ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические указания к практическим занятиям для студентов бакалавриата направления 38.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические указания к практическим занятиям для студентов бакалавриата направления 38.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 517.1+517.2(073)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. Решение экономических задач: Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Ю.С.Романова, Л.Г. Русина*. СПб, 2021. 57 с.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Методические указания содержат основные теоретические сведения матричной алгебры, элементов теории игр и практические задания по указанным разделам.

Могут быть использованы для практических занятий в соответствии с программой подготовки бакалавров по направлению подготовки 38.03.01 по дисциплине «Линейная алгебра».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент к.п.н., доц. *Е.А.Рябоконь* (ФГКВОУ ВО «Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М.Буденного»)

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта высшего образования.

В первой главе рассматриваются элементы матричного и векторного анализа.

Во второй главе представлены элементы теории матричных игр.

Третья глава посвящена решению экономических задач с использованием элементов теории матричных игр и современных компьютерных технологий.

Методические указания могут быть использованы для практических занятий в соответствии с программой подготовки бакалавров по направлению подготовки 38.03.01 по дисциплине «Линейная алгебра».

1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1.1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей A размерности $m \times n$ называется совокупность вещественных чисел, записанная в виде прямоугольной таблицы

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

Операции над матрицами:

1. *Суммой матриц* одинаковой размерности $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C = A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

2. *Произведением матрицы A на число* α называется матрица $B = \alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$.

3. *Транспонированием матрицы* называется замена столбцов матрицы ее строками с теми же номерами (и наоборот).

4. *Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на согласованную матрицу $B = (b_{ij})_{n\times q}$* называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times q}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Пример 1. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья представлены в виде столбцов матрицы *A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

где элемент a_{ij} характеризует норму расхода сырья j-го вида для производства продукции i-го вида.

Матрица себестоимости сырья и его доставки (соответственно первая и вторая строки) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1. Затраты сырья определенного вида, если план выпуска продукции задан в виде матрицы- строки $X = (50 \quad 60 \quad 40 \quad 45)$.

2. Общие затраты на сырье и транспортировку для каждого вида продукции.

3. Общие затраты на сырье и его транспортировку при заданном плане выпуска продукции.

Решение.

1. Затраты сырья определенного вида есть произведение плана выпуска продукции на нормы расхода сырья данного вида продукции, поэтому матрицу затрат сырья $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ можно определить по формуле:

$$Y = X \cdot A = (50 \quad 60 \quad 40 \quad 45) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 590 \\ 585 \\ 845 \\ 1005 \end{pmatrix}.$$

2. Общие затраты на сырье и транспортировку для каждого вида продукции определяются строками матрицы $A \cdot C^T$:

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 47 \\ 74 & 61 \\ 55 & 39 \\ 98 & 75 \end{pmatrix}.$$

3. Общие затраты на сырье и его транспортировку по всем видам продукции определяются произведением матрицы - строки $X = (50 \quad 60 \quad 40 \quad 45)$ на матрицу $A \cdot C^T$:

$$X \cdot A \cdot C^T = (50 \quad 60 \quad 40 \quad 45) \cdot \begin{pmatrix} 56 & 47 \\ 74 & 61 \\ 55 & 39 \\ 98 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13850 & 10945 \end{pmatrix} \cdot$$

1.2. *N*-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

N-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i - i-я компонента (координата) вектора, $i = 1,2,.....,n$.

Векторным (линейным) пространством L называется множество векторов (элементов) с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющим определенным свойствам [1].

Вектор $\overline{x}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{n-1}$, если

$$\overline{x}_n = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + ... + \lambda_{n-1} \overline{x}_{n-1},$$

где λ_i -некоторые числа, $i = 1,2,.....,n$.

Векторы $\overline{x}_i, i = 1,...,n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа λ_i, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \overline{x}_n = \overline{0};$$

если это равенство выполняется только при всех $\lambda_i = 0$, то векторы $\overline{x}_i, i = 1,...,n$ называются *линейно независимыми*.

Базисом n-мерного пространства называется совокупность n линейно независимых векторов.

Размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Разложение вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *по базису векторов* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_n\overline{e}_n.$$

Переход от старого базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ к новому $\overline{e}*_1, \overline{e}*_2, ..., \overline{e}*_n$ задается матрицей перехода *C:*

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ таким образом, что } \begin{pmatrix} \overline{e}*_1 \\ \overline{e}*_2 \\ ... \\ \overline{e}*_n \end{pmatrix} = C^T \cdot \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ ... \\ \overline{e}_n \end{pmatrix}.$$

Взаимосвязь координат вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ относительно старого базиса с координатам вектора $\overline{x} = (x_1*, x_2*, ..., x_n*)$ относительно нового базиса выражается формулами:

$$\begin{pmatrix} x_1* \\ x_2* \\ ... \\ x_n* \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1* \\ x_2* \\ ... \\ x_n* \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Задана матрица перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ к базису $\overline{e}*_1, \overline{e}*_2, \overline{e}*_3$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Найти координаты вектора $\bar{e}*_3$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Решение. В базисе $\bar{e}*_1, \bar{e}*_2, \bar{e}*_3$ вектор $\bar{e}*_3$ имеет координаты $\bar{e}*_3 = (0;0;1)$. Тогда имеем $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, т.е.

$\bar{e}*_3 = (3;4;5)$

.

1.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору $\bar{x}$ пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор $\bar{y}$ пространства R^m, то говорят, что задан *оператор (преобразование, отображение)* $\tilde{A}(\bar{x})$, действующий из R^n *в* R^m*:* $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$.

Оператор $\tilde{A}$ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и любого числа λ верны соотношения:

$\tilde{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \tilde{A}(\bar{x}) + \tilde{A}(\bar{y})$,

$\tilde{A}(\lambda \bar{x}) = \lambda \tilde{A}(\bar{x})$.

Вектор $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$ называется *образом вектора* $\bar{x}$, а сам вектор $\bar{x}$ - *прообразом вектора* $\bar{y}$. Связь между образом и прообразом определяется матрицей A линейного оператора $\tilde{A}$, так что*:*

$$\bar{y} = A \cdot \bar{x}.$$

Если C- матрица перехода от старого базиса к новому, то матрицы A и A^* линейного оператора в базисах $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ и $\overline{e}_1^*, \overline{e}_2^*, ..., \overline{e}_n^*$ связаны соотношением:

$$A^* = C^{-1}AC \cdot$$

Пример 3. Матрица линейного оператора в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\overline{e}^*_1, \overline{e}^*_2, \overline{e}^*_3$, если $\overline{e}^*_1 = 3\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$, $\overline{e}^*_2 = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$, $\overline{e}^*_3 = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ тогда } A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Вектор $\overline{x} \neq \overline{0}$ -называется *собственным вектором* оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), если есть такое число λ, что

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x} \text{ или } (A - \lambda E) \cdot \overline{x} = \overline{0}.$$

Здесь λ - *собственное (характеристическое) число* оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), соответствующее вектору $\overline{x}$.

Характеристическое уравнение оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A) :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

позволяет найти собственные числа и построить собственные векторы.

Матрица оператора $\widetilde{\mathrm{A}}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ является диагональной , и обратно, если матрица A линейного оператора $\widetilde{\mathrm{A}}$ в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса — собственные векторы оператора $\widetilde{\mathrm{A}}$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Пример 4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее собственные числа и собственные векторы. Привести эту матрицу к диагональному виду.

Решение. Составим характеристическое уравнение и находим его корни:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7.$$

Находим собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу $\lambda_1 = 1$, из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + (3-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (5-1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = -2t_1 \end{cases}; \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_2 = 7$, найдем аналогично:

$$\begin{cases} x_1 = t_2 \\ x_2 = t_2 \end{cases}; \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу перехода к базису из собственных векторов, приняв, например, $t_1 = 2, t_2 = 3$: $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица A примет диагональный вид:

$$A^* = C^{-1}AC = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.5. ЧИСЛО И ВЕКТОР ФРОБЕНИУСА

Квадратная матрица A называется *неотрицательной,* если ее элементы неотрицательны. Вектор $\bar{x}$ называется *неотрицательным,* если все его компоненты $x_i \geq 0$.

Теорема Фробениуса—Перрона. Для любой неотрицательной матрицы $A \geq 0$ существует собственное значение $\lambda_A \geq 0$, называемое *числом Фробениуса***,** такое, что $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы А. Также, существует неотрицательный собственный вектор $\bar{x}_A \geq 0$, соответствующий собственному значению λ_A и называемый *вектором Фробениуса*.

Пример 5. Найти число и вектор Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (2-\lambda)^2 - 3^2 = 0, (5-\lambda)(1+\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1.$$

Наибольшее из полученных собственных чисел будет числом Фробениуса, т.е. $\lambda_A = 5$.

