

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В
ОРГАНИЗАЦИИ АВТОТРАНСПОРТНОГО
ПРОИЗВОДСТВА**

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов бакалавриата направлений 23.03.01 и 23.03.03*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2023**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информатики и компьютерных технологий

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИИ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПРОИЗВОДСТВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов бакалавриата направлений 23.03.01 и 23.03.03*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2023

УДК 519.86:622.3.012 (073)

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИИ
АВТОТРАНСПОРТНОГО ПРОИЗВОДСТВА. Элементы теории графов /**
Методические указания к лабораторным работам / Санкт-Петербургский горный
университет. Сост.: *В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева*. СПб, 2023. 60 с.

Методические указания содержат сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ с использованием элементов теории графов. Приведены необходимые теоретические сведения и примеры выполнения заданий по построению минимального остовного дерева и нахождению кратчайшего пути в графе. Все решения выполнены как аналитически, путем использования методов «ближайшего соседа» и Дейкстры, так и с использованием электронных таблиц MS Excel, с помощью надстройки «Пакет анализа».

Методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» и 23.03.01 «Технология транспортных процессов».

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

Рецензент к.т.н. *К.В. Столяров* (Корпорация «Телум Инк»)

© Санкт-Петербургский
горный университет, 2023

ВВЕДЕНИЕ

Теория графов - один из разделов дискретной математики, который широко применяется в решении множества задач. К их числу относятся экономические и управленческие задачи, задачи в программировании, химии, конструировании и изучении электрических цепей, коммуникации, психологии, социологии, лингвистике, других областях знаний. Теория графов систематически и последовательно изучает свойства графов. *Граф* - это объект, который состоит из множества вершин и множества ребер (дуг), которые отражают отношения между вершинами. Удобно считать, что граф состоит из множества точек и множества линий, отображающих связи между этими точками. Такая модель позволяет моделировать транспортные системы, в том числе дорожную сеть, где вершины графа играют роль городов, а ребра – роль дорог их соединяющих. Такого рода модели являются классикой теории графов, к их числу, в частности, относятся задачи об остовном дереве и кратчайшем пути. В методических указаниях рассмотрены алгоритмы ближайшего соседа (Прима) и Дейкстры для их решения.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1. ЗАДАЧА О МИНИМАЛЬНОМ ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ

Цель: «Освоить на практике построение минимального остовного дерева методом ближайшего соседа»

Пусть дан связный неориентированный взвешенный граф $G(X, U)$ с n -вершинами. Каждому ребру, соединяющему вершины i и j , поставлено в соответствие число c_{ij} , называемое *весом*. Построить для графа G минимальное остовное дерево.

Деревом называется связный граф без циклов и петель.

Остовным графом $D(X_1, U_1)$ графа $G(X, U)$ является граф, у которого множество вершин X_1 совпадает с множеством X ($X_1 \equiv X$), а множество ребер U_1 является подмножеством U ($U_1 \subset U$).

Остовным деревом называется связный остовной граф без циклов и петель.

Остовное дерево содержит $(n - 1)$ ребер, где n – количество вершин.

Кратчайшим остовом графа называется такой остов, у которого сумма весов всех его ребер минимальна.

Другими словами, задача о кратчайшем остове дерева заключается в выборе таких ребер (дуг) заданного графа, что их суммарный вес («стоимость») минимальна, и для любой пары узлов найдется маршрут (или путь), соединяющий их. Этого можно достигнуть, выбирая дуги таким образом, что образованное ими дерево соединит все узлы данной сети.

Задача о кратчайшем остове имеет широкое практическое применение. Например, требуется разработать распределительную систему для поставки природного газа с места разработки к n заказчикам. Тогда кратчайший остов сети подачи газа определит такую распределительную систему, которая свяжет всех заказчиков, и при этом затраты (или расстояние) будут минимальными. Аналогичную задачу можно решать для построения линий электропередач. Возможны и другие применения. При этом в качестве весов графа можно использовать не только финансовые затраты, но и расстояния, количество материала и т.д.

Одним из наиболее простых алгоритмов, реализующих решение данной задачи, является алгоритм, основанный на «поглощении» кратчайших дуг, который часто называют алгоритмом «ближайшего соседа».

Алгоритм «ближайшего соседа»

1. Выбрать произвольную вершину графа, например, x_1 .
2. Выписать все ребра графа, инцидентные этой вершине, и их веса.
3. Выбрать из них ребро с минимальным весом и включить его в будущее дерево.
4. Занести конечные вершины этого ребра в множество S_0 .
5. Выписать все ребра, отличные от выбранного выше, инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_0 , но не оканчивающиеся в нем.

6. Выбрать из них ребро с минимальным весом и включить в будущее дерево.

7. Занести конечные вершины этого ребра в множество S_0 , получим множество S_1 .

8. Проверить, все ли вершины исходного графа вошли в множество S_1 , т.е. проверить, выполняется ли условие: $n_1 < n$, где n_1 – количество элементов множества S_1 . Если $n_1 < n$, процесс построения дерева не окончен, следует продолжить решение, выполняя пункты, начиная с п. 5.

Если $n_1 = n$, процесс построения дерева завершен.

Пример

Пусть дан связный неориентированный взвешенный граф $G(X, U)$ с количеством вершин $n = 8$ (рис. 1.1).

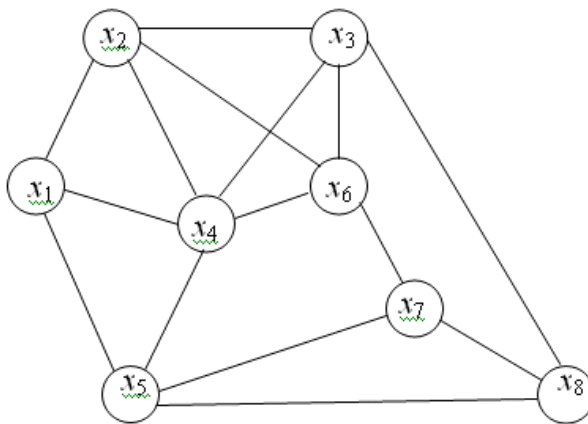


Рис. 1.1

Каждому ребру, соединяющему вершины i и j , поставлено в соответствие число c_{ij} , называемое *весом*. Матрица весов графа $G(X, U)$ представлена в табл.1.1. Для простоты знак ∞ (вес несуществующего ребра) в матрицу не записан.

Построить для графа G минимальное остовное дерево.

Таблица 1.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		2		3	1			
x_2	2		7	6		5		
x_3		7		9		6		9
x_4	3	6	9		4	5		
x_5	1			4			8	5
x_6		5	6	5			4	
x_7					8	4		2
x_8			9		5		2	

На рисунке 1.2 представлен граф с указанием веса каждого его ребра.

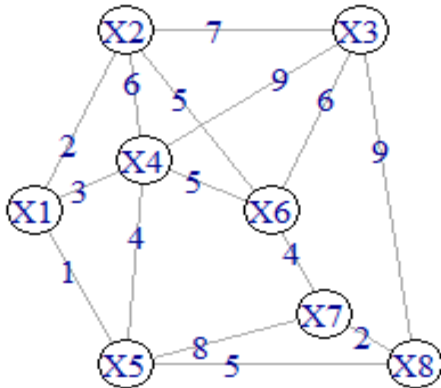


Рис. 1.2

Воспользуемся для решения задачи описанным выше алгоритмом. Для этого выполним следующие действия:

1.1. Выберем произвольную вершину графа, например, x_1 , и включим её в будущее дерево: $S_0 = \{x_1\}$

1.2. Выпишем все ребра графа, инцидентные данной вершине и их веса:

$$\{u_{12}, u_{14}, u_{15}\}, \\ \{c_{12} = 2, c_{14} = 3, c_{15} = 1\}.$$

1.3. Выберем из них ребро с минимальным весом – u_{15} ($c_{15} = 1$), и включим его в будущее дерево: внесем конечные вершины ребра u_{15} в множество S_0 .

$$S_0 = \{ x_1, x_5 \}$$

и выделим его на графе (рис. 1.2).

Геометрический смысл указанных действий показан на рис. *1. На этом и последующих рисунках ребра, включенные в остовное дерево обозначены жирными линиями, ребра, которые являются соседями обозначены точками, лучшее ребро (среди соседей) – жирным пунктиром.

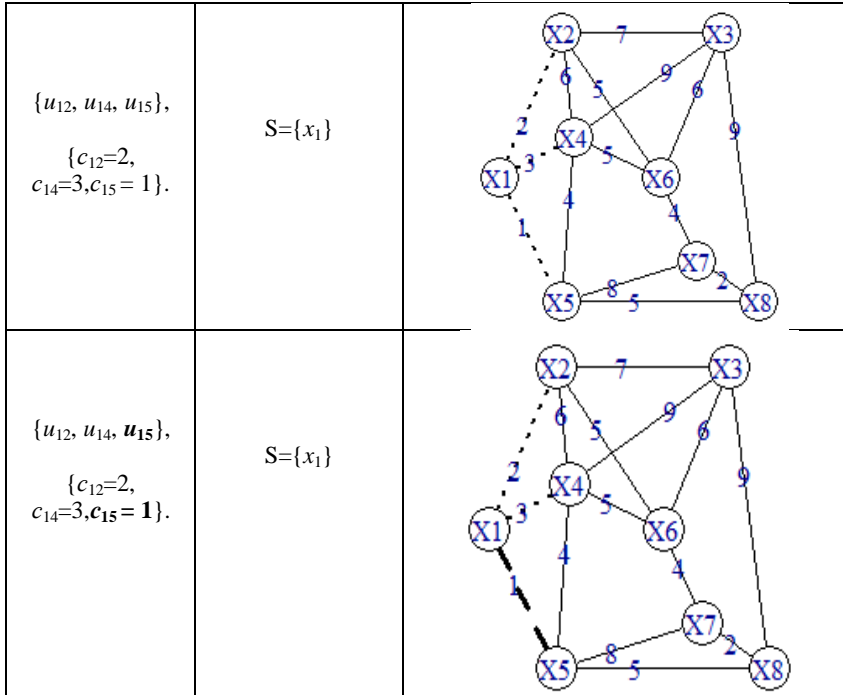


Рис.1.3 (начало)

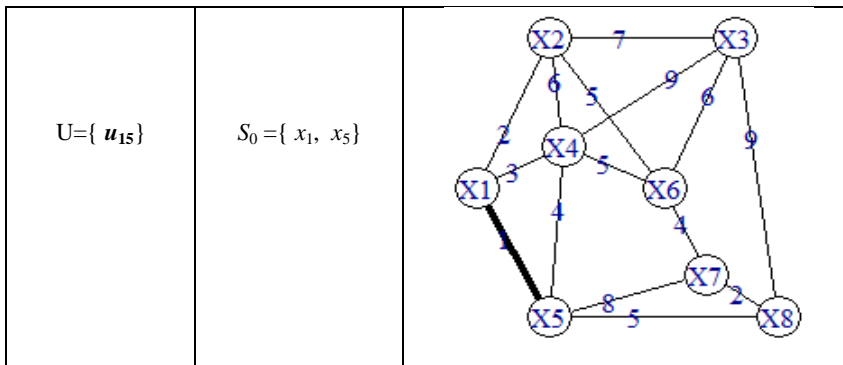


Рис.1.3 (окончание)

2.1. Выпишем все ребра, кроме ребра, выбранного ранее (u_{15}), инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_0 , но не оканчивающиеся в нем, и их веса.

$$\{u_{12}, u_{14}, u_{54}, u_{57}, u_{58}\},$$

$$\{c_{12} = 2, c_{14} = 3, c_{54} = 4, c_{57} = 8, c_{58} = 5\}.$$

2.2. Выберем из них ребро с минимальным весом – u_{12} ($c_{12} = 2$), и включим его в будущее дерево. Выделим его на графе (рис. 1.4).

