Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания к курсовой работе для студентов магистратуры направления 13.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 519.2.06(073)

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. Применение математических методов к задачам электротехники: Методические указания к курсовой работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *С.Е.Мансурова*. СПб, 2019. 27 с.

Содержатся необходимые сведения для написания курсовой работы «Применение математических методов к задачам электротехники», показаны примеры решенных задач, приведены задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов магистратуры направления 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», изучающих курс «Дополнительные главы математики».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент доц. *С.Е. Холодова* (Университет ИТМО)

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания к курсовой работе для студентов магистратуры направления 13.04.02

Сост. *С.Е. Мансурова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *С.Е. Мансурова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 04.09.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,6. Усл.кр.-отт. 1,6. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 50 экз. Заказ 748. С 258.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью курсовой работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» является приобретение и закрепление студентами знаний и навыков, полученных на лекциях и практических занятиях при изучении тем "Теория теории функций комплексной переменной" и "Операционное исчисление", дальнейшее развитие математического мышления, а также приобретения опыта в самостоятельном чтении учебной литературы и грамотном оформлении решенных задач.

В результате выполнения курсовой работы студент должен:

- знать основные понятия и методы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления, играющих важную роль в ряде задач электротехники;
- уметь применять методы моделирования и анализа при решении инженерных задач;
- владеть инструментарием для решения математических задач в своей предметной области, навыками математической формализации инженерных задач, навыками решения типовых задач.

Для выполнения задач курсовой работы необходимо изучить следующие разделы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления:

1. Комплексные числа, действия над ними; комплексная плоскость; тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.
2. Функции комплексной переменной; элементарные функции комплексной переменной: степенная функция, экспонента, тригонометрические функции, гиперболические функции, логарифм, показательная функция.
3. Дифференцирование функции комплексной переменной, условия Коши-Римана, аналитические и гармонические функции.

4. Преобразование Лапласа, изображение и оригинал. Свойства преобразования Лапласа.
5. Таблица оригиналов и изображений для основных элементарных функций, нахождение изображения для импульсной и периодической функции.
6. Решение дифференциальных, интегральных и интегрально-дифференциальных уравнений, а также систем таких уравнений, методами операционного исчисления.
7. Свертка функций. Изображение свертки функций. Интеграл Дюамеля и его применение к решению дифференциальных уравнений.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа должна быть оформлена средствами текстового редактора Microsoft Word. Для правильного оформления текста следует осуществить перечисленные ниже назначения.

1. **Включение режима автоматического переноса слов**. Перевод строки Microsoft Word делает автоматически. Для включения режима автоматического переноса слов используется команда **Сервис|Язык|Расстановка переносов**. Переноса слов в заголовках не производить.

2. Страницы следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту. Номер страницы на титульном листе не проставляется, но включается в общую нумерацию. **Вставка номеров страниц** производится через меню **Вставка|Номера страниц**. В диалоговом окне необходимо задать место расположения номеров (внизу страницы; по центру).

3. **Установка параметров страницы**. Перед началом ввода текста следует зайти в меню **Файл|Параметры страницы** и установить следующие параметры: печать односторонняя, ориентация

страницы книжная. Поля: верхнее, нижнее и правое по 2,5 см, левое 3,0 см. Колонтитулы: от края до верхнего колонтитула 1,25 см, нижнего – 1,6 см, переплет 0 см.

4. **Установка отступов**. При форматировании документа необходимо установить параметры абзаца через меню **Формат|Абзац** отступ первой строки 1,25 см, междустрочный интервал – полуторный, а также установить запрет висячих строк.

5. **Выравнивание текста**. Выравнивание текста должно выполняться по ширине, выравнивание строк заголовков – по центру.

6**. Рисунки** должны быть выполнены средствами компьютерной графики, иметь сквозную нумерацию и необходимые пояснения.

7. **Шрифт** следует использовать Times New Roman, по начертанию – обычный, для заголовков – полужирный, прописными буквами, размер 12 пт.