Найдем соответствующий собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 3 & 2-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases},\ \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases},\ \bar{x}_A = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.6. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА (МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ)

Линейная модель обмена позволяет найти национальные доходы стран (или их соотношение) для сбалансированной торговли.

Пусть $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$- вектор национальных доходов стран $S_1,S_2,....S_n$, $A(n\times n)=(a_{ij})$ структурная матрица торговли, a_{ij} - доля национального дохода, которую страна S_j тратить на покупку товаров у страны S_i , причем мы допустим, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ (т.е. весь доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран).

Выручка от внутренней и внешней торговли для любой страны $S_i, i=1,2,...,n$ составит

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n$$

Для сбалансированной торговли необходимо, чтобы выручка от торговли была, как минимум, равна национальному доходу страны. Таким образом, бездефицитность торговли требует найти такой равновесный вектор национальных доходов $\overline{x}$, чтобы выполнялось условие:

$$A\cdot\overline{x}=\overline{x}.$$

Задача свелась к отысканию собственного вектора $\overline{x}$, отвечающему собственному значению $\lambda=1$. Можно показать, что это собственное значение является числом Фробениуса структурной матрицы торговли.

Пример 6. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что суммарный доход этих стран составляет 800у.е.

Решение. Найдем вектор Фробениуса матрицы *A,* соответствующий $\lambda_A=1$, решив уравнение $(A-E)\overline{x}=\overline{0}$, или

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & -0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса. Получим $\overline{x} = (t, 2t, t)$.

С учетом известного суммарного дохода стран, имеем $t = 200$ у.е., тогда $\overline{x} = (200;400;200)$.

1.7. БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

Пусть весь производственный сектор разбит на n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Введем обозначения:

x_j − валовой выпуск продукции отрасли *j*,

x_{ij} − объем продукции отрасли *i*, используемой в отрасли j в процессе производства,

y_i -объём продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере или объём конечного потребления,

$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ - стоимость продукции отрасли *i*, затрачиваемой на производство одной единицы продукции отрасли j (коэффициенты прямых затрат или коэффициенты материалоёмкости).

Примем как постулат принцип линейности существующих технологий, т.е. примерное постоянство величин a_{ij} в течение ряда лет.

Тогда уравнения межотраслевого баланса (уравнение Леонтьева) в матричной форме будут иметь вид:

$$\bar{x} = A \cdot \bar{x} + \bar{y}.$$

Здесь

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валового выпуска всех отраслей;

$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного потребления;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица прямых затрат.

Требуется определить вектор $\bar{x}$ валового выпуска продукции всех отраслей.

Решим уравнение

$\bar{x} = A \cdot \bar{x} + \bar{y}$, $(E - A) \cdot \bar{x} = \bar{y}$, $\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}$.

Учтем, что по смыслу задачи, все элементы матриц *A,* $\bar{x}$*,* $\bar{y}$ неотрицательны.

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Матрица *A* называется *продуктивной,* если для любого вектора $\bar{y} \geq 0$ существует решение $\bar{x} \geq 0$ уравнения $\bar{x} = A \cdot \bar{x} + \bar{y}$. В этом случае модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется продуктивной.

Критерии продуктивности:

1. Матрица А ≥ 0 продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

2. Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы (сумма элементов любого столбца меньше единицы).

Запасом продуктивности матрицы $A \geq 0$ назовём такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1+\alpha$ - продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$ – не продуктивна.

Пример 7. Выяснить, какой запас продуктивности имеет матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1-0{,}2\lambda & 0{,}6\lambda \\ 0{,}7\lambda & 1-0{,}3\lambda \end{pmatrix},$$

и построим обратную к ней:

$$\Delta = |E - \lambda A| = (1-0{,}2\lambda)(1-0{,}3\lambda) - 0{,}42\lambda^2 = -0{,}36\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 1,$$

$$(E - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1-0{,}3\lambda & 0{,}6\lambda \\ 0{,}7\lambda & 1-0{,}2\lambda \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA нужно, чтобы все элементы обратной матрицы были неотрицательны. Это возможно лишь если

$$\Delta > 0, \qquad 1-0{,}2\lambda \geq 0, \qquad 1-0{,}3\lambda \geq 0\ .$$

$$\Delta = -0{,}36\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 1 > 0 \text{ при } \lambda \in (-2{,}5;\quad 1\frac{1}{9})$$

Итак, при $\lambda < 1\frac{1}{9}$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda = 1\frac{1}{9}$ матрица λA непродуктивна. Запас продуктивности равен $1 - 1\frac{1}{9} = 0{,}11\cdot$

Пример 8. В таблице 1 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, у.е.:

Таблица 1

Отрасли	Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
	S1	S2		
S1	3	8	89	100
S2	5	7	88	100

Требуется:

1. Составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность.

2. Вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно.

3. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли S1 увеличить в 2 раза, а отрасли S2 – на 10%.

4. Найти векторы валового выпуска и потребления при уменьшении валового выпуска первой отрасли на 40% и увеличении конечного потребления второй отрасли на 2 у.е.

Решение.

1. Составим векторы

$\overline{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ - валового выпуска всех отраслей,

$\overline{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}$ - конечного потребления, и

матрицу прямых затрат, учитывая, что $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что A продуктивна, т.к. сумма элементов любого столбца меньше единицы.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид $\overline{x} = A \cdot \overline{x} + \overline{y}$. При увеличении валового выпуска отраслей S1 и S2

на 100% и 50% соответственно получим новый вектор валового выпуска $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Вектор потребления , соответствующий вектору $\bar{x}_1$, находится из уравнения баланса

$$\bar{y}_1 = (E - A) \cdot \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что объемы конечного продукта отраслей S1 и S2 увеличились на 182-89=93 у.е.(или 104,5%) и на 129,5-88=41,5 у.е. (или на 47,2%) соответственно.

3. Конечное потребление отрасли S1 увеличится в два раза, а отрасли S2 станет равным $88 \cdot 1{,}1 = 96{,}8$. Тогда новый вектор конечного потребления

$$\bar{y}_2 = \begin{pmatrix} 178 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор валового выпуска находится из уравнения баланса: $\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}$.

$$\det(E - A) = 0{,}8981;$$

$$(E - A)^{-1} \cdot \bar{y}_2 = \frac{1}{0{,}8981} \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 178 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 173{,}28 \\ 102{,}79 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что объем валового продукта надо увеличить на 73,28% в отрасли S1 и на 2,79% в S2.

4. Пусть $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ x \end{pmatrix}$ и $\bar{y}_3 = \begin{pmatrix} y \\ 90 \end{pmatrix}$ - искомые векторы валового выпуска и потребления. Согласно уравнению баланса получим:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 60 = 0{,}03 \cdot y + 0{,}08 \cdot 90 \\ x = 0{,}05 \cdot y + 0{,}07 \cdot 90 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 50{,}2 \\ x = 100 \end{cases}.$$

Таким образом, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix}$ и $\bar{y}_3 = \begin{pmatrix} 50{,}2 \\ 90 \end{pmatrix}$.

1.8. МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН

Эта модель является двойственной к модели Леонтьева. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица прямых затрат;

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор валового выпуска всех отраслей;

$$\overline{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$ - вектор цен (p_i - цена единицы продукции *i*-й отрасли).

От реализации продукции *i*-я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идет на закупку сырья $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n)$; оставшаяся его часть составляет добавленную стоимость V_i (расходуется на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции), т.е.

$$x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ni}p_n) + V_i .$$

Разделим все на x_i, обозначим $v_i = \dfrac{V_i}{x}$ (это норма добавочной стоимости - величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции *i*-й отрасли) и запишем результат в матричном виде:

$$\overline{p} = A^T \cdot \overline{p} + \overline{v} \quad \text{или} \quad \overline{p} = (E - A^T)^{-1} \cdot \overline{v} .$$

Это уравнение называется *моделью равновесных цен*.

Пример 9. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух отраслей (промышленности и сельского хозяйства).

Пусть $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$- матрица прямых затрат;

$\bar{v}=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$- вектор норм добавленной стоимости.

Определить равновесные цены при увеличении добавленной стоимости .

Решение.

$$E-A^T=\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix},\quad \left|E-A^T\right|=\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix}=0{,}33,$$

$$\left(E-A^T\right)^{-1}=\frac{1}{0{,}33}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix},$$

$$\bar{p}=(E-A^T)^{-1}\cdot\bar{v}=\begin{pmatrix} 2{,}42 & 0{,}91 \\ 1{,}51 & 1{,}82 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18{,}78 \\ 24{,}24 \end{pmatrix}.$$

1.9. УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. В матрицах А и В представлены:

А – данные о дневной производительности пяти предприятий, выпускающих четыре вида продукции;

В – матрица затрат сырья на единицу изделия;

Р – вектор стоимости сырья;

Т – вектор количества рабочих дней в году.