2.3. Внесем конечные вершины ребра u_{12} в множество S_0 . Вершина x_1 уже имеется в множестве S_0 , остается внести вершину x_2 . Получим множество S_1 :

$$S_1 = \{x_1, x_2, x_5\}.$$

2.4. Проверим, все ли вершины графа $G(X, U)$ вошли в множество S_1 , т.е. равно ли количество элементов n_1 множества S_1 величине n .

Если $n_1 = n$, процесс построения дерева окончен.

Если $n_1 < n$, необходимо продолжить построение дерева.

В примере ($n_1 = 3$) < ($n = 8$), поэтому продолжим построение дерева (п. 4).

3.1. Выпишем все ребра, кроме ребер, выбранных ранее (u_{12}, u_{15}), инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_1 , но не оканчивающиеся в нем, и их веса.

$$\{u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{54}, u_{57}, u_{58}\},$$

$$\{c_{14} = 3, c_{23} = 7, c_{24} = 6, c_{26} = 5, c_{54} = 4, c_{57} = 8, c_{58} = 5\}.$$

3.2. Выберем из них ребро с минимальным весом – u_{14} ($c_{14} = 3$) и включим его в будущее дерево.

3.3. Внесем конечные вершины ребра u_{14} (которых нет в этом множестве) в множество S_1 . Получим множество S_2 :

$$S_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}.$$

Выделим его на графе (рис. 1.5).

3.4. Так как $(n_2 = 4) < (n = 8)$, необходимо продолжить построение дерева (рис.1.6).

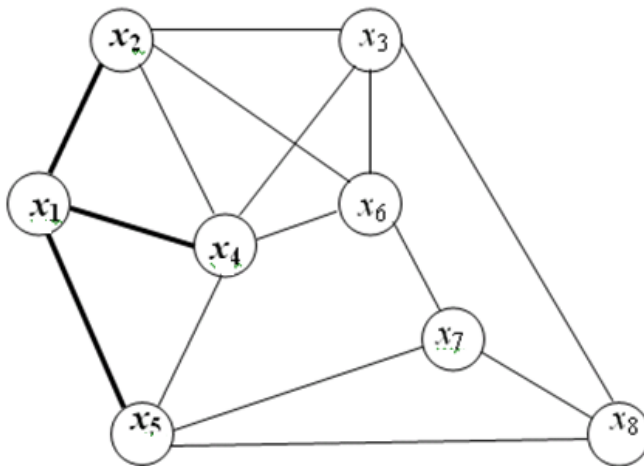


Рис. 1.5

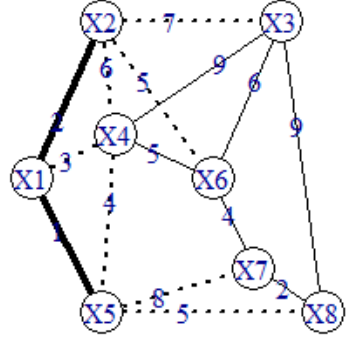
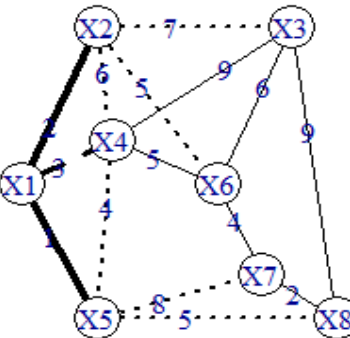
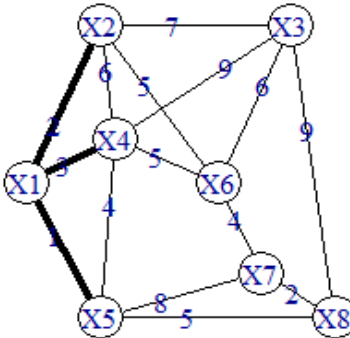
$\{u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{54}, u_{57}, u_{58}\},$ $\{c_{14} = 3, c_{23} = 7, c_{24} = 6, c_{26} = 5, c_{54} = 4, c_{57} = 8, c_{58} = 5\}.$	$S = \{x_1, x_2, x_5\}.$	
$\{u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{54}, u_{57}, u_{58}\},$ $\{c_{14} = 3, c_{23} = 7, c_{24} = 6, c_{26} = 5, c_{54} = 4, c_{57} = 8, c_{58} = 5\}.$	$S = \{x_1, x_2, x_5\}.$	
$U = \{u_{15}, u_{12}, u_{14}\}.$	$S_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}.$	

Рис. 1.6

4.1. Выпишем все ребра, кроме ребер, выбранных ранее (u_{12}, u_{14}, u_{15}), инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_2 , но не оканчивающиеся в нем, и их веса.

$$\{u_{23}, u_{26}, u_{43}, u_{46}, u_{57}, u_{58}\},$$

$$\{c_{23} = 7, c_{26} = 5, c_{43} = 9, c_{46} = 5, c_{57} = 8, c_{58} = 5\}.$$

4.2. Выберем из них ребро с минимальным весом. Таких три ребра: u_{26} ($c_{26} = 3$), u_{46} ($c_{46} = 5$), u_{58} ($c_{58} = 5$). В будущее дерево можно включить любое из них. Включим ребро u_{26} . Выделим его на графе (рис. 1.7).

4.3. Внесем конечные вершины ребра u_{26} в множество S_2 (которых нет в этом множестве). Получим множество S_3 :

$$S_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}.$$

4.4. Так как $(n_3 = 5) < (n = 8)$, необходимо продолжить построение дерева.

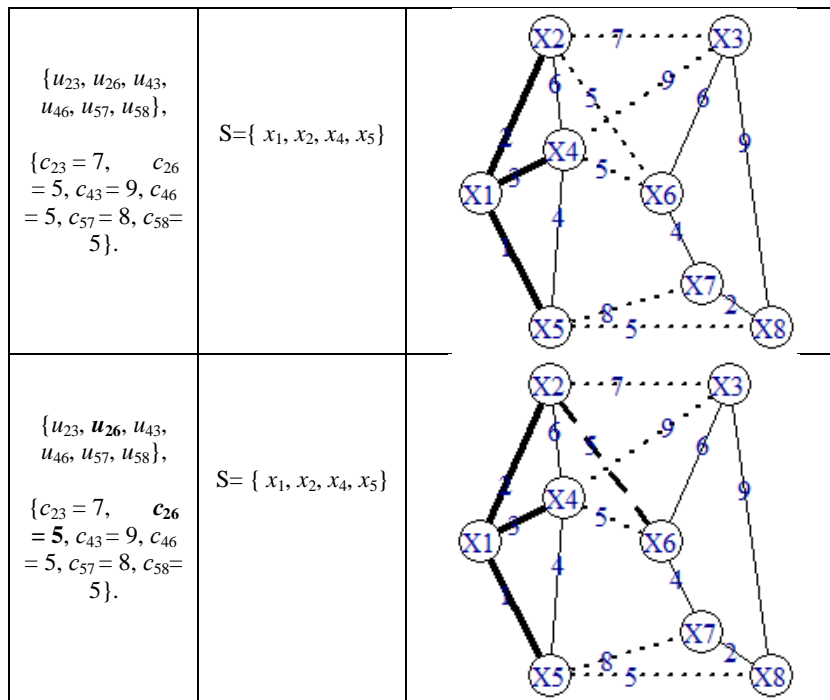


Рис. 1.6 (начало)

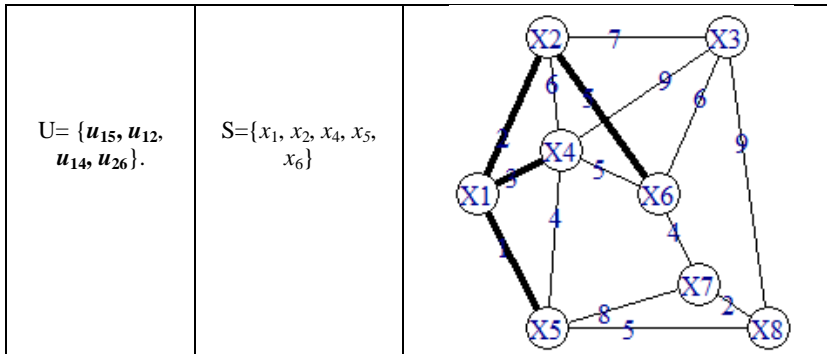


Рис. 1.7 (окончание)

5.1. Выпишем все ребра, кроме ребер, выбранных ранее ($u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{26}$), инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_3 , но не оканчивающиеся в нем, и их веса.

$$\{u_{23}, u_{43}, u_{57}, u_{58}, u_{63}, u_{67}\},$$

$$\{c_{23} = 7, c_{43} = 9, c_{57} = 8, c_{58} = 5, c_{63} = 6, c_{67} = 4\}.$$

5.2. Выберем из них ребро с минимальным весом: u_{67} ($c_{67} = 4$) и включим его в будущее дерево. Выделим его на графе (рис. 1.8).

5.3. Внесем конечные вершины ребра u_{67} в множество S_3 . Получим множество S_4 :

$$S_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$$

5.4. Так как $(n_4 = 6) < (n = 8)$, необходимо продолжить построение дерева.

$\{u_{23}, u_{43}, u_{57}, u_{58}, u_{63}, u_{67}\},$ $\{c_{23} = 7, c_{43} = 9, c_{57} = 8, c_{58} = 5, c_{63} = 6, c_{67} = 4\}$	$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}..$	
$\{u_{23}, u_{43}, u_{57}, u_{58}, u_{63}, u_{67}\},$ $\{c_{23} = 7, c_{43} = 9, c_{57} = 8, c_{58} = 5, c_{63} = 6, c_{67} = 4\}$	$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}..$	
$U = \{u_{15}, u_{12}, u_{14}, u_{26}, u_{67}\}.$	$S_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	

Рис. 1.8

6.1. Выпишем все ребра, кроме ребер, выбранных ранее ($u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{26}, u_{67}$), инцидентные вершинам, принадлежащим множеству S_4 , но не оканчивающиеся в нем, и их веса.

$$\{u_{23}, u_{58}, u_{63}, u_{78}\},$$

$$\{c_{23}=7, c_{58}=5, c_{63}=6, c_{78}=2\}.$$

6.2. Выберем из них ребро с минимальным весом: u_{78} ($c_{78}=2$) и включим его в будущее дерево. Выделим его на графе (рис. 7.34).

6.3. Внесем конечные вершины ребра u_{78} в множество S_5 (которых нет в этом множестве). Получим множество S_5 :

$$S_5 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$$

6.4. Так как ($n_5 = 7$) < ($n = 8$), необходимо продолжить построение дерева.

