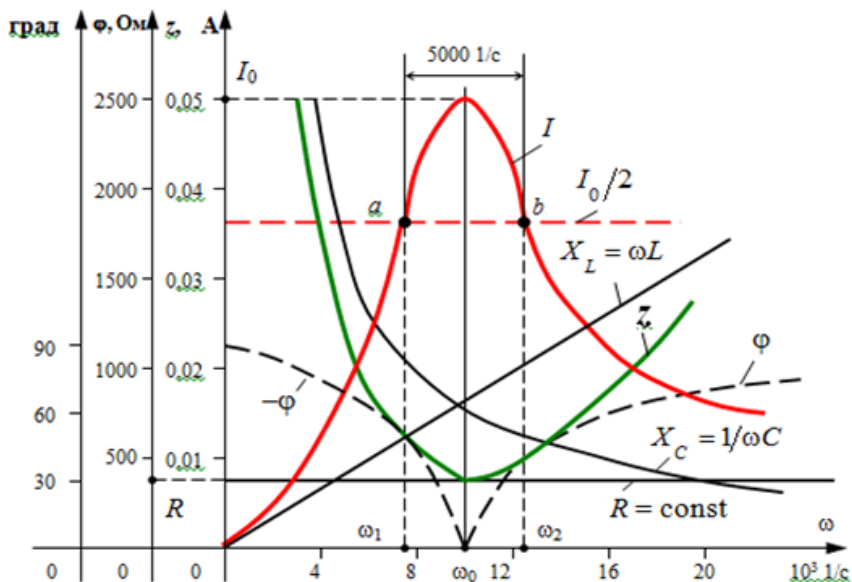


Рис.16. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением RLC-элементов

**Задание для самостоятельной работы.**

Вывести выражение для параметра, при котором наступает резонанс в цепи (рис.17). Параметры остальных элементов считать заданными. Схема и параметр, для которого следует вывести выражение, указаны в табл. 6.

Таблица 6.

Исходные данные по вариантам

Номер варианта по списку										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Схема на рис.17	а	б	в	г	д	б	а	д	в	г
Буква рис. 17 выбирается по варианту										
Параметр	R	L	C	ω	R	L	C	ω	R	L
Параметр выбирается по варианту										

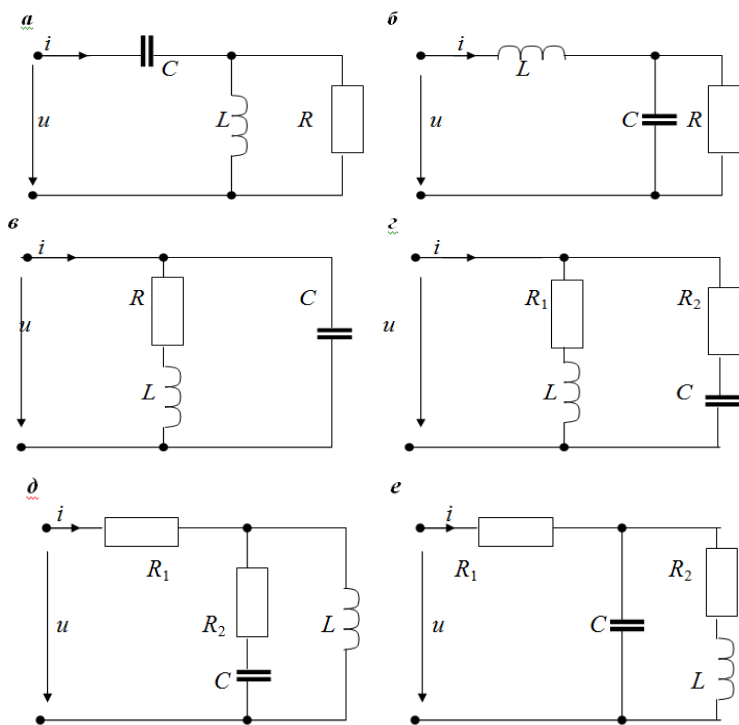


Рис.17. Схемы цепей

## ЗАНЯТИЕ 9, 10. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

### *Краткие теоретические положения*

Для расчета цепей комплексным методом надо уметь выполнять алгебраические вычисления с комплексными числами. Комплексный (символический) метод расчета цепей основан на том, что вектора, изображающие функции времени, могут быть записаны с помощью комплексных чисел, например, в показательной форме:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}; \quad \dot{U} = U e^{j\psi_u},$$



где  $I$  и  $U$  – модули комплексных действующих значений тока  $\dot{I}$  и напряжения  $\dot{U}$ , равные действующим значениям тока и напряжения;  $\psi_i$  и  $\psi_u$  – аргументы комплексных действующих значений тока и напряжения, равные начальным фазам тока и напряжения. Напомним, что положительные углы (фазы) откладываются от оси вещественных чисел против часовой стрелки, а отрицательные углы (фазы) – по часовой стрелки от оси вещественных чисел.

Аналогичные соотношения аналогичные можно записать и для комплексных амплитуд тока, напряжения и ЭДС:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \quad \dot{E}_m = E_m e^{j\psi_u},$$

$$\text{где } \dot{I}_m = \dot{I}\sqrt{2}; \quad \dot{U}_m = \dot{U}\sqrt{2}; \quad \dot{E}_m = \dot{E}\sqrt{2}.$$

В комплексном методе вводят понятия о комплексном сопротивлении  $\underline{Z}$  и комплексной проводимости  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

Для параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  комплексные сопротивления равны:

$$\underline{Z}_R = R; \quad \underline{Z}_L = jX_L; \quad X = \omega L; \quad \underline{Z}_C = -jX_C; \quad X_C = 1/\omega C.$$

Важно отметить, что уравнения связи между комплексными токами и напряжениями для всех элементов становятся алгебраическими:

$$\dot{U} = \underline{Z}\dot{I},$$

а комплексные действующие значения токов и напряжений удовлетворяют уравнениям закона Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^N \dot{I}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^M \dot{U}_k = \sum_{k=1}^M \dot{I}_k \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^N \dot{E}_k.$$

Последние уравнения являются алгебраическими, а не дифференциальными, что имело бы место при оперировании с мгновенными значениями токов и напряжений в результате расчета цепей с реактивными элементами. Более того, эти уравнения аналогичны уравнениям цепи постоянного тока. Поэтому все методы расчета цепей постоянного тока можно применить для расчета комплексных токов и напряжений.

**Пример 1.** Определить мгновенное значение тока на входе цепи (рис. 18), у которой,  $x_C = 12$  Ом,  $x_L = 3$  Ом,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $u = 12\sin\omega t$ .

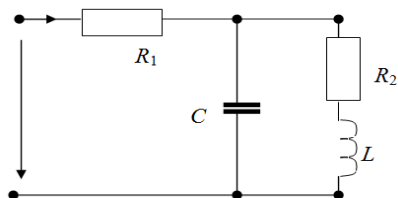


Рис.18. Простая цепь переменного тока

**Решение 1.** Изобразим синусоидальное входное напряжение и параметры реактивных элементов  $L$  и  $C$  комплексными числами:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j0} = 12; jX_L = j3, \text{ Ом}; -jX_C = -12, \text{ Ом}.$$

Если начальная фаза  $\psi_u$  входного напряжения в условии задачи не задана, то ее рекомендуется взять равной нулю ( $\psi_u = 0$ ).

2. Используя закон Ома в комплексной форме, составим уравнение для определения комплексной амплитуды тока на входе цепи:

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m / \underline{Z},$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление цепи определяется по аналогичным правилам расчета полного сопротивления резистивной цепи постоянного тока:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{-jX_C(R_2 + jX_L)}{R_2 + jX_L - jX_C} = R_1 + \frac{X_C X_L - jX_C R_2}{R_2 + j(X_L - X_C)} =$$

$$= 10 + \frac{36 - j120}{10 - j12} = 7,37 - j3,44.$$

3. Определим амплитуду комплексного тока на входе цепи:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{12}{7,37 - j3,44} = \frac{12}{8,1e^{-j25^\circ}} = 1,48e^{j25^\circ}.$$

4. Преобразуем амплитуду комплексного тока на входе цепи в мгновенное значение синусоидального тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 1,48 \sin(\omega t + 25^\circ).$$

**Пример 2.** Для электрической цепи, приведенной на рис. 19, даны следующие параметры:  $L_1=101,91$  мГн,  $L_2=145,31$  мГн,  $L_3=63,69$  мГн,  $C_1=75,8$  мкФ,  $C_2=90,99$  мкФ,  $C_3=106,16$  мкФ,  $i_3=14,14 \sin(314t + 150^\circ)$  А, сопротивления  $R_2=R_3=10$  Ом,  $f=50$  Гц. Требуется: определить комплексные сопротивления элементов схемы, ветвей схемы, токи во всех ветвях, напряжения между всеми указанными точками, мощность всех ветвей, мощность на входе цепи, построить векторную диаграмму напряжений и токов.