Требуется определить:

1. Годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий.

2. Годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья.

3. Годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска изделий указанных видов и при определенном количестве рабочих дней, если

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2&6&7\\4&2&3&6&7\\7&3&0&1&4\\6&2&2&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\3&5&4&6\\4&6&5&5\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}35&40&45\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}200&160&170&150&140\end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Предприятие выпускает три вида продукции П1 , П2 , П3 , используя два вида сырья – S1 и S2 . Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}5&3\\0&1\\4&4\end{pmatrix}.$$

Определить:

а) затраты сырья, необходимого для осуществления следующего выпуска товаров: С = (150; 120; 80);

б) стоимость всего затраченного сырья, если стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу) Р = (20 ; 30).

Упражнение 3. Дана матрица прямых материальных затрат

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}6\\0{,}2&0{,}4\end{pmatrix}.$$

Зная конечный продукт первой отрасли y_1 = 80 и валовой выпуск второй отрасли x_2 =100 , найти конечный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли

Упражнение 4. Дана структурная матрица торговли трех стран

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}4&0{,}3\\0{,}4&0{,}3&0{,}2\\0{,}4&0{,}3&0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000 у.е.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИГРЫ

В теории экономической статистики важное место занимают оптимизационные задачи, в которых участвуют два или более субъектов (оперирующих сторон) и каждый из них стремится достичь свою цель. В определенном смысле такие задачи включают в себя проблему многокритериальности (неопределенность цели) и могли быть отнесены к соответствующим классам задач теории принятия решений. Однако ситуация со многими субъектами при не тождественности их интересов сложнее и требует отдельного изучения.

Общий случай не тождественности интересов (целей) субъектов именуется конфликтом.

Теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов и называется теорией игр.

Отметим, что теория игр, имея дело с принятием оптимальных решений, не касается описания тех или иных игр в житейском смысле этого слова.

Приведенное понятие теории игр содержит три термина, нуждающихся в уточнении (если не говорить о понятии математической модели), а именно:

а) принятие решения;

б) оптимальность решения;

в) конфликт.

Пусть K – субъект исследования операции, X_K – множество всех его допустимых решений. *Принятие* субъектом K некоторого своего *решения* следует понимать как выбор некоторого элемента $x \in X_K$.

Математическая формулировка содержательного представления об оптимальности решения оказывается труднее. Основная причина здесь состоит в том, что имеющиеся содержательные представления от оптимальности являются слишком общими.

Обратимся теперь к термину «конфликт». Содержательно конфликт можно понимать как явление, применительно к которому оказываются осмысленными вопросы о том, КТО и КАК в этом явлении участвует, какие у этого явления могут быть ИСХОДЫ, а также КТО и КАК в этих исхода заинтересован. Тем самым выделены пять компонент конфликта. Естественно поэтому в формальное определение конфликта включить формальные задания этих пяти компонент.

Во всяком конфликте участвуют субъекты, принимающие решения. Эти субъекты называют *коалициями действия*. Множество всех коалиций действия обозначается символом K_{∂}. Субъектом может быть и коллектив. Коллективы, составляющие различные коалиции действия, могут пересекаться.

Каждая из коалиций действия $K \in K_{\partial}$ может принимать некоторые решения.

Эти решения называют *стратегиями* коалиции K. Множество всех стратегий коалиции действия K обозначается через S_K.

Исход конфликта определяется результатом выбора всеми коалициями действия своих стратегий с учетом всех ограничений между ними (если таковые имеются), он и называется *ситуацией*. Множество всех ситуаций можно понимать как некоторое заданное подмножество S прямого произведения $\prod_{K \in K_{\partial}} S_K$, т.е. $S \subset \prod_{K \in K_{\partial}} S_K$.

Стороны, отстаивающие некоторые интересы, называются *коалициями интересов*. Множество всех коалиций интересов в конфликте обозначается через K_u. Коалиции интересов в общем случае есть суть коллектива.

Для каждой коалиции K интересов из K_u на множестве всех ситуаций S задается бинарное отношение, называемое *отношением предпочтения*, и обозначается через R_K.

Итак, формальным представлением о конфликте можно считать следующую упорядоченную пятерку:

$$\Gamma = \left\langle K_{\partial}, \{S_K\}_{K \in K_{\partial}}, S, K_u, \{R_K\}_{K \in K_u} \right\rangle \tag{1}$$

где $K_\partial, \{S_K\}_{K \in K_\partial}$ и K_u – произвольные множества, $S \subset \prod_{K \in K_\partial} S_K$, $R_K \subset S \times S$ для $K \in K_u$.

Игрой называется упорядоченная пятерка вида (1).

Ходом в теории игр называется выбор одного из предусмотренных игрой действий и его осуществление.

Ход бывает личным и случайным. *Личным ходом* называется сознательный выбор коалиций действия одного из возможных действий и его осуществление. Если выбор действия осуществляется не решением коалиции действия, а каким-либо механизмом случайного действия (бросание монеты и т.п.), то он называется *случайным ходом*.

Представление об оптимальности в теории игр можно выразить как отображение $\varphi : T \to S$, которое каждой игре Γ из некоторого класса игр *T* ставит в соответствие подмножество $\varphi(\Gamma)$ множества *S* ее исходов:

$$\Gamma \mapsto \varphi(\Gamma) \subset S \text{ для всякой } \Gamma \in T$$

При этом отображение φ называется *принципом оптимальности* для класса игр *T*, а множество $\varphi(\Gamma)$ исходов – *реализацией* этого принципа для игры Γ или *решением* игры Γ в смысле принципа оптимальности φ.

Если $\varphi(\Gamma) \neq \varnothing$, то принцип φ называется реализуемым на игре Γ, а сама игра Γ – *разрешимой* в смысле принципа φ, в противном случае ($\varphi(\Gamma) = \varnothing$) принцип φ называется нереализуемым на Γ, а игра Γ – неразрешимой в смысле принципа φ.

Теоретические задачи теории игр состоят в том, чтобы для каждого класса *T* игр вида (1) выработать некоторый принцип оптимальности φ и установить затем его свойства как функции, т.е. выяснить зависимости между играми Γ и множествами их оптимальных исходом $\varphi(\Gamma)$.

2.2. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Данное определение игры является слишком общим. Обычно на элементы игры накладываются те или иные ограничения с целью получения некоторых специальных классов игр. Одним из таких классов, оказавшимся «базовым» в теории игр, является класс так называемых бескоалиционных игр.

Пусть Γ – игра вида (1). Положим, по определению, $Q = K_\partial = K_u$. Элементы множества Q (т.е. коалиции) называются *игроками*. Игра Γ в этом случае принимает описание

$$\Gamma = \left\langle Q, \{S_q\}_{q \in Q}, S, \{R_q\}_{q \in Q} \right\rangle, \qquad (2)$$

где S_q – множество стратегий игрока $q \in Q$; R_q – его отношение предпочтения.

Игры вида (2), для которых отсутствуют «запрещенные» ситуации, т.е. для которых

$$S = \prod_{q \in Q} S_q \ ,$$

имеют вид

$$\Gamma = \left\langle Q, \{S_q\}_{q \in Q}, \{R_q\}_{q \in Q} \right\rangle. \qquad (3)$$

Игры вида (3) обычно называются общими бескоалиционными играми.

Замечание. «Бескоалиционность» игры означает, что в ней не упоминается о каких-либо специфических коалициях игроков с теми или иными стратегическими свойствами. Бывает удобным иметь дело не только с отдельными игроками, но и с их множествами. В этом случае они по-прежнему будут называться коалициями.

Отношение предпочтения R_q иногда заменяется так называемой *функцией выигрыша* H_q, определенной на множестве S ситуаций и принимающей вещественные значения:

$$H_q : S \to R$$

При этом для игрока $q \in Q$ и ситуаций $s, t \in S$ и полагают

$$sR_q t \Leftrightarrow H_q(t) \leq H_q(s). \tag{4}$$

Значение $H_q(s)$ понимается как выигрыш, который игрок q получает в ситуации $s \in S$. Если в играх вида (3) отношение R_q заменить функциями H_q, удовлетворяющими (4), то придем к так называемым бескоалиционным играм с выигрышами.

Бескоалиционной называется игра вида

$$\Gamma = \left\langle Q, \{S_q\}_{q \in Q}, \{H_q\}_{q \in Q} \right\rangle, \tag{5}$$

где Q – конечное множество, его элементы называются игроками;

$S_q, q \in Q$ – попарно непересекающиеся множества *стратегий* соответствующих игроков: упорядоченные наборы $(\sigma_q)_{q \in Q}$ стратегий игроков, т.е. элементы прямого произведения $S = \prod_{q \in Q} S_q$ называются ситуациями в игре Γ; функция $H_q : S \to R$ называется *функцией выигрыша* игрока $q \in Q$, а ее значения $H_q(s)$ на отдельных ситуациях – выигрышами игрока q в этих ситуациях.