8. **Содержание** работы выполняется средствами редактора Microsoft Word и помещается в конце работы.

9. В работу следует включить **Список использованной литературы**.

10. В решении каждой задачи курсовой работы следует привести теоретические сведения, используемые при решении, формулировки используемых теорем, основные формулы, ссылки на литературу.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

<u>Задача 1.</u> Дана функция комплексного переменного

$$w = f(z), \ z = x + iy$$

и область D.

1) Найти все точки комплексной плоскости, в которых заданная функция является дифференцируемой и аналитической.
2) Вывести формулу для вычисления производной заданной функции.
3) Найти точки, в которых при отображении, соответствующем данной функции, расстояния а) сохраняются; б) увеличиваются; в) уменьшаются.
4) Найти все точки плоскости, в которых отображение не является конформным.
5) Найти вершины области D (т.е. точки, в которых пересекаются ее границы).
6) Найти угол поворота и коэффициент растяжения в каждой граничной точке при заданном отображении. Определить образ каждой точки при этом отображении.
7) Определить образ каждой граничной линии (рекомендуется при этом линии задавать параметрически). Образы границ задаются как параметрические функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$ с указанием интервала для t, где $u = \mathrm{Re}(w)$, $v = \mathrm{Im}(w)$.
8) Изобразить на комплексной плоскости z область D, указав при этом каждую вершину и каждую граничную линию.
9) Изобразить на комплексной плоскости w образ области D, указав прообраз каждой вершины и каждой граничной линии. Т.к. образы границ могут быть достаточно сложными линиями, рекомендуется для их построения использовать специальные компьютерные программы.

<u>Задача 2.</u> Дана электрическая схема, значения известных параметров (сопротивлений, индуктивности и т.д.) и значения искомых функций в начальный момент времени.

1) Составить систему дифференциальных, интегральных или интегрально-дифференциальных уравнений для поиска неизвестных функций.
2) Используя таблицы оригиналов и изображений, а также правила дифференцирования и интегрирования оригиналов, записать полученную систему в операторной форме.
3) Решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.
4) Найти искомые функции-оригиналы.
5) Сделать проверку полученного решения.
6) Построить графики полученных решений.

<u>Задача 3.</u> Дана электрическая схема, значения известных параметров (сопротивлений, индуктивности и т.д.) и значение искомой функции и ее производной по времени в начальный момент времени.

1) Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для поиска неизвестной функции.
2) Решить полученное уравнение с помощью интеграла Дюамеля.
3) Сделать проверку полученного решения.
4) Построить график полученного решения.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Дана функция комплексного переменного $w = z^2$ и область

$$D: \ x^2 + y^2 = 16, \quad y = \frac{1}{4}(x-4)^2 .$$

Решение.

1) Найдем все точки комплексной плоскости, в которых заданная функция является дифференцируемой и аналитической.

Найдем вещественную и мнимую части отображения:

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad \Rightarrow \quad u = x^2 - y^2; \ v = 2xy .$$

Функция является дифференцируемой и аналитической во всех точках, где выполняются условия Коши-Римана[44]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} .$$

Для рассматриваемой функции:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} .$$

Т.о., условия Коши-Римана выполняются для $\forall x$ и $\forall y$, т.е. данная функция является дифференцируемой и аналитической в любой точке комплексной плоскости.

2) Выведем формулу для вычисления производной заданной функции:

$$w'(z)=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2yi=2(x+iy)=2z \quad \Rightarrow \quad \left(z^2\right)'=2z\,.$$

3) Найдем точки, в которых при отображении, соответствующем данной функции, расстояния а) сохраняются; б) увеличиваются; в) уменьшаются.

При отображении $w=f(z)$ расстояния сохраняются при $k=1$, увеличиваются при $k>1$ и уменьшаются при $k<1$, где $k=\left|\, w'(z)\,\right|$. Тогда

а) $k=1$ при $\left|\, w'(z)\,\right|=1 \;\Leftrightarrow\; \left|\,2z\,\right|=1,\; \left|\,z\,\right|=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ при отображении $w=z^2$ расстояния между точками сохраняются на окружности радиуса 1/2 с центром в начале координат.

