СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к самостоятельной работе для студентов бакалавриата направления 13.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра электроэнергетики и электромеханики

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к самостоятельной работе
для студентов бакалавриата направления 13.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 621.31.622(073)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. Теория планирования эксперимента: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Д.А. Устинов, С.В. Бабурин*. СПб, 2019. 90 с.

Изложены основные положения теории планирования эксперимента, рассмотрены основы постановки эксперимента, методы активного эксперимента, построение плана активного эксперимента, определение коэффициентов регрессии.

Методические указания предназначены для студентов направления 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» (программы подготовки: «Автоматизированные электромеханические комплексы и системы», «Электроприводы и системы управления электроприводов», «Системы электроснабжения»)

Научный редактор проф. *А.Е. Козярук*

Рецензент канд. техн. наук *В.А. Соловьев* (ООО «НПК «ЭНЕРГОПРОГРЕСС»)

ВВЕДЕНИЕ

Сложность конструкций современных электронных средств и технологических процессов их производства, в том числе комплектующих элементов (микросхем и других элементов), не позволяет на современном этапе развития науки, как правило, решать задачи разработки конструкций и их технологических процессов производства строгим математическим путём. Эти задачи осложняются ещё и тем, что многие объекты имеют вероятностный характер функционирования. Источниками появления таких объектов являются технология, а также новые требования, предъявляемые к объектам, усложнение условий их эксплуатации и т.п. При этом имеют место случайные факторы, которые создают трудности воспроизводства объектов, получения по ним достоверной информации и теоретических зависимостей. Решение поставленных задач в случаях отсутствия или невозможности применения строгих математических методов требует обращения к эксперименту как единственному способу устранить некоторую неопределённость, свойственную нашим знаниям об объекте. Но нужно всегда иметь в виду, что эксперимент требует больших затрат времени и средств. Необходимость проведения эксперимента хорошо понимали выдающиеся естествоиспытатели. Так, Г. Галилей впервые начал систематически применять экспериментальный метод для решения задач механики. Леонардо да Винчи писал: «Мне кажутся пусты и полны заблуждений те науки, которые не порождены опытом, отцом всякой достоверности, и не завершаются в наглядном опыте. Опыт никогда не ошибается, ошибаются ваши суждения, ожидая от него такого действия, которое не является следствием ваших экспериментов…».

1. ОСНОВЫ ПОСТАНОВКИ ЭКПЕРИМЕНТА

1.1. Общие сведения

Проектирование сложных объектов техники и технологических процессов в настоящее время не может быть успешным без проведения различного рода экспериментов. Причиной этого являются общие черты, присущие таким объектам:

1. Вероятностный характер объекта, которому сопутствует наличие неконтролируемых или трудно контролируемых случайных факторов. Такие факторы создают сложность воспроизводства объекта с некоторой статистической оценкой. Выходные параметры в таких случаях будут иметь рассеяние.

2. Неполнота информации об объекте, связанная:

а) с недостаточностью информации о показателях качества продукта, сырья, используемого в объекте;

б) с отсутствием или недостатком теоретических зависимостей для процесса производства.

Имеются два подхода к изучению подобных объектов:

1. Аналитический подход – попытка составить описание механизма явления на языке кинетики и т.п. Построение аналитических моделей сопряжено с проведением длительных исследований для выявления, например, природы физико-химических процессов, лежащих в основе технологических операций. Модели в этом случае, как правило, представляются в виде сложных систем уравнений (алгебраических, обыкновенных, дифференциальных, в частных производных). Они позволяют описать процессы в широких пределах факторного пространства, но распространения в производственных условиях не получили в силу ряда причин: частая смена изделий, необходимость обеспечения низкой стоимости и т.п.

2. Функциональный подход – отход от физики явлений и представление объекта в виде «чёрного ящика» с набором входных и выходных переменных. Изучение объекта сводится к получению описания поведения объекта в виде зависимости «вход – выход». Это статистические функциональные модели.

Опыт показывает, что статистические модели, формируемые в результате обработки экспериментальных данных, полученных, например, на конкретном технологическом оборудовании, являются наиболее экономичными. Кроме того, что более важно, они вполне достоверно отражают реальный технологический процесс в производственных условиях. Статистические модели имеют следующие преимущества:

1) простую структуру в виде полиномов;

2) построение моделей выполняется за сравнительно небольшое время и малыми средствами в производственных условиях;

3) расчёты элементарно реализуются на персональных ЭВМ.

Другого рода статистические модели – это различного рода распределения случайных величин, например выходных параметров и т.п.

Сейчас эти подходы пытаются объединить в единый физико-статистический подход: рассматривается физика явлений, а уточнение модели ведётся функциональным способом. В обоих подходах в основе лежит эксперимент. Экспериментально (на физическом макете) при конструировании электронной аппаратуры проводится определение тепловых режимов, достаточности экранирования и т.п. Эксперимент в технологическом процессе позволяет оценить влияние на него различных факторов, определить оптимальные условия его протекания, найти его математическую модель и т.д. Несмотря на огромный исторический период использования экспериментов, до сих пор нет установившегося определения термина «эксперимент». Все сходятся только в одном: происхождении от латинского *experimentum*, что в переводе означает «проба, опыт». Остановимся на следующем понятии. *Эксперимент* – это целенаправленное создание условий и их систематическое изменение, необходимое для изучения заданного объекта. Эксперимент может проводиться на объекте или его модели. Для описания объекта исследования пользуются обычно кибернетической моделью «Чёрный ящик», в которой устанавливается связь между независимыми переменными на входе x_i и зависимыми переменными на выходе y_j системы (рис. 1.1):

Независимые переменные x_i называются факторы, входные параметры, входы и т.п. Они могут быть управляемыми, неуправляемыми, контролируемыми и неконтролируемыми. Зависимые переменные y_j называются показатели качества, внешние параметры, выходные параметры, целевые функции, функционалы, параметры оптимизации, выходы и т.п.

Рис. 1.1. Кибернетическая модель объекта

В основе эксперимента лежит моделирование. Отношение между экспериментом и теоретической моделью двоякое. С одной стороны, эксперимент позволяет проверить и при необходимости уточнить модель, т.е. эксперимент является источником информации при моделировании. С другой стороны, модель диктует, какой именно эксперимент следует проводить, т.е. модель является источником информации при организации эксперимента.

Поэтому методологией эксперимента является теория подобия и моделирования. Она указывает, как ставить эксперимент и как обрабатывать его данные, чтобы получить результат не только достоверный в данном частном случае, но и распространяющийся на группу подобных явлений. Эффективность любого эксперимента зависит от соотношения между его полезным эффектом и произведёнными затратами. Проведение эксперимента требует определённых затрат времени, сил и средств. Поэтому очень важными задачами становятся правильная постановка эксперимента, устранение слепого хаотического поиска требуемых результатов (метода так называемого «ползучего эмпиризма»), замена его научно обоснованной программой проведения экспериментального исследования, которая включает объективную оценку результатов эксперимента. Следует заметить, что результат любого эксперимента всегда связан с некоторой неопределённостью. Задача хорошей организации исследования заключается только в том, чтобы эту неопределённость минимизировать, но отнюдь не в том, чтобы её полностью устранить. Таким образом, в целом проведение эксперимента состоит из двух важных этапов:

1. Организация и проведение непосредственно эксперимента: выбор измеряемых параметров, размер выборки, на которой проводится эксперимент, порядок проведения измерений, план эксперимента и т.п.

2. Обработка полученных экспериментальных данных.

В соответствии с этими этапами, теория эксперимента развивалась и развивается по двум направлениям. Одно из них можно назвать *обработкой опытных данных* и характеризовать как методику расчёта и построения достоверных характеристик на основе опытных данных, неизбежно имеющих погрешности, отражающиеся, в частности, в «разбросе» опытных точек. Другое направление, называемое *теорией планирования эксперимента*, можно определить как методику проведения наблюдений за явлением (пассивный эксперимент) и одновременно такую стимуляцию изучаемых явлений (активный эксперимент), которая позволила бы наиболее быстро, с меньшим числом опытов найти наиболее характерные зависимости или точки.

С появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ) возникло понятие *вычислительного эксперимента*. Этот эксперимент предполагает исследование математической модели объекта или процесса на ЭВМ. Это, конечно, значительно повышает эффективность эксперимента: вычислительный эксперимент дешевле, быстрее, проще, легко управляем, в него можно без труда вмешиваться, в нём можно моделировать условия, которые невозможно создать в лаборатории. Но всё это возможно при одном единственном условии: наличие достоверной математической модели. Такая модель может быть построена на основе изученных физических закономерностей, а они могут быть выявлены только в опытах. В этом состоит существенный недостаток вычислительного эксперимента, и поэтому он никогда не вытеснит натурный эксперимент. Следовательно, необходимо их разумное сочетание.

1.2 Теория статистических выводов

Теория статистических выводов используется на этапе обработки экспериментальных данных. Она является разделом математической статистики, в которой изучаются методы анализа результатов эксперимента. Эта теория включает два крупных раздела:

1. Теория проверки статистических гипотез (критерии значимости).

2. Теория оценивания.

В первом разделе рассматриваются некоторые правила (критерии), которые позволяют принять или отклонить выдвигаемые гипотезы. Во втором разделе рассматриваются задачи вычисления оценок подбираемых моделей для экспериментальных данных и определения точности этих оценок.

К свойствам оценок параметров распределений (статистикам) предъявляются требования состоятельности, несмещённости и эффективности.

Состоятельность означает, что с ростом числа наблюдений ($n \rightarrow \infty$) оценка $\widehat{\Theta}$ сходится по вероятности к самому истинному значению параметра Θ, т.е. её дисперсия должна стремиться к нулю. Свойство состоятельности можно записать следующим образом

$$\mathrm{P}\{\widehat{\Theta} = \Theta\} \rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Несмещённость означает отсутствие систематических ошибок в наблюдаемых данных, оценка не должна преувеличивать или преуменьшать значение параметра. Следовательно, оценка $\widehat{\Theta}$ истинного значения параметра Θ будет несмещённой, если её математическое ожидание совпадает с истинным значением $M\{\widehat{\Theta}\} = \Theta$. Свойство несмещённости в отличие от состоятельности является свойством оценки для выборки любого конечного объёма. Несмещённость оценки не предполагает её состоятельности, но если оценка состоятельная и имеет конечное среднее, то является асимптотически несмещённой. Т.е. её математическое ожидание по вероятности сходится к истинному значению.

Эффективность – найденная оценка должна быть наиболее точной, т.е. иметь наименьшую дисперсию среди всех возможных оценок, полученных по данной выборке другими способами.

Для решения задач обоих разделов применяются два метода:

1. Метод выборочных распределений.
2. Метод максимального правдоподобия.

Метод выборочных распределений (не определяя процедуру вычисления оценок подбираемых моделей) позволяет определить точность оценок и проверить гипотезы относительно истинных значений этих параметров, не отвечая на вопрос: как определять эти оценки?

Метод максимального правдоподобия задаёт процедуру вычисления точечных оценок параметров и позволяет проверять гипотезы об истинных параметрах.

Целью обработки наблюдений обычно является получение эффективной оценки. Эту оценку при обработке выборки конечного размера можно получить только для законов распределения специального вида, допускающих достаточные оценки. Однако для довольно широкого класса законов распределения существуют асимптотически эффективные оценки. В частности, оценки максимального правдоподобия являются, как правило, асимптотически эффективными.

В теории оценивания широко используется метод наименьших квадратов (МНК). Отличаясь по процедуре вычисления оценок, этот метод совпадает с методом максимального правдоподобия в случае нормального распределения наблюдений, т.е. он позволяет получить те же свойства оценок, что и метод максимального правдоподобия.

Сам по себе МНК не связан с какими-либо предположениями о распределении случайных ошибок $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Он может применяться и тогда, когда мы не считаем эти ошибки случайными.

Если же случайные ошибки имеют нормальное распределение, то в этом случае:

- именно в гауссовской модели МНК обладает определёнными свойствами оптимальности;
- в гауссовской модели получаемые с помощью этого метода оценки неизвестных параметров обладают ясными статистическими свойствами.

1.3 Методы многомерного анализа

Эти методы используются для анализа экспериментальных данных при исследовании объектов различной природы:

1. Классификационный анализ.
2. Дискриминантный анализ.
3. Канонический корреляционный анализ.
4. Компонентный анализ.
5. Факторный анализ.
6. Дисперсионный анализ.
7. Регрессионный анализ.

Дадим краткие характеристики приведённым методам.

Классификационный анализ решает задачи группирования (классификации) экспертных данных путём формирования групп *однородных данных*, чтобы потом для этих групп применить те или иные методы. Однородные данные – это данные, дисперсии которых практически не различимы. Т.е. производится исключение данных, выпадающих из общего количества наблюдений.

Дискриминантный анализ ориентирован также на классификацию экспериментальных данных, но путём формирования групп по заданным заранее признакам. Например, формирование групп данных, математические ожидания которых численно одинаковы.

Канонический корреляционный анализ изучает корреляционные свойства различных подмножеств внутри общего множества экспериментальных данных и позволяет выделить группы с сильно коррелированными параметрами.

Компонентный и факторный анализы изучают рассеяние и корреляцию исследуемых факторов. С помощью этих анализов делается попытка вскрыть главные факторы, которые определяют рассеяние и корреляцию в изучаемом объекте.

Дисперсионный анализ решает задачу разложения общего рассеяния экспериментальных данных на составляющие, обусловленные действием разных источников.

Регрессионный анализ применяется главным образом для построения функциональных моделей по экспериментальным данным. Он решает задачу идентификации объекта, т.е. ставится в соответствие объекту его математическая модель, представляющая зависимость выходной переменной от входных переменных.

Отличие в применении перечисленных методов заключается:

- в постановке задачи;
- в свойствах объектов исследований.

Отличие свойств изучаемого объекта состоит в следующем:

- линейный или нелинейный объект;
- уровень действия случайных факторов;
- степень коррелированности входных переменных (сильная или слабая);
- динамические свойства объекта, которые проявляются в наличии того или иного характера дрейфа, в изменении комплекса условий на объекте;
- возможность внесения искусственных возмущений в объект, т.е. одни объекты позволяют варьировать входные переменные, а другие нет.

1.4 Типы экспериментов

С точки зрения возможности внесения в объект искусственных возмущений различают:

- активный эксперимент;
- пассивный эксперимент.

Можно это различие рассматривать в зависимости от характера эксперимента: активный, пассивный.

Активный эксперимент. В этом случае вначале строится *план эксперимента* таким образом, чтобы провести эксперимент наилучшим образом с учётом свойств изучаемого объекта. Наилучшим образом означает возможность получения большей информации по сравнению с традиционным подходом – без планирования эксперимента. В активном эксперименте для обработки результатов наибольшее распространение получили методы дисперсионного и регрессионного анализов. Дисперсионный анализ применяется для факторов, варьирование которых проводится на качественных и количественных уровнях. Регрессионный анализ предполагает задание только количественных уровней. Качественный уровень – это разные установки, операторы и т.д.

Активный эксперимент – такой, в котором его планирование и анализ результатов основаны на математико-статистических методах. Благодаря этому эксперимент ставится на научную основу. Все методы активного эксперимента объединяются под названием *методы планирования эксперимента*. Активный эксперимент наиболее эффективен в лабораторных условиях, когда нет влияния на качество выпускаемой продукции, что неизбежно в производственных условиях; когда можно варьировать факторы в широких пределах. Следовательно, активный эксперимент эффективнее применять на этапе оптимального проектирования

Пассивный эксперимент. Он понимается как накопление информации в условиях нормально действующего объекта. Эксперимент проводится в производственных условиях на действующем оборудовании, что позволяет не тратить время и средства на постановку опытов. Но при этом имеется ряд существенных недостатков: ограниченность варьирования технологическими факторами во избежание брака продукции, отсутствие возможности произвольного варьирования этими факторами и т.д. Этот путь получения модели намного длиннее, чем при активном эксперименте, но часто он является единственно возможным и экономически оправданным.

Пассивный эксперимент – такой, в котором математико-статистические методы используются только для обработки результатов. Это методы многомерного анализа. В зависимости от целей эксперимента различают: статистический анализ, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ.