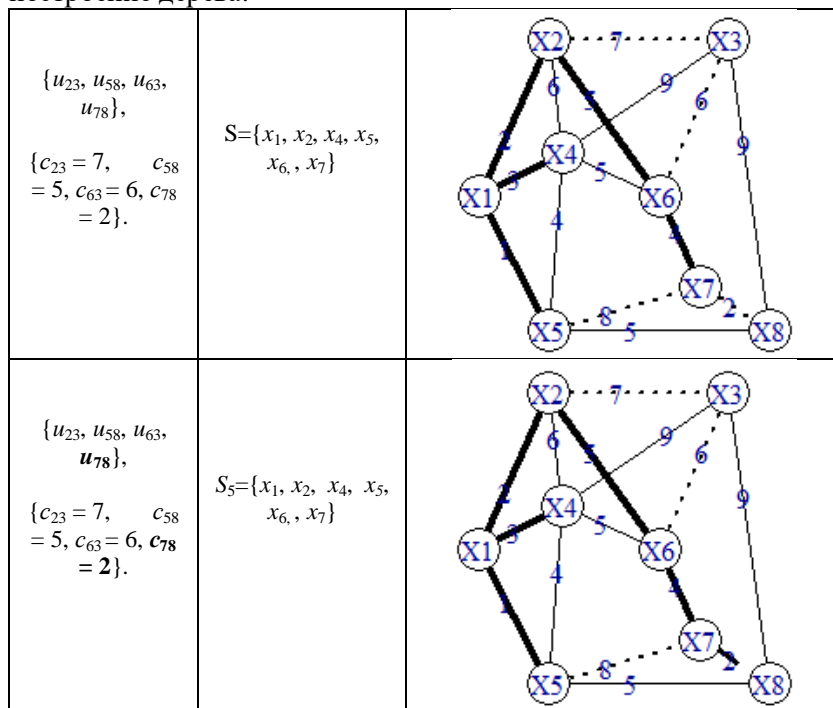


Рис.1.9 (начало)

$\{u_{23}, u_{43}, u_{63}, u_{83}\},$ $\{c_{23} = 7, c_{43} = 9, c_{63} = 6, c_{83} = 9\}.$	$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$	
$\{u_{23}, u_{43}, u_{63}, u_{83}\},$ $\{c_{23} = 7, c_{43} = 9, c_{63} = 6, c_{83} = 9\}.$	$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$	
$U = \{u_{15}, u_{12}, u_{14}, u_{26}, u_{67}, u_{78}, u_{63}\}.$	$S_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$	

Рис. 1.10

ЗАДАНИЕ

Лабораторная работа содержит одну задачу.

ЗАДАЧА

Пусть дан связный неориентированный взвешенный граф $G(V,E)$ с 9 вершинами рис.1.11 Построить для графа G минимальное остовное дерево. Матрицы весов приведены на рис. 1.12 – 1.15.

Исходные данные каждого варианта определяются в соответствии с таблицей 1.2.

Таблица 1.2

Вариант №	Схема	Матрица весов
1	1	1-1
2	1	1-2
3	1	1-3
4	1	1-4
5	2	2-1
6	2	2-2
7	2	2-3
8	2	2-4
9	3	3-1
10	3	3-2
11	3	3-3
12	3	3-4
13	4	4-1
14	4	4-2
15	4	4-3
16	4	4-4

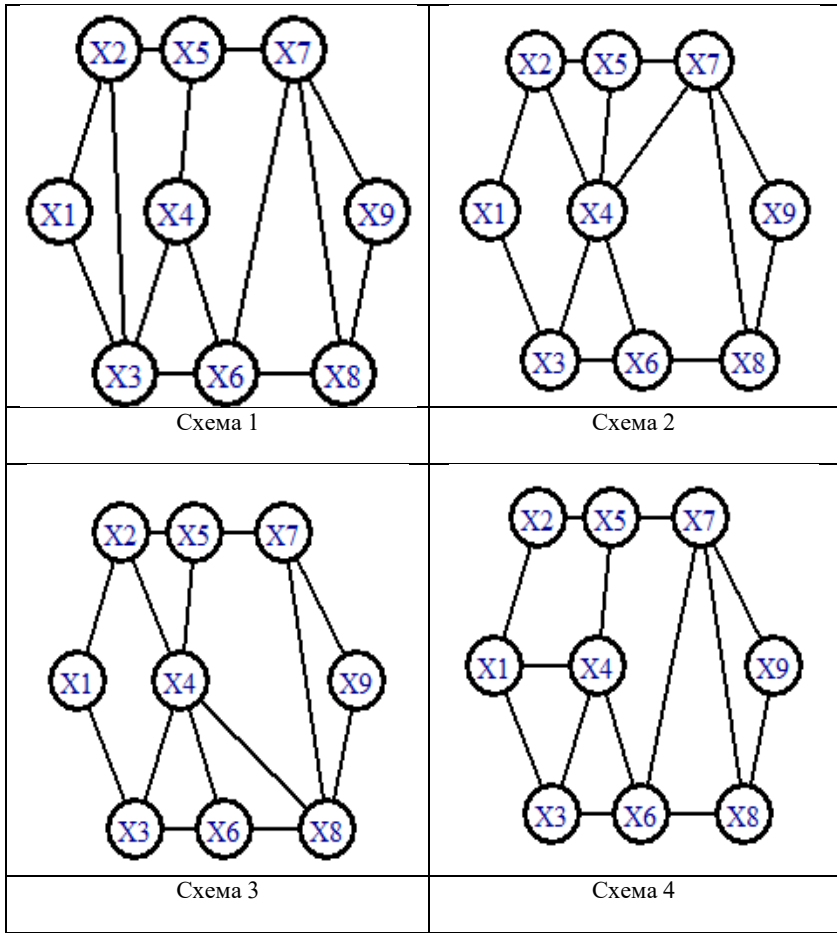


Рис. 1.11

Матрица 1-1										Матрица 1-2										
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		
X1	.	15	15	X1	.	19	18
X2	15	.	8	.	4	X2	19	.	10	.	8
X3	15	8	.	8	.	16	.	.	.	X3	18	10	.	9	.	17
X4	.	.	8	.	7	7	.	.	.	X4	.	.	9	.	7	10
X5	.	4	.	7	.	.	8	.	.	X5	.	8	.	7	.	.	9	.	.	.
X6	.	.	16	7	.	.	8	17	.	X6	.	.	17	10	.	.	13	19	.	.
X7	8	8	.	10	7	X7	9	13	.	12	10	.
X8	17	10	.	19	X8	19	12	.	18	.
X9	7	19	.	X9	10	18	.	.

Матрица 1-3										Матрица 1-4										
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		
X1	.	21	20	X1	.	21	21
X2	21	.	12	.	8	X2	21	.	15	.	10
X3	20	12	.	9	.	18	.	.	.	X3	21	15	.	11	.	20
X4	.	.	9	.	9	11	.	.	.	X4	.	.	11	.	12	11
X5	.	8	.	9	.	.	10	.	.	X5	.	10	.	12	.	.	13	.	.	.
X6	.	.	18	11	.	.	13	19	.	X6	.	.	20	11	.	.	15	21	.	.
X7	10	13	.	13	11	X7	13	15	.	15	13	.
X8	19	13	.	21	X8	21	15	.	22	.
X9	11	21	.	X9	13	22	.	.

Рис. 1.12

Матрица 2-1										Матрица 2-2										
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		
X1	.	15	15	X1	.	19	18
X2	15	.	.	8	4	X2	19	.	.	10	8
X3	15	.	.	8	.	16	.	.	.	X3	18	.	.	9	.	17
X4	.	8	8	.	17	7	11	.	.	X4	.	10	9	.	17	10	12	.	.	.
X5	.	4	.	17	.	.	6	.	.	X5	.	8	.	17	.	.	11	.	.	.
X6	.	.	16	7	.	.	.	17	.	X6	.	.	17	10	.	.	.	19	.	.
X7	.	.	.	11	6	.	.	10	17	X7	.	.	.	12	11	.	.	12	20	.
X8	17	10	.	19	X8	19	12	.	18	.
X9	17	19	.	X9	20	18	.	.

Рис. 1.13 (начало)

Матрица 2-3									Матрица 2-4								
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	.	21	20	X1	.	21	21
X2	21	.	.	12	8	.	.	.	X2	21	.	.	15	10	.	.	.
X3	20	.	.	9	18	.	.	.	X3	21	.	.	11	20	.	.	.
X4	.	12	9	.	19	11	13	.	X4	.	15	11	.	22	11	16	.
X5	.	8	.	19	.	.	11	.	X5	.	10	.	22	.	.	13	.
X6	.	.	18	11	.	.	.	19	X6	.	.	20	11	.	.	.	21
X7	.	.	.	13	11	.	.	13	X7	.	.	.	16	13	.	.	15
X8	19	13	21	X8	21	15	22
X9	21	21	X9	23	22

Рис. 1.13(окончание)

Матрица 3-1									Матрица 3-2								
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	.	15	15	X1	.	19	18
X2	15	.	.	8	14	.	.	.	X2	19	.	.	10	18	.	.	.
X3	15	.	.	18	16	.	.	.	X3	18	.	.	19	17	.	.	.
X4	.	8	18	.	17	7	11	.	X4	.	10	19	.	17	10	.	12
X5	.	14	.	17	.	.	6	.	X5	.	18	.	17	.	.	11	.
X6	.	.	16	7	.	.	.	17	X6	.	.	17	10	.	.	.	19
X7	6	.	.	10	X7	11	.	.	12
X8	.	.	.	11	.	17	10	19	X8	.	.	.	12	.	19	12	18
X9	17	19	X9	20	18

Матрица 3-3									Матрица 3-4								
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1	.	21	20	X1	.	21	21
X2	21	.	.	12	18	.	.	.	X2	21	.	.	15	20	.	.	.
X3	20	.	.	19	18	.	.	.	X3	21	.	.	21	20	.	.	.
X4	.	12	19	.	19	11	13	.	X4	.	15	21	.	22	11	16	.
X5	.	18	.	19	.	.	11	.	X5	.	20	.	22	.	.	13	.
X6	.	.	18	11	.	.	.	19	X6	.	.	20	11	.	.	.	21
X7	11	.	.	13	X7	13	.	.	15
X8	.	.	.	13	.	19	13	21	X8	.	.	.	16	.	21	15	22
X9	21	21	X9	23	22

Рис. 1.14

Матрица 4-1										Матрица 4-2									
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	
X1	. 15	15	8		X1	. 19	18	10	
X2	15	.	.	. 14		X2	19	.	.	. 18	
X3	15	.	. 18	.	16	.	.	.		X3	18	.	. 19	.	17	.	.	.	
X4	8	. 18	.	7	7	.	.	.		X4	10	. 19	.	7	10	.	.	.	
X5	. 14	.	7	.	.	8	.	.		X5	. 18	.	7	.	.	9	.	.	
X6	.	. 16	7	.	.	8	17	.		X6	.	. 17	10	.	.	13	19	.	
X7 8	8	.	10	7		X7 9	13	.	12	10	
X8 17	10	.	19		X8 19	12	.	18	
X9 7	19	.		X9 10	18	.	
Матрица 4-3										Матрица 4-4									
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	
X1	. 21	20	12		X1	. 21	21	15	
X2	21	.	.	. 18		X2	21	.	.	. 20	
X3	20	.	. 19	.	18	.	.	.		X3	21	.	. 21	.	20	.	.	.	
X4	12	. 19	.	9	11	.	.	.		X4	15	. 21	.	12	11	.	.	.	
X5	. 18	.	9	.	. 10	.	.	.		X5	. 20	. 12	.	.	13	.	.	.	
X6	.	. 18	11	.	. 13	19	.	.		X6	.	. 20	11	.	. 15	21	.	.	
X7 10	13	.	13	11		X7	.	.	. 13	15	.	15	13	.	
X8 19	13	.	21		X8 21	15	.	22	.	
X9 11	21	.		X9 13	22	.	.	