б) $k>1$ при $\left|\,z\,\right|>\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ часть плоскости, лежащая вне окружности, растягивается.

в) $k<1$ при $\left|\,z\,\right|<\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ часть плоскости, лежащая внутри окружности, сжимается.

4) Найдем все точки плоскости, в которых отображение не является конформным.

Отображение является конформным во всех точках, где функция дифференцируема и $w'(z)\neq 0$. Т.к. $w'(z)=2z \;\Rightarrow\; w'(z)=0$ при $z=0 \;\Rightarrow$ отображение не является конформным в точке $z=0$.

5) Найдем вершины области

$$D:\;\; x^2+y^2=16,\quad y=\frac{1}{4}(x-4)^2:$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-16=0,\\ x^2-8x+16-4y=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что данные линии пересекаются в точках $A(4,0) \Rightarrow z_A = 4$ и $B(0,4) \Rightarrow z_B = 4i$.

6) Найдем угол поворота и коэффициент растяжения в граничных точках A и B при отображении $w = z^2$ и определим образ каждой точки при этом отображении.

В точке A:

$$z_A = 4, \quad w'(z_A) = 8, \quad |\, w'(z_A) \,| = 8, \quad \arg\big(w'(z_A)\big) = 0.$$

Т.о., в точке A происходит растяжение в 8 раз без поворота.

$$w(z_A) = 16 \quad \Rightarrow$$

образом точки A является точка $\widetilde{A}(16,0)$.

В точке B:

$$z_B = 4i, \quad w'(z_B) = 8i, \quad |\, w'(z_A) \,| = 8, \quad \arg\big(w'(z_A)\big) = \frac{\pi}{2}.$$

Т.о., в точке B происходит растяжение в 8 и поворот на 90° против часовой стрелки.

$$w(z_B) = (4i)^2 = -16 \quad \Rightarrow$$

образом точки B является точка $\widetilde{B}(-16,0)$.

7) Найдем образы линий, ограничивающих область D.

а) Часть окружности $x^2 + y^2 = 16$, лежащая между точками A и B, т.е. в первой четверти. В параметрическом виде:

$$L_1 : \begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда:

$$w(t) = x^2 - y^2 + 2xyi = 16\cos^2 t - 16\sin^2 t + 32i\cos t\sin t =$$
$$= 16(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$\widetilde{L}_1 : \begin{cases} u = 16\cos 2t, \\ v = 16\sin 2t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Т.о., образом четверти окружности L_1 является верхняя половина окружности радиуса 16 с центром в начале координат.

2) Часть параболы $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, лежащая между точками A и B. В параметрическом виде:

$$L_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{4}(t-4)^2, \end{cases} \quad t \in [0, 4].$$

Тогда:

$$w(t) = t^2 - \frac{1}{16}(t-4)^4 + \frac{1}{2}t(t-4)^2 i =$$
$$= -\frac{1}{16}t^4 + t^3 - 5t^2 + 16t - 16 + \left(\frac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 8t\right)i$$

— это кривая четвертого порядка, выражающаяся параметрическими уравнениями

$$\widetilde{L}_2 : \begin{cases} u = -\frac{1}{16}t^4 + t^3 - 5t^2 + 16t - 16, \\ v = \frac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 8t, \end{cases} \quad t \in [0, 4].$$

8,9) Изобразим область D (рис. 1) и ее образ $\widetilde{D}$ (рис. 2).

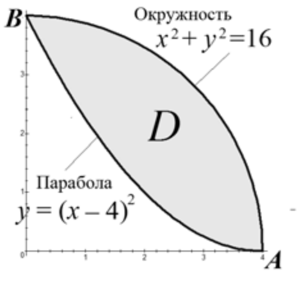

Рис. 1.