По функциональным задачам методы многомерного анализа и методы планирования эксперимента делятся на две группы:

- методы, связанные с источником рассеяния параметров исследуемого объекта (дисперсионный, компонентный, факторный, дискриминантный, классификационный анализы);
- методы, связанные с построением модели – идентификации объекта, позволяющей вскрыть функциональную зависимость выходной переменной от набора входных переменных (регрессионный анализ и его модификации).

1.5 Моделирование как основа эксперимента. Условия получения модели

Моделирование – это процесс создания модели или отыскания в природе некоего объекта, замещающего исследуемый объект. Этот замещающий объект, применяемый при исследованиях, может быть реальным (материальным) объектом той же (физическая модель) или другой (аналоговая модель) природы, что и изучаемый объект (оригинал). Он может быть только мысленным объектом, воспроизводящим объект исследования с помощью логических построений, математических выкладок (математическая модель). Достоверные сведения об оригинале могут быть получены лишь в том случае, если замещающий объект будет его *моделью*. Следовательно, прежде всего необходимо, чтобы он был *подобен* изучаемому объекту. Для этого, согласно первой теореме подобия, параметры модели и оригинала должны образовывать одинаковые критерии подобия. Согласно второй теореме подобия описание изучаемого объекта должно проводиться с помощью обобщённых параметров – критериальных зависимостей. Согласно третьей теореме подобия необходимыми условиями для создания подобия является соответствие сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство определяющих критериев подобия, содержащих эти условия.

Условия однозначности определяют индивидуальные особенности процесса, выделяют его из всего многообразия процессов данного класса. К ним относятся факторы и условия, не зависящие от механизма самого явления (процесса):

- геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- физические параметры среды и тел, образующих систему;
- начальное состояние системы (начальные условия);
- условия на границах системы (граничные условия);
- взаимодействие объекта и внешней среды.

В каждом конкретном случае условия однозначности могут быть различны, в зависимости от рода решаемой задачи и вида уравнения. При полном подобии должны выполняться, как правило, все условия. Но третья теорема подобия относится не только к полному, но и неполному подобию, когда процессы рассматриваются или только во времени, или только в пространстве. Поэтому начальные и граничные условия могут определяться или как временные, или как пространственные. Не всегда требуется и геометрическое подобие.

1.6 Точность результатов эксперимента

Подобие и моделирование всегда осуществляются с той или иной степенью точности. Практическое применение теории подобия и моделирования требует:

- оценки этих методов;
- уточнения методов и приёмов обработки экспериментальных данных.

Выбор требуемой точности получаемых результатов зависит от условий проведения эксперимента:

- эксперимент на реальной системе;
- эксперимент на модели;

- численное решение математической модели.

Во всех случаях требования к точности должны быть разными. Эксперимент, проводимый на моделях, созданных на базе критериев подобия, полученных из уравнения процесса, позволяет уточнить это уравнение. Природа явления, воспроизводимая на модели, снимает математическую абстракцию исходного уравнения и даёт возможность исследователю проникнуть в существо процесса. Таким образом, опыты на модели, полученной на основе теории подобия, могут уточнять уравнения той системы, по элементам которой были найдены критерии подобия до этих опытов. Однако степень точности воспроизведения физических явлений на моделях может быть различной. Она определяется прежде всего степенью полноты имеющихся знаний об оригинале и теми задачами, которые ставит перед собой исследователь.

Следует помнить, что абсолютная точность модели, так же как и абсолютное подобие, является математической абстракцией. Но чрезмерные различия между моделью и оригиналом также лишают модель её познавательного значения. Именно потому, что модель в какой-то степени отлична от оригинала, создаётся возможность отыскивать и выделять определённые, наиболее существенные связи и отношения, более легко и доступно видоизменять условия. Словом, действовать с моделью так, как нельзя или затруднительно действовать с оригиналом.

При получении на модели характеристик тех или иных явлений необходимо учитывать факторы, обусловливающие расхождение результатов, полученных в модели и оригинале:

- погрешности определения отдельных параметров, входящих в критерии подобия;
- неточности исходного математического описания явлений;
- погрешности в получении критериев подобия за счёт заведомо упрощённого представления явления при его изучении;
- случайные отклонения параметров оригинала и модели от принятых (расчётных);

- погрешности проведения опытов, отклонения фактических режимов от расчётных и т.п.;
- погрешности обработки результатов опытов.

Эти же факторы действуют в оригинале, т.е. при проведении эксперимента непосредственно на натуре.

1.7 Обработка результатов экспериментов. Их достоверность

При обработке эксперимента очень важно наилучшим образом выбрать форму представления его результатов. Поэтому экспериментальные исследования, проводимые как в натуре, так и на моделях, должны быть предварительно тщательно продуманы не только в отношении порядка их проведения, но и в отношении выбора методов обработки результатов (методов получения оценок).

В соответствии с целями методы получения оценок можно разделить на две большие группы.

В методах первой группы оперируют с функциями распределения наблюдаемых величин. При этом характер функции распределения предполагается известным, а неизвестным являются лишь их некоторые числовые параметры. Среди этих методов наиболее широкое использование получили метод моментов, метод максимального правдоподобия (наибольшего правдоподобия), байесовский метод, метод условных математических ожиданий. Как частные случаи этих методов при определённых предположениях относительно вида функции распределения наблюдаемых величин, выступают метод наименьших квадратов, метод наименьших положительно определённых форм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, метод наименьших модулей и др.

В методах второй группы не требуется знание функций распределения. Здесь в основе классификации лежит формальная вычислительная схема, используемая для получения оценок. К этим методам относятся: метод наименьших квадратов, метод наименьших положительно определённых квадратичных форм, метод наименьших модулей, метод минимакса, метод Коши и др.

Если сделать какие-то предположения о характере функций распределения измерений, то почти каждый метод второй группы можно рассматривать как следствие или частный случай методов первой группы и тогда они получают теоретическое обоснование. Если же не делать таких предположений, то эти методы остаются чисто формальными и тогда возникает законный вопрос: как ведёт себя каждый из этих формальных методов в условиях, когда ошибки измерения подчинены тому или иному закону распределения вероятностей?

Существует теснейшая связь между методом максимального правдоподобия, нормальным распределением ошибок и методом наименьших квадратов, а именно, если ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения, то метод максимального правдоподобия сводится к методу наименьших квадратов.

Выбор методов обработки результатов эксперимента зависит от целей эксперимента:

- определение статистических характеристик исследуемого процесса или какой-то статистической совокупности объектов;
- проверка научной гипотезы и нахождение математической модели исследуемого объекта или процесса.

В первом случае проводится так называемая первичная или предварительная обработка (анализ) экспериментальных данных: определяются средние, дисперсии, их интервальные оценки, функция распределения и т.п. Например, используется статистический контроль качества продукции. В этом случае решающее значение в планировании эксперимента и его обработке приобретает принцип максимума правдоподобия.

Во втором случае полученные значения переменных наносят на график и по его общему виду подбирают тип математической модели.

В более общем случае эта модель представляется в виде полинома или уравнения регрессии, коэффициенты которого определяются по методу наименьших квадратов.

Обычно в практических приложениях оценка достоверности результатов моделирования с учётом погрешности задания и воспроизведения критериев подобия при статистических их вариациях сводится к двум задачам:

- оценка погрешности реализации приближённого моделирования вместо точного;
- оценка влияния стохастических вариаций критериев подобия.

Вопрос о достоверности статистических выводов в основном решается в зависимости от трёх моментов:

- от абсолютной величины самой полученной разности двух сопоставляемых средних;
- от числа производимых наблюдений;
- от размаха случайных колебаний исходных значений.

Для оценки достоверности вычисляют меру случайного варьирования отдельных значений.

1.8 Ошибки и гипотезы

После проведения эксперимента имеется набор выборочных данных. На основе этого набора данных необходимо принимать решения. Естественно, требуется оценить, какие при этом могут быть совершены ошибки. Различают ошибки двух типов или двух родов.

Ошибка I-го рода – α – заключается в том, что отвергается решение, которое на самом деле является *правильным*. При статистическом контроле качества продукции эту ошибку называют *риском поставщика*. Она означает вероятность забракования кондиционной продукции при её приёмке как негодной. Величина α служит уровнем значимости. *Уровень значимости* α – это минимальная вероятность, начиная с которой событие признаётся практически невозможным. Обычно α выбирается из ряда 0,001; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3. Величина $P = 1 - \alpha$ называется *надёжностью вывода*, или *доверительной вероятностью*.