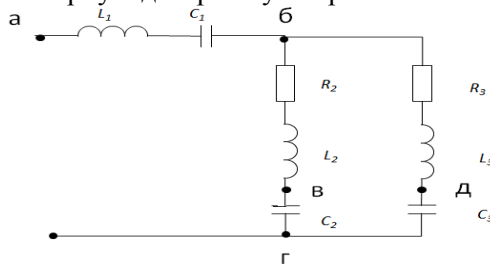


Рис.19. Разветвленная цепь переменного тока

**Решение:**

1. Определение комплексных сопротивлений элементов схемы  
Индуктивные сопротивления:

$$\underline{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j314 \cdot 101,91 \cdot 10^{-3} = j32 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{L2} = j\omega L_2 = j314 \cdot 145,31 \cdot 10^{-3} = j45 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{L3} = j\omega L_3 = j314 \cdot 63,69 \cdot 10^{-3} = j20 \text{ Ом}.$$

Емкостные сопротивления:

$$\underline{Z}_{C1} = -j \frac{1}{\omega C_1} = -j \frac{10^6}{314 \cdot 75,8} = -j42 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C2} = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j \frac{10^6}{314 \cdot 90,99} = -j35 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C3} = -j \frac{1}{\omega C_3} = -j \frac{10^6}{314 \cdot 106,16} = -j30 \text{ Ом}.$$

2. Определение комплексных полных сопротивлений ветвей схемы

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{L1} + Z_{C1} = j32 - j42 = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \underline{Z}_{L2} + Z_{C2} = 10 + j45 - j35 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \underline{Z}_{L3} + Z_{C3} = 10 + j20 - j30 = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

3. Определение комплексного действующего значения тока третьей ветви

$$\dot{I}_3 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{i3}} = 10e^{i150^\circ} = 10(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ) = 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \text{ А}.$$

4. Определение комплексного действующего напряжения 3-ей ветви

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_{\text{бр}} = \dot{I}_3 \underline{Z}_3 = 10e^{i150^\circ} \cdot 10\sqrt{2}e^{-i45^\circ} = 100\sqrt{2}e^{i105^\circ} \text{ В}.$$

Поскольку ветви 2 и 3 параллельны, то  $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{U}_{\text{бр}}$ .

5. Определение комплексного действующего тока 2-ой ветви

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{100\sqrt{2}e^{i105^\circ}}{10\sqrt{2}e^{i45^\circ}} = 10e^{i60^\circ} = 10(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = 10\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ А}$$

6. Определение комплексного действующего тока 1-ой ветви

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3,66 + j13,66 = \\ &= \sqrt{3,66^2 + 13,66^2} e^{j\left(\arctg \frac{13,66}{3,66}\right)} = 10\sqrt{2}e^{i105^\circ} \text{ А}\end{aligned}$$

7. Определение комплексного действующего напряжения 1-ой ветви

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{\text{аб}} = \dot{I}_1 Z_1 = 10\sqrt{2}e^{i105^\circ} \cdot 10e^{-i90^\circ} = 100\sqrt{2}e^{i15^\circ} \text{ В.}$$

8. Определение комплексного действующего напряжения на входе цепи

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\text{ар}} = \dot{U}_{\text{аб}} + \dot{U}_{\text{бр}} &= 100\sqrt{2}(\cos 15^\circ + j\sin 15^\circ + \cos 105^\circ + j\sin 105^\circ) = \\ &= 100(1 + j\sqrt{3}) = 200e^{i60^\circ} \text{ В.}\end{aligned}$$

9. Определение комплексного действующего напряжения между точками б и в

$$\dot{U}_{\text{об}} = \dot{I}_2 (R_2 + Z_{L2}) = 10e^{i60^\circ} (10 + j45) = 10e^{i60^\circ} 46,1e^{i77^\circ} = 461e^{i137^\circ} \text{ В.}$$

10. Определение комплексного действующего напряжения между точками в и г

$$\dot{U}_{\text{вр}} = \dot{I}_2 Z_{C2} = 10e^{i60^\circ} (-j35) = 10e^{i60^\circ} 35e^{-i90^\circ} = 350e^{-i30^\circ} \text{ В.}$$

11. Определение мгновенных значений токов и напряжений

$$\begin{aligned}
i_3 &= 14,14 \sin(314t + 150^\circ) \text{ A} && \text{было задано,} \\
i_2 &= 14,14 \sin(314t + 60^\circ) \text{ A} \\
i_1 &= 20 \sin(314t + 105^\circ) \text{ A} \\
u_{a6} &= 200 \sin(314t + 15^\circ) \text{ В} \\
u_{6r} &= 200 \sin(314t + 105^\circ) \text{ В} \\
u_{ar} &= 200\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{ В}
\end{aligned}$$

## 12. Определение мощностей

Полная мощность на входе цепи

$$\tilde{S} = \dot{U}_{ar}^* I_1 = 200e^{j60^\circ} 10\sqrt{2}e^{-j105^\circ} = 2000\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 2000 - j2000 \text{ ВА.}$$

Полная мощность в ветвях

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_{a6}^* I_1 = 100\sqrt{2}e^{j15^\circ} 10\sqrt{2}e^{-j105^\circ} = 2000e^{-j90^\circ} = j2000 \text{ ВА,}$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{6r}^* I_2 = 100\sqrt{2}e^{j105^\circ} 10e^{-j60^\circ} = 1000\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 1000 + j1000 \text{ ВА,}$$

$$\tilde{S}_3 = \dot{U}_{6r}^* I_3 = 100\sqrt{2}e^{j105^\circ} 10e^{-j150^\circ} = 1000\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 1000 - j1000 \text{ ВА.}$$

## 13. Проверка баланса мощности

Активная мощность на входе цепи должна быть равна сумме активных мощностей в каждой ветви, то есть  $P=P_1+P_2+P_3$ .

Реактивная мощность на входе цепи должна быть равна сумме реактивных мощностей в каждой ветви, то есть  $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ . Согласно нашим расчетам получаем:

$$P=2000 \text{ Вт; } P_1+P_2+P_3=0+1000+1000=2000 \text{ Вт.}$$

$$Q=-2000 \text{ Вар; } Q_1+Q_2+Q_3=-2000+1000-1000=-2000 \text{ Вар.}$$

Баланс мощностей сошелся, следовательно, задача решена правильно.

14. Построение векторных диаграмм токов и напряжений (рис. 20)

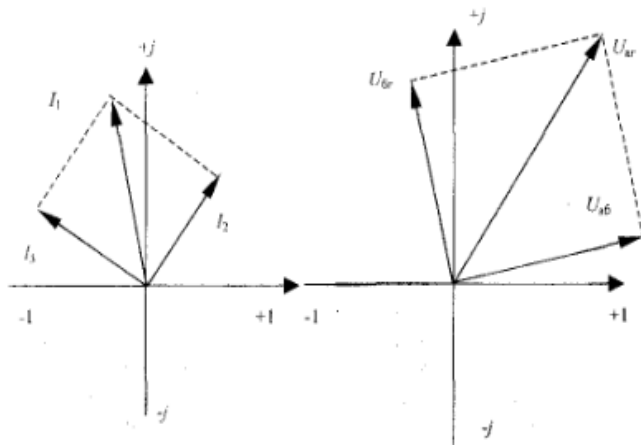


Рис. 20. Векторные диаграммы токов и напряжений

## ЗАНЯТИЕ 11, 12. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### *Краткие теоретические сведения*

Трехфазная цепь может быть соединена звездой и треугольником.

Трехфазная цепь, соединенная по схеме, «звезда», имеет ряд особенностей (рис. 21).

1. Фазные токи равны токам в линейных проводах:  $\dot{I}_\phi = \dot{I}_л$ .

2. Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_N$  равен алгебраической сумме комплексных токов всех трех фаз.

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N . \quad (3)$$

При отсутствии или обрыве нейтрального провода

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 .$$

В этом случае, зная два линейных тока, можно легко найти третий ток.

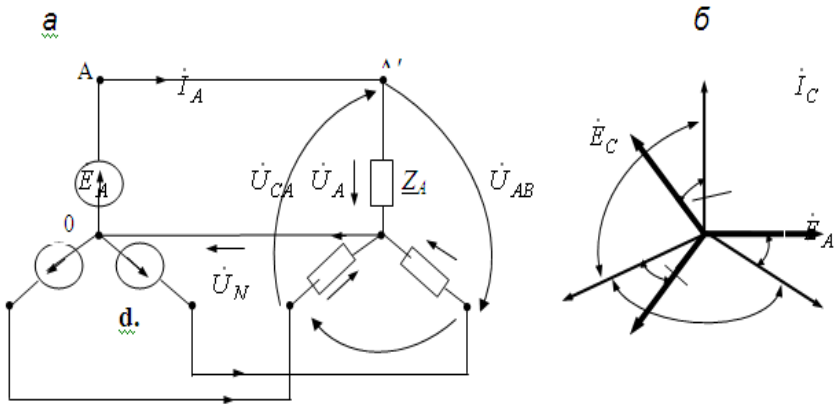


Рис. 21. Схема соединения «звезда»

При симметрии фазных ЭДС и равенстве комплексных сопротивлений всех трех фаз цепи ( $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\Phi = R \pm jX$ ) комплексные токи определяемые в соответствии с формулой закона Ома ( $\dot{I}_\Phi = \dot{U}_\Phi / \underline{Z}_\Phi$ ), имеют одинаковые действующие значения и сдвинуты друг относительно друга по фазе на  $120^\circ$  (как это показано на рис. 21, б). Они образуют симметричную систему фазных токов.

Трехфазная цепь, связанная треугольником, имеет ряд особенностей (рис. 22):

1. Напряжения между линейными проводами ( $\dot{U}_л$ ) одновременно являются и фазными ( $\dot{U}_\Phi$ ) напряжениями:  $\dot{U}_л = \dot{U}_\Phi$ .