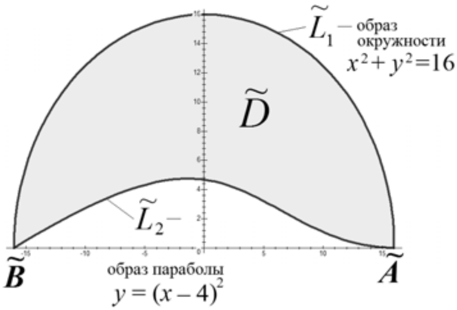

Рис. 2.

<u>Задача 2.</u>

Для схемы, изображенной на рис. 3, составлена система дифференциальных уравнений и заданы начальные условия:

$$\begin{cases} i_1 + \dfrac{di_1}{dt} = e_1(t) + e_0(i); \\ i_2 + \dfrac{di_2}{dt} = e_2(t) + e_0(i); \quad i_1(0) = 2,\ i_2(0) = 4. \\ i = i_1 + i_2; \end{cases}$$

Решить систему методами операционного исчисления, найти функции $i_1(t)$ и $i_2(t)$, если $e_1(t) = t$, $e_2(t) = 30\sin t$, $e_0(i) = 2i$.

Сделать проверку полученного решения. Построить графики найденных функций.

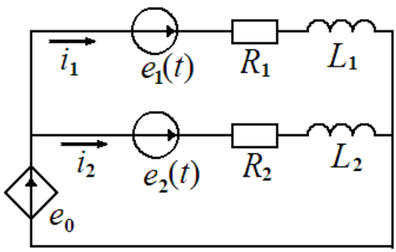

Рис. 3.

Решение. Подставим в систему уравнений заданные условия и упростим ее:

$$\begin{cases} i_1 + \dfrac{di_1}{dt} = t + 2(i_1 + i_2); \\ i_2 + \dfrac{di_2}{dt} = 30\sin t + 2(i_1 + i_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} - i_1 - 2i_2 = t; \\ \dfrac{di_2}{dt} - 2i_1 - i_2 = 30\sin t. \end{cases} \quad (1)$$

Применим таблицу оригиналов-изображений и формулу дифференцирования оригинала:

$$t \div \frac{1}{p^2}; \quad \sin t \div \frac{1}{1+p^2}; \quad f(t) \div F(p) \Rightarrow \frac{df}{dt} \div pF(p) - f(0).$$

Тогда

$$i_1 \div X(p) \Rightarrow \frac{di_1}{dt} \div pX(p) - \frac{58}{9};$$

$$i_2 \div Y(p) \Rightarrow \frac{di_2}{dt} \div pY(p) + \frac{86}{9}.$$

Подставив найденные соотношения в систему (1), получим

$$\begin{cases} pX(p) - \dfrac{58}{9} - X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p^2}; \\ pY(p) + \dfrac{86}{9} - 2X(p) - Y(p) = \dfrac{1}{1+p^2}. \end{cases}$$

Упростим полученную операторную систему:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{58}{9}; \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{1}{1+p^2} - \dfrac{86}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=\dfrac{58p^2+9}{9p^2}; \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)}. \end{cases}$$

Решим эту систему, например, методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix}=(p-1)^2-4=(p-1-2)(p-1+2)=(p-3)(p+1);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{58p^2+9}{9p^2} & -2 \\ \dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)} & p-1 \end{vmatrix}=(p-1)\cdot\frac{58p^2+9}{9p^2}+\frac{-368p^2+192}{9(1+p^2)}=$$

$$=\frac{(58p^3-58p^2+9p-9)\cdot(p^2+1)-368p^4+192p^2}{9p^2(p^2+1)}=$$

$$=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{58p^2+9}{9p^2} \\ -2 & \dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)} \end{vmatrix}=(p-1)\cdot\frac{-184p^2+96}{9(1+p^2)}+\frac{116p^2+18}{9p^2}=$$

$$=\frac{-184p^5+184p^4+96p^3-96p^2+116p^2+116p^4+18p^2+18}{9p^2(p^2+1)}=$$

$$\frac{-86p^5+202p^4+184p^3-50p^2+18}{9p^2(p^2+1)}.$$

Получим

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}\,; \qquad (2)$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-86p^5+202p^4+184p^3-50p^2+18}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}\,. \qquad (3)$$