Ошибка II-го рода – β – заключается в том, что принимается решение, которое на самом деле является неверным. При статистическом контроле качества продукции эту ошибку называют *риском заказчика* (потребителя).

Очевидно, что выбор значений α и β должен зависеть от последствий совершения ошибок первого и второго рода соответственно. Чем серьёзнее эти последствия, тем меньше должен быть уровень значимости. Выбирая уровень значимости, следует также учитывать мощность критерия. Критерий должен быть построен таким образом, чтобы вероятность отклонить испытуемую гипотезу, когда она верна (α), была минимальной, а когда верна альтернативная гипотеза (1 – β) – максимальной, т.е. вероятности ошибок I и II рода должны быть минимальными. Вероятности этих ошибок взаимосвязаны: с уменьшением вероятности ошибки I рода мощность критерия уменьшается; он хуже улавливает различия между гипотезами. Вероятность ошибки II рода при этом увеличивается. Единственный способ уменьшить эти ошибки состоит в увеличении объёма выборки.

Естественно, что ошибка второго рода более опасна, так как поставщик может провести повторную проверку качества продукции, а заказчик лишен этой возможности из-за отправки этой продукции с завода-изготовителя.

Ошибка первого рода α или доверительная вероятность P используются при проверке статистических гипотез.

Статистическая гипотеза – H – это некоторое утверждение относительно распределений совокупности случайных величин или всякое предположение об истинных значениях параметров подбираемой модели для экспериментальных данных или о её типе. Различают нулевую и альтернативную гипотезы.

Нулевая гипотеза – H_0 – это гипотеза, утверждающая, что различие между сравниваемыми величинами отсутствует, т.е. разница между оценками случайная и параметры генеральных совокупностей одинаковы, не имеют различия (разница равна нулю). Наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными колебаниями в выборках. Все остальные гипотезы, отличающиеся от нулевой, называются альтернативными H_1, H_2 и т.п.

Альтернативная гипотеза – предположение, противоположное нулевой гипотезе. Следовательно, можно сказать, что ошибка первого рода – это ошибка отклонения верной гипотезы, а ошибка второго рода – это ошибка принятия ложной гипотезы. Величину $1 - \beta$ называют *мощностью критерия*. Это вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Гипотезы всегда формулируются относительно генеральных (истинных) параметров распределений, которые справедливы для рассматриваемых случайных величин. Но правила проверки гипотез строятся на основании выборочных значений параметров. Перед анализом выборки фиксируется уровень значимости α. В соответствии с выбранным значением α определяется критическая граница, за которую не могут выходить оцениваемые критерии. Отвечающую уровню значимости область называют *критической областью*. Иными словами, критической областью называют совокупность значений критериев, при которых нулевую гипотезу отвергают. *Критерием проверки статистических гипотез или просто критерием – K* – называют случайную величину, которая служит для проверки гипотезы (критерии Стьюдента, Фишера, Пирсона и др.).

Выборочное пространство для всех возможных значений статистики, лежащей в основе критерия для проверки гипотезы, разбивают на две части: область допустимых значений и критическую область, в которой гипотеза отвергается. Критическая область может быть двусторонняя и односторонняя (рис. 1.2).

Вероятность попадания в заштрихованную область равна $1 - P$. Вероятность попадания в границы $K_{кр1}$, $K_{кр2}$ равна $1 - \alpha$.

Критическими точками (границами) $K_{кр}$ называют точки,отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > K_{кр}$, где $K_{кр}$ – положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < K_{кр}$, где $K_{кр}$ – отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < K_{кр1}$, $K > K_{кр2}$, где $K_{кр2} > K_{кр1}$.

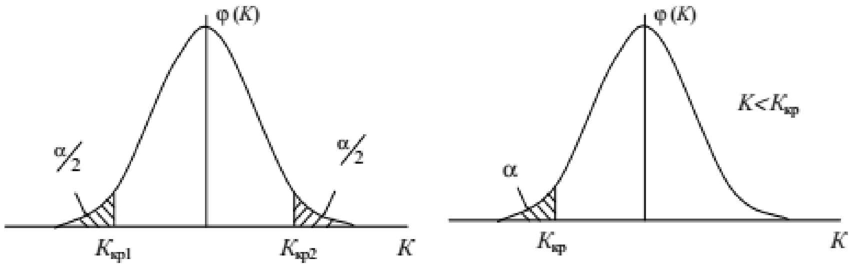

Рис. 1.2. Критические области (заштрихованы) *а* – двусторонняя; *б* – односторонняя

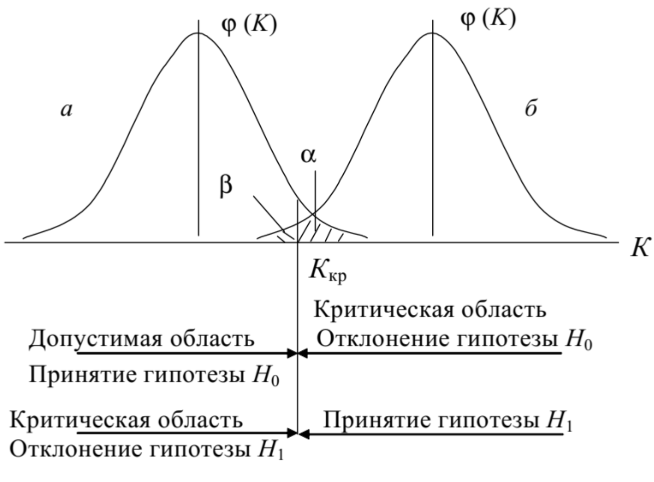

Рис. 1.3. Распределение критериев:
а – при условии, что верна гипотеза H_0; *б* – при условии, что верна гипотеза H_1

Для отыскания критической области задаются уровнем значимости α и по соответствующим таблицам ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области
$P\,(K > K_{кр}) = \alpha$, $K_{кр} > 0$;
б) для левосторонней критической области
$P\,(K < K_{кр}) = \alpha$, $K_{кр} < 0$;
в) для двусторонней симметричной области
$P(K > K_{кр}) = {}^{\alpha}\!/_{2}$, $K_{кр} > 0$, $P(K < K_{кр}) = {}^{\alpha}\!/_{2}$, $K_{кр} < 0$.

На рис. 1.3. приведены плотности распределения критериев при условии верности гипотез H_0 и H_1.

1.9 Проверка статистических гипотез и критериев

Смысл проверки статистических гипотез состоит в том, чтобы по данным случайной выборки принять наиболее обоснованное решение о виде или параметрах генеральной совокупности, т.е. принять или отклонить гипотезу с минимальным риском ошибки.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое (расчётное) значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое (расчётное) значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу принимают.

Гипотезы и критическую область следует определять до проведения выборки. Строгое решение этой задачи достигается при помощи метода отношения правдоподобия.

С помощью критериев проверки статистических гипотез решаются задачи:

- проверка гипотез об основных параметрах генеральной совокупности (средняя, дисперсии и др.);
- проверка гипотез о распределениях;
- проверка существенности связи между параметрами и др.

Проверка статистических гипотез производится в таком порядке:

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.

2. Выбирается уровень значимости α.

3. Определяется соответствующая уровню значимости критическая область.

4. Проводятся измерения выборки.

5. По результатам выборки рассчитывается фактическое значение статистической характеристики.

6. Принимается или отвергается нулевая гипотеза.

Далее рассмотрим комплексы, которые используются при обработке результатов экспериментов и которые носят название критериев.

Критерий Пирсона – χ^2 – служит для проверки согласия экспериментального и теоретического распределений.

Критерий Фишера, или F-критерий, используется для сравнения двух выборочных дисперсий, определённых по независимым выборкам из нормальных генеральных совокупностей.

Проверяется гипотеза H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$.

Используется критерий (статистика) Фишера, который представляет отношение большей выборочной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S^2_{\text{больш}}}{S^2_{\text{меньш}}} = \frac{S^2_1}{S^2_2}. \tag{1.1}$$

По таблице критерия Фишера при числе степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ и выбранном уровне значимости α определяют $F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)$. Здесь n_1 и n_2 – объёмы выборок.