2. В трехфазной цепи соединенной треугольником различают фазные ( $\dot{I}_{AB}$ ,  $\dot{I}_{BC}$  и  $\dot{I}_{CA}$ ) и линейные ( $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ ) токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$$



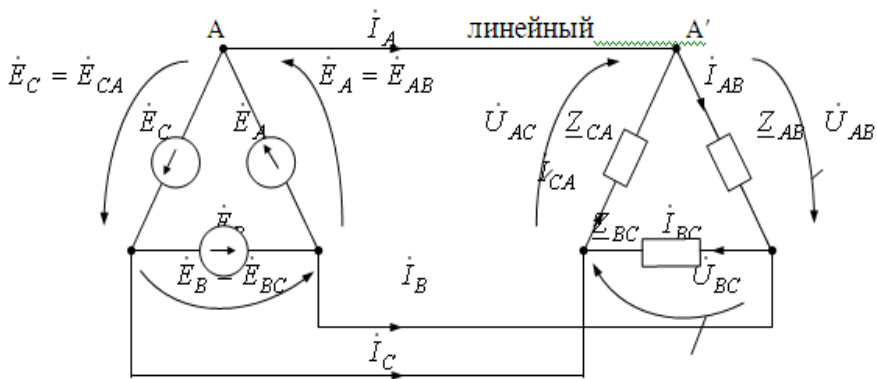


Рис. 22. Схема соединения «треугольник»

В частном случае, при симметрии ЭДС и нагрузки

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

### **Мощность трехфазной цепи**

Для трехфазной симметричной цепи не зависимо от способа ее соединения

$$P = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos \varphi,$$

$$Q = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \sin \varphi,$$

$$S = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}.$$

Построение векторных диаграмм начинают с выбора масштабов тока и напряжения. На комплексной плоскости относительно начала координат, показывают изображения фазных напряжений и соответствующих им фазных токов. Векторы линейных токов и напряжений определяются схемой соединения, т. е. соотношениями между линейными и фазными значениями конкретной схемы.

**Пример 1** Трехфазная цепь (рис. 21, а) состоит из генератора, вырабатывающего симметричную систему ЭДС с действующим значением  $E = 220$  В и симметричного приемника, соединенного «звездой», сопротивление каждой фазы которого составляет

$Z_A = Z_B = Z_C = Z_\phi = R = 22$  Ом. Требуется определить токи и напряжения всех трех фаз приемника, ток в нейтральном проводе, а также построить векторную диаграмму цепи на комплексной плоскости.

*Решение.* 1. Принимаем направления действия ЭДС, токов и напряжений в данной цепи в соответствии с рис. 2.24, а.

2. Определяем комплексные фазные ЭДС генератора. Для этого совмещаем ЭДС фазы А с осью вещественных чисел (рис. 2.29, а) и получаем

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= 220 \text{ В}; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}; \\ \dot{E}_C &= 220e^{+j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.\end{aligned}$$

3. Определяем комплексные линейные напряжения приемника. Для этого воспользуемся 2-м законом Кирхгофа для контуров цепи, образованных фазными ЭДС генератора и линейными напряжениями трехфазного приемника.

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A - \dot{E}_B = [220 - (-110 - j190)] = (330 + j190) = \\ &= \sqrt{330^2 + 190^2} e^{j \arctg \frac{190}{330}} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{BC} &= \dot{E}_B - \dot{E}_C = [(-110 - j190) - (-110 + j190)] = -j380 = 380e^{-j90^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{E}_C - \dot{E}_A = [(-110 + j190) - 220] = -330 + j190 = 380e^{+j150^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Действующие значения всех трех линейных напряжений одинаковы и составляют  $U_L = 380$  В.

4. Определяем комплексные фазные напряжения приемника. В соответствии со 2-м законом Кирхгофа непосредственно из схемы цепи находим, что при наличии нейтрального провода они равны фазным ЭДС генератора:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{E}_A = 220 \text{ В}; & \dot{U}_B &= \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_C &= \dot{E}_C = 220e^{+j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Действующие значения всех трех фазных напряжений одинаковы ( $U_\phi=220$  В) и в  $\sqrt{3}$  раз меньше линейных напряжений ( $U_l=380$  В).

5. Определяем комплексные фазные (они же линейные) токи приемника, используя закон Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{22} = 10e^{-j120^\circ} = (-5 - j8,7) \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{220e^{+j120^\circ}}{22} = 10e^{+j120^\circ} = 10(-0,5 + j8,7) = (-5 + j8,7) \text{ А}.$$

Действующие значения токов во всех трех фазах цепи одинаковы и составляют  $I_\phi = 10$  А. Векторы этих токов образуют симметричную систему, и их сумма, определяющая ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_N$ , в соответствии с формулой (2.45) равна нулю. Следовательно, при симметричном режиме работы нейтральный провод для нормальной работы цепи не нужен.

6. Векторная диаграмма токов и напряжений исследуемой цепи представлена на рис. 23 в двух вариантах.

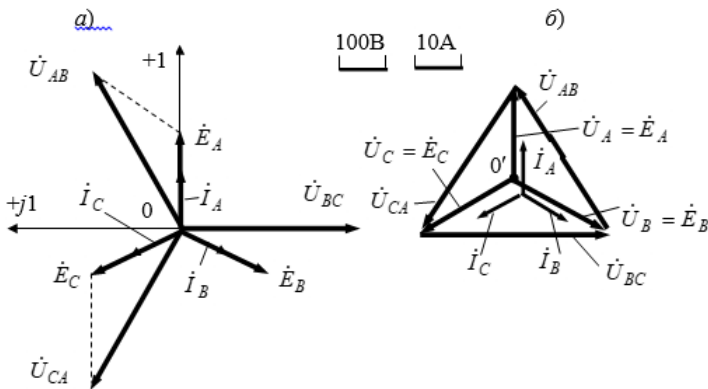


Рис. 23. Векторная диаграмма токов и напряжений

В первом варианте (рис. 23, а) все векторы исходят из начала координат комплексной плоскости. Во втором варианте (рис. 23, б) векторы линейных напряжений перенесены параллельно самим себе так, чтобы они расположились между концами соответствующих векторов фазных напряжений и образовали равносторонний треугольник.

Из этой диаграммы видно, что при симметричном режиме работы достаточно рассчитать токи и напряжения только одной из фаз цепи, например фазы А. Токи и напряжения остальных двух фаз будут такими же по действующему значению, но сдвинуты относительно фазы А по фазе на  $\pm 120^\circ$ .

**Пример 2.** Для трехфазной цепи, приведенной на рис. 24, определить токи, напряжения и мощности всех участков. Вычислить показания ваттметров. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Сопротивление линии  $Z_{л1} = 2 + j2$  Ом. Параметры сопротивлений нагрузки  $Z_2 = -j10$  Ом и  $Z_3 = 45 + j15$  Ом. Активная мощность третьей нагрузки  $P_3 = 8712$  Вт.

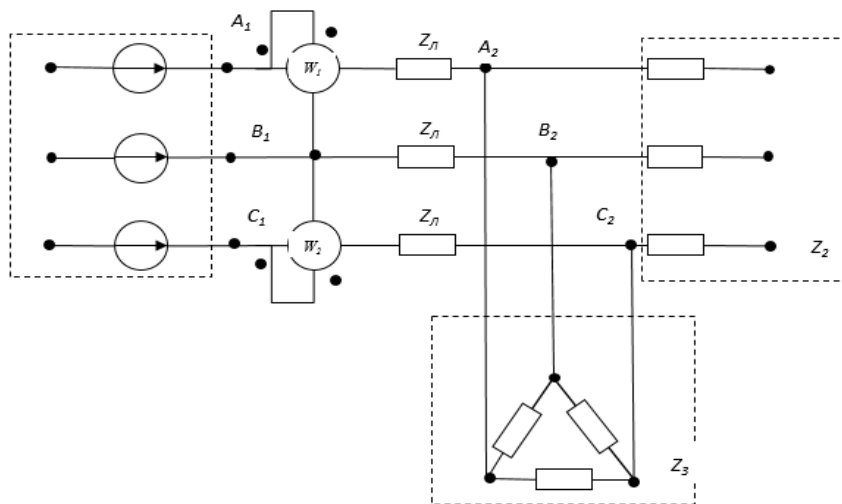


Рис. 24. Трехфазная цепь с двумя приемниками

### Решение

#### 1. Преобразование схемы соединений

В том случае, когда обе нагрузки (2 и 3) имеют схемы соединений  $Y\bar{Y}$ , можно выделить одну фазу, произвести расчет токов и напряжений для этой фазы, записать токи и напряжения для других фаз, сдвинув их на  $120^\circ$  соответственно, и по известным соотношениям определить линейные токи и напряжения.

В данном примере нагрузка 3 имеет схему соединения  $\Delta$ . Преобразуем схему соединений  $\Delta 3$  в  $Y 3$ . Для этого следует пересчитать сопротивление фаз нагрузки 3 по формуле:

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_{AB} \cdot \underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = \frac{\underline{Z}^2}{3\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}}{3},$$

Сопротивления фаз треугольника  $\Delta 3$  равны между собой  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}$ , тогда сопротивление одной фазы для соединения звезда  $Y$  определяется, как  $\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}$ .

Для данного примера приведенное сопротивление одной фазы нагрузки 3

$$\underline{Z}'_3 = \underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{45 + j15}{3} = 15 + j5 = 15,8 \cdot e^{j18} \text{ Ом.}$$

Сопротивление  $\underline{Z}_2$  в показательной форме записи

$$\underline{Z}_2 = 10 \cdot e^{-j90} \text{ Ом.}$$

#### 2. Выделение одной фазы (фазы А)

Электрическая схема фазы А приведена на рис. 25.