Найденные функции $X(p)$ и $Y(p)$ являются изображениями искомых функций-оригиналов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ соответственно. Для нахождения оригиналов разложим алгебраическую дробь (2) на простейшие дроби:

$$X(p)=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}=$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}+\frac{K}{p-3}+\frac{M}{p+1}\right).$$

Приведя дроби к общему знаменателю и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+C+K+M=58; \\ -2A+B-2C+D+K-3M=-230; \\ -2A-2B-3C-2D+K+M=67; \\ -2A-2B-3D+K-3M=301; \\ -3A-2B=9; \\ -3B=-9. \end{cases}$$

Решив систему метод Гаусса, получим

$$A=-5;\quad B=3;\quad C=54;\quad D=-108;\quad K=0;\quad M=9.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{1}{9}\left(-\frac{5}{p}+\frac{3}{p^2}+\frac{54p-108}{p^2+1}+\frac{9}{p+1}\right)=$$

$$=-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}+6\cdot\frac{p}{p^2+1}-12\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получим

$$i_1(t)==-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}t+6\cos t-12\sin t+e^{-t}\ .$$

Аналогично, из соотношения (3) найдем

$$Y(p)=\frac{-86p^5+202p^4+184p^3-50p^2+18}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}+\frac{K}{p-3}+\frac{M}{p+1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases} A+C+K+M=-86;\\ -2A+B-2C+D+K-3M=202;\\ -2A-2B-3C-2D+K+M=184;\\ -2A-2B-3D+K-3M=-50;\\ -3A-2B=0;\\ -3B=18.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad A=4;\quad B=-6;\quad C=-81;\quad D=27;\quad K=0;\quad M=-9.$$

Откуда,

$$Y(p)=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{p}-\frac{6}{p^2}+\frac{-81p+27}{p^2+1}-\frac{9}{p+1}\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-9\cdot\frac{p}{p^2+1}+3\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p+1}.$$

и, пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получим

$$i_2(t) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}.$$

Таким образом, мы получили ***ответ***:

$$i_1(t) == -\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t},$$

$$i_2(t) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}.$$

Выполним проверку полученного решения. Проверим сначала выполнение начальных условий:

$$i_1(0) == -\frac{5}{9} + \frac{1}{3}\cdot 0 + 6\cos(0) - 12\sin(0) + e^0 = -\frac{5}{9} + 6 + 1 = \frac{58}{9},$$

$$i_2(0) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\cdot 0 - 9\cos(0) + 3\sin(0) - e^0 = \frac{4}{9} - 9 - 1 = -\frac{86}{9}.$$

Таким образом, значения найденных функций при $t = 0$ совпадают с заданными начальными условиями. Проверим теперь выполнение системы дифференциальных уравнений.

$$\frac{di_1(t)}{dt} == \frac{1}{3} - 6\sin t - 12\cos t - e^{-t}, \quad \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{2}{3} + 9\sin t + 3\cos t + e^{-t}.$$

Первое уравнение:

$$\frac{di_1}{dt} - i_1 - 2i_2 = \left(\frac{1}{3} - 6\sin t - 12\cos t - e^{-t}\right) -$$

$$-\left(-\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t}\right) - 2\left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{8}{9}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)t + (-6 + 12 - 6)\sin t +$$

$$+ (-12 - 6 + 18)\cos t + (-1 - 1 + 2)e^{-t} = t;$$

Второе уравнение:

$$\frac{di_2}{dt} - 2i_1 - i_2 = \left(-\frac{2}{3} + 9\sin t + 3\cos t + e^{-t} \right) -$$

$$-2\left(-\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t} \right) - \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t} \right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{4}{9} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) t + (9 + 24 - 3)\sin t +$$

$$+ (3 - 12 + 9)\cos t + (1 - 2 + 1)e^{-t} = 30\sin t.$$

Таким образом, оба уравнения заданной системы обращаются в тождества, верные при любом значении t.