Если конкурирующая гипотеза H_1: $D(X) \neq D(Y)$, то критическую точку ищут при уровне значимости $\alpha/2$ (вдвое меньше заданного): $F_{\text{кр}}(\alpha/2; k_1; k_2)$.

Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

При применении F-критерия полагают, что все наблюдения независимы и распределены нормально с одинаковыми математическими ожиданиями и одинаковой дисперсией. Однако исследования показывают, что F-критерий применим, когда распределение отличается от нормального. При этом наиболее существенное влияние на результат оказывает эксцесс распределения E, а не асимметрия. Следовательно, асимметричность распределений не является препятствием для применения F-критерия. Однако следует осторожно относиться к распределениям, эксцесс которых значительно отличается от трёх (E = 3 для нормального распределения).

Критерий Стьюдента, или t-критерий, используется для проверки гипотезы о равенстве двух средних значений генеральных совокупностей, имеющих нормальные законы распределения, через выборочные средние значения случайной величины. Расчётные значения $t_{\text{расч}}$ получают по соответствующим формулам, применение которых зависит от того, известны дисперсии генеральных совокупностей или нет, и от объёма выборок.

Если дисперсии *неизвестны* и *одинаковы* (малые независимые выборки), то расчётное значение критерия определяется по формуле:

$$t_{\text{расч}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{n\cdot m(n+m-2)}{n+m}}, \qquad (1.2)$$

где n и m – объемы малых независимых выборок; $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – выборочные средние; S_x^2 и S_y^2 – исправленные выборочные дисперсии.

Выборки считаются малыми, если $n < 30$ и $m < 30$.

По таблице критерия Стьюдента при числе степеней свободы $k = n + m - 2$ находят $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;k)$. Прежде чем сравнивать средние, необходимо проверить, существует ли разница между средними квадратическими ошибками обеих серий S_x^2 и S_y^2. Если F-критерий даёт значимое различие между ними, т.е. нулевая гипотеза H_0: $S_x^2 = S_y^2$ отвергается, то исследуемые два средних значения нельзя сравнивать между собой. Исправленные выборочные дисперсии находят через условные варианты по формуле:

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum u_i^2 - \frac{|\sum u_i|^2}{n}\right), \qquad (1.3)$$

где u_i – условные варианты для x_i.

Аналогично: v_i – условные варианты для y_i.

Условные варианты – это преобразованные реальные варианты x_i и y_i. Такое преобразование проводится с целью упрощения расчётов и записей исследуемых величин, так как условные варианты представляют собой только целые числа.

Например: x_i = 3,4; $\bar{x}$ = 3,6; составляем формулу для вычисления условного варианта:

$$u_i = 10x_i - 36 = 10 \cdot 3{,}4 - 36 = -2.$$

Если дисперсии неизвестны и выборки *зависимые* и *одинакового* объёма, то расчётные значения критерия определяются по формуле:

$$t_{\text{расч}} = \frac{1}{S_d} \cdot \bar{d} \cdot \sqrt{n}, \qquad (1.4)$$

где $\bar{d} = \sum \frac{d_i}{n}$ – средняя разностей вариантов;

$d_i = x_i - y_i$ – разность вариантов с одинаковыми номерами;

n – объем одной выборки;

$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum d_i^2 - \frac{1}{n}|\sum d_i|^2\right]}$ – исправленное среднее квадратичное отклонение.

По таблице критерия Стьюдента при числе степеней свободы $k = n - 1$ и выбранному уровню значимости для двусторонней критической области (т.к. нулевая гипотеза $M(\bar{X}) = M(\bar{Y})$ находим критическую точку $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;k)$.

При сравнении выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности необходимо выполнение одного из условий: дисперсия генеральной совокупности известна или нет.

Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то используют критерий Стьюдента, расчётное значение которого определяют по формуле:

$$t_{\text{расч}} = \frac{1}{S}(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}, \qquad (1.5)$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя;
a_0 – гипотетическая средняя генеральной совокупноти;
n – объем выборки (малая выборка);
$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum n_i \cdot x_i^2 - \frac{1}{n}\left|\sum n_i \cdot x_i\right|^2\right]}$ – исправленное среднее квадратичное отклонение.

По таблице критерия Стьюдента при числе степеней свободы $k = n - 1$ определяем $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha;k)$. Во всех случаях принимается нулевая гипотеза, если $t_{\text{расч}} < t_{\text{крит}}$.

Если сравниваются средние двух генеральных совокупностей с известными дисперсиями и большими независимыми выборками, а также если сравнивается выборочная средняя с гипотетической средней генеральной нормальной совокупности с известной дисперсией, то для сравнения используются другие критерии (не критерии Стьюдента), которые определяются по таблице функции Лапласа.

Критерий Кохрена (Кохрана, Кочрена), или G-критерий, используется для проверки однородности (равенства) нескольких (> 2) дисперсий, определённых по выборкам одинакового объёма. Проверяется нулевая гипотеза о равенстве между собой генеральных дисперсий:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots D(X_l). \qquad (1.6)$$

В качестве критерия используется отношение максимальной выборочной дисперсии $S^2_{\text{макс}}$ к сумме всех выборочных дисперсий

$$G_{\text{расч}} = \frac{S^2_{i.\text{макс}}}{\sum_{i=1}^{l} S_i^2}. \qquad (1.7)$$

По числу степеней свободы $k = n - 1$ и количеству выборок l при выбранном уровне значимости α по таблице критерия Кохрена определяют $G_{кр}$ (α; k; l). Если $G_{расч} < G_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу об однородности выборок. Для проверки нулевой гипотезы строят правостороннюю критическую область. Если сравниваются несколько дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам разного объёма, то используется критерий Бартлетта.

1.10. Выбор информативных параметров эксперимента

1. *Характеристика объекта исследования.* Под объектом следует понимать систему, которая подлежит изучению или оптимизации. Основным свойством объекта исследования является его сложность, определяемая числом различных состояний, в которых может находиться объект.

Важной характеристикой объекта исследования является его *управляемость*. Управляемым считается объект, который экспериментатор по своему усмотрению может перевести в любое из различных состояний и поддерживать его в этом состоянии с заданной точностью заданное время. Свойство управляемости объекта позволяет проводить на нём «активный» эксперимент, который заключается в непосредственном воздействии на объект по воле экспериментатора.

Промышленные объекты в большинстве случаев не позволяют проводить на них активные эксперименты. В такой ситуации проводятся пассивное наблюдение за объектом и фиксация интересующих параметров без непосредственного воздействия, т.е. осуществляется «пассивный» эксперимент. Задача изучения объекта исследования в значительной мере облегчается его формализацией или удачным выбором его модели. Это зависит также от объёма эксперимента, который, в свою очередь, определяется количеством параметров оптимизации (выходных параметров) и количеством факторов, влияющих на объект. Следовательно, для обеспечения эффективного эксперимента необходимо правильно выбрать и количество выходных параметров, и количество исследуемых факторов.

2. *Выбор параметра оптимизации.* В соответствии с базовыми положениями системного подхода одним из главных требований к системе является её оптимальное функционирование в заданных условиях эксплуатации. Поэтому выбор параметров оптимизации является наиболее важным моментом при подготовке экспериментальных исследований.

Один из принципов системного подхода в области оптимального проектирования состоит в том, что система должна оптимизироваться по *единственному* и количественно определённому критерию (показателю), отражающему в математической форме цель оптимизации. Этим показателем является целевая функция, которая устанавливает связь между входными (факторами) и выходными параметрами системы. Однако обычно реакция системы на возмущающие воздействия (желательные и нежелательные) многогранна, и поэтому в большинстве случаев приходится решать задачи с несколькими параметрами оптимизации. Эти параметры, естественно, могут быть разнообразными. Условно их можно разделить:

- на технические (мощность, чувствительность, быстродействие и др.);
- технико-экономические (производительность и др.);
- экономические (экономическая эффективность функционирования, рентабельность и др.);
- технологические (показатели качества продукции);
- статистические (математическое ожидание и дисперсия точности, стабильности и т.п.).

Основные требования, предъявляемые к параметру оптимизации, следующие: однозначно, эффективно и достаточно универсально характеризовать объект исследования.