Приведем примеры некоторых специальных классов бескоалиционных игр.

Игра Γ вида (5) называется *конечной*, если конечны все множества S_q стратегий игроков $q \in Q$. Конечная бескоалиционная игра называется биматричной, если Q состоит из двух игроков (т.е. $Q = \{1, 2\}$).

Бескоалиционная игра Γ вида (5) называется игрой с *постоянной суммой*, если для каждой ее ситуации $s \in S$ имеет место

$$\sum_{q \in Q} H_q(s) = c,$$

где c – постоянная, и она называется игрой с нулевой суммой, если $c = 0$.

Бескоалиционная игра вида (5) с нулевой суммой, в которой имеется ровно два игрока ($Q = \{1, 2\}$), называется *антагонистической*.

Антагонистическая биматричная игра называется *матричной*.

Матричную игру можно задавать тройкой

$$\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle,$$

где S_1, S_2 – непересекающиеся множества стратегий игроков и H – функция выигрыша игры. При этом H описывает выигрыш игрока 1 и проигрыш игрока 2.

2.3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ. ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

В теории игр матричные игры представляют наиболее изученный класс. Рассмотрим подробнее ряд понятий, относящихся к этому классу игр.

Пусть $\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle$ – матричная игра, для которой $S_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ – множество стратегий игрока 1, $S_2 = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ – множество стратегий игрока 2 и H – функция выигрыша игры (выигрыш игрока 1 и проигрыш игрока 2).

Рассмотрим матрицу А:

$$A_{(m \times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A суть значения функции выигрыша $a_{ij} = H(\sigma_i, \rho_j), i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$. Строки этой матрицы отвечают стратегиям игрока 1, столбцы – стратегиям игрока 2. Матричную игру с $m \times n$ –матрицей иногда называют игрой $m \times n$, а ее матрицу – матрицей игры.

Пусть игрок 1 пытается найти наилучшую из своих стратегий, оценивая выигрыши a_{ij} поочередно для стратегий $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$.

При использовании стратегий σ_i гарантированным выигрышем будет наименьший из $a_{i1},\ldots,a_{im}$, учитывая, что игрок 2 стремится уменьшить выигрыш игрока 1 путем надлежащего выбора своих стратегий $\rho_1,\ldots,\rho_n$. Так что стратегия σ_i в этом смысле характеризуется величиной $\alpha_i = \min\{\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}\} = \min\limits_j \alpha_{ij}$, $j = 1,\ldots,n$. Наилучшей для игрока 1 оказывается та стратегия, при которой величина α_i – максимальна. Пусть $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$, $i = 1,\ldots,m$. Таким образом можно записать

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij} \cdot$$

Число α называют *нижним значением игры*. Стратегия игрока 1, отвечающая выигрышу α, называется *максиминной стратегией*. Если игрок 1 будет придерживаться максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш не менее α при любом поведении игрока 2.

Аналогичные рассуждения (относительно столбцов) для игрока 2 приводят к числу

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij} .$$

Число β называется *верхним значением игры* Γ. Соответствующая выигрышу β стратегия игрока 2 называется *минимаксной стратегией*. Придерживаясь своей минимаксной стратегии, игроку 2 гарантировано, что в любом случае он проиграет не более β .

Нижнее и верхнее значения игры Γ связаны неравенством

$$\alpha \le \beta .$$

Пусть Γ – игра, для которой $\alpha = \beta$. Элемент ее матрицы, равный этим числам, обозначим через $a_{i^* j^*}$, так что

$$a_{i^* j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Элемент $a_{i^* j^*}$ представляет собой так называемую *седловую точку*. Игра, матрица которой содержит седловую точку, называется *игрой с седловой точкой*.

Примером игры с седловой точкой может служить игра 4×5 вида:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -22 & -7 & 14 & -8 \\ 11 & 10 & [8] & 15 & 21 \\ 6 & -9 & 6 & 13 & -13 \\ 2 & 6 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{i^* j^*} = a_{23} = 8.$

В любой игре с седловой точкой игроки 1 и 2, решившие придерживаться минимаксных стратегий, попадают в ситуацию, когда им обоим выгодно сохранять неизменными эти стратегии. Если один из игроков попытается изменить свою стратегию, то выгоду при этом извлечет другой игрок. В играх с седловой точкой ситуация равновесия сохраняется сколь угодно долго, если игроки 1 и 2 используют стратегии σ_i и ρ_j. Эти стратегии σ_i и ρ_j называются *чистыми стратегиями*. Они образуют *решение* игры.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда оба игрока располагают сведениями о действиях друг друга и о достигнутых результатах.

Пусть теперь Γ – игра, для которой $\alpha < \beta$:

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}.$$

В игре Γ без седловых точек игроку 1, желающему достичь лучшего, не следует раскрывать свою стратегию. С этой целью стратегии выбирают случайным образом. Поэтому при $\alpha < \beta$ для матричных игр представляют интерес так называемые *смешанные стратегии*.

Всякая смешанная стратегия игрока задается набором вероятностей выбора каждой из чистых стратегий этого игрока. А именно, для игрока 1 набором вида:

$$\xi(\sigma_1), \ldots, \xi(\sigma_m),$$

при этом $\xi(\sigma_i) \geq 0, (i = 1, \ldots, m), \xi(\sigma_1) + \ldots + \xi(\sigma_m) = 1$;
для игрока 2 набором:

$$\eta(\rho_1), \ldots, \eta(\rho_n),$$

таких, что $\eta(\rho_j) \geq 0, (j = 1, \ldots, n), \eta(\rho_1) + \ldots + \eta(\rho_n) = 1$.

Для краткости записи введем обозначения:

$$p_i = \xi(\sigma_i), \quad q_j = \eta(\rho_j).$$

Тогда смешанная стратегия ξ первого игрока – это $\xi = (p_1, \ldots, p_m)$, при этом $p_i \geq 0, p_1 + \ldots + p_m = 1$.

Смешанная стратегия η второго игрока – это $\eta = (q_1, \ldots, q_n)$, при этом $q_j \geq 0, q_1 + \ldots + q_n = 1$.

Ситуация, отвечающая стратегиям ξ и η есть упорядоченная пара (ξ, η).

Пусть дана игра $\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle$ с матрицей $A = \|a_{ij}\|_{(m \times n)}$. Решить игру Γ, значит, найти все оптимальные стратегии игроков 1 и 2 и отвечающие им выигрыши. Выигрыш обычно обозначают символом v.

Если игра Γ обладает седловой точкой ($\alpha = \beta$), то σ_{i^*} и ρ_{j^*} – оптимальные стратегии игроков 1 и 2 соответственно и $v = a_{i^* j^*}$. Здесь $(\sigma_{i^*}, \rho_{j^*})$ – оптимальная ситуация. Отметим, что седловых точек может быть и несколько.

Если игра Γ не имеет седловых точек ($\alpha < \beta$), то играют в смешанных стратегиях ξ и η. Здесь (ξ^*, η^*) – оптимальная ситуация и v – выигрыш, получаемый при этом.

Перейдем к изложению практических методов решения $m \times n$ игр.

2.4. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ 2×2

Пусть $\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle$ – игра 2×2 с матрицей A выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если игра Γ имеет седловую точку, например $a_{i^* j^*}$, то стратегии σ_{i^*} и ρ_{j^*} а так же выигрыш $v = a_{i^* j^*}$ и есть решение этой игры.

Предположим, что Γ не имеет седловых точек. Решение ищем в смешанных стратегиях, именно ищем пару (ξ^*, η^*) оптимальных смешанных стратегий

$$\xi^* = (p_1^*, p_2^*), \quad \eta^* = (q_1^*, q_2^*).$$

Сначала найдем ξ^*. Если игрок 1 придерживается своей смешанной стратегии $\xi = (p_1, p_2)$, то игрок 2, не меняя выигрыша, может применять (в ответ) любую из своих чистых стратегий. Поэтому

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 = v, \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \; p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (6)$$

$$v = \frac{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (7)$$

Аналогично находим η^*. Здесь

$$\begin{cases} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = v, \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Поэтому:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \; q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (8)$$

В силу того, что $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0$ и $q_1 \ge 0, q_2 \ge 0$, в дополнение к (6), (8) должно быть

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0, \\ a_{11} - a_{12} > 0, \\ a_{22} - a_{12} > 0, \\ a_{11} - a_{21} > 0; \end{cases} \text{или} \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0, \\ a_{11} - a_{12} < 0, \\ a_{22} - a_{12} < 0, \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Пример 10. Решить игру 2×2 с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем α и β ($\alpha = \max\{-1,-3\} = -1$, $\beta = \min\{2,4\} = 2$). Имеем $\alpha < \beta$. Седловых точек нет. Играем в смешанных стратегиях $\xi = (p_1, p_2)$, $\eta = (q_1, q_2)$. Из следующих систем уравнений

$$\begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = v, \\ -p_1 + 4p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2q_1 - q_2 = v, \\ -3q_1 + 4q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

находим $p_1 = 0{,}7, p_2 = 0{,}3, q_1 = 0{,}5, q_2 = 0{,}5$ и $v = 0{,}5$.