Графики найденных функций показаны на рис. 4.

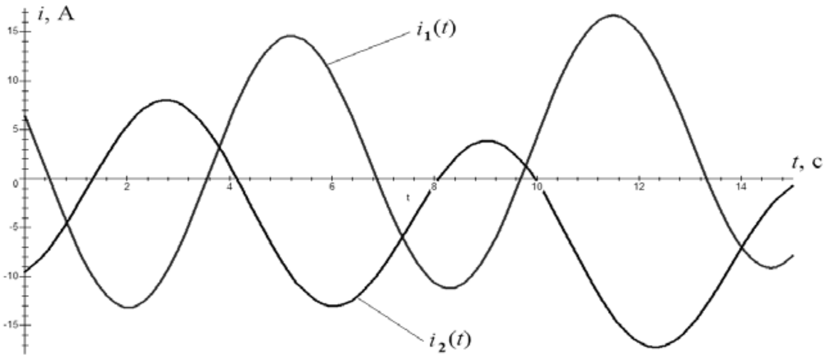

Рис. 4.

Задача 3.

Для схемы, изображенной на рис. 5, составить дифференциальное уравнение, решить его с помощью интеграла Дюамеля и опре-

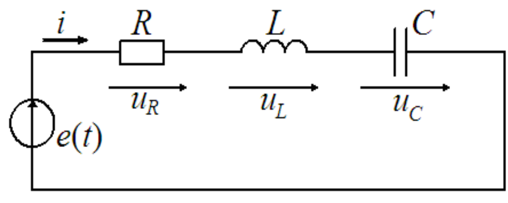

Рис. 5.

делить зависимость силы тока от времени, если

$$R = 6 \text{ Ом},\ L = 1 \text{ Гн},\ C = 40 \text{ мФ},$$

$$e(t) = \frac{e^t}{257}\left(464\cos 16t + 228\sin 16t\right) \text{ В},$$

в начальный момент времени $i(0) = 60$ А, $\frac{di}{dt}(0) = -190$ А/с. Сделать проверку полученного решения. Построить график найденной функции.

Решение. Для электрической схемы рис. 5 справедливо дифференциальное уравнение, составленное по 2-му закону Кирхгофа:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) = e(t).$$

Продифференцировав его по t, получим ДУ 2 порядка относительно силы тока $i(t)$:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de(t)}{dt}.$$

Подставим данные из условия задачи:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e^t}{257}\left(464\cos 16t + 228\sin 16t\right) + \\ + \frac{e^t}{257}\left(-464\cdot 16\sin 16t + 228\cdot 16\cos 16t\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{de(t)}{dt} = e^t\left(16\cos 16t - 28\sin 16t\right).$$

Таким образом,

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 25i = e^t\left(16\cos 16t - 28\sin 16t\right). \tag{4}$$

Так как начальные данные не нулевые: $i(0) = 60$, $\dfrac{di}{dt}(0) = -190$, для применения интеграла Дюамеля сделаем замену переменной по формуле

$$z(t) = i(t) - i(0) - t\frac{di}{dt}(0) \quad \Rightarrow \quad z(t) = i(t) - 60 + 190t .$$

Легко убедиться, что $z(0) = i(0) - 60 = 0$ и

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{di}{dt}(0) + 190 = 0 .$$

Тогда $i(t) = z(t) + 60 - 190t$, $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{dz}{dt} - 190$, $\dfrac{d^2 i}{dt^2} = \dfrac{d^2 z}{dt^2}$.