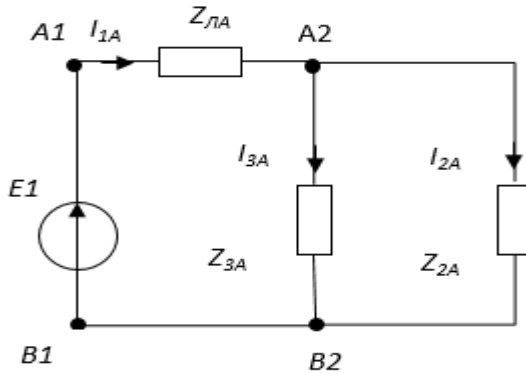


Рис. 25. Электрическая схемы фазы А

3. Определение комплексного действующего значения линейного тока для 3-й нагрузки

Известно, что  $P_3 = 3I_3^2 \cdot R_3$ . Тогда модуль действующего значения линейного тока для 3-й нагрузки

$$I_3 = \sqrt{\frac{P_3}{3R_3}} = \sqrt{\frac{8712}{3 \cdot 15}} = 14 \text{ А.}$$

Начальную фазу тока  $I_3$  фазы А принимаем равной  $0^\circ$ , т.е.  $\psi_{i3} = 0^\circ$ , тогда комплексные действующие значения линейного тока для 3-й нагрузки для фаз А, В, С:

$$\dot{I}_{A3} = 14 \cdot e^{j0} \text{ А; } \dot{I}_{B3} = 14 \cdot e^{-j120} \text{ А; } \dot{I}_{C3} = 14 \cdot e^{j120} \text{ А.}$$

4. Определение комплексных действующих значений фазных напряжений для 3-й и 2-й нагрузок

В соответствии с законом Ома,

$$\dot{U}_{A3} = \dot{I}_{A3} \cdot \underline{Z}'_3 = 14 \cdot e^{j0} \cdot (15 + j5) = 14 \cdot e^{j0} \cdot 15,8 \cdot e^{j18} = 220 \cdot e^{j18} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_{B3} = 220 \cdot e^{-j102} \text{ В; } \dot{U}_{C3} = 220 \cdot e^{j138} \text{ В.}$$

Поскольку нагрузки 2 и 3 соединены параллельно (см. рис), напряжения на их фазах равны:

$$\dot{U}_{A3} = 220 \cdot e^{j18} \text{ В}; \dot{U}_{B3} = 220 \cdot e^{-j102} \text{ В}; \dot{U}_{C3} = 220 \cdot e^{j138} \text{ В.}$$

5. Определение линейного тока для 2-й нагрузки

$$\dot{I}_{A2} = \frac{\dot{U}_{A2}}{\underline{Z}_2} = \frac{220 \cdot e^{j18}}{10 \cdot e^{-j90}} = 22 \cdot e^{j108} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_{B2} = 22 \cdot e^{-j12} \text{ А}; \dot{I}_{C2} = 22 \cdot e^{j228} \text{ А.}$$

6. Определение суммарного тока  $\dot{I}_{A1}$  для 2-й и 3-й нагрузок

По первому закону Кирхгофа  $\dot{I}_{A1} = \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A3}$ .

Величину этого тока можно определить другим способом:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A1} &= \frac{\dot{U}_{A2}}{\underline{Z}_{\Sigma 23}}, \quad \underline{Z}_{\Sigma 23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}'_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{-j10 \cdot (15 + j5)}{-j10 + 15 + j5} = \frac{-j150 + 50}{15 - j5} = \\ &= \frac{(10 - j30) \cdot (3 + j)}{(3 - j) \cdot (3 + j)} = 6 - j8 = 10 \cdot e^{-j52} \text{ Ом,} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{A1} = \frac{220 \cdot e^{j18}}{10 \cdot e^{-j52}} = 22 \cdot e^{j70} \text{ А}; \dot{I}_{B1} = 22 \cdot e^{-j50} \text{ А}; \dot{I}_{C1} = 22 \cdot e^{j190} \text{ А.}$$

7. Определение эквивалентного сопротивления всей схемы

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \underline{Z}_{\Sigma 23} + \underline{Z}_{Л} = 6 - j8 + 2 + j2 = 8 - j6 = 10 \cdot e^{-j37} \text{ Ом.}$$

8. Определение фазного напряжения на входе схемы

$$\dot{U}_{A1} = \dot{I}_{A1} \cdot \underline{Z}'_{\Sigma} = 22 \cdot e^{j70} \cdot 10 \cdot e^{-j37} = 220 \cdot e^{j33} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{B1} = 220 \cdot e^{-j87} \text{ В; } \dot{U}_{C1} = 220 \cdot e^{j153} \text{ В.}$$

9. Определение линейных напряжений на входе схемы

Фазы источника соединены в звезду Y1. В соединении звездой между линейными и фазными напряжениями существует следующее соотношение:

$$U_{Л} = \sqrt{3}U_{\Phi}; \quad \dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_A \cdot e^{j30}.$$

$$\dot{U}_{AB1} = \sqrt{3}\dot{U}_{A1} \cdot e^{j30} = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot e^{j33} \cdot e^{j30} = 380 \cdot e^{j63} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC1} = 380 \cdot e^{-j57} \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA1} = 380 \cdot e^{j183} \text{ В}.$$

Аналогично определяются линейные напряжения на нагрузке:

$$\dot{U}_{AB2} = \sqrt{3}\dot{U}_{A2} \cdot e^{j30} = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot e^{j18} \cdot e^{j30} = 380 \cdot e^{j48} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC2} = 380 \cdot e^{-j72} \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA2} = 380 \cdot e^{j168} \text{ В}.$$

Падение напряжения в линейном резисторе:

$$\dot{U}_{\text{ЛИНА}} = \dot{I}_{A1} \cdot \underline{Z}'_{Л} = 22 \cdot e^{j70} \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{j45} = 62 \cdot e^{j115} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{\text{ЛИНВ}} = 62 \cdot e^{-j5} \text{ В}; \quad \dot{U}_{\text{ЛИНС}} = 62 \cdot e^{j135} \text{ В}.$$

#### 10. Определение фазных токов на 3-й нагрузке

Определенный ранее ток 3-й нагрузки для схемы соединений Y является фазным и одновременно линейным, поскольку для соединения Y  $I_{\Phi} = I_{Л}$ .

Для определения истинных величин токов в фазах 3-й нагрузки, соединенных в схему  $\Delta$ , воспользуемся известными соотношениями.

Для схемы соединения  $\Delta$  линейный ток  $I_{Л} = \sqrt{3}I_{\Phi}$ , а линейный комплексный ток фазы A равен  $\dot{I}_A = \sqrt{3}\dot{I}_{AB} \cdot e^{-j30}$ .

Таким образом, для 3-й нагрузки линейный ток фазы A:  $\dot{I}_{A3} = \sqrt{3}\dot{I}_{AB3} \cdot e^{-j30}$ , тогда фазный ток фазы A



$$\dot{I}_{AB3} = \frac{\dot{I}_{A3}}{\sqrt{3} \cdot e^{-j30}} = \frac{14 \cdot e^{j0}}{\sqrt{3} \cdot e^{-j30}} = 8 \cdot e^{j30} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC3} = 8 \cdot e^{-j90} \text{ А}; \quad \dot{I}_{CA3} = 8 \cdot e^{j150} \text{ А}.$$

### 11. Определение мощности всех участков цепи

При равномерной (симметричной) нагрузке фаз достаточно определить полную мощность одной фазы и утроить. Комплексное значение полной мощности трехфазной равномерной нагрузки определяется в общем виде:

$$\tilde{S} = \dot{U}_{\Phi} \cdot \dot{I}_{\Phi}^*$$

где  $\dot{I}_{\Phi}^*$  – сопряженное значение фазного комплексного тока.

### 12. Мощность источника

Полная мощность

$$\tilde{S}_1 = 3\dot{U}_{A1} \cdot \dot{I}_{A1}^* = 3 \cdot 220 \cdot e^{j33} \cdot 22 \cdot e^{-j70} = 14520 \cdot e^{-j37} = 11616 - j8712 \text{ ВА}.$$

Активная мощность  $P_1=11616$  Вт.

Реактивная мощность  $Q_1=-8736$  Вар.

### 13. Мощность в сопротивлении линии $Z_L$

Полная мощность

$$\tilde{S}_L = 3\dot{U}_{LA} \cdot \dot{I}_{A1}^* = 3 \cdot 62 \cdot e^{j115} \cdot 22 \cdot e^{-j70} = 4092 \cdot e^{j45} = 2904 + j2904 \text{ ВА}.$$

Активная мощность  $P_L=2904$  Вт.

Реактивная мощность  $Q_L=-2904$  Вар.

### 14. Мощность во второй нагрузке $Z_2$

Полная мощность

$$\tilde{S}_2 = 3\dot{U}_{A2} \cdot \dot{I}_{A2}^* = 3 \cdot 220 \cdot e^{j18} \cdot 22 \cdot e^{-j108} = 14520 \cdot e^{-j90} = -j14520 \text{ ВА}.$$

Активная мощность  $P_2=0$  Вт.

Реактивная мощность  $Q_2=-14520$  Вар.

15. Мощность на третьей нагрузке  $Z_3$ , фазы которой соединены треугольником:

Полная мощность

$$\tilde{S}_3 = 3\dot{U}_{AB3} \cdot I_{AB3}^* = 3 \cdot 380 \cdot e^{j48} \cdot 8 \cdot e^{-j30} = 9120 \cdot e^{j18} = 8712 + j2904 \text{ ВА.}$$

Активная мощность  $P_3=8712$  Вт.

Реактивная мощность  $Q_2=-2904$  Вар.

16. Проверка баланса мощностей

Полная мощность источника должна быть равной сумме полных мощностей, расходуемых в цепи:

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_L + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3.$$

Суммарная полная мощность, расходуемая в цепи:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_L + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 &= 2904 + j2904 - j14520 + 8712 + j2904 = \\ &= 11616 - j8712 \text{ ВА.} \end{aligned}$$

Получили:

$$11616 - j8712 = 11616 - j8712 = 14520 \cdot e^{-j37} \text{ ВА.}$$

Баланс мощностей сошелся, следовательно, задача решена правильно.