Рис. 1.15

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2. ПОИСК КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ НА ГРАФЕ

Цель: «Освоить на практике решение задачи нахождения кратчайшего пути в графе методом Дейкстры»

Задача о кратчайшем пути формулируется следующим образом: дан связный взвешенный граф $G = (V, E)$, не имеющий параллельных ребер. Для любых двух выделенных вершин графа требуется найти кратчайший путь между ними и указать этот путь.

Данный метод позволяет решать многие практические задачи. Одной из них является задача организации перевозки грузов от одного поставщика к нескольким потребителям при разветвленной сети дорог, при которых суммарный прогон транспортных средств будет минимальным (или суммарная стоимость перевозок будет минимальной). Знание кратчайших путей в сети улиц позволяет планировщикам транспортных сетей более точно моделировать потоки движения автомобилей по улицам города.

Для решения задачи нахождения кратчайших путей разработано много методов. Наиболее популярным является метод Дейкстры.

Метод Дейкстры

Пусть $x_j, j = \overline{1, n}$ – вершины графа. Метод заключается в присвоении вершинам графа временных меток $L(x_j)$, а затем по определенному правилу замены их постоянными метками $L^*(x_j)$. *Постоянные метки* – кратчайшие расстояния от заданной вершины (x_1) до всех остальных (x_j).

Предварительно всем вершинам графа, кроме вершины x_1 (исходной), требуется присвоить временные метки, равные ∞ : $L(x_j) = \infty, j = \overline{2, n}$, а вершине x_1 – постоянную метку $L^*(x_1) = 0$. Затем следует выполнить последовательность следующих действий:

1. Определить множество вершин графа, смежных с вершиной x_1 :

$$S(x_1) = \{x_j\}, j = \overline{1, k}.$$

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_1)$, вычислить новые временные метки $L(x_j)$, равные

$$\min\{L(x_j), L^*(x_i) + R_{ij}\},$$

где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_i)$ – новая постоянная метка вершины x_i , R_{ij} – вес ребра (x_i, x_j) .

3. Из всех имеющихся временных меток выбрать наименьшую и сделать ее постоянной для своей вершины.

4. Определить множество вершин графа, смежных с вершиной x_i , которой на предыдущем шаге была присвоена постоянная метка:

$$S(x_i) = \{x_j\}, j = \overline{1, k}.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока все вершины не будут иметь постоянные метки.

Если требуется найти кратчайшее расстояние от вершины x_1 до некоторой фиксированной вершины, процесс вычисления новых временных меток и присваивание одной из них постоянной метки заканчивается после того, как вершине, до которой ищется кратчайший путь, будет присвоена новая постоянная метка.

Пример

Используя метод Дейкстры, определить кратчайшие пути графа, представленного на рис.2.1, от вершины x_1 до всех остальных. Матрица смежности графа задана в табл. 2.1.

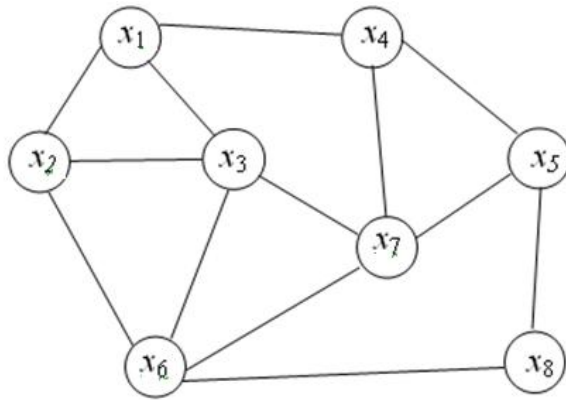


Рис.2.1

Таблица 2.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		34	5	4				
x_2	34		26			60		
x_3	5	26				15	31	
x_4	4				9		18	
x_5				9			21	20
x_6		60	15				30	14
x_7			31	18	21	30		
x_8					20	14		

Результаты вычислений будем представлять в таблице (табл. 2.2)

Предварительно всем вершинам графа, кроме вершины x_1 присвоим временные метки: $L(x_2) = L(x_3) = L(x_4) = L(x_5) = L(x_6) = L(x_7) = \infty$, а вершине x_1 – постоянную метку $L^*(x_1) = 0$. Занесем их в нулевой столбец табл. 2.2.

Таблица 2.2

Шаги \	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞							
x_3	∞							
x_4	∞							
x_5	∞							
x_6	∞							
x_7	∞							
x_8	∞							

Выполним последовательность следующих шагов:

Шаг 1

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_1 (см. рис. 2.1, табл. 2.1): $S(x_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$.

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_1)$, вычислим новые временные метки $L(x_j)$, равные $\min\{L(x_j), L^*(x_1) + R_{1j}\}$, где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_1) = 0$ – постоянная метка вершины x_1 , R_{1j} – вес ребра (x_1, x_j) .

$L(x_j)$	$L^*(x_1) + R_{1j}$	$\min\{L^*(x_1) + R_{1j}\}$
$L(x_2) = \infty$	$L^*(x_1) + R_{12} = 0 + 34 = 34$	$\min\{\infty, 34\} = 34$
$L(x_3) = \infty$	$L^*(x_1) + R_{13} = 0 + 5 = 5$	$\min\{\infty, 5\} = 5$
$L(x_4) = \infty$	$L^*(x_1) + R_{14} = 0 + 4 = 4$	$\min\{\infty, 4\} = 4$

Вершинам x_2, x_3, x_4 присвоим новые временные метки, которые вычислили выше; метки вершин x_5, x_6, x_7 остаются без изменения, т.е. будем иметь: $L(x_2) = 34, L(x_3) = 5, L(x_4) = 4, L(x_5) = L(x_6) = L(x_7) = L(x_8) = \infty$. Занесем их в первый столбец табл. 2.3, причем обновленные метки выделим.

Таблица 2.3

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34						
x_3	∞	5						
x_4	∞	4						
x_5	∞	∞						
x_6	∞	∞						
x_7	∞	∞						
x_8	∞	∞						

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{34, 5, 4, \infty, \infty, \infty, \infty\}$. Эта метка соответствует вершине x_4 : $L^*(x_4) = 4$. Отметим ее звездочкой в столбце 1 (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34						
x_3	∞	5						
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞						
x_6	∞	∞						
x_7	∞	∞						
x_8	∞	∞						

Геометрический смысл указанных действий показан в Приложении 1 на рисунках П.1.1.-П.1.3

На этом и последующих рисунках вершины с временными метками обозначены кружками, вершины с постоянными метками – квадратиками и треугольниками, при это треугольником обозначена вершина, которая стала постоянной на первом или предыдущем шаге.

Шаг 2

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_4 (см. рис. 2.1, табл. 2.1): $S(x_4) = \{x_1, x_5, x_7\}$. Вершина x_1 уже имеет постоянную метку, т.е. $S(x_4) = \{x_1^*, x_5, x_7\}$.

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_4)$ и не имеющей постоянной метки, вычислим новые временные метки $L(x_j)$, равные $\min\{L(x_j), L^*(x_4) + R_{4j}\}$, где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_4) = 4$ – постоянная метка вершины x_4 , R_{4j} – вес ребра (x_4, x_j) (см. табл. 2.1).

$$\begin{array}{l}
 L(x_j) \qquad \qquad L^*(x_4) + R_{4j} \qquad \qquad \min\{L^*(x_4) + R_{4j}\} \\
 L(x_5) = \infty \quad L^*(x_4) + R_{45} = 4 + 9 = 13 \quad \min\{\infty, 13\} = 13 \\
 L(x_7) = \infty \quad L^*(x_4) + R_{47} = 4 + 18 = 22 \quad \min\{\infty, 22\} = 22.
 \end{array}$$

Вершинам x_5, x_7 присвоим новые временные метки, которые вычислили выше; метки вершин x_6, x_8 остаются без изменения, т.е. будем иметь: $L(x_2) = 34, L(x_3) = 5, L(x_5) = 13, L(x_7) = 22, L(x_6) = L(x_8) = \infty$. Занесем их во второй столбец табл. 2.5, причем обновленные метки выделим.

Таблица 2.5

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34					
x_3	∞	5	5					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13					
x_6	∞	∞	∞					
x_7	∞	∞	22					
x_8	∞	∞	∞					

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{34, \mathbf{5}, 13, \infty, 22, \infty\} = 5$. Эта метка соответствует вершине x_3 : $L^*(x_3) = 5$. Отметим ее звездочкой в столбце 2 (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34					
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13					
x_6	∞	∞	∞					
x_7	∞	∞	22					
x_8	∞	∞	∞					

Геометрический смысл указанных действий показан в Приложении 2 на рисунках П.2.1.-П.2.3

Шаг 3

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_3 (см. рис.2.1, табл. 2.1): $S(x_3) = \{x_1, x_2, x_6, x_7\}$. Вершина x_1 уже имеет постоянную метку, т.е. $S(x_3) = \{x_1^*, x_5, x_6, x_7\}$.

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_3)$ и не имеющей постоянной метки, вычислим новые временные метки $L(x_j)$, равные $\min\{L(x_j), L^*(x_3) + R_{3j}\}$, где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_3) = 5$ – постоянная метка вершины x_3 , R_{3j} – вес ребра (x_3, x_j) (см. табл. 2.1).

$L(x_j)$	$L^*(x_3) + R_{3j}$	$\min\{L^*(x_3) + R_{3j}\}$
$L(x_2) = 34$	$L^*(x_3) + R_{32} = 5 + 26 = 31$	$\min\{34, 31\} = 31$
$L(x_6) = \infty$	$L^*(x_3) + R_{36} = 5 + 15 = 20$	$\min\{\infty, 20\} = 20$
$L(x_7) = \infty$	$L^*(x_3) + R_{37} = 5 + 31 = 36$	$\min\{\infty, 36\} = 36$

Вершинам x_2, x_6 присвоим новые временные метки, которые вычислили выше; метки вершин x_5, x_7, x_8 остаются без изменения, т.е. будем иметь: $L(x_2) = 31, L(x_5) = 13, L(x_6) = 20, L(x_7) = 22, L(x_8) = \infty$. Занесем их в третий столбец табл. 2.7, причем обновленные метки выделим.

Таблица 2.7

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31				
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13				
x_6	∞	∞	∞	20				
x_7	∞	∞	22	22				
x_8	∞	∞	∞	∞				

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{31, \mathbf{13}, 20, 22, \infty\} = 5$. Эта метка соответствует вершине x_5 : $L^*(x_5) = 13$. Отметим ее звездочкой в столбце 3 (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31				
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20				
x_7	∞	∞	22	22				
x_8	∞	∞	∞	∞				

Геометрический смысл указанных действий показан в Приложении 3 на рисунке П.3.1.-П.3.3

Шаг 4

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_5 (см. рис. 2.1, табл. 2.1): $S(x_5) = \{x_4, x_7, x_8\}$. Вершина x_4 уже имеет постоянную метку, т.е. $S(x_5) = \{x_4^*, x_7, x_8\}$.

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_5)$ и не имеющей постоянной метки, вычислим новые временные метки $L(x_j)$, равные $\min\{L(x_j), L^*(x_5) + R_{5j}\}$, где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_5) = 13$ – постоянная метка вершины x_5 , R_{5j} – вес ребра (x_5, x_j) (см. табл. 2.1).

$$L(x_j) \quad L^*(x_5) + R_{5j} \quad \min\{L^*(x_5) + R_{5j}\}$$

$$L(x_7) = 22 \quad L^*(x_5) + R_{57} = 13+21 = 34 \quad \min\{22, 34\} = 22$$

$$L(x_8) = \infty \quad L^*(x_5) + R_{58} = 13+20 = 33 \quad \min\{\infty, 33\} = 33$$

Вершине x_8 присвоим новую временную метку, которую вычислили выше; метки вершин x_2, x_6, x_7 остаются без изменения, т.е. будем иметь: $L(x_2) = 31, L(x_6) = 20, L(x_7) = 22, L(x_8) = 33$. Занесем их в четвертый столбец табл. 2.9, причем обновленные метки выделим.