2.5. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ 2×*N*, *M*×2

Предполагается, что *n*>2 и *m*>2. Рассмотрим игру Γ с 2×*n*-матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Пусть эта игра не имеет седловых точек, так что $\alpha < \beta$. Тогда играем в смешанных стратегиях

$$\xi = (p_1, p_2), \quad \eta = (q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Сведем данную игру 2×*n* к игре 2×2. Это всегда можно сделать, так как у всякой матричной игры $m \times n$ существует решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит наименьшего из чисел *m* и *n*. Поэтому у игры 2×*n* всегда имеется решение, в котором с каждой стороны участвует не более двух активных стратегий. Отыскав эти стратегии, приходим к игре 2×2.

Учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$, положим $\xi = (p_1, 1 - p_1)$. Тогда значения v_j игры для игрока 1 при использовании им смешанной стратегии ξ против чистых стратегий ρ_j игрока 2 выразятся формулами:

$$v_j = (a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

При заданных a_{ij} можно строить n прямых $v_j = v_j(p_1)$ вида (9). Затем на графике выделяем ломаной нижнюю границу выигрыша. На этой ломаной отмечаем точку M (или точки), имеющую максимальную ординату. Отыскиваем прямые (две), дающие в пересечении эту точку M. Эти прямые и соответствуют активным стратегиям игрока 2. В матрице A игры выделяем те два столбца, которые соответствуют найденным (двум) прямым. Таким образом из матрицы A образуется 2×2-матрица $\widetilde{A}$. Решаем эту игру 2×2 известным образом. Находим p_1^*, p_2^*, v и q_r^*, q_t^*. Это дает искомые оптимальные стратегии $\xi^* = (p_1^*, p_2^*), \eta^* = (0, \ldots, 0, q_r^*, 0, \ldots, 0, q_t^*, 0, \ldots, 0)$ и выигрыш v. (Здесь предполагается, что $r < t$.)

Игра m×2 решается таким же образом, с той лишь разницей, что при этом строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней ищется не максимум, а минимум.

Пример 11. Дана игра 6×2 с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & -4 \\ 5 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить эту игру.

Решение. $\alpha = \max\left\{-1,1,-2,-4,-3,\frac{1}{2}\right\} = 1$, $\beta = \min\{5,3\} = 3$. Имеем $\alpha < \beta$. Строим прямые (рис. 1), определяемые уравнениями вида

$$v_i = (a_{i1} - a_{i2})q_1 + a_{i2}, \quad (i = 1,\ldots,6),$$

то есть прямые

$$v_1 = -q_1, \quad v_2 = 2q_1 + 1, \quad v_3 = -5q_1 + 3, \quad v_4 = 4q_1 - 4,$$

$$v_5 = 8q_1 - 3, \quad v_6 = -\frac{3}{2}q_1 + 2.$$

Минимальная точка – это точка *M*. Через нее проходят прямые v_2, v_3, v_6. Следовательно, из $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_6$ активными могут быть σ_2, σ_3 или σ_2, σ_6. Выбор σ_3, σ_6 исключен, так как точка *M* для них перестает быть минимальной.

Итак, при σ_2, σ_3 получаем игру 2×2 с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для этой игры находим $p_2^* = \frac{5}{7}, p_3^* = \frac{2}{7}, v = \frac{11}{7}, q_1^* = \frac{2}{7}, q_2^* = \frac{5}{7}$.

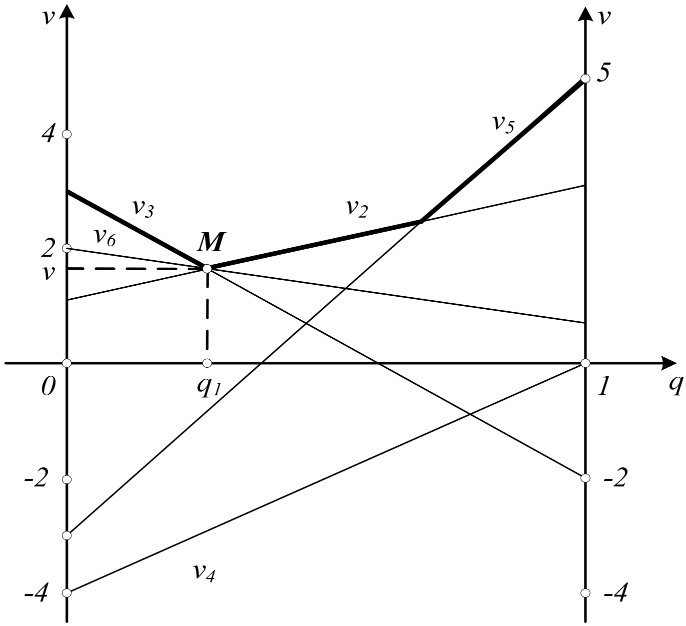

Рис. 1

При σ_2, σ_6 аналогично получаем $p_2^* = \frac{3}{7},\ p_6^* = \frac{4}{7},\ v = \frac{11}{7}$, $q_1^* = \frac{2}{7},\ q_2^* = \frac{5}{7}$. Таким образом,

$$\xi^* = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0\right), \quad \eta^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \quad v = \frac{11}{7}$$ или

$$\xi^* = \left(0, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, \frac{4}{7}\right), \quad \eta^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \quad v = \frac{11}{7}.$$

2.6. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ *M*×*N*, *M, N* ×3

С увеличением *m, n* возрастают трудности графического анализа игр и предпочтительными становятся численные методы оптимизации. Матричные игры указанного вида всегда можно свести к решению некоторой пары двойственных задач линейного программирования.

Пусть дана матричная игра $\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle$ с матрицей выигрышей $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и множествами стратегий $S_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, $S_2 = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ игроков 1 и 2 соответственно. Предполагаем, что седловых точек игра не имеет. Так что $\alpha < \beta$. Требуется найти условия, определяющие решение игры (ξ^*, η^*) и v:

$$\xi^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*), \eta^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*),$$

где $p_1^* + \ldots + p_m^* = 1, q_1^* + \ldots + q_n^* = 1$.

Найдем условия сначала для ξ^*. Эта стратегия должна обеспечивать игроку 1 выигрыш не менее v при любом поведении игрока 2 и выигрыш, равный v, при оптимальном поведении игрока 2. Не нарушая общности, считаем $v > 0$.

Для этого достаточно, чтобы все a_{ij} были неотрицательными: $a_{ij} > 0$. Добиться этого можно, прибавляя ко всем элементам матрицы одну и ту же величину Ω. При этом значение игры увеличится на Ω ($\tilde{v} = v + \Omega$), но решение не изменится (обозначения a_{ij} и v оставляем прежними в целях упрощения записи).

Пусть игрок 1 применяет свою оптимальную стратегию ξ^*, а игрок 2 – свою чистую стратегию p_j. Тогда средний выигрыш игрока 1 выражается формулой

$$a_{1j} p_1 + \ldots + a_{mj} p_m = v_j, \ (j = 1, \ldots, n).$$

Стратегия ξ^* обеспечивает выигрыш игроку 1 не меньший, чем v. Поэтому $v_j \ge v, \ j = 1, \ldots, n$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + \ldots + a_{m1}p_m \geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + \ldots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases}$$

По определению, полагая что

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \ldots, x_m = \frac{p_m}{v}$$

и учитывая, что $v > 0$, имеем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из условий нормируемости величин $p_1, \ldots, p_m$ следует, что

$$x_1 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}.$$

Игрок 1 стремится сделать свой гарантированный выигрыш максимально возможным. Поэтому величина $\frac{1}{v}$ будет лишь уменьшаться.

Таким образом, задача нахождения оптимальной стратегии ξ^* свелась к следующей задаче линейного программирования: найти решение $x = (x_1, \ldots, x_m)$ системы ограничений (10), при котором функция $\varphi(x)$ принимает минимальное значение:

$$\varphi(x) = x_1 + \ldots + x_m \to \min .$$

Решив эту задачу, можно найти оптимальную стратегию ξ^*.

Найдем условия для отыскания оптимальной стратегии η^* игрока 2.