Требование *однозначности* в статистическом смысле заключается в том, что определённому набору значений факторов должно соответствовать только одно (с точностью ошибки эксперимента) значение параметра оптимизации.

Планирование считается *эффективным*, если выбран параметр оптимизации, который можно определить с наибольшей возможной точностью.

Под *универсальностью* параметра оптимизации подразумевается его способность всесторонне характеризовать объект.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел чёткий физический смысл, был понятен исследователю и легко измеряем. Существенную роль при выборе параметра оптимизации играет уровень априорных сведений об объекте исследования. При возникновении ситуации с несколькими параметрами оптимизации прежде всего необходимо рассмотреть возможность уменьшения их числа, в лучшем случае до одного. Это возможно следующими путями:

- прежде всего, надо переформулировать задачу, пытаясь изменить параметры оптимизации;
- в сложных случаях можно расчленить задачу на ряд более мелких и решать их последовательно так, чтобы на каждом шаге оптимизация проводилась только по одной целевой функции (ранжированная форма целевой функции). При этом необходимо следить за тем, чтобы цели исходной и расчленённой задач соответствовали друг другу;
- уменьшить число параметров оптимизации можно путём оценки корреляции между ними. Задача сводится к определению коэффициентов парной корреляции на основе экспериментальных материалов и статистической оценки их значимости. При высокой значимости коэффициента корреляции исключается один из двух рассматриваемых параметров, так как он не несёт полезной информации по отношению к другому. Обычно исключается тот параметр оптимизации, который труднее измерить;
- уменьшить количество параметров оптимизации можно нахождением обобщённого параметра (аддитивного, мультипликативного, минимаксного).

Необходимо заметить, что выбор параметра оптимизации в значительной степени влияет на вид математической модели, которая получается в результате исследования объекта.

3. *Выбор исследуемых факторов.* После выбора параметра оптимизации приступают к выбору способов воздействия на объект исследования, т.е. факторов – независимых переменных, входных величин, обладающих свойством воздействовать на этот объект. Лучше всего, если будут выбраны все возможные факторы. Чем больше, тем лучше. Но включить в эксперимент все известные факторы не представляется возможным, так как это значительно увеличит объём эксперимента. Поэтому отбирают факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на объект исследования. При выборе факторов необходимо учитывать требования, которые к ним предъявляются:

1. Лёгкость измерения с достаточно высокой точностью.
2. Однозначность.
3. Управляемость.
4. Совместимость друг с другом.
5. Отсутствие корреляционных связей между ними.

Все факторы можно разделить на качественные и количественные. Качественные факторы те, которые не могут быть представлены в количественном виде. Например, марка материала, тип станка, вид экспериментальной установки и т.п. Количественные факторы те, которые можно оценивать количественно, т.е. измерять.

Желательно оперировать с однозначными факторами, которые непосредственно воздействуют на объект исследования. Значительно труднее работать со сложными факторами, являющимися функциями других факторов.

Требование управляемости факторов заключается в возможности выбора и поддержания уровня варьирования фактора в течение всего опыта, что позволяет активно воздействовать на объект исследования. Появление неуправляемых факторов является результатом наличия различного вида неоднородностей дискретного и непрерывного типа. Источником неоднородностей дискретного типа могут быть различные свойства обрабатываемых материалов, измерительной аппаратуры, квалификация исполнителей и т.п. Существенным источником неоднородностей может служить так называемый «эффект рук», связанный с получением результатов различными исполнителями. Источники неоднородностей, как правило, являются факторами, которые мало интересуют исследователя. Они в значительной степени увеличивают ошибку эксперимента, создают большое «шумовое» поле. Влияние неоднородностей более желательно устранить, чем оценить.

Источники неоднородностей непрерывного типа вызывают непрерывные изменения исследуемых факторов и, как результат, дрейф параметра оптимизации во времени. Например, изменение во времени температуры оборудования, старение оборудования и т.п. Необходимо стремиться учесть и оценить влияние как можно большего числа неуправляемых контролируемых факторов. Неконтролируемые неуправляемые факторы являются неизмеряемыми, что значительно увеличивает ошибку эксперимента.

Особенно важным является *требование совместимости* факторов, которое заключается в том, что все комбинации уровней факторов, участвующих в эксперименте, могут быть осуществлены на практике и являются безопасными. Несовместимость факторов возникает тогда, когда некоторые из комбинаций их значений не могут быть осуществлены. Например, некоторое сочетание скорости резания, подачи и глубины резания приводит к возникновению интенсивных вибраций и работа станка невозможна.

Требование независимости заключается в возможности установления фактора на любом уровне вне зависимостей от уровней других факторов. То есть необходимо, чтобы отсутствовала корреляция факторов. Включение в эксперимент коррелированных факторов не способствует получению новых результатов, так как один из факторов не несёт никакой дополнительной информации об объекте исследования.

Требование некоррелированности, однако, не исключает возможности наличия связей любого характера. Достаточно, чтобы эта связь не была линейной.

Выбор факторов с учётом указанных требований завершается составлением полного списка факторов. В список включаются те факторы, которые целесообразно и удобно варьировать в ходе эксперимента; для остальных назначаются постоянные уровни.

Если число факторов превышает 10 – 12, то решается вопрос о проведении отсеивающих экспериментов.

1.11 Метод экспертных оценок для отбора факторов

Для уменьшения объёма эксперимента при большом количестве факторов естественно возникает желание отсеять малозначимые факторы. Для этого следует надёжно провести отбор факторов. Но это можно сделать лишь на основе экспериментальных данных, которых на этапе построения математической модели, как правило, ещё недостаточно. Выход состоит в тщательном анализе косвенных данных и привлечении мнений экспертов. Метод отбора существенных факторов на основе анализа мнений специалистов-экспертов называется *методом экспертных оценок*. Надёжность этого метода не очень высока. Поэтому даже на начальном этапе требуется проверка согласованности мнений специалистов. Для этого используется *метод ранговой корреляции*.

Рассмотрим метод экспертных оценок. Пусть число факторов, которые следует учесть при построении модели, равно m. На основе литературных данных и мнений специалистов каждому фактору приписывается некоторый ранг. Наиболее важному фактору, с точки зрения специалиста, приписывается ранг m, следующему по важности фактору приписывается ранг $(m - 1)$ и т.д. Наименее важный фактор имеет ранг единицу. Если несколько факторов имеют одинаковую важность, то им приписывается одинаковый ранг, который равен среднему арифметическому рангов, приходящихся на эту группу факторов. Данные о рангах факторов заносятся в сводную таблицу мнений специалистов.

Таблица 1.1

Фактор	Специалисты				Сумма рангов
	1	2	…	k	
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	$\sum_{j=1}^{k} a_{1j}$
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	$\sum_{j=1}^{k} a_{2j}$
…	…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}	$\sum_{j=1}^{k} a_{mj}$

Мнения отдельных специалистов о рангах разных факторов, безусловно, расходятся. Поэтому для каждого фактора суммируют его ранги у разных специалистов и получают сумму рангов по каждому фактору. Затем строят диаграмму суммы рангов факторов (рис. 1.4)

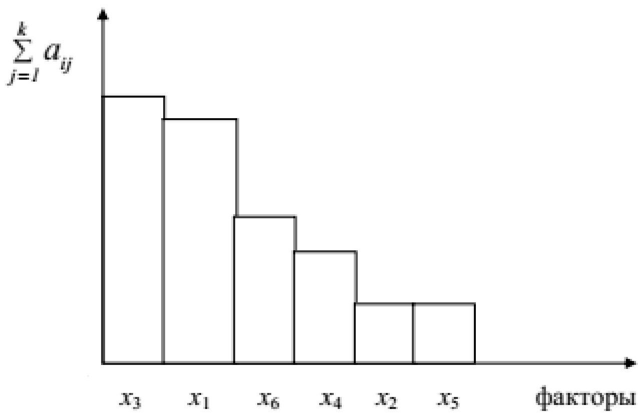

Рис. 1.4. Диаграмма рангов факторов

Анализ диаграммы показывает, что, например, из 6 факторов наибольшее значение имеют факторы x_3 и x_1, существенно меньшее – x_6 и x_4 и малое значение специалисты придают факторам x_2 и x_5. Поэтому в первом приближении можно пренебречь факторами x_2 и x_5.