Таблица 2.9

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31			
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20			
x_7	∞	∞	22	22	22			
x_8	∞	∞	∞	∞	33			

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{31, \mathbf{20}, 22, 33\} = 20$. Эта метка соответствует вершине x_6 : $L^*(x_6) = 20$. Отметим ее звездочкой в столбце 4 (табл. 2.10).

Таблица 2.10

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31			
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22			
x_8	∞	∞	∞	∞	33			

Шаг 5

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_5 (см. рис. 2.1, табл. 2.1):

$S(x_6) = \{x_2, x_3, x_7, x_8\}$. Вершина x_3 уже имеет постоянную метку, т.е. $S(x_6) = \{x_2^*, x_3, x_7, x_8\}$.

2. Для каждой вершины, принадлежащей множеству $S(x_6)$ и не имеющей постоянной метки, вычислим новые временные метки $L(x_j)$, равные $\min\{L(x_j), L^*(x_6) + R_{6j}\}$, где $L(x_j)$ – старая временная метка вершины x_j , $L^*(x_6) = 20$ – постоянная метка вершины x_6 , R_{6j} – вес ребра (x_6, x_j) (см. табл. 2.1).

$L(x_j)$	$L^*(x_6) + R_{6j}$	$\min\{L^*(x_6) + R_{6j}\}$
$L(x_7) = 22$	$L^*(x_6) + R_{67} = 20+30 = 50$	$\min\{22, 50\} = 22$
$L(x_8) = 33$	$L^*(x_6) + R_{68} = 20+14 = 34$	$\min\{33, 34\} = 33$

Все временные метки остаются без изменения. Перенесем их в пятый столбец табл. 2.11

Таблица 2.11

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31		
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33		

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{31, 22, 33\} = 22$. Эта метка соответствует вершине x_7 : $L^*(x_7) = 22$. Отметим ее звездочкой в столбце 5 (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31		
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22*		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33		

Шаг 6

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_7 (см. рис.2.1, табл. 2.1): $S(x_7) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Все вершины имеют постоянные метки, т.е. $S(x_7) = \{x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\}$.

2. Для вершин, принадлежащих множеству $S(x_7)$ вычислять новые временные метки не надо. Перенесем их в шестой столбец табл. 2.13.

Таблица 2.13

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31	31	
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22*		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33	33	

3. Из всех имеющихся временных меток выберем наименьшую и сделаем ее постоянной для своей вершины: $\min\{31, 33\} = 31$. Эта метка соответствует вершине x_2 :

$$L^*(x_2) = 31.$$

Отметим ее звездочкой в столбце 6 (табл. 2.14).

Таблица 2.14

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31	31*	
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22*		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33	33	

Шаг 7

1. Определим множество вершин графа, смежных с вершиной x_2 (см. рис. 2.1, табл. 2.1): $S(x_2) = \{x_1, x_3, x_6\}$. Все вершины имеют постоянные метки, т.е. $S(x_2) = \{x_1^*, x_3^*, x_6^*\}$.

2. Имеется одна старая временная метка. Перенесем ее в седьмой столбец табл. 2.15.

Таблица 2.15

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31	31*	
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22*		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33	33	33

3. Сделаем последнюю временную метку постоянной. Отметим ее звездочкой в столбце 7 (табл. 2.16).

Таблица 2.16

Шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0*							
x_2	∞	34	34	31	31	31	31*	
x_3	∞	5	5*					
x_4	∞	4*						
x_5	∞	∞	13	13*				
x_6	∞	∞	∞	20	20*			
x_7	∞	∞	22	22	22	22*		
x_8	∞	∞	∞	∞	33	33	33	33*

Процесс расстановки меток закончен. Значения их дают кратчайшие расстояния от исходной вершины x_1 до всех остальных:

$$L(x_2) = 31, L(x_3) = 5, L(x_4) = 4, L(x_5) = 13, L(x_6) = 20, L(x_7) = 33.$$

Чтобы найти кратчайшие пути от вершины x_1 до всех остальных вершин, следует использовать соотношение:

$$L^*(x_j) = L^*(x_i) + R_{ij}, \quad (2.1)$$

в котором вершина x_i предшествует вершине x_j .

Найдем кратчайшие пути графа.

1. Определим кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_8 .

Для этого используем соотношение (2.1), где $j = 8$:

$$L^*(x_8) = L^*(x_i) + R_{i8} \quad (2.2)$$

Вершина x_8 имеет только две смежные вершины: x_5 и x_6 , из которых можно попасть в вершину x_8 : $S(x_5, x_6)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.2).

$$L^*(x_8) = \mathbf{33},$$

$$L^*(x_5) = 13 \quad R_{58} = 20 \quad L^*(x_8) = L^*(x_5) + R_{58} = \mathbf{33},$$

$$L^*(x_6) = 20 \quad R_{68} = 14 \quad L^*(x_8) = L^*(x_6) + R_{68} = 34.$$

Как видно, только вершина x_5 удовлетворяет соотношению (2.2). Следовательно, в кратчайшем пути вершине x_8 предшествует вершина x_5 (рис.2.4).

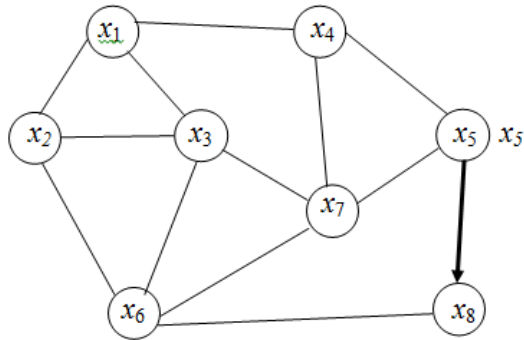


Рис. 2.4

Определим, какая вершина предшествует вершине x_5 в кратчайшем пути. Вершина x_5 имеет две смежные вершины: x_4, x_7 (вершина x_8 уже вошла в искомый путь и поэтому не рассматривается): $S(x_4, x_7, x_8)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.1).

$$\begin{aligned}
 L^*(x_5) &= \mathbf{13}, \\
 L^*(x_4) &= 4 \quad R_{45} = 9 \quad L^*(x_5) = L^*(x_4) + R_{45} = \mathbf{13}, \\
 L^*(x_7) &= 22 \quad R_{75} = 21 \quad L^*(x_8) = L^*(x_6) + R_{68} = 33.
 \end{aligned}$$

Как видно, соотношению (2.1) удовлетворяет только вершина x_4 . Следовательно, в кратчайшем пути вершине x_5 предшествует вершина x_4 (рис. 2.5).

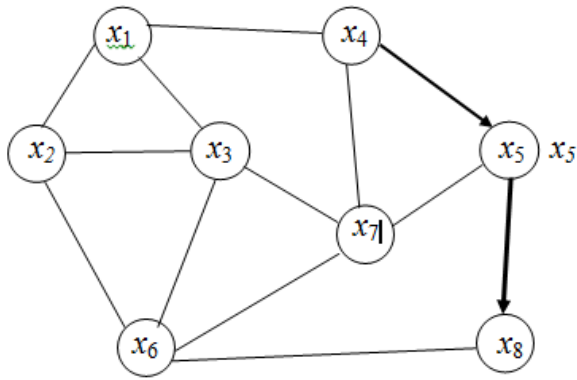


Рис. 2.5

Определим, какая вершина предшествует вершине x_4 в кратчайшем пути. Вершина x_4 имеет две смежные вершины: x_1 и x_7 (вершина x_5 уже вошла в искомый путь и поэтому не рассматривается): $S(x_1, x_8, x_5)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.1).

$$\begin{aligned}
 L^*(x_4) &= \mathbf{4}, \\
 L^*(x_1) = 0 \quad R_{14} = 4 \quad L^*(x_4) &= L^*(x_1) + R_{14} = \mathbf{4}, \\
 L^*(x_7) = 22 \quad R_{74} = 21 \quad L^*(x_4) &= L^*(x_7) + R_{74} = 40.
 \end{aligned}$$

Как видно, соотношению (2.1) удовлетворяет только вершина x_1 . Следовательно, в кратчайшем пути вершине x_4 предшествует вершина x_1 (рис. 2.6), которая является исходной.

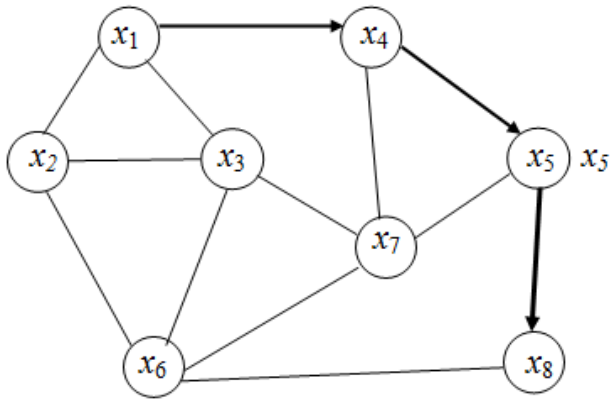


Рис. 2.6

Таким образом, минимальный путь от вершины x_1 до вершины x_8 проходит по вершинам x_1, x_4, x_5, x_8 и длина этого пути равна **33**.

Очевидно, что каждый из путей из вершины x_1 до любой вершины, входящей в построенный кратчайший путь от вершины x_1 в вершину x_8 , тоже будет оптимальным.

2. Найдем кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_7 .

Вершина x_7 имеет смежные вершины: $S(x_7, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.1).

$$\begin{aligned}
 L^*(x_7) &= \mathbf{22}, \\
 L^*(x_3) = 5 \quad R_{37} = 31 \quad L^*(x_7) &= L^*(x_3) + R_{37} = 36, \\
 L^*(x_4) = 4 \quad R_{47} = 18 \quad L^*(x_7) &= L^*(x_4) + R_{47} = \mathbf{22}, \\
 L^*(x_5) = 13 \quad R_{57} = 21 \quad L^*(x_7) &= L^*(x_5) + R_{57} = 34, \\
 L^*(x_6) = 20 \quad R_{67} = 30 \quad L^*(x_7) &= L^*(x_6) + R_{67} = 50.
 \end{aligned}$$

Как видно, соотношению (2.1) удовлетворяет только вершина x_4 . Следовательно, в кратчайшем пути вершине x_7 предшествует вершина x_4 .

Как было показано выше, вершине x_4 в кратчайшем пути предшествует вершина x_1 (рис. 2.7).

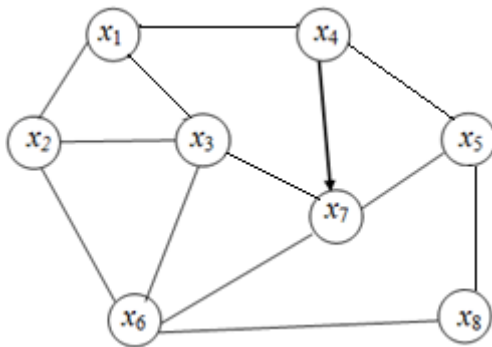


Рис. 2.7

Таким образом, минимальный путь от вершины x_1 до вершины x_7 проходит по вершинам x_1, x_4, x_7 и длина этого пути равна **22** (рис.2.8).