Здесь аналогичные рассуждения приводят к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1, \\ y_1 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0; \end{cases} \tag{11}$$

где $y_1 = \dfrac{q_1}{v}, \ldots, y_n = \dfrac{q_n}{v}$. Имеем также

$$y_1 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}.$$

Получаем следующую задачу линейного программирования: найти решение $y = (y_1, \ldots, y_n)$ системы ограничений (11), при котором функция $\psi(y)$ принимает максимальное значение:

$$\psi(y) = y_1 + \ldots + y_n \to \max .$$

Итак, задачу решения любой матричной игры $m \times n$ ($m, n \ge 3$) можно свести к паре (взаимно двойственных) задач линейного программирования. Для решения последних применим симплекс-метод.

2.7. ИГРЫ С «ПРИРОДОЙ»

В рассмотренных в предыдущих разделах матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых прямо противоположны. Так, если действия одного из игроков направлены на увеличение выигрыша, то другой игрок предпринимает все возможные действия, чтобы уменьшить свой проигрыш. Однако в некоторых задачах, сводящимся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос, объем перевозок транспортом и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются *играми с природой*. При этом «природа» рассматривается как некоторая незаинтересованная инстанция, поведение которой неизвестно, но всегда не содержит элементов активного и сознательного противодействия. В играх с природой человек (первый игрок) старается действовать осмотрительно, второй же игрок – природа действует случайно.

Условия такой игры, как правило, задаются платежной матрицей, в которой стратегии природы (второго игрока) представляют собой все возможные состояния природы.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии первым игроком. Перечислим некоторые из них.

1. *Критерий Вальда.* Критерий рекомендует применять максиминную стратегию. Она определяется условием:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

и совпадает с нижней ценой игры. Поэтому этот критерий часто называют *критерием крайнего пессимизма*, т.е. предполагается, что природа будет действовать наихудшим для человека (первого игрока) образом.

2. *Критерий крайнего оптимизма.* Этот критерий определяется условием

$$M = \max_i \max_j a_{ij} \cdot$$

При этом считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека (первого игрока).

3. *Критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма)*. Этот критерий рекомендует выбирать стратегию, определяемую формулой:

$$H = \max_i \left(\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right),$$

где γ – степень оптимизма – может изменяться в диапазоне [0, 1]. Критерий придерживается промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при $\gamma = 0$ – в критерий крайнего оптимизма. Причем выбор того или иного значения γ связан со степенью ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желание застраховаться, тем γ выбирается ближе к единице.

4. *Критерий минимального риска Сэвиджа.* Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, которая не допускала бы чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. При этом анализируется не платежная матрица, а матрица рисков, элементы которой определяются по формуле:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

и показывают, какой убыток понесет человек (первый игрок), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии. Оптимальная стратегия определяется формулой:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

5. *Критерий Лапласа.* Критерий основан на принципе *недостаточного обоснования*. Поскольку в рамках информационного подхода в ситуации неопределенности вероятности состояний неизвестны, то нет оснований утверждать, что они различны. Поэтому можно допустить, что они одинаковы. По критерию Лапласа в качестве оценки альтернативы используется средний выигрыш. Оптимальной является альтернатива с максимальным средним выигрышем.

6. *Критерий Байеса.* По критерию Байеса за оптимальную стратегию игрока 1 принимается:

1) либо стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a} = \max_i \overline{a}_i$, $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$, $i = \overline{1,n}$,

2) либо стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска $\overline{r} = \min_i \overline{r}_i$, где $\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$, $i = \overline{1,n}$.

Применение этих критериев к анализу матрицы игры с природой, несмотря на субъективность их выбора, часто дает лучшее представление о ситуации, достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно достаточно большого размера.

3. РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

3.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 12. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний:

1. оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта;
2. для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы;
3. оборудование требует капитального ремонта или замены.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения:

– отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1 a_2 и a_3 денежных единиц;

– вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составляют b_1 b_2 и b_3 денежных единиц;

– заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости. Совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны, соответственно c_1 c_2 и c_3 денежных единиц. Указанные выше расходы предприятия включают, кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов, убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а так же затраты на установку и отладку нового оборудования.

Требуется:

1. придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии игроков;

2. составить платежную матрицу;
3. выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

−накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны, соответственно, q_1, q_2, q_3;

−имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

−о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя (использовать критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\gamma = 0{,}8$).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

a_1	8
a_2	21
a_3	45
b_1	17
b_2	20
b_3	30
c_1	16
c_2	19
c_3	32
q_1	0,3
q_2	0,4
q_3	0,3
γ	0,8

Решение:

1. Придадим описанной ситуации игровую схему, установим характер игры и выявим ее участников. Одним из участников игры в рассматриваемой ситуации является руководство предприятия, которое выступает в качестве сознательного игрока 1 (*А)*, заинтересованного в минимизации потерь.

Вторым участником игры является природа, которая реализует свои состояния по присущим ей законам. Такого рода ситуации относятся к играм с природой и являются типичными для матричных статистических игр.

Руководство предприятия может принять одно из трех решений:

A_1 ={отремонтировать оборудование силами заводских специалистов};

A_2 ={вызвать бригаду ремонтников};

A_3 ={заменить оборудование новым}.

Природа (совокупность объективных неопределенных факторов) может реализовать условия, которые приведут оборудование к одному из трех состояний:

$П_1$ ={требуется профилактический ремонт};

$П_2$ ={следует заменить отдельные детали и узлы};

$П_3$ ={требуется капитальный ремонт}.

2. Составим платежную матрицу. Платежная матрица для данной статистической игры имеет размер (3×3).

Так как в теории игр обычно говорят о выигрыше и максимизации выигрыша, то нашу игровую ситуацию с минимизацией потерь опишем в терминах выигрыша. Для этого следует поставить знак «–» перед всеми элементами платежной матрицы (табл.3)

Таблица 3

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\max\limits_{(i)} \alpha_{ij} = \beta_j$
A_1	–8	–21	–45	–8
A_2	–17	–20	–30	–19
A_3	–16	–19	–32	–30

Элементы a_{ij} платежной матрицы называют выигрышем игрока A в ситуации $\left(A_i, \Pi_j\right)$, а наилучшей для A считается стратегия, при которой выигрыш максимизируется.

3. Выясним, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать предприятию, чтобы оптимизировать потери при предположении, что накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показал, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны: q_1=0,3, q_2=0,4, q_3=0,3. Для этого используем критерий Байеса. По критерию Байеса за оптимальную стратегию руководителя (игрока A) принимается:

– либо стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a} = \max_i \overline{a}_i, \ \overline{a}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} q_j, \ i = 1,2,3$;

– либо стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска $\overline{r} = \min_i \overline{r}_i$, где $\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{3} r_{ij} q_j, \quad i = 1,2,3$.

Преобразуем платежную матрицу в матрицу рисков и поместим в правом добавочном столбце максимальный риск r_i. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным проигрышем и тем проигрышем, который игрок 1 получит в тех же условиях Π_j, применяя стратегии A_i, т.е. $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_{(i)} \alpha_{ij}$ (табл.4)

Таблица 4

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	r_i	$\overline{r}_i$ Средний риск
A_1	0	2	15	15	5,3
A_2	9	1	0	9	3,1
A_3	8	0	2	8	3,0
q_i	0,3	0,4	0,3		

$$\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{3} r_{ij} q_j \quad i = 1,2,3\,,$$

$$\overline{r}_1 = \overset{q_1}{0{,}3}\cdot 0 + 2\cdot \overset{q_2}{0{,}4} + 15\cdot \overset{q_3}{0{,}3} = 5{,}3\,,$$

$$\overline{r}_2 = 9\cdot \overset{q_1}{0{,}3} + 1\cdot \overset{q_2}{0{,}4} + 0\cdot \overset{q_3}{0{,}3} = 2{,}7 + 0{,}4 = 3{,}1\,,$$

$$\overline{r}_3 = 8\cdot \overset{q_1}{0{,}3} + 0\cdot \overset{q_2}{0{,}4} + 2\cdot \overset{q_3}{0{,}3} = 3{,}0\,.$$

Следовательно, $r = \min\{5{,}3;\, 3{,}1;\, 3{,}0\} = 3{,}0$ и по величине среднего риска оптимальной является стратегия A_3, т.е. необходимо заменить оборудование новым.

Максимизируем величину среднего выигрыша, получаем, учитывая первый пункт

$$a_1 = -8\cdot \overset{q_1}{0{,}3} + (-21)\cdot \overset{q_2}{0{,}4} + (-45)\cdot \overset{q_3}{0{,}3} = -24{,}3\,,$$

$$a_2 = (-17)\cdot 0{,}3 + (-21)\cdot 0{,}4 + (-30)\cdot 0{,}3 = -22{,}1\,,$$

$$a_3 = (-16)\cdot 0{,}3 + (-19)\cdot 0{,}4 + (-32)\cdot 0{,}3 = -22{,}0\,.$$

Следовательно, $a = \max\{-24{,}3;\, -22{,}1;\, -22{,}0\} = -22{,}0$ а по величине среднего выигрыша оптимальной является стратегия A_3, т.е. необходимо заменить оборудование новым.