17. Определение показаний ваттметров  $W_1, W_2$

Показания ваттметра  $W_1$  определяются следующим образом:

$$P_{W1} = U_{AB1} \cdot I_{A1} \cdot \cos[\text{угла между } \dot{U}_{AB1} \dot{I}_{A1}]$$

Угол между векторами  $\dot{U}_{AB1} \dot{I}_{A1}$  равен  $(63^\circ - 70^\circ) = -7^\circ$

Подставляем численные значения

$$P_{W1} = 380 \cdot 22 \cdot \cos(-7) = 8301 \text{ Вт.}$$

Показания второго ваттметра определяются аналогично, только следует учесть, что обмотка напряжений ваттметра  $W_2$  включена на линейное напряжение  $U_{CB}$ , в то время как ранее было определено линейное напряжение  $U_{BC}$ :

$$\dot{U}_{\text{CB1}} = 380 \cdot e^{-j57} \text{ В, тогда } \dot{U}_{\text{CB1}} = 380 \cdot e^{-j57} \cdot e^{j180} = 380 \cdot e^{j123} \text{ В.}$$

Угол между векторами  $\dot{U}_{\text{CB1}} \dot{I}_{\text{C1}}$  равен  $(123^\circ - 190^\circ) = -67^\circ$ , тогда показания второго ваттметра:

$$P_{W_2} = 380 \cdot 22 \cdot \cos(-67) = 3266 \text{ Вт.}$$

Активная мощность трехфазной цепи, измеренная ваттметрами  $W_1, W_2$ , определяется как сумма показаний ваттметров

$$P = P_{W_1} + P_{W_2} = 8301 + 3266 = 11567 = 11.6 \text{ кВт.}$$

Реактивная мощность трехфазной цепи определяется как разность показаний ваттметров

$$Q = \sqrt{3}(P_{W_2} - P_{W_1}) = \sqrt{3}(3266 - 8301) = -8722 = -8.7 \text{ кВАр.}$$

Зная активную и реактивную мощности, можно определить модуль полной мощности трехфазной цепи по формуле

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{11,6^2 + (-8,7)^2} = 14.5 \text{ кВА.}$$

18. Построение векторных диаграмм (рис. 26, 27)

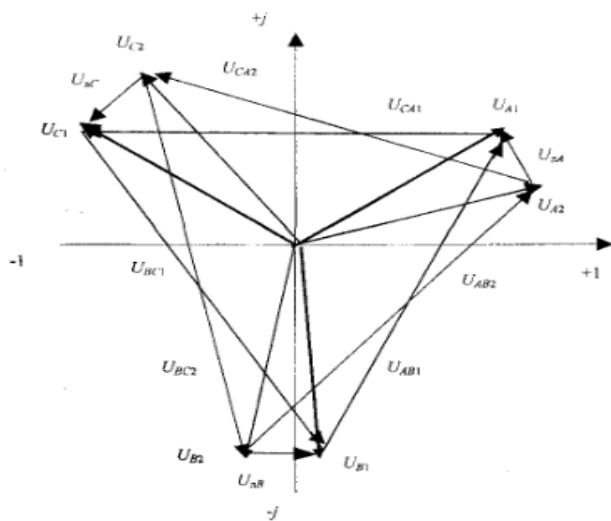


Рис. 26. Векторная диаграмма напряжений

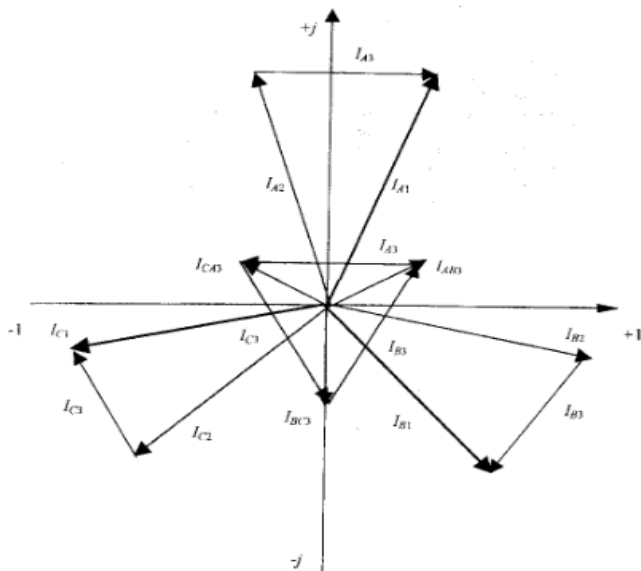


Рис. 27. Векторная диаграмма токов

### Задание для самостоятельной работы

Для симметричной трехфазной системы соединенной по схеме звезда известны: фазное напряжение  $U_{\phi}=220$  В; параметры нагрузки фазы А ( $x_L = 5$  Ом,  $x_C = 10$  Ом, величина  $R$  приведена в табл. 7). Требуется определить активную, реактивную и полную мощности трехфазной цепи и как изменятся эти мощности, если нагрузку соединить по схеме треугольник.

Таблица 7.

Исходные данные

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R, Ом	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28

## ЗАНЯТИЕ 13. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### *Краткие теоретические сведения*

Перед решением этой задачи следует изучить материал курса, относящийся к расчету нелинейных цепей постоянного тока. Благодаря тому, что связи между напряжениями и токами нелинейных элементов в данной задаче представлены (аппроксимированы) квадратичными зависимостями, расчет цепи может быть выполнен аналитически. Целесообразно принять следующий порядок решения задачи:

1. Преобразуем источники тока в эквивалентные ЭДС.
2. Для преобразованной цепи составим уравнения по законам Кирхгофа. В зависимости от конфигурации цепи может быть одно нелинейное уравнение или система уравнений.
3. Исключаем из системы уравнений токи и напряжения на линейных элементах, выразив их через напряжение или ток нелинейного элемента. При этом система приводится к одному квадратному уравнению относительно тока нелинейного элемента, если характеристика последнего задана в виде  $U = aI + bI^2$ , или напряжения на нелинейном элементе, если его ВАХ имеет вид  $I = \alpha U + \beta U^2$ .
4. Решая квадратные уравнения, из пары корней выбираем тот, который удовлетворяет условиям  $I \geq 0, U \geq 0$ .

5. По найденным значениям тока или напряжения на нелинейном элементе определяем все остальные токи в цепи.

**Пример.** Для цепи, изображенной на рис. 28, рассчитать напряжения и токи на участках цепи, если  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ;  $E = 11 \text{ В}$ ;  $J = 0,5 \text{ А}$ , а характеристика нелинейного элемента задана выражением  $U(I) = aI + bI^2$ , где  $a = 1 \text{ Ом}$ ;  $b = 2 \text{ Ом} \cdot \text{А}^{-1}$ .

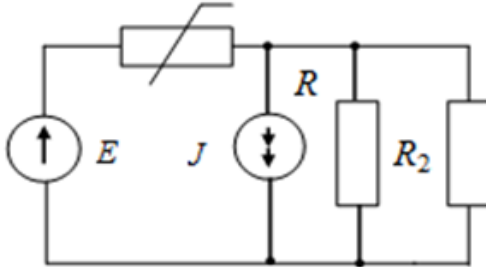


Рис. 28. Схема нелинейной электрической цепи

**Решение.** 1. Преобразуем источник тока  $J$ ,  $R_1$  в эквивалентный источник напряжения, где значение эквивалентной ЭДС составляет

$$E_1 = J \cdot R_1 = 1 \text{ В}.$$

2. Для преобразованной электрической цепи (рис. 29) запишем систему уравнений по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} U(I) + R_1 I_1 = E + E_1; \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1; \\ I - I_1 - I_2 = 0. \end{cases}$$

3. Нелинейная характеристика задана в виде  $U(I)$ , поэтому выразим ток  $I_1$  в первом уравнении системы через ток  $I$ . Из третьего уравнения системы

$$I_2 = I - I_1.$$

Подставляя  $I_2$  во второе уравнение, выразим  $I_1$  через  $I$ :

$$I_1 = \frac{E_1 + R_2 I}{R_1 + R_2}.$$

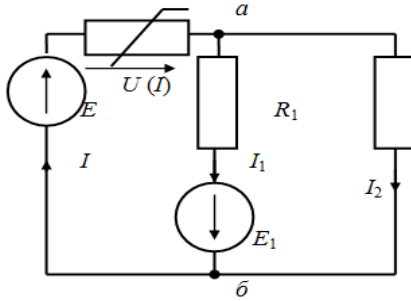


Рис. 29. Преобразованная нелинейная электрическая цепь с эквивалентным источником напряжения

Подставим выражение для  $I_1$  и нелинейную зависимость  $U(I) = aI + bI^2$  в первое уравнение и получим квадратное уравнение относительно тока  $I$

$$bI^2 + \left( a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I + \frac{R_1 E_1}{R_1 + R_2} - E - E_1 = 0,$$

которое после подстановки исходных данных принимает вид  $6I^2 + 5I - 34 = 0$ .

4. Решение этого уравнения  $I = 2\text{A}$ ;  $I = -2,8\text{A}$ , причем решение  $I = -2,8$  не удовлетворяет условиям  $I \geq 0$  и поэтому не имеет физического смысла.