Подставим найденные соотношения в (4):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 6\left(\frac{dz}{dt} - 190\right) + 25(z + 60 - 190t) = e^t(16\cos 16t - 28\sin 16t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + 6\frac{dz}{dt} + 25z = e^t(16\cos 16t - 28\sin 16t) - 360 + 47500t , \qquad (5)$$

где

$$f_1(t) = e^t(16\cos 16t - 28\sin 16t) - 360 + 47500t . \qquad (6)$$

Решим уравнение (5) с нулевыми начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля. Составим характеристический многочлен данного уравнения:

$$A(p) = p^2 + 6p + 25 .$$

Тогда передаточная функция

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{p^2 + 6p + 25} = \frac{1}{(p+3)^2 + 4^2} ,$$

а весовая функция $w(t) = L^{-1}\left(\dfrac{1}{A(p)}\right) = \dfrac{1}{4}e^{-3t}\sin 4t.$

По формуле Дюамеля с учетом $w(t)$ и (6) получим:

$$z(t) = (w * f_1)(t) = \int_0^t f_1(s)w(t-s)ds =$$

$$= \int_0^t \left(e^s\left(16\cos 16s - 28\sin 16s\right) - 360 + 47500s\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-3(t-s)}\sin 4(t-s)\,ds\,.$$

Откуда

$$z(t) = e^{-3t}\left(60\cos 4t - 3\sin 4t\right) + 190t - 60 + \frac{1}{8}e^t\sin 16t\,,$$

и, с учетом $i(t) = z(t) + 60 - 190t$, получим решение поставленной задачи:

$$i(t) = e^{-3t}\left(60\cos 4t - 3\sin 4t\right) + \frac{1}{8}e^t\sin 16t\,.$$

Для проверки полученного решения найдем первую и вторую производные функции $i(t)$ и подставим их в левую часть (4):

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 25i =$$

$$-\frac{255}{8}e^t\sin 16t + 4e^t\cos 16t + 1461e^{-3t}\sin 4t - 348e^{-3t}\cos 4t\ +$$

$$+\,6\left(\frac{1}{8}e^t\sin 16t + 2e^t\cos 16t - 231e^{-3t}\sin 4t - 192e^{-3t}\cos 4t\right) +$$

$$+\,25\left(\frac{1}{8}e^t\sin 16t - 3e^{-3t}\sin 4t + 60e^{-3t}\cos 4t\right) =$$

$$=\left(\frac{-255+6+25}{8}\right)e^{t}\sin 16t+\left(4+12\right)e^{t}\cos 16t+$$

$$+\left(1461-1381-75\right)e^{-3t}\sin 4t+\left(-348-1152+1500\right)e^{-3t}\cos 4t=$$

$$=e^{t}\left(16\cos 16t-28\sin 16t\right),$$

Таким образом, найденная функция обращает заданное дифференциальное уравнение в тождество, верное при любом значении t.

Убедимся также, что выполняются начальные условия.

$$i(0)=e^{0}\left(60\cos(0)-3\sin(0)\right)+\frac{1}{8}e^{0}\sin(0)=60,$$

$$\frac{di}{dt}(0)=\frac{1}{8}e^{0}\sin(0)+2e^{0}\cos(0)-231e^{0}\sin(0)-192e^{0}\cos(0)=$$
$$=2-192=-190.$$

Таким образом, значения найденной функции и ее первой производной при $t=0$ совпадают с заданными начальными условиями задачи, что и требовалось доказать.

График найденной функции $i(t)$ приведен на рис. 6.