Выясним, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать предприятию, чтобы оптимизировать потери при предположении, что три возможных состояния оборудования равновероятны. Когда все состояния природы полагаются равновероятностными, используют принцип недостаточного основания Лапласа. По этому принципу оптимальной считается стратегия, обеспечивающая минимум среднего риска (максимум среднего выигрыша) при $q_1 = q_2 = q_3 = \dfrac{1}{3}$.

$$r_1 = 0\cdot \frac{1}{3} + 2\cdot \frac{1}{3} + 15\cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{3}\,,$$

$$r_2 = 9\cdot \frac{1}{3} + 1\cdot \frac{1}{3} + 0\cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\,,$$

$$r_3 = 8 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\min\left\{\frac{17}{3}; \frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right\} = \frac{10}{3}.$$

Следовательно, по принципу Лапласа оптимальными являются и стратегия A_2 и стратегия A_3.

Выясним, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать предприятию, чтобы оптимизировать потери при предположении, что вероятности состояния оборудования неизвестны.

Замечание. Если вероятности состояний природы неизвестны, то руководитель для выбора оптимальной стратегии может использовать несколько критериев, таких, как: максиминный критерий Вальда, критерий минимального риска Сэвиджа, критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма).

По максиминному критерию Вальда за оптимальную стратегию предлагается выбрать такую стратегию, которая в наихудших условиях гарантирует наилучший результат. Для этого по платежной матрице найдем элементы $a_i = \min\limits_j a_{ij}$. Имеем $a_1 = -45$ – это min по 1-й стратегии, $a_2 = -30$ – min по 2-й стратегии, $a_3 = -32$.

$$\alpha = \max\{-45; -30; -32\} = -30.$$

Следовательно, оптимальной является стратегия A_2, т.е. вызов бригады ремонтников.

По критерию минимального риска Сэвиджа рекомендуется выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, которой величина максимального риска минимизируется: $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$. В нашем случае $\min\{15; 9; 8\} = 8$.

Оптимальной по критерию Сэвиджа является стратегия A_3, т.е. необходимо заменить оборудование новым.

По критерию Гурвица (пессимизма–оптимизма) за оптимальную принимается та стратегия A_i, для которой достигается максимум выражения

$$\max_i\left(\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma)\max_j a_{ij}\right), \quad \gamma = 0{,}8\ ,$$

$$a_1 = 0{,}8\cdot(-45) + 0{,}2\cdot(-8) = -37{,}6\,,$$

$$a_2 = 0{,}8\cdot(-30) + 0{,}2\cdot(-17) = -27{,}4\,,$$

$$a_3 = 0{,}8\cdot(-32) + 0{,}2\cdot(-16) = -28{,}8\,.$$

Находим $\max\{-37{,}6; -27{,}4; -28{,}8\} = -27{,}4$, следовательно, руководству рекомендуется выбрать стратегию A_2 (вызвать бригаду ремонтников).

Пример 13. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объем выпуска неосновной сезонной продукции I, II, III. Не проданная в течение сезона часть продукции позднее реализуется полностью по сниженной цене. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня спроса приведены в таблице 2.

Требуется:

– придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;

– вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;

– дать обоснованные рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую сумму прибыли.

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы следует ограничиться исследованием лишь тех трех ситуаций, когда одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков: повышенный (состояние $П_1$), средний (состояние $П_2$), пониженный (состояние $П_3$).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 5.

Таблица 5

Вид продукции	Себестоимость ед. продукции	Отпускная цена за единицу продукции		Объем реализации (тыс. ед.) при уровне спроса		
		в течение сезона	после уценки	повышенном	среднем	пониженным
I	$d_1 = 4{,}4$	$p_1 = 5{,}2$	$q_1 = 4{,}1$	$a_1 = 38$	$b_1 = 22$	$c_1 = 12$
II	$d_2 = 2{,}1$	$p_2 = 3{,}5$	$q_2 = 2{,}6$	$a_2 = 16$	$b_2 = 9$	$c_2 = 4$
III	$d_3 = 3{,}5$	$p_3 = 4{,}7$	$q_3 = 3{,}2$	$a_3 = 39$	$b_3 = 24$	$c_3 = 13$

Решение. Обозначим выпуск продукции I, II, III через x_1, x_2, x_3. Объем продаж в сезон обозначим y_1, y_2, y_3. Объем продаж по сниженным ценам соответственно равен: $x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$.

1–й игрок – предприятие, 2–й игрок – природа. Это игра с природой.

Для нахождения платежной матрицы найдем прибыль предприятия по формуле:

для I продукции: $5{,}2y_1 + 4{,}1(x_1 - y_1) - 4{,}4x_1$;

для II продукции: $3{,}5y_2 + 2{,}6(x_2 - y_2) - 2{,}1x_2$;

для III продукции: $4{,}7y_3 + 3{,}2(x_3 - y_3) - 3{,}5x_3$.

В зависимости от спроса y_i определяется по табл. 6.

Таблица 6

Спрос	высокий $П_1$	средний $П_2$	низкий $П_3$
y_1	38	22	12
y_2	16	9	4
y_3	39	24	13

Найдем прибыль по видам продукции при каждом состоянии $П_i$:

1) Высокий спрос:

I продукции: $5{,}2 \cdot 3{,}8 + 4{,}1x_1 - 4{,}1 \cdot 38 - 4{,}4x_1 = 41{,}8 - 0{,}3x_1$

II продукции: $3{,}5 \cdot 16 + 2{,}6x_2 - 2{,}6 \cdot 16 - 2{,}1x_2 = 14{,}4 + 0{,}5x_2$

III продукции: $4{,}7 \cdot 39 + 3{,}2x_3 - 3{,}2 \cdot 39 - 3{,}5x_3 = 58{,}5 - 0{,}3x_3$

2) Средний спрос:

I продукции: $22 \cdot 5{,}2 + 4{,}1x_1 - 4{,}1 \cdot 22 - 4{,}4x_1 = 24{,}2 - 0{,}3x_1$

II продукции: $9 \cdot 3{,}5 + 2{,}6x_2 - 2{,}6 \cdot 9 - 2{,}1x_2 = 8{,}1 + 0{,}5x_2$

III продукции: $24 \cdot 4{,}7 + 3{,}2x_3 - 3{,}2 \cdot 24 - 3{,}5x_3 = 36 - 0{,}3x_3$

3) Низкий спрос:

I продукции: $12 \cdot 5{,}2 + 4{,}1x_1 - 4{,}1 \cdot 12 - 4{,}4x_1 = 13{,}2 - 0{,}3x_1$

II продукции: $4 \cdot 3{,}5 + 2{,}6x_2 - 2{,}6 \cdot 4 - 2{,}1x_2 = 3{,}6 + 0{,}5x_2$

III продукции: $13 \cdot 4{,}7 + 3{,}2x_3 - 3{,}2 \cdot 13 - 3{,}5x_3 = 19{,}5 - 0{,}3x_3$

Составим платежную матрицу игры в табл. 7.

Таблица7

Прибыль от продукции	$П_1$	$П_2$	$П_3$
x_1	$41{,}8 - 0{,}3x_1$	$24{,}2 - 0{,}3x_1$	$13{,}2 - 0{,}3x_1$
x_2	$14{,}4 + 0{,}5x_2$	$8{,}1 + 0{,}5x_2$	$3{,}6 + 0{,}5x_2$
x_3	$58{,}5 - 0{,}3x_3$	$36 - 0{,}3x_3$	$19{,}5 - 0{,}3x_3$
суммарная прибыль	$41{,}8 - 0{,}3x_1 +$ $+ 0{,}5x_2 - 0{,}3x_3$	$68{,}3 - 0{,}3x_1 +$ $+ 0{,}5x_2 - 0{,}3x_3$	$36{,}3 - 0{,}3x_1 +$ $+ 0{,}5x_2 - 0{,}3x_3$

Возможны следующие стратегии предприятия в зависимости от прогноза спроса:

1–я стратегия: x_1=38, x_2=16, x_3=39,

2–я стратегия: x_1=22, x_2=9, x_3=24,

3–я стратегия: x_1=12, x_2=4, x_3=13.