5. В результате токи и напряжения в цепи равны:

$$I = 2\text{ A}; \quad U = aI + bI^2 = 10\text{ B}; \quad U_{aб} = E - U = 1\text{ B};$$

$$I_2 = \frac{U_{aб}}{R_2} = 1\text{ A}; \quad I_1 = \frac{U_{aб} + E_1}{R_1} = 1\text{ A}.$$

## ЗАНЯТИЕ 14, 15. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Пример.** Какова должна быть величина тока в обмотке электромагнита (рис.30) для создания силы притяжения  $f = 2000$  Н. Число витков обмотки  $w = 628$ . Электромагнит состоит из сердечника (поз. 1, рис.30) и ярма (поз. 2, рис.30). Параметры магнитопровода –  $\ell_1 = 0,25$  м,  $\ell_2 = 0,6$  м. Сечения магнитопровода, ярма и сердечника одинаковы:  $S_1 = S_2 = S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Величина зазора –  $\Delta = 0,001$  м. Кривые намагничивания материала сердечника (кривая 1) и ярма (кривая 2) приведены на рис.11.

*Решение.* Сила притяжения, создаваемая электромагнитом, зависит от величины магнитного потока в зазоре и сечения зазора  $S_\delta$

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S_\delta},$$

поэтому можно найти величину магнитного потока, необходимого для создания этой силы:

$$\Phi = \sqrt{f \cdot 2\mu_0 \cdot S_\delta} = \sqrt{2000 \cdot 2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Вб},$$

Схема замещения магнитной цепи изображена на рис.31, где  $R_{M1}$  – магнитное сопротивление сердечника,  $R_{M2}$  – магнитное сопротивление ярма,  $R_{M\delta}$  – магнитное сопротивление двух зазоров. По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи МДС равна сумме магнитных напряжений участков:

$$F = WI = U_{M1} + U_{M2} + U_{M\delta} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_\delta \cdot 2\Delta.$$



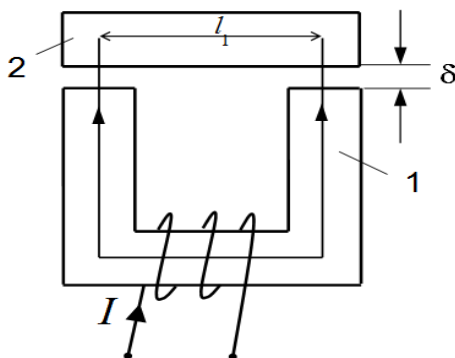


Рис 30. Упрощенная схема электромагнита

Площади сечения сердечника, якоря и зазора одинаковы, поэтому магнитная индукция на всей участках:

$$B_1 = B_2 = B_\delta = \frac{\Phi}{S} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1, \text{ Тл.}$$

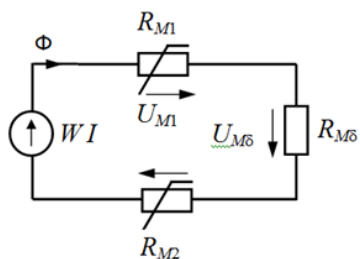
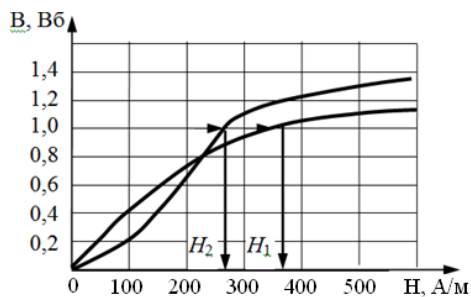


Рис.31. Схема замещения магнитной цепи и кривые намагничивания

По кривым намагничивания (рис. 31) для сердечника (поз. 1) и ярма (поз. 2) определим напряженности магнитного поля:  $H_1 = 375$  А/м,  $H_2 = 275$  А/м.

Напряженность магнитного поля в зазоре равна:

$$H_{\delta} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{1,257 \cdot 10^{-6}} = 795545 \text{ А/м.}$$

В результате необходимая м.д.с. вычисляется как

$$F = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_{\delta} \cdot 2\Delta = \\ = 375 \cdot 0,25 + 275 \cdot 0,6 + 795545 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1860 \text{ А,}$$

а ток в обмотке электромагнита, необходимый для создания силы в 2000 Н, равен

$$I = \frac{F}{W} = \frac{1860}{628} = 3 \text{ А.}$$

### Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Известны средняя длина  $l$  магнитопровода (рис.32, а)  $l = 40$  см, величина зазора  $\Delta = 3$  мм, площадь сечения магнитопровода  $S = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2$ , количество витков  $w = 500$ , кривая намагничивания сердечника (рис.32, б), магнитный поток  $\Phi = 24 \text{ мВб}$ . Определить величину тока  $I$  в катушке.

Таблица 8.

Исходные данные

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$L$ , см	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
$\Delta$ , мм	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

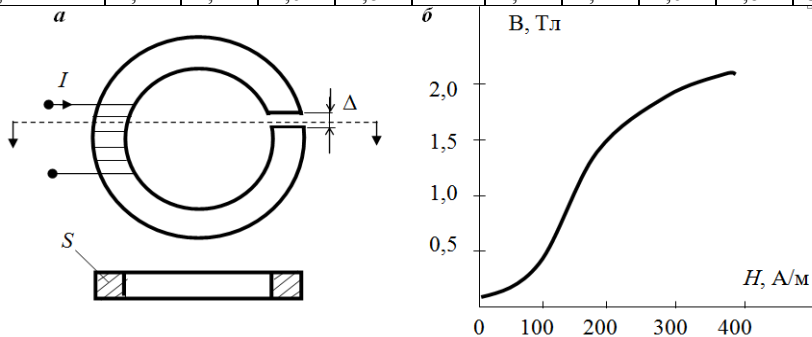


Рис.32. Конструкция электромагнита и кривая намагничивания сердечника

**Задача 2.** По обмоткам, намотанным на магнитопровод, выполненный в виде тороида вращения, с числом витков  $w_1$  и  $w_2$  пропускаются, соответственно, токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис.33). Магнитопровод имеет воздушные зазоры длиной  $\Delta_1$ . Требуется рассчитать магнитный поток  $\Phi$  в магнитопроводе, магнитную индукцию  $B$ , а также напряженности магнитного поля, соответственно, в ферромагнитном участке магнитопровода –  $H_1$  и в воздушных зазорах –  $H_\Delta$ . Необходимые данные приведены в табл.9. Кривые намагничивания используемых материалов представлены в виде графиков (рис.34).

Таблица 9.

Исходные данные по вариантам

Номер варианта по списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Число витков $w_1$ обмоток $w_2$	25 50	40 60	65 95	70 90	80 85	85 80	90 70	95 65	60 40	50 60
Число витков $w_1$ и $w_2$ выбирается по варианту										
$I_1$ , А	15	10	15	10	5	10	5	2	5	10
$I_2$ , А	10	15	20	15	10	15	10	12	15	25
Магнитопровод изотропный материал	-Армо -		-Ст.1511 -				-Ст. Э22-		-Ст. Э21 -	
Значения токов $I_1$ и $I_2$ , марка стали выбираются по варианту										
Геометрические размеры:										
$R$ , м	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6
$r$ , см	5	6	7	8	9	10	11	10	9	8
$\Delta_1$	1	2	3	4	-	2	1	2	3	1
$\Delta_i \cdot 10^{-4}$ , м $\Delta_2$	-	1	1	4	-	2	3	-	-	1
$\Delta_3$	-	-	1	1	1	2	-	-	-	-
$\Delta_4$	2	2	-	1	1	-	1	2	3	1
Значения $R$ , $r$ , $\Delta_i$ , $R_4$ выбираются по варианту										

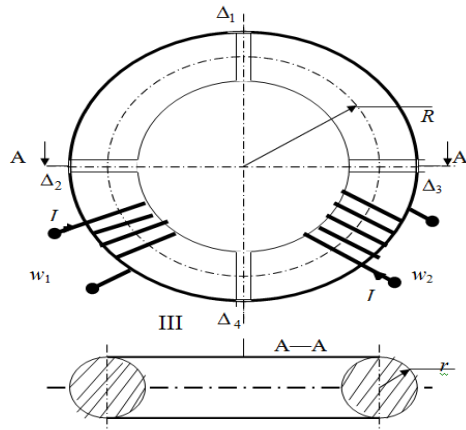


Рис.33. Схема магнитопровода постоянного тока с двумя обмотками

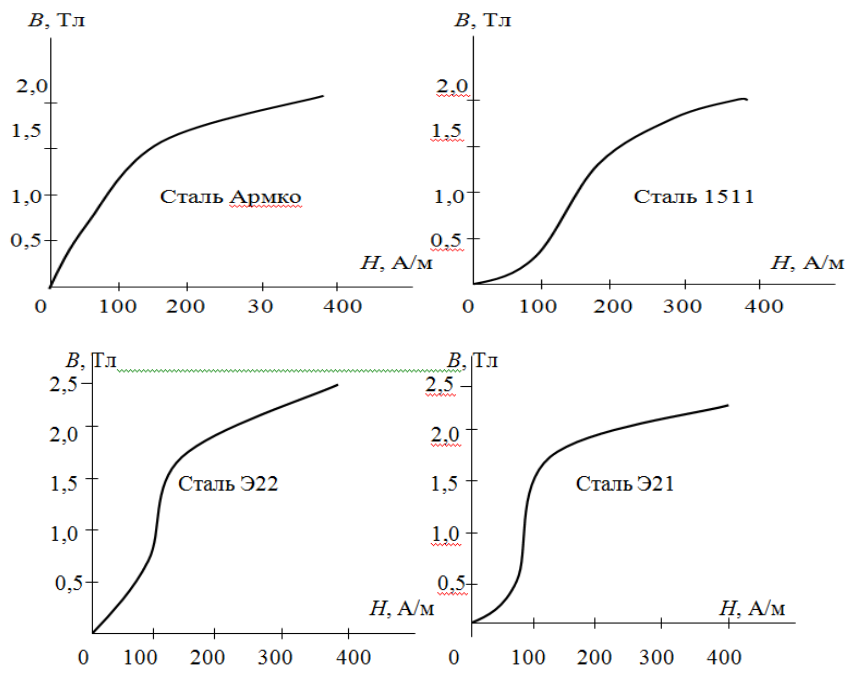


Рис.34. Кривые намагничивания материалов сердечника магнитопровода

### Методические указания

Предложенная для решения задача является обратной задачей расчета ферромагнитных цепей, так как по заданной МДС требуется определить магнитный поток. Для аналитического решения она требует или аналитического выражения характеристик намагничивания используемых в цепи материалов или применения метода последовательных приближений.