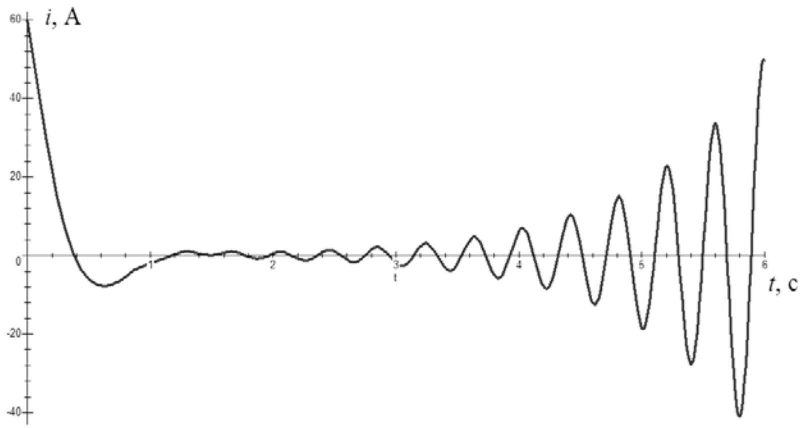

Рис. 6.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЩИТЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Что называется комплексным числом? Что называется вещественной и мнимой частями комплексного числа?
2. Назовите основные действия над комплексными числами и их свойства.
3. Как определяются модуль и аргумент комплексного числа?
4. Как записать комплексное число в тригонометрической форме?
5. Как записать комплексное число в показательной форме?
6. Как возвести комплексное число в степень?
7. Как извлечь корень из комплексного числа?
8. Назовите основные элементарные функции комплексной переменной.
9. Как определяется производная функции комплексной переменной?
10. Какие функции комплексной переменной являются аналитическими?
11. Сформулируйте условия Коши-Римана.
12. Какой смысл имеют модуль и аргумент производной функции комплексной переменной?
13. Какая функция называется оригиналом?
14. Что называется преобразованием Лапласа? Что такое Лаплас-образ, как он ещё называется? Как обозначается соответствие между оригиналом и Лаплас-образом?
15. Сформулируйте простейшие свойства преобразования Лапласа.
16. Чему равны изображения простейших функций (функция Хевисайда, e^{at}, $\sin bt$, $\cos bt$)?
17. Сформулируйте теорему смещения (затухания).
18. Сформулируйте теорему запаздывания.

19. Как определить изображение импульсной и периодической функции?
20. Что такое свёртка оригиналов, какие у неё свойства?
21. Сформулируйте теорему о свёртке оригиналов.
22. Сформулируйте теоремы интегрирования и дифференцирования оригиналов.
23. Сформулируйте теоремы интегрирования и дифференцирования изображений.
24. В чём идея операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений?
25. Что такое операторное решение дифференциального уравнения?
26. Что такое интеграл Дюамеля?
27. Для решения каких дифференциальных уравнений целесообразно применять интеграл Дюамеля?
28. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
29. В каких случаях система алгебраических уравнений имеет единственное решение? множество решений? не имеет решения?
30. Укажите методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основная литература

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 105 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71687

2. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71690

3. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 207 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71691

4. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.
http://znanium.com/catalog/product/851522

2. Дополнительная литература

1. Математический практикум. Часть 5. Теория вероятностей и основы математической статистики. Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление. Элементы теории поля: Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев, С.Е. Мансурова, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 187 с.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D907324<.>

2. Математический практикум. Часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье. Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, Т.Р. Акчурин, С.Е. Мансурова, Т.С. Обручева, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 152 с.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D147020047<.>

3. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с.

https://e.lanbook.com/book/65055

4. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 464 с.

https://e.lanbook.com/book/411

5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов ВУЗов / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: АСТ, 2014. [Электронный ресурс] - http://www.for-stydents.ru/matematika/uchebniki/vysshaya-matematika-v-uprazhneniyah-i-zadachah-v-2-h-chastyah.html

3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента

1. Господариков А.П. и др. Теория поля. Ряды Фурье. Операционное исчисление. Математическая физика. Математическая статистика. Линейное программирование (сборник РГЗ) / Учебно-методическое пособие – Горный университет, 2013.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088690%2F%D0%92%2093%2D462777832<.>

2. Волынская И.А., Козлова Н.Н. Математика (дополнительные главы). Учебное пособие. - Горный университет, 2013.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088596%2F%D0%92%2070%2D954561949<.>

3. Гончар Л.И., Скепко О.А. Применение операционного исчисления для решения задач теории автоматического управления. Методические указания для выполнения расчетного задания. – Горный университет, 2017.

https://lk.spmi.ru/~T3iiz

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Правила оформления курсовой работы 4
Примерные задания курсовой работы 6
Примеры выполнения заданий курсовой работы 8
    Задача 1. 8
    Задача 2. 12
    Задача 3. 18
Вопросы для подготовки к защите курсовой работы 23
Рекомендательный библиографический список 25