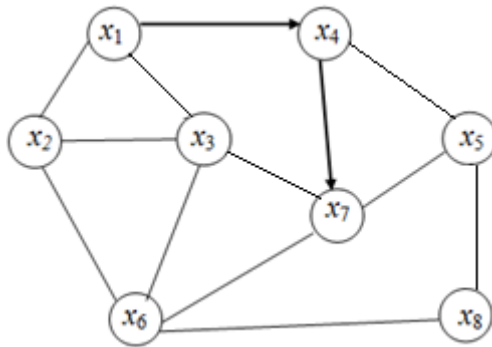


Рис. 2.8

3. Найдем кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 .

Вершина x_6 имеет смежные вершины: $S(x_2, x_3, x_7, x_8)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.1).

$$\begin{aligned}
L^*(x_6) &= 20, \\
L^*(x_2) = 31 \quad R_{26} = 60 \quad L^*(x_6) &= L^*(x_2) + R_{26} = 91, \\
L^*(x_3) = 5 \quad R_{36} = 15 \quad L^*(x_6) &= L^*(x_3) + R_{36} = 20, \\
L^*(x_7) = 22 \quad R_{76} = 30 \quad L^*(x_6) &= L^*(x_7) + R_{76} = 52, \\
L^*(x_8) = 33 \quad R_{86} = 14 \quad L^*(x_6) &= L^*(x_8) + R_{86} = 47.
\end{aligned}$$

Как видно, соотношению (2.1) удовлетворяет только вершина x_3 . Следовательно, в искомом кратчайшем пути вершине x_6 предшествует вершина x_3 (рис. 2.9).

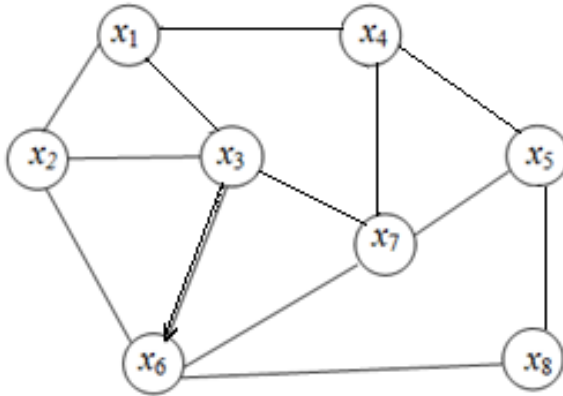


Рис. 2.9

Вершина x_3 имеет смежные вершины: $S(x_1, x_2, x_7, x_6)$. Определим, какая из этих вершин удовлетворяет соотношению (2.1).

$$\begin{aligned}
L^*(x_3) &= 5, \\
L^*(x_1) = 0 \quad R_{13} = 5 \quad L^*(x_3) &= L^*(x_1) + R_{13} = 5, \\
L^*(x_2) = 34 \quad R_{23} = 26 \quad L^*(x_3) &= L^*(x_2) + R_{23} = 60, \\
L^*(x_7) = 23 \quad R_{73} = 31 \quad L^*(x_3) &= L^*(x_7) + R_{73} = 54.
\end{aligned}$$

Как видно, соотношению (2.1) удовлетворяет только вершина x_1 . Следовательно, в искомом кратчайшем пути вершине x_3 предшествует вершина x_1 , которая является исходной (рис. 2.10).

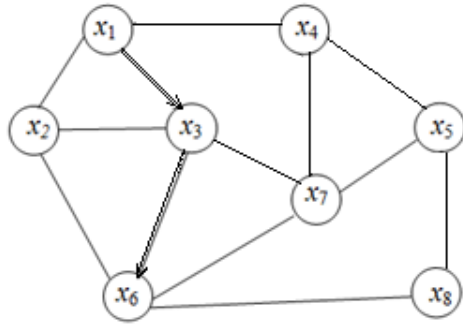


Рис. 2.10

Решение задачи в MS Excel

Для контроля задачу решим задачу в MS Excel с помощью надстройки «Поиск решения».

Для этого может быть использована следующая модель.

Пусть

$$c_{i,j} = \begin{cases} w_{i,j} & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ соединены ребром} \\ M & \text{, в противном случае} \end{cases},$$

где $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$, $w_{i,j}$ - вес ребра,
 M - большое число.

Обозначим индекс начальной вершины символом S (source), индекс конечной вершины символом T (target).

Введем матрицу $\{x_{ij}\}$ $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$,

где x_{ij} принимает значения ноль или единица.

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если путь выходит из } x_i \text{ и входит в } x_j \\ 0 & \text{, в противном случае} \end{cases}.$$

При таких обозначениях задача о кратчайшем пути может быть сформулирована в виде задачи на оптимизацию с целевой функцией, определяемой соотношением

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min . \quad (2.3)$$

Ограничения определяются следующими соотношениями

$$\sum_{j=1}^n x_{sj} = 1 \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{iT} = 1 \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{kj} = \sum_{i=1}^n x_{ik} \quad \text{для } k \notin \{S, T\} \quad (2.6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (2.7)$$

Выполнение ограничения (2.4) обеспечивает выход из стартовой вершины x_s , ограничения (2.5) – достижение вершины x_T . Соотношение (2.6) содержит требование для всех остальных вершин (не стартовой и не финишной) – количество входов в вершину равно количеству выходов.

Рассмотрим решение приведенного выше примера в MS Excel с помощью надстройки «Поиск решения».

Расчеты приведены на рис.2.11- рис.2.15.

Искомые значения $\{x_{ij}\}$ $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$ - в диапазоне ячеек A8:I16. В начальный момент в этом диапазоне находятся нули. В диапазоне ячеек C17: I17 находятся суммы указанных значений по столбцам, а в диапазоне ячеек J9:J16 находятся суммы указанных значений по строкам.

Значения матрицы весов c_{ij} $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$ находятся в диапазоне ячеек A23: I31.

В качестве числа M , в задаче выбрано число 100. В ячейке I33 находится значение целевой функции, определяемое соотношением (2.3), которое может вычислено по формуле =СУММПРОИЗВ(B9:I16;B24:I31).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
7	Пункты отправления	Пункты назначения								Количество исходов	Исток		
8		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8				
9	x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
10	x_2	0	0	0	0	=СУММ(B9:I9)	0	0	0	0			
11	x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
12	x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
13	x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
14	x_6	=СУММ(C9:C16)	0	0	0	0	0	0	0	0			
15	x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
16	x_8	0	0	0	=ТРАНСП(J10:J15)	0	0	0	0	0			
17		0	0	0	0	0	0	0	0	Количество входов			
18										1	Сток		
19		0	0	0	0	0	0	0	0	Количество исходов			
20													

Рис.2.11. Фрагмент листа MS Excel с начальными данными.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21		Матрица весов								
22	Пункты отправления	Пункты назначения								
23		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
24	x_1	100	34	5	4	100	100	100	100	
25	x_2	34	100	26	100	100	60	100	100	
26	x_3	5	26	100	100	100	15	31	100	
27	x_4	4	100	100	100	9	100	18	100	
28	x_5	100	100	100	9	100	100	21	20	
29	x_6	100	60	15	100	100	100	30	14	
30	x_7	100	100	31	18	21	30	100	100	
31	x_8	100	100	100	100	20	14	100	100	
32										
33		=СУММПРОИЗВ(B9:I16;B24:I31)								0 <-ЦФ

Рис. 2.12 . Фрагмент листа MS Excel с матрицей весов и целевой функцией.

Соотношения (2.4 - 2.7) учтены в ограничениях диалогового окна надстройки «Поиск решения».

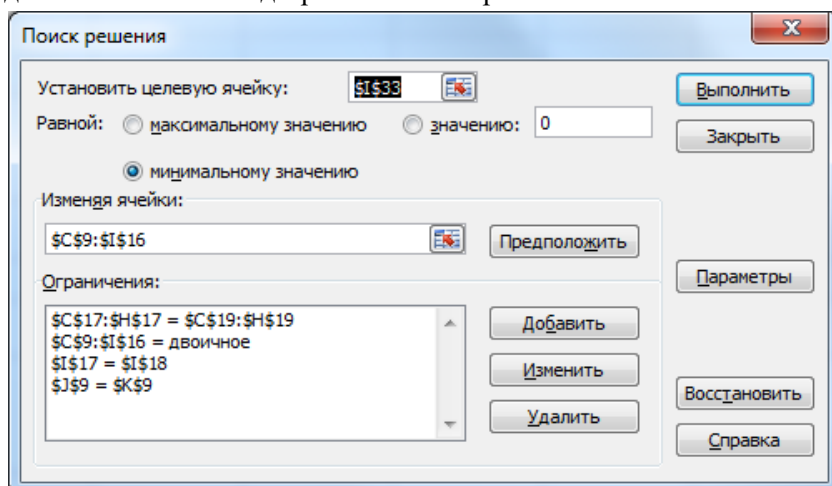


Рис. 2.13. Диалоговое окно надстройки «Поиск решения».

Результаты решения приведены на рис.2.14 и рис.2.15. Кратчайший путь читается с помощью анализа матрицы в диапазоне ячеек A8:I16. Наличие значений, равных единице, позволяет восстановить искомый путь от вершины x_1 до вершины x_8 , который проходит по вершинам x_1, x_4, x_5, x_8 . Длина этого пути равна 33, значение которой приведены в ячейке I33. Заметим, что полученное решение совпадает с решением, полученным методом Дейкстры.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
7	Пункты отправления	Пункты назначения								Количество исходов	Исток		
8		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8				
9	x_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	
10	x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
11	x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
12	x_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1		
13	x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		
14	x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
15	x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
16	x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
17		0	0	0	1	1	0	0	1	Количество входов			
18									1	Сток			
19		0	0	1	1	0	0			Количество исходов			

Рис. 2.14. Фрагмент листа MS Excel с результатами решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
32										
33		=СУММПРОИЗВ(B9:I16;B24:I31)								33 <-ЦФ

Рис.2.15. Фрагмент листа MS Excel с результатами решения.

Анализируя результат решения на рис.2.14 - 2.15, определим кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_8 . Минимальный путь от вершины x_1 до вершины x_8 проходит по вершинам x_1, x_4, x_5, x_8 и длина этого пути равна **33**.

Полученный результат полностью совпадает с результатом, полученным ранее методом Дейкстры.

ЗАДАНИЕ

Лабораторная работа содержит одну задачу.

ЗАДАЧА

Определить кратчайший путь между вершинами графа. Исходные данные для построения графа определены в предыдущей работе (рис.2.11-2.15). Исходные данные для

определения начальной (source) и конечной (target) вершин приведены в таблице +.2.