Подставим эти значения x_i и получим платежную матрицу игры, т.е. матрицу суммарных прибылей (табл. 8):

Таблица 8

Прибыль / Стратегия	$П_1$	$П_2$	$П_3$
1	$114{,}7-0{,}3\cdot 38+$ $+0{,}5\cdot 16-0{,}3\cdot 39=$ $=99{,}6$	$68{,}3-0{,}3\cdot 38+$ $+0{,}5\cdot 16-0{,}3\cdot 39=$ $=53{,}2$	$36{,}3-0{,}3\cdot 38+$ $+0{,}5\cdot 16-0{,}3\cdot 39=$ $=21{,}2$
2	$114{,}7-0{,}3\cdot 22+$ $+0{,}5\cdot 9-0{,}3\cdot 24=$ $=105{,}4$	$68{,}3-0{,}3\cdot 22+$ $+0{,}5\cdot 9-0{,}3\cdot 24=$ $=59$	$36{,}3-0{,}3\cdot 22+$ $+0{,}5\cdot 9-0{,}3\cdot 24=$ $=27$
3	$114{,}7-0{,}3\cdot 12+$ $+0{,}5\cdot 4-0{,}3\cdot 13=$ $=109{,}2$	$68{,}3-0{,}3\cdot 12+$ $+0{,}5\cdot 4-0{,}3\cdot 13=$ $=62{,}8$	$36{,}3-0{,}3\cdot 12+$ $+0{,}5\cdot 4-0{,}3\cdot 13=$ $=30{,}8$

Видим, что максимум прибыли достигается при 3–й стратегии.

Пример 14. За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет b_1, b_2, b_3 или b_4 единиц. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме c_1 единиц в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят c_2 единиц в расчете на единицу сырья.

Требуется:

1. придать описанной ситуации игровую схему, выявить участников игры и установить ее характер, указать допустимые стратегии сторон;
2. вычислить элементы платежной матрицы и составить ее;
3. дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальны при следующих предложениях:

4. вероятности q_1, q_2, q_3 q_4 потребности в сырье в количестве, соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц известны;

5. потребление сырья в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 единиц представляется равновероятным;

6. о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 9.

Таблица 9

b_1	8
b_2	10
b_3	12
b_4	14
c_1	5
c_2	8
c_3	0,15
q_1	0,25
q_2	0,20
q_3	0,40
γ	0,60

Решение: Это игра с природой.

1–й игрок – предприятие,

2–й игрок – природа (качество сырья).

Обозначим количество закупленного сырья x. В зависимости от прогноза качества x может принять значения 8, 10, 12, 14. Это и есть стратегии предприятия.

Стратегии природы в зависимости от качества также дают значения реализации в сезон: 8, 10, 12, 14.

Найдем затраты предприятия при каждой стратегии и возьмем их с минусом при составлении платежной матрицы (табл.10).

Таблица 10

потребность \ закуплено	8	10	12	14
8	0	-(10-8)·5=-10	-(12-8)·5=-20	-(14-8)·5=-3
10	-(10-8)·8=-16	0	-(12-10)·5=-10	-(14-10)·5=-20
12	-(12-8)·8=-32	-(12-10)·8=-16	0	-(14-12)·5=-10
14	-(14-8)·8=–48	-(14-10)·8=-32	-(14-12)·8=-16	0

а) Если вероятности q_i известны, то найдем средние выигрыши для каждой стратегии:

для 8: $0 \cdot 0{,}15 + (-10) \cdot 0{,}25 + (-20) \cdot 0{,}2 + (-30) \cdot 0{,}4 = -18{,}5$.

Аналогично для 10: –12,4

для 12: –12,8

для 14: –18,4.

Максимум равен “–12,4” при закупке 10 единиц.

б) Если потребление сырья равновозможно, средние выигрыши равны:

для 8: $0 \cdot 0{,}25 - 10 \cdot 0{,}25 - 20 \cdot 0{,}25 - 30 \cdot 0{,}25 = -15$,

для 10: –11,5

для 12: –14,5

для 14: –24.

Максимум равен “–11,5” при закупке 10 единиц.

в) Если вероятности потребления неизвестны, то по принципу Вальда (максимина) найдем минимальный выигрыш в каждой строке:

для 8: –30

для 10: –20

для 12: –32

для 14: –48.

и выберем максимум, равный “–20”. при закупке 10 единиц.

3.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ MATHCAD

Пример 15.

Игрок *B* прячет в одной руке монету. Игрок *A* пытается угадать, в какой руке монета. Если игрок *A* говорит, что монета в правой руке, а она в левой, то он отдает игроку *B* 6 руб. А если игрок *A* говорит, что монета в левой руке, а она оказывается в правой, то он отдает 7 руб. Если игрок *A* говорит, что монета в правой руке и угадывает, то он получает от игрока *B* 3 руб. Если игрок *A* говорит, что монета в левой руке, и угадывает, то он получает от игрока *B* 4 руб.

Определить оптимальные стратегии поведения для каждого игрока и средний выигрыш для *B*.

Решение. Исходя из условия задачи, составим платежную матрицу игры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выбираем максимальное значение из минимальных элементов:

$\alpha = \max\{-6, -7\} = -6$, α – (нижнее значение игры).

Выбираем минимальное значение из максимальных элементов:

$\beta = \min\{3, 4\} = 3$, β – (верхнее значение игры).

Тук как $\alpha < \beta$, то седловой точки нет, поэтому решаем в смешанных стратегиях: $(\xi, \eta), v$, где v – (цена игры); $\xi = \{p_1, p_2\}$ (вероятность выбора первым игроком первой чистой стратегии); $\eta = \{q_1, q_2\}$ (вероятность выбора вторым игроком первой чистой стратегии).

I. Решим с помощью *p* (нахождение стратегий для первого игрока)

$$\begin{cases} 3p_1 - 7p_2 = v \\ -6p_1 + 4p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_2 = 1 - p_1 \\ 3p_1 - 7 + 7p_1 = v \\ -6p_1 + 4 - 4p_1 = v \end{cases},$$

$$10p_1-7=-10p_1+4\,,20p_1=11\,,p_1=\frac{11}{20}\,,$$

$$p_2=\frac{9}{20}\,,v=-\frac{3}{2}\,.$$

II. Решим с помощью q (нахождение стратегий для второго игрока)

$$\begin{cases}3q_1-6p_2=v\\-7q_1+4q_2=v\\q_1+q_2=1\end{cases},$$

$$q_1=1-q_2\,,3(1-q_2)-6q_2=v\,,-7(1-q_2)+4q_2=v\,,$$
$$3(1-q_2)-6q_2=-7(1-q_2)+4q_2\,,$$

$$\begin{cases}q_1=\dfrac{1}{2}\\q_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Ответ: $\xi=\left\{\frac{11}{20},\frac{9}{20}\right\};\eta=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\};v=\left\{-\frac{3}{2}\right\}.$

Таким образом, игроку *B* нужно случайно чередовать руки с монетой, но в правой руке прятать в среднем в одиннадцати случаях из двадцати, а в левой – в девяти случаях из двадцати. В этом случае *B* в каждой игре в среднем получит (–3/2) руб., то есть теряет 1,5 руб., игра для *B* невыгодная. Для игрока *A* выгодно также чередовать руки, в которых он ищет монету, но в правой руке искать в одном случае из 2, что приведет к среднему выигрышу для него в 50 коп. за игру.

Убедимся в правильности решения с помощью программной среды Mathcad. Для решения систем линейных уравнений будем использовать функцию Given-Find. Аргументы функций: имя функции и список ее аргументов.

Листинг программы имеет вид:

$x1 := 1 \qquad x2 := 1 \qquad v := 1$

Given

$3x1 - 7x2 = v$

$-6x1 + 4x2 = v$

$x1 + x2 = 1$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, v) = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$y1 := 1 \qquad y2 := 1 \qquad v := 1$

Given

$3y1 - 6y2 = v$

$-7y1 + 4y2 = v$

$y1 + y2 = 1$

$$\mathrm{Find}(y1, y2, v) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

3.3.УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 5. Найти решение следующих матричных игр.

а) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Упражнение 6. Для игры с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ -6 & -3 & 0 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

составить пару двойственных задач линейного программирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Болотский, А.В.* Математическое программирование и теория игр.–СПб.: Лань, 2019. – 112 с.

2. *Волков, И.К., Загоруйко, Е.А.* Исследование операций: Учебник для вузов/Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 436 с.

3. *Замков, О.О., Толстопятенко, А.В., Черемных, Ю.Н.* Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова; ДИС, 1997. – 368 с.

4. *Кремер Н.Ш.* Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов / Н.Ш. Кремер. Москва: ЮНИТИ-ДАНА. 2010. 480 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические указания к практическим занятиям для студентов бакалавриата направления 38.03.01

Сост. *Ю.С.Романова, Л.Г. Русина*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
высшей математики

Ответственный за выпуск *Ю.С.Романова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 02.09.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,3. Усл.кр.-отт. 3,3. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 75 экз. Заказ 776.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2