Чтобы оценить степень согласованности мнений экспертов относительно рангов факторов, вычисляют коэффициент ранговой корреляции, который носит название *коэффициента конкордации W* (от лат. *concordare* – быть согласным), или коэффициента согласованности.

Этот коэффициент лежит в пределах от 0 до 1. Если при ранжировании факторов согласие мнений экспертов полностью отсутствует, то $W = 0$. Если имеет место полное согласие мнений экспертов, то $W = 1$.

Вычисляют коэффициент конкордации по следующей схеме.

1. Находят среднее арифметическое суммы всех рангов:

$$T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}. \quad (1.8)$$

2. Находят отклонение суммы рангов каждого фактора от среднего арифметического:

$$d_i = T - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}. \quad (1.9)$$

3. Находят сумму квадратов отклонений d_i:

$$S = \sum_{i=1}^{m} d_i^2. \quad (1.10)$$

Величина S, очевидно, есть некоторая характеристика согласия мнений экспертов. Если согласия нет, то при большом k все $d_i \approx 0$ и $S = 0$. При полном согласии мнений экспертов $S = S_{\text{макс}}$.

Коэффициент конкордации определяется по формуле:

$$W = \frac{S}{S_{\text{макс}}}, 0 \le W \le 1. \quad (1.11)$$

Расчёт $S_{\text{макс}}$ проводится в зависимости от того, имеет каждый фактор отличный от других ранг или имеются группы факторов с одинаковыми рангами каждого фактора. Рассмотрим случай, когда все факторы имеют разные ранги. При этом используют формулу:

$$S_{\text{макс}} = \frac{1}{12} k^2 (m^3 - m). \quad (1.12)$$

Тогда коэффициент конкордации будет равен:

$$W = \frac{12S}{k^2(m^3 - m)}. \quad (1.13)$$

Оценку значимости коэффициента конкордации обычно проводят по χ^2-критерию, который вычисляют по формуле:

$$\chi^2_{\text{расч}} = k(m-1)W = \frac{12S}{k \cdot m(m+1)}. \quad (1.14)$$

Полученное значение сравнивают с табличным значением $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, f)$, где α – уровень значимости, $f = m - 1$ число степеней свободы. Если $\chi^2_{\text{расч}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то на уровне значимости α согласие мнений экспертов отсутствует. Если коэффициент конкордации значим, то построенной диаграмме можно верить. На диаграмме следует выделить группу факторов, наиболее сильно влияющих на параметр оптимизации *y*. Слабо влияющие факторы на первом этапе исследования можно исключить из рассмотрения, хотя такой подход тоже будет субъективным.

По результатам анализа диаграммы принимают следующие решения. Если распределение на диаграмме суммы рангов равномерное, то все факторы должны включаться в эксперимент. Значит, опрос мнений экспертов не дал положительного результата. Если распределение неравномерное, но отличие рангов незначительное, то различие между факторами делается неуверенно. Поэтому в этом случае также лучше все факторы включить в эксперимент. Наиболее благоприятный случай, когда происходит быстрое экспоненциальное уменьшение степени влияния факторов, что даёт возможность более уверенно отсеять ряд факторов на основе проведённого опроса мнений экспертов. На практике применяют и ряд других методов отсеивания факторов.

1.12 Разложение вариации

При проведении экспериментов приходится оценивать, например, влияние того или иного фактора на результаты процесса или насколько близка вычисленная функция к эмпирическим данным. Такая оценка основана на правиле разложения вариации. Для этого общая сумма квадратов отклонений результативного признака $SS_{общ}$ делится на две суммы: сумму квадратов отклонений, связанную с влиянием данного фактора SS_1, и сумму квадратов отклонений, связанную с действием неучтённых факторов SS_2:

$$SS_{общ} = SS_1 + SS_2. \qquad (1.15)$$

Эти суммы, деленные каждая на соответствующее ей число степеней свободы, дают соответствующие дисперсии.

2. МЕТОДЫ АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1. Основные положения планирования эксперимента

Эти положения развиты в науке «Планирование эксперимента», которая отвечает на вопросы: как обработать априорную информацию, сколько и каких надо произвести опытов, как обработать результаты опытов и т.п. Как указывалось ранее, такой эксперимент называется активным. Активный эксперимент позволяет решать многие задачи исследования объектов: отыскивать механизм процессов, выделять наиболее влияющие факторы, получать математическую модель процесса, отыскивать оптимальные условия протекания процессов и т.п.

Математико-статистические методы, на которых основано планирование экспериментов, являются одним из эмпирических способов получения математического описания сложных процессов. Поскольку отсутствует знание механизма исследуемого процесса или оно является неполным, то оказывается неизвестным аналитическое выражение функции, описывающей процесс. В таком случае используется кибернетический подход к исследованию объекта и процесса, который в нем происходит. В качестве модели объекта используется обычно «черный ящик», в котором рассматривают четыре группы переменных (рис. 2.1)

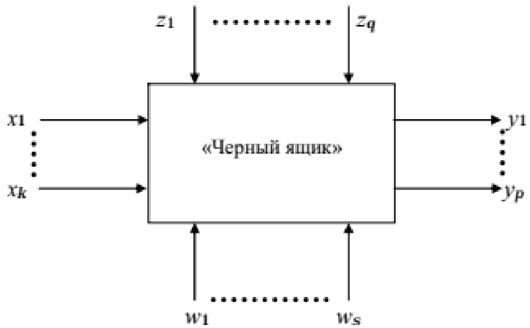

Рис. 2.1. Группы факторов

Группа y_1, …, y_p — это выходные параметры объекта или параметры оптимизации (целевые функции и т.д.). Группа x_1, …, x_k – входные параметры или независимые факторы, которые являются управляемыми и при изменении которых в процессе эксперимента изучается объект исследования. Группа z_1, …, z_q – входные факторы, которые неуправляемы, но которые можно контролировать при проведении эксперимента. Группа w_1, …, w_s – входные факторы, которые и неуправляемы, и не контролируемы. Две последних группы факторов могут значительно увеличивать ошибки эксперимента.

На такой модели изучают зависимость параметров оптимизации от изменения входных факторов, не связывая эту зависимость с механизмом процесса в объекте. Связь между входом и выходом объекта записывается в виде математической модели – уравнения регрессии или полинома:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_i + \cdots, \qquad (2.1)$$

где φ_i – функция отклика; $j = \overline{1, p}$, b_0, b_i – коэффициенты регрессии.

Функция φ определяет изменение выходного параметра в ответ на изменения факторов, т.е. отклик. При геометрической интерпретации *функция отклика* представляет некоторую поверхность, расположенную в *факторном пространстве*, координатами которого являются факторы.

После проведения эксперимента задача состоит в нахождении коэффициентов регрессии. Так как для планирования эксперимента применяются математико-статистические методы, то составляются программы эксперимента, которые носят название планов первого, второго и k-го порядков. План эксперимента, позволяющий вычислить коэффициенты линейного уравнения регрессии, называется *планом первого порядка*. *План второго порядка* – план эксперимента, позволяющий вычислить коэффициенты полного уравнения регрессии второй степени, и т.д. План эксперимента основывается на двух основных методологических концепциях, которые внесла математическая статистика в теорию эксперимента: концепции рандомизации и концепции оптимального использования факторного пространства.

Концепция рандомизации (случайности) состоит в том, что в эксперименте создается *искусственно* случайная ситуация для того, чтобы исключить влияние неконтролируемых систематических факторов на параметр оптимизации y путём перевода этих факторов в разряд случайных и учета их влияния статистически. Для того чтобы их рандомизировать, в программу эксперимента стали включать параллельные опыты, результаты которых усредняются. Последовательность выполнения этих опытов определяется обычно с помощью таблицы случайных чисел. Тем самым достигается объективность эксперимента, которую способна обеспечить только рандомизация. Однако полная рандомизация не всегда достижима, что потребовало создания рандомизированных планов с ограничениями.

Концепция оптимального использования факторного пространства заключается в том, что опытные точки (точки, которые определяют условия проведения очередного опыта) расположены в факторном пространстве оптимальным образом. При этом математическое описание процесса оказывается наиболее точным, чем если бы опыты проводились в точках, расположенных каким-то другим образом.