Таблица 2.17

Вариант №	Source	Target
1	X ₁	X ₈
2	X ₃	X ₉
3	X ₃	X ₇
4	X ₂	X ₈
5	X ₁	X ₈
6	X ₁	X ₉
7	X ₃	X ₇
8	X ₂	X ₈
9	X ₁	X ₈
10	X ₃	X ₉
11	X ₃	X ₇
12	X ₂	X ₈
13	X ₁	X ₈
14	X ₁	X ₉
15	X ₃	X ₇
16	X ₂	X ₈

Решить задачу двумя способами:

1. Методом Дейкстры;
2. Средствами MS Excel.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петухова Н.М.* Математическое моделирование на автомобильном транспорте [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н. М. Петухова. - СПб. : Горн. ун-т, 2013. - 225 с. - Б. ц.с
http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=402&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%2D078736<.>
2. *Оре О.* Теория графов.– М.: Наука, 1980. 336 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов.– М.: Мир, 1973. 300 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

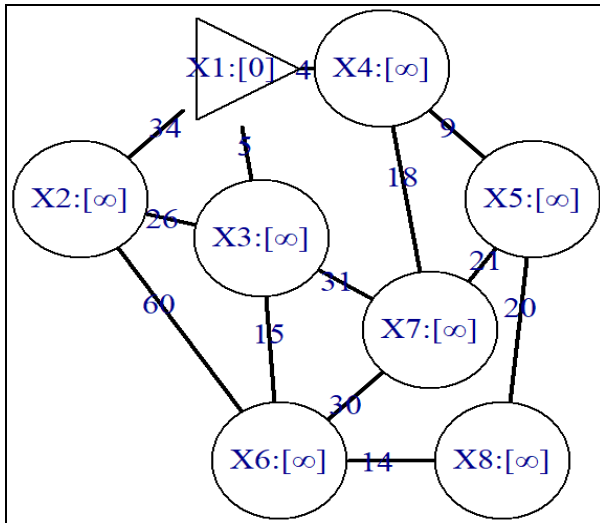


Рис. П.1.1. Шаг 1-0

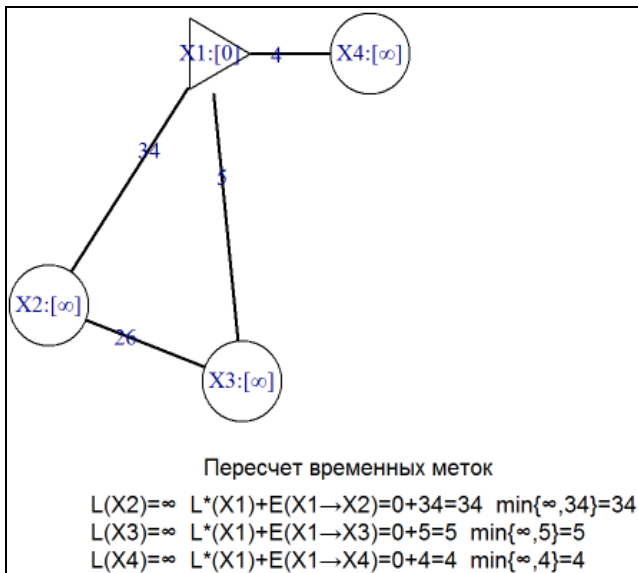


Рис. П.1.2. Шаг 1-1

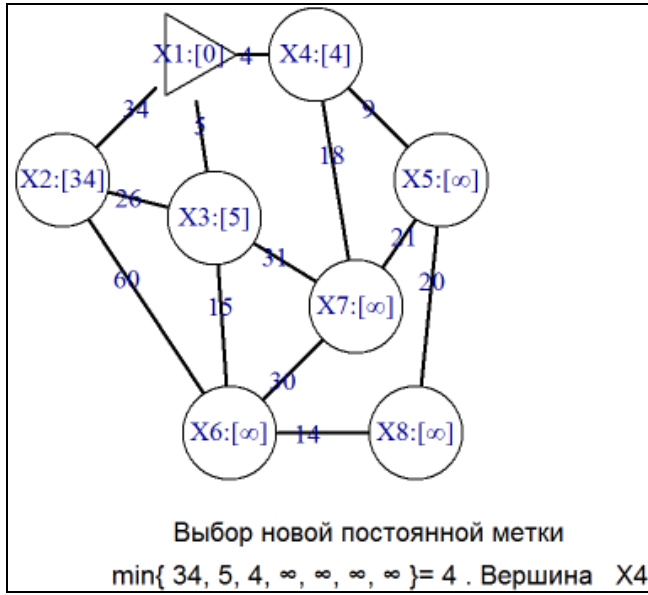


Рис. П.1.3. Шаг 1-2

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

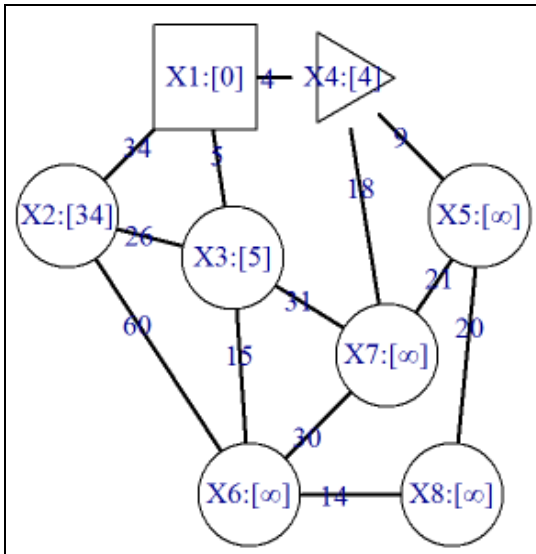


Рис. П.2.1. Шаг 2-0

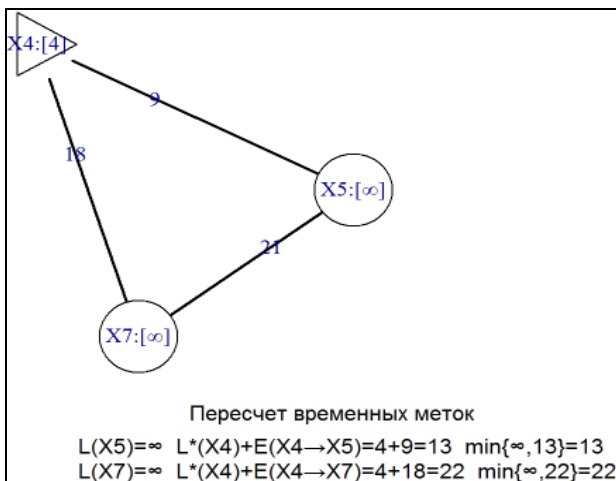


Рис. П.2.2. Шаг 2-1

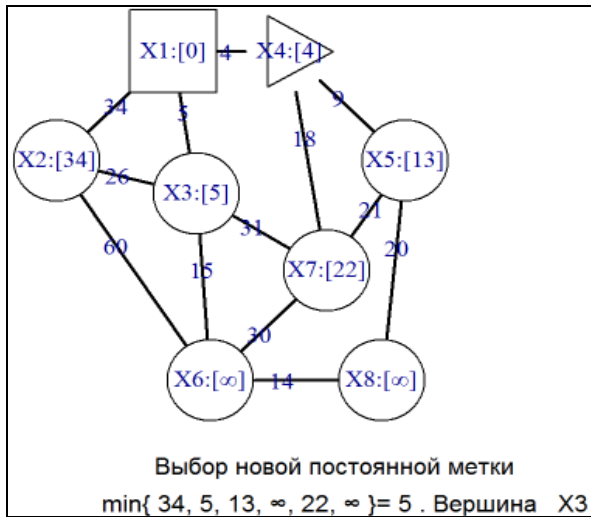


Рис. П.2.3. Шаг 2-2

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

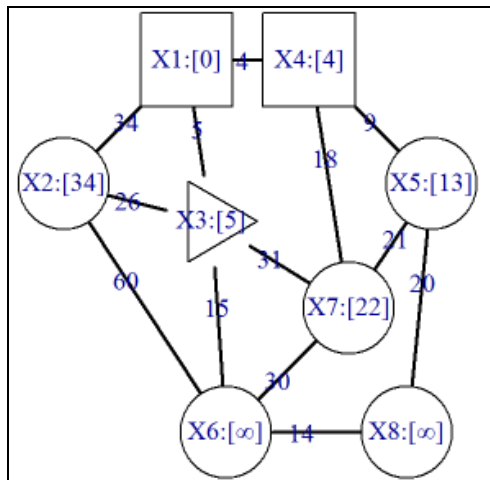


Рис. П.3.1. Шаг 3-0

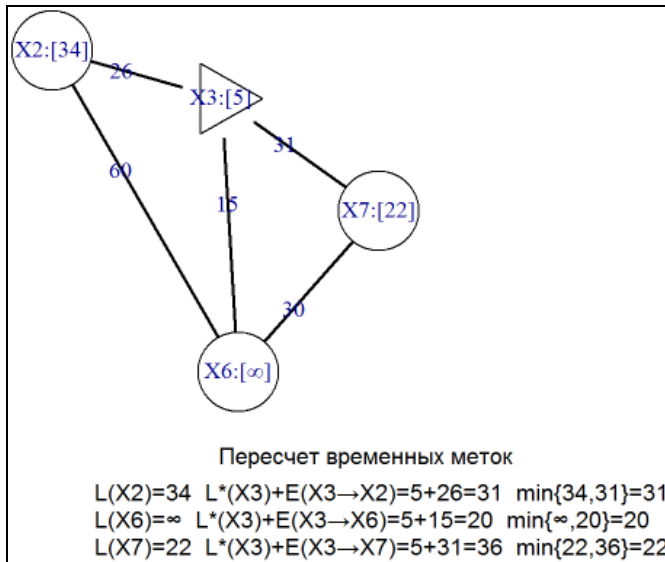


Рис. П.3.2. Шаг 3.1

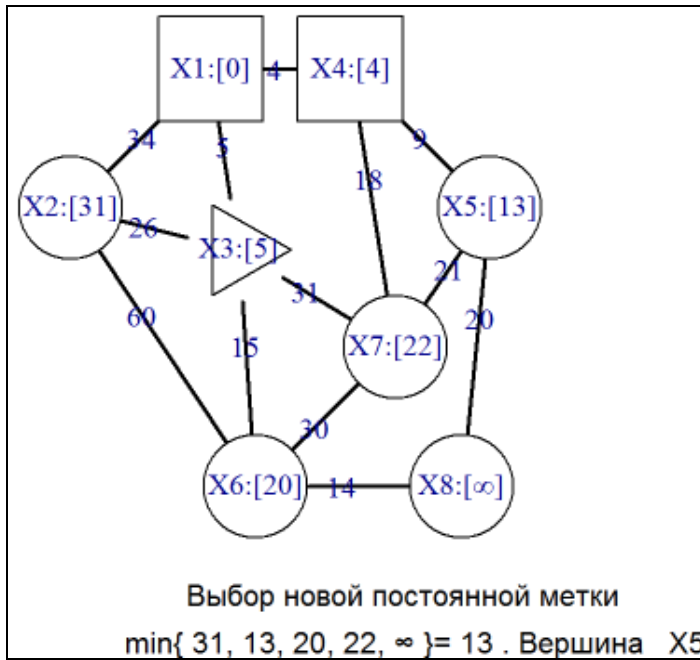


Рис. П.3.3. Шаг 3.2

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

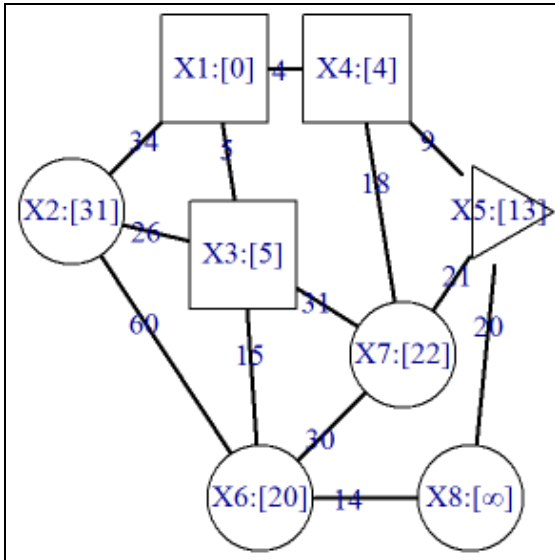


Рис. П.4.1. Шаг 4-0

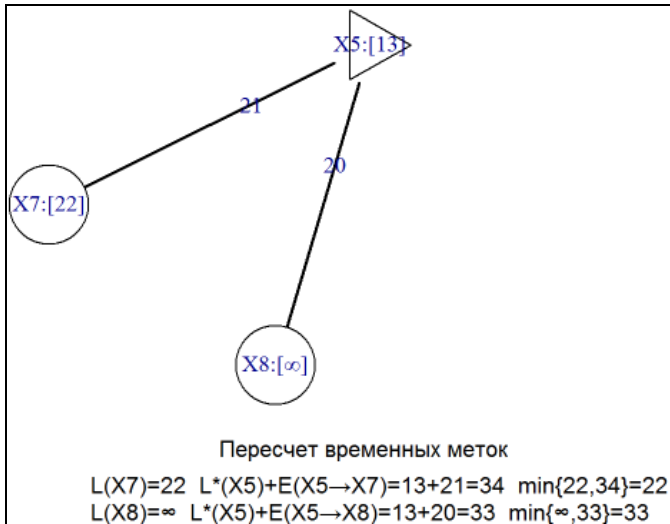


Рис. П.4.2. Шаг 4-1