Наиболее просто подобные задачи решаются графическими приемами. При этом исходными данными для расчета нелинейных магнитных цепей являются магнитные характеристики участков магнитной цепи, которые не являются заданными характеристиками, а должны быть построены в процессе расчета цепи по заданным геометрическим размерам участков и характеристикам намагничивания материалов, из которых выполнены эти участки

В связи с тем, что магнитный поток участка пропорционален магнитной индукции:

$$\Phi_k = S_k B_k,$$

а магнитное напряжение пропорционально напряженности магнитного поля

$$U_{Mk} = l_k H_k,$$

магнитная характеристика участка, выполненного из ферромагнитного материала, будет изображаться кривой (кривая 1, рис.9, а), подобной кривой намагничивания данного материала.

Для построения такой характеристики необходимо задаться рядом точек на кривой намагничивания, выписать соответствующие им пары значений  $B_k$  и  $H_k$  и по приведенным формулам, зная площадь  $S_k$  поперечного сечения участка и его длину  $l_k$ , рассчитать ряд парных значений  $\Phi_k$  и  $U_{Mk}$ . Нанося по полученным координатам точки на плоскость с системой осей  $\Phi_k$  и  $U_{Mk}$ , нетрудно провести по ним искомую магнитную характеристику  $\Phi_K = f(U_{MK})$ .

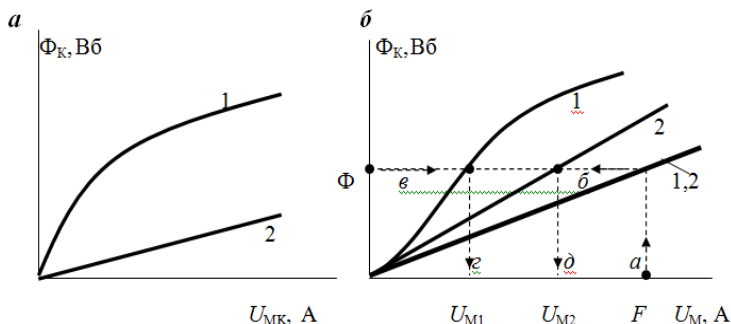


Рис.9. Магнитная характеристика ферромагнетика

Заметим, что магнитная характеристика участка, выполненного из материала с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_k$ , представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (линия 2, рис.9, а). Построение ее можно осуществить по одной точке, координаты которой должны быть связаны между собой уравнением:

$$\Phi_k = S_k B_k = S_k \mu_k H_k = \frac{S_k \mu_k}{l_k} U_{Mk}.$$

В частном случае, когда таким участком является немагнитный, например, воздушный зазор, магнитная проницаемость участка принимается равной магнитной постоянной  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м ( $\mu_k = \mu_0$ ).

Задача о неразветвленной цепи с несколькими участками, когда по заданным токам  $I_1$  и  $I_2$  в обмотках с  $w_1$  и  $w_2$  требуется найти магнитный поток цепи, решается путем построения на одном графике и в одном масштабе магнитных характеристик всех участков цепи с последующим их сложением в направлении оси магнитных напряжений. В соответствии с равенством

$$F = F_1 + F_2 = w_1 I_1 + w_2 I_2 = \sum_{k=1}^N U_{Mk},$$

справедливым для такой цепи, полученная суммарная кривая будет представлять зависимость  $\Phi = f(F)$  магнитного потока цепи от магнитодвижущей силы (МДС) обмотки (рис.9, б кривая 1, 2).

Пользуясь кривой 1,2, вычислив предварительно МДС обмотки при заданных токах:

$$F = F_1 + F_2 = w_1 I_1 + w_2 I_2,$$

можно определить искомый поток цепи, а при необходимости и магнитные напряжения на отдельных участках.

На рис.9, б описанные построения выполнены для примера магнитной цепи, представленной на рис. 4 и состоящей из двух участков, один из которых является воздушным зазором. По результирующей характеристике, показанной на рис.9, б толстой линией 1, 2, операцией а-б находят магнитный поток в цепи, а с помощью операций в-г и в-д по магнитным характеристикам 1 и 2 отдельных участков определяют магнитные напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на участках цепи.

Алгоритм решения задачи

1. Используя кривую намагничивания рекомендуемого для соответствующего варианта материала магнитопровода, строят магнитную характеристику участка 1 длиной  $\left( l - \sum_{i=1}^{i=4} \Delta_i \right)$ , представляющую собой зависимость  $\Phi_1 = f(U_{M1})$ , где  $\Phi_1 = S_1 B_1$ ,

$$U_{M1} = \left( l - \sum_{i=1}^{i=4} \Delta_i \right) H_1, \quad S_1 = \pi r^2.$$

Для этого задаются рядом точек на кривой намагничивания.

2. Аналогичным образом строится магнитная характеристика воздушного зазора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{i=4} \Delta_i \text{ (участок 2),}$$

представляющая собой зависимость  $\Phi_2 = f(U_{M2})$ . Учитывая то обстоятельство, что  $\mu_2 = \mu_0$ , построение прямой линии осуществляется по двум точкам: точке начала координат и точке, координаты которой связаны уравнением:

$$\Phi_2 = S_2 B_2 = \frac{S_2 \mu_0}{\Delta} U_{M2} = \frac{\pi r^2 \mu_0}{\Delta} U_{M2},$$

где  $S_2 = S_1$ .

3. Строится суммарная магнитная характеристика цепи:

$$\Phi = f(F) = \left( \sum_{k=1}^{k=2} U_{MK} \right).$$

Для ее построения на одном графике и в одном масштабе наносятся магнитные характеристики  $\Phi_1 = f(U_{M1})$  и  $\Phi_2 = f(U_{M2})$ . Сложение осуществляется в направлении оси магнитных напряжений (рис.9, б), так как участки соединены последовательно.

4. По заданным токам  $I_1, I_2$ , числам витков  $w_1, w_2$  определяется суммарная МДС обмоток:

$$F = F_1 + F_2 = w_1 I_1 + w_2 I_2.$$

5. Используя суммарную магнитную характеристику 1,2 магнитопровода, определяют магнитный поток  $\Phi$ .

6. Рассчитывают магнитную индукцию в магнитопроводе:

$$B = \Phi / S_l.$$

7. По магнитным характеристикам 1 и 2 определяют:  $U_{M1}$  и  $U_{M2}$ , а также напряженности магнитного поля соответствующих участков, А/м:

$$H_1 = \frac{U_{M1}}{l - \Delta}, \quad H_2 = \frac{U_{M2}}{\Delta},$$

где  $l = 2\pi R - \Delta$ ;  $\Delta = \sum_{i=1}^{i=4} \Delta_i$ .

## ЗАНЯТИЕ 16, 17. РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

### *Трансформатор*



**Пример 1.** Трёхфазный трансформатор имеет номинальное напряжение первичной обмотки  $U_{1Н} = 10$  кВ, номинальное напряжение вторичной обмотки  $U_{2Н} = 400$  В. Соединение обмоток Y/Δ. Определить коэффициент трансформации.

**Решение**

В паспортных данных даются значения линейных напряжений, при этом буква "л" обычно опускается.

Определяем номинальные фазные напряжения обмоток. Первичная обмотка имеет соединение "звезда" (Y), поэтому фазное напряжение меньше линейного в  $\sqrt{3}$  раз. В данном случае значение фазного напряжения составляет, кВ

$$U_{\Phi 1Н} = \frac{U_{1Н}}{\sqrt{3}} = 10 / \sqrt{3} = 5.77.$$

Вторичная обмотка имеет соединение "треугольник" (Δ), поэтому фазное напряжение равно линейному, В.

$$U_{\Phi 2Н} = U_{2Н} = 400.$$

Коэффициент трансформации обычно вычисляют по значениям фазных напряжений, тогда

$$k = \frac{U_{\Phi 1Н}}{U_{\Phi 2Н}} = 5.77 / 0.4 = 14.43.$$

Обратите внимание, что оба значения напряжений необходимо задать в одинаковых единицах измерения: или в киловольтах, или вольтах.

Если определить коэффициент трансформации по линейным напряжениям, то

$$k_{л} = \frac{U_{1Н}}{U_{2Н}} = 10 / 0.4 = 25.$$

**Пример 2.** Трёхфазный трансформатор имеет данные: номинальная мощность  $S_{Н} = 1000$  кВА; номинальное напряжение обмоток  $U_{1Н} = 10$  кВ,  $U_{2Н} = 400$  В; соединение обмоток Y/Δ. Определить токи обмоток.

### Решение

В паспортных данных задается полная мощность трансформатора на вторичной обмотке  $S_H = S_{2H}$ .

Так как значение КПД не задано, то принимаем, что мощность первичной обмотки равна мощности вторичной обмотки  $S_H$ .