Активный эксперимент выполняется в виде полного факторного эксперимента (ПФЭ) и дробного факторного эксперимента (ДФЭ). Используются также отсеивающие эксперименты, позволяющие снизить число значимых факторов.

Методы ПФЭ и ДФЭ используются для планирования дисперсионного анализа при числе факторов больше единицы (в отличие рандомизированного, но не спланированного дисперсионного анализа), для поиска оптимума целевой функции и т.д.

2.2 Построение плана активного эксперимента

План активного эксперимента определяет расположение экспериментальных точек в k-мерном факторном пространстве, т.е. он определяет условия всех опытов, которые необходимо провести. Обычно план эксперимента задается в виде матрицы планирования.

Матрица планирования – это таблица, в которой записывается план эксперимента. Она соответствует набору значений независимых переменных x, который обычно записывается в виде матрицы

$$B = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

где x_{ij} – значение i-го фактора в j-м эксперименте $\left(i = \overline{1,k}; j = \overline{1,N}\right)$.

Таким образом, каждая строка матрицы планирования определяет условия проведения очередного опыта, а каждый столбец – значения одной из независимых переменных в разных опытах (табл. 2.1).

Для удобства представления полинома в виде однородного уравнения $y = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_i$ в матрицу планирования вводится фиктивная переменная x_0, которая во всех опытах принимает значение +1.

Таблица 2.1

№ опыта	Параллельные опыты			План эксперимента					y_{ji}		
	I	II	III	x_0	x_0	x_2	..*i*..	x_k	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1	8	2	7	+1	-1	-1	…	-1	y_{11}	y_{12}	y_{13}
2	5	4	2	+1	+1	-1	…	-1	y_{21}	y_{22}	y_{23}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
j	9	7	8	+1	+1	-1	…	+1	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
N	2	5	6	+1	+1	+1	…	+1	y_{N1}	y_{N2}	y_{N3}

Прежде чем строить план эксперимента, необходимо выбрать:

- область эксперимента;
- основной уровень факторов (центр плана);
- интервалы изменения факторов.

Выбор области эксперимента, т.е. границ, в которых рассматриваются изменения факторов, основан на использовании априорных сведений об изучаемом процессе. При их отсутствии необходимо определять границы области с учетом физических, технико-экономических, аппаратурных и других ограничений.

Выбор основного уровня (центра плана или точки, в окрестностях которой ставится серия опытов) производится в зависимости от поставленной задачи на основе априорной информации о процессе (объекте). Если такой информации нет, то основной (нулевой) уровень обычно выбирается в центре исследуемой области. Например, при исследовании работы какой-либо электронной схемы в качестве основного уровня выбирается точка, соответствующая номинальным значениям параметров элементов схемы и обеспечивающая номинальное значение выходного параметра.

Построение плана эксперимента состоит в выборе экспериментальных точек, симметричных относительно основного уровня (центра плана).

Выбор интервалов изменения факторов производится так, чтобы это изменение давало возможность заметить изменение величины выходного параметра на фоне «шумов» при небольшом числе параллельных опытов. Обычно интервал варьирования факторов выбирают в пределах 0,05…0,3 от диапазона изменения по данной переменной и устанавливают в двух уровнях, достаточных для получения линейной модели.

Для удобства заполнения матрицы вводят кодированные значения факторов –1 и +1 (обычно единицы не пишутся). При этом упрощается также обработка экспериментальных данных. Кодированные значения факторов получают следующим образом. Выбирают интервал изменения фактора таким, чтобы он был равен разности между значениями фактора на границе области и в центре плана. Тогда кодированное значение фактора определяется по формуле:

$$x_i = \frac{\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i0}}}{\Delta\widetilde{x_i}}, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{x_i}$ – натуральное значение фактора;
$\widetilde{x_{i0}}$ – натуральное значение основного уровня i-го фактора;
$\Delta\widetilde{x_i}$ – интервал изменения i-го фактора.

При $\widetilde{x_i}$, соответствующем нижнему уровню фактора, кодированное значение $x_i = -1$. При x_i, соответствующем верхнему уровню фактора, $x_i = +1$.

Например, температура изменяется от нижнего уровня $x_н = +10°C$ до верхнего уровня $x_в = +30°C$. Нормальная температура (основной или нулевой уровень) $x_0 = +20°C$. Выбираем интервал изменения фактора $\Delta\widetilde{x_i} = 10°C$. Тогда кодированные значения, соответствующие нижнему и верхнему значениям фактора, будут

$$x_н = \frac{10-20}{10} = -1 \text{ и } x_н = \frac{30-20}{10} = +1.$$

2.3 Полный факторный эксперимент

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором осуществляется перебор всех возможных сочетаний уровней факторов.

Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний системы («черного ящика»). Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные сочетания уровней факторов x_i системы, то получим множество состояний системы. Каждому состоянию соответствует какое-то значение параметра оптимизации y_j.

Это будет одновременно число возможных различных опытов. Число возможных состояний определяет *сложность* данной системы.

Если число уровней фактора x_i равно m_i, то число возможных состояний системы, содержащей k факторов, равно m_1, m_2, … m_k.

В случае равенства числа уровней факторов $m = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$ имеем ПФЭ типа m_k. Одновременно это будет количество опытов $N = m_k$ (фиктивный фактор x_0 не учитывается).

Самым простым является ПФЭ для линейной модели, при получении которой каждый фактор из k достаточно менять в двух уровнях ($m = 2$). Имеем ПФЭ типа 2^k.

Если взять $k = 2$ факторам, то будет ПФЭ типа 2^2. Следовательно, число опытов в такой системе будет $N = 4$, для которых нетрудно написать все возможные сочетания уровней факторов в эксперименте. Матрица планирования эксперимента (МПЭ) приведена в таблице 2.2

Таблица 2.2

ПФЭ типа 2^2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	y	Кодовое обозначение строк
1	+	-	-	y_1	1
2	+	+	-	y_2	*a*
3	+	-	+	y_3	*b*
4	+	+	+	y_4	*ab*

Геометрическая интерпретация этого плана представлена на рис. 2.2

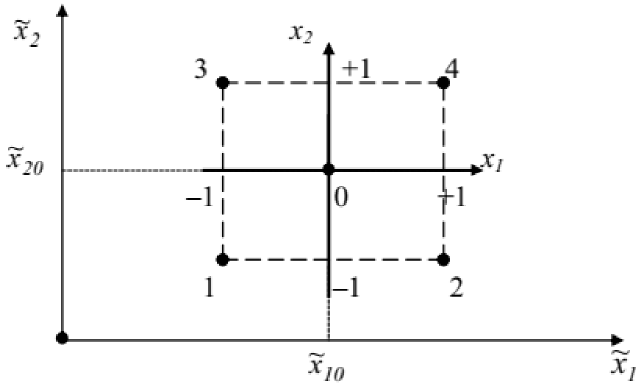

Рис. 2.2. Расположение «опытных точек» при $k = 2$

На рисунке обозначены:

$\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}$ – натуральные значения факторов;

$\widetilde{x_{10}}, \widetilde{x_{20}}$ – основные уровни факторов;

0 – центр плана (основной уровень);

x_1 и x_2 – кодированные значения факторов.

Оси координат кодированных значений факторов проводятся параллельно осям координат натуральных значений факторов.

Масштабы по новым осям координат выбираются так, чтобы интервалы изменения факторов были равны ±1. На плоскости получим квадрат, вершины которого соответствуют условиям проведения опытов. (Номера опытов в МПЭ и номера вершин квадрата совпадают). Внутри квадрата расположена *область эксперимента.*

Если число факторов $k = 3$, то областью эксперимента будет куб (2^3), а условия проведения опытов будут соответствовать вершинам куба и т.д.

План, представленный в МПЭ для получения линейной модели, может быть записан в матричной форме $Y = X \cdot B$, где Y –

матрица результатов опытов, X – матрица планирования опытов, B – матрица коэффициентов линейного уравнения регрессии.

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \cdots & x_{kN} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \cdots & x_{kN} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Для уменьшения громоздкости записи условий проведения опытов вместо МПЭ, которая обладает несомненной наглядностью, используют буквенные обозначения строк МПЭ (см. табл. 2.2). Для этого