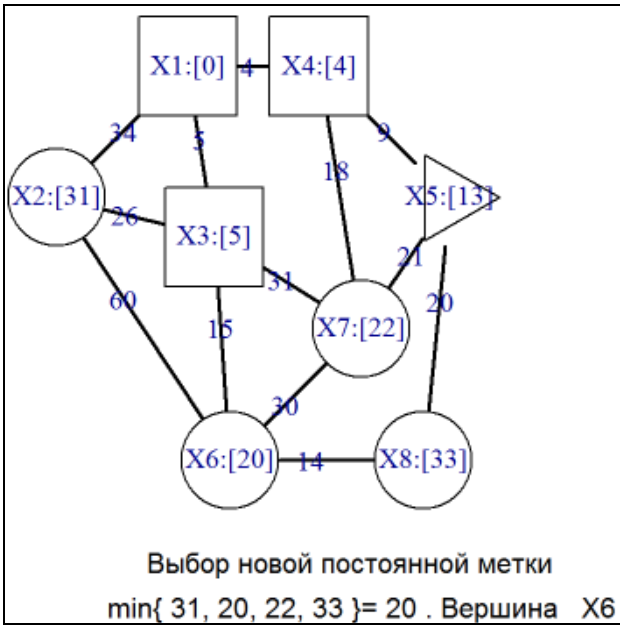


Рис. П.4.3. Шаг 4-2

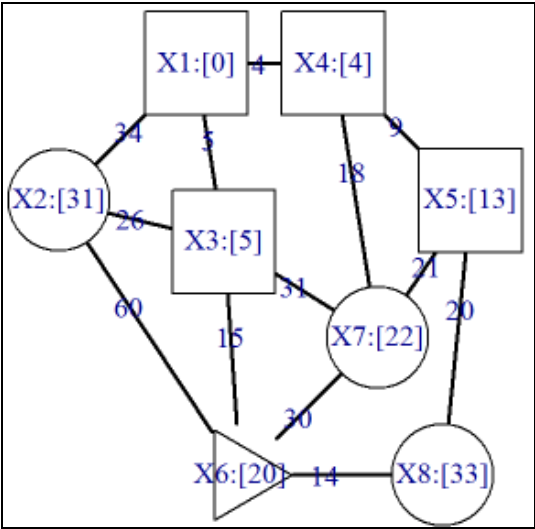


Рис. П.4.4. Пр. рез.4

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

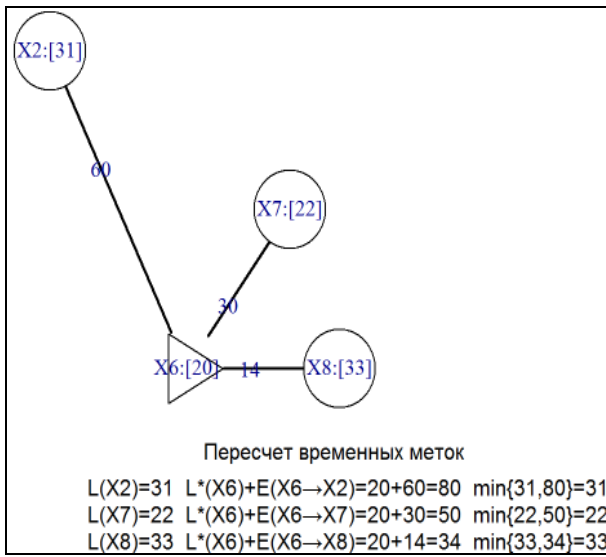


Рис. П.5.1. Шаг 5-1

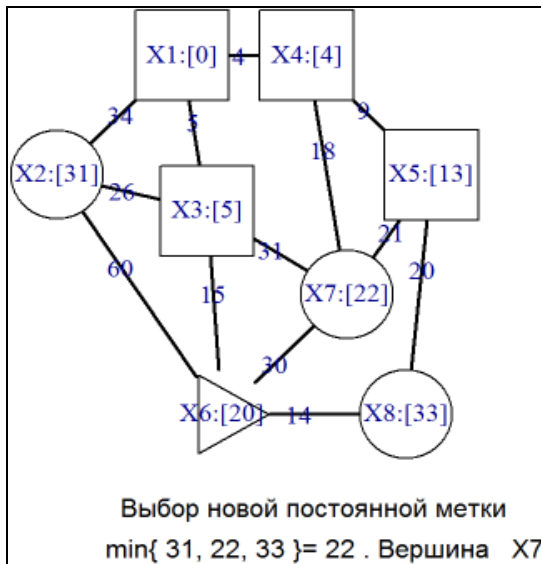


Рис. П.5.2. Шаг 5-2

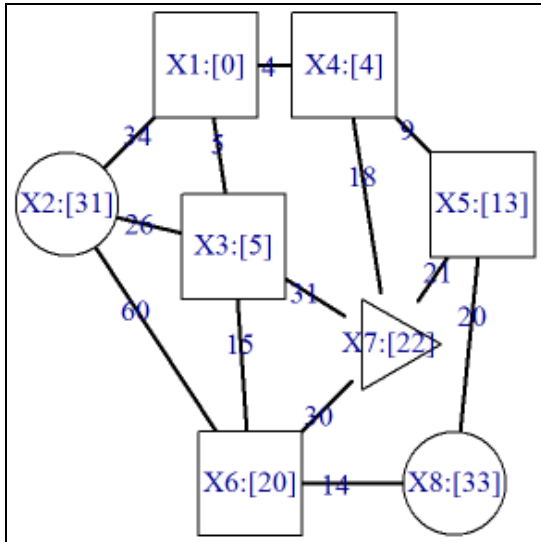


Рис. П.5.3. Пр. рез.5

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

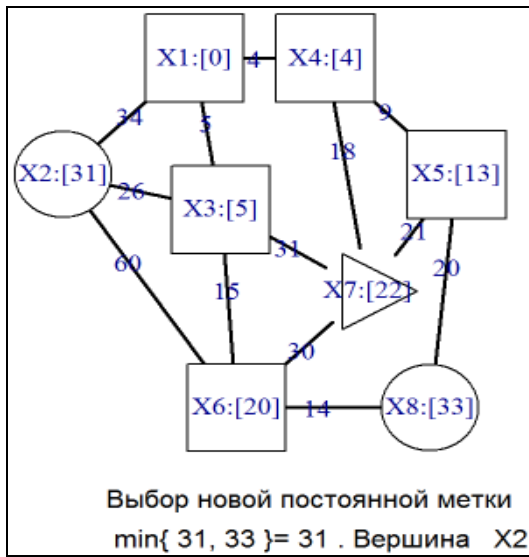


Рис. П.6.1. Шаг 6-2

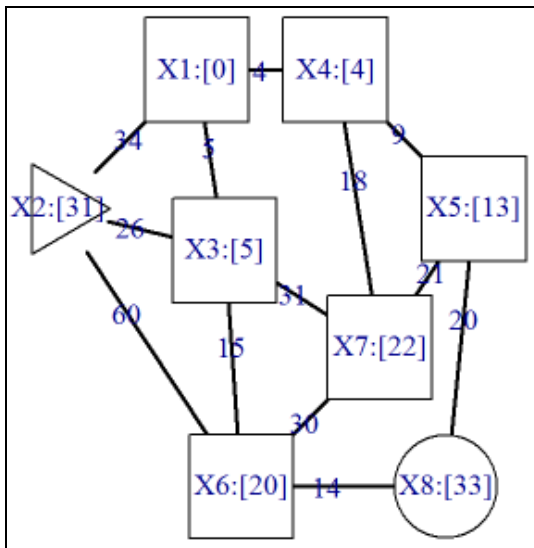


Рис. П.6.2. Пр. рез.6

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

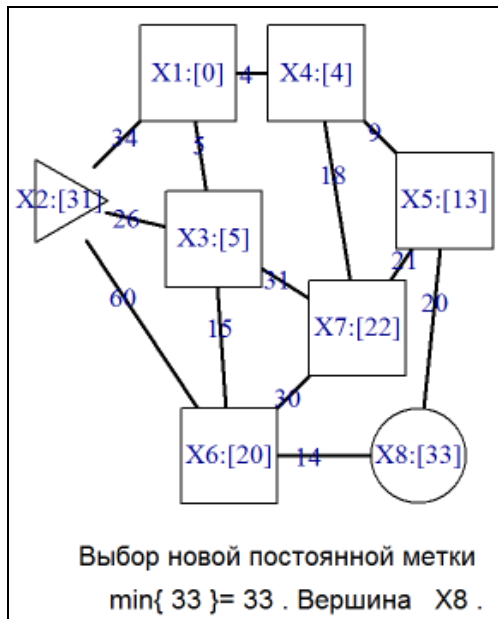


Рис. П.7.1. Шаг 7-2

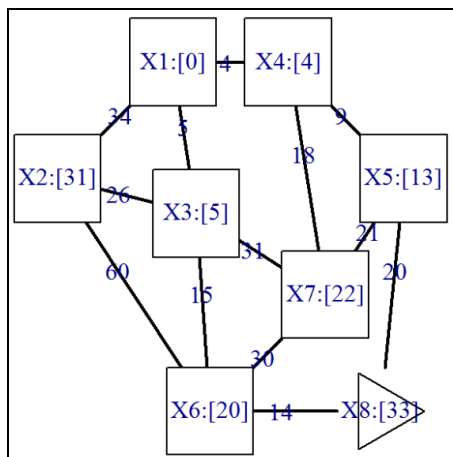


Рис. П.7.2. ИТОГО

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Лабораторная работа 1. Задача о минимальном остовном дереве	3
Задание.....	18
Лабораторная работа 2. Поиск кратчайшего пути на графе.....	23
Задание.....	45
Библиографический список.....	47
Приложение 1	48
Приложение 2	50
Приложение 3	52
Приложение 4	54
Приложение 5	56
Приложение 6	58
Приложение 7	59

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИИ
АВТОТРАНСПОРТНОГО ПРОИЗВОДСТВА
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ**

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов бакалавриата направлений 23.03.01 и 23.03.03*

Сост.: *В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
информатики и компьютерных технологий

Ответственный за выпуск *В.В. Беляев*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 13.02.2023. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,5. Усл.кр.-отт. 3,5. Уч.-изд.л. 3,3. Тираж 50 экз. Заказ 117.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2