Мощность трёхфазного трансформатора определяется суммой мощностей трёх фаз

$$S_H = 3 \cdot U_{\text{ФН}} \cdot I_{\text{ФН}}.$$

Отсюда находим ток первичной обмотки, А

$$I_{\text{ФН}} = \frac{S_H}{3 \cdot U_{\text{1ФН}}} = \frac{S_H}{\frac{3 \cdot U_{\text{1Н}}}{\sqrt{3}}} = \frac{S_H}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{1Н}}} = \frac{1000}{\sqrt{3} \cdot 10} = 57.735.$$

При соединении в «звезду» фазный ток равен линейному, А

$$I_{\text{1Н}} = 57.735.$$

Ток вторичной обмотки (соединение «треугольник»), А

$$I_{2\text{ФН}} = \frac{S_H}{3 \cdot U_{2\text{ФН}}} = \frac{1000 \cdot 10^3}{3 \cdot 400} = 833.$$

Обратите внимание, что мощность следует перевести в «Вт», так как вторичное напряжение имеет размерность «В».

$$\text{Проверка: } I_{2H} = I_{1H} \cdot k = 57.735 \cdot 14.43 = 833\text{А}.$$

Фазный ток меньше линейного в  $\sqrt{3}$  раз, поэтому линейный ток, А

$$I_{2H} = \sqrt{3} \cdot I_{2\text{ФН}} = \sqrt{3} \cdot 833 = 1443\text{А}.$$

### *Асинхронные двигатели*

Пример 1. Промышленный АД имеет номинальную частоту вращения  $n = 2935$  об/мин. Определить номинальное скольжение.

Решение

Ближайшее значение синхронной частоты вращения при промышленной частоте 50 Гц составляет 3000 об/мин, что определяется формулой

$$n_1 = 60f / p = 60 \cdot 50 / 1 = 3000 \text{ об/мин.}$$

Число полюсов данного двигателя составляет  $2p=2$ , т.е. это двухполюсный АД. Номинальное скольжение

$$s = (n_1 - n) / n_1 = (3000 - 2935) / 3000 = 0.022.$$

**Пример 2.** Трёхфазный АД имеет номинальные данные: напряжение 380/220 В, мощность  $P_H=15$  кВт, коэффициент мощности  $\cos\varphi = 0,91$ , КПД  $\eta = 88$  %. Напряжение сети  $U_{1H} = 380$  В. Определить потребляемый ток.

**Решение**

Первичная обмотка имеет соединение "звезда" (Y), поэтому фазное напряжение меньше линейного в  $\sqrt{3}$  раз и составляет, В

$$U_{\text{Ф1H}} = \frac{U_{1H}}{\sqrt{3}} = 380 / \sqrt{3} = 220.$$

Заданная в условии задачи номинальная мощность двигателя  $P_H$  является полезной механической мощностью на валу:  $P_H=P_{2H}$ , которая является активной мощностью. (На то, что это именно активная мощность указывает её обозначение «P» и единица измерения - кВт. Если бы эта мощность являлась не активной, а полной мощностью, то она бы имела обозначение «S», а единицу измерения - кВА или ВА.)

Так как потребляемый ток определяется полной потребляемой электрической мощностью  $S_{1H}$ , то необходимо определить эту мощность (её единица измерения - кВА или ВА).

Сначала определим активную потребляемую электрическую мощность, кВт.

$$P_{1H} = \frac{P_{2H}}{\eta_H} = 15 / 0.88 = 17.05.$$

Обратите внимание, что потребляемая мощность всегда больше полезной мощности из-за потерь, что учитывает значение КПД

Полная потребляемая мощность, кВА

$$S_{\text{IH}} = \frac{P_{\text{IH}}}{\cos \varphi_1} = 17.05 / 0.91 = 18.731.$$

Потребляемый ток, А

$$I_{\text{IФН}} = \frac{S_{\text{IH}}}{3 \cdot U_{\text{IФН}}} = \frac{S_{\text{H}}}{\frac{3 \cdot U_{\text{IH}}}{\sqrt{3}}} = \frac{S_{\text{H}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{IH}}} = \frac{18731}{\sqrt{3} \cdot 380} = 28.5.$$

Обратите внимание, чтобы получить значение тока в амперах, значение мощности из кВА необходимо перевести в ВА, тогда в данном случае:

ВА / В=А. В противном случае значение тока будет в килоамперах.

Всегда полезно проверить единицы измерения, это позволит Вам избежать ошибок в расчетах.

### ***Синхронные машины***

**Пример .** Синхронный генератор имеет номинальную мощность 10 кВА, номинальное напряжение 380 В, синхронное индуктивное сопротивление 5 Ом. Генератор работает на чисто активную нагрузку.

Определить напряжение генератора в режиме холостого хода, если ток возбуждения в режиме холостого хода тот же, что в номинальном режиме. Сопротивлением обмотки пренебречь.

### **Решение**

1. Ток нагрузки, А

$$I = \frac{S_{\text{H}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{H}}} = \frac{10000}{1.73 \cdot 380} = 15.2.$$

2. Падение напряжения в синхронном индуктивном сопротивлении, В

$$I_H \cdot X_C = 15.2 \cdot 5 = 76.$$

3. Величина ЭДС при чисто активной нагрузке, В

$$E = \sqrt{\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2 + (I_H \cdot X_C)^2} = \sqrt{220^2 + 76^2} = 233,$$

где фазное напряжение, В

$$U_\phi = 380 / \sqrt{3} = 220.$$

4. Напряжение генератора в режиме холостого хода  $U_{ХХ}$

Так как ток возбуждения остался неизменным, то выходное напряжение генератора будет равно величине ЭДС, которую имел генератор при работе под нагрузкой, следовательно, фазное напряжение, В

$$U_{ХХ} = E = 233.$$

Линейное напряжение, В

$$U = 233 \cdot \sqrt{3} = 403.5.$$

### *Машины постоянного тока*

**Пример 1.** Два двигателя одинаковой мощности работают в номинальном режиме. Один из двигателей имеет параллельное возбуждение, а другой - последовательное. Как примерно изменится потребляемый ток каждого двигателя при изменении нагрузки на валу в два раза?

#### **Решение**

Электромагнитный момент двигателя определяется моментом нагрузки на валу. Для двигателя параллельного возбуждения момент пропорционален току якоря в первой степени, поэтому величина потребляемого тока изменится в два раза (током возбуждения пренебрегаем). Для двигателя последовательного возбуждения можно принять, что момент пропорционален току якоря в квадрате (насыщением магнитной цепи пренебрегаем), поэтому величина тока изменится в  $\sqrt{2}$ .

**Пример 2.** Выбрать сопротивление нагрузки  $R_H$  генератора постоянного тока, так чтобы ток нагрузки не превышал 40 А при  $E = 300$  В,  $R_{я} = 0,5$  Ом.

**Решение**

Ток нагрузки определяется по формуле

$$I = E / (R_{я} + R_H).$$

Отсюда находим сопротивление нагрузки, Ом

$$R_H = (E / I) - R_{я} = (300 / 40) - 0.5 = 7.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нейман В.Ю.* Теоретические основы электротехники в примерах и задачах. Ч.1 Линейные эл цепи пост тока: учеб пособие/ В.Ю. Нейман. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.- 116с.

2. Сборник задач по основам теоретической электротехники: учеб пособие/ под ред Ю.А. Бычкова, В.Н. Золотниченко, Э.П. Чернышева, А.Н. Белянина, Е.Б. Соловьевой. – СПб: Изд-во «Лань», 2011. – 400с.

3. Электротехнический справочник: в 4 т. / под общ. ред. В. Г. Герасимова [и др.]. - М. : Изд. дом МЭИ, 2007 - Т. 1 : Общие вопросы. Электротехнические материалы. - 10-е изд., стер. - 2007. - 439 с. : табл.

4. *Виноградов А.Л.* Теоретические основы электротехники и электроники: учебно-методический комплекс для студентов бакалавриата всех форм обучения направления 220100/ сост. А.Л. Виноградов, И.Н. Войтюк.-СПб.: РИЦ Национального минерально-сырьевого университета «Горный», 2014.

5. *Нефедова Н.В.* Электротехника. Часть 1. Методические указания и контрольные задания для студентов всех форм обучения технологических специальностей./СПГИ. Составители: Н.В.Нефедова, П.М. Каменев, О.Б. Лакота. СПб,2004.

6. *Брандина Е.П.* Электрические машины: учебно-методический комплекс/ сост. Е.П. Брандина.-СПб.: Издат-во СЗГУ, 2007.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ЗАНЯТИЕ 1. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПО ЗАКОНУ ОМА	3
ЗАНЯТИЕ 2. РАСЧЕТ ПРОСТОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯН- НОГО ТОКА ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА	8
ЗАНЯТИЕ 3,4. РАСЧЕТ СЛОЖНОЙ ЦЕПИ ПОСТО- ЯННОГО ТОКА	12
ЗАНЯТИЕ 5,6. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНО- ГО ТОКА С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ	22
ЗАНЯТИЕ 7,8. РАСЧЕТ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ	26
ЗАНЯТИЕ 9, 10. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬ- НОГО ТОКА КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ	39
ЗАНЯТИЕ 11, 12. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИ- ЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	46
ЗАНЯТИЕ 13. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕ- СКИХ ЦЕПЕЙ	60
ЗАНЯТИЕ 14, 15. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА	63
ЗАНЯТИЕ 16, 17. РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕК- ТРИЧЕСКИХ МАШИН	72
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	78



## **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

***Методические указания к практическим занятиям  
для студентов бакалавриата направления 12.03.01***

*Сост.: И.Н. Войтюк, В.С. Добуш, С.В. Соловьев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой  
общей электротехники

Ответственный за выпуск *И.Н. Войтюк*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 19.01.2021. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 4,6. Усл.кр.-отт. 4,6. Уч.-изд.л. 4,2. Тираж 75 экз. Заказ 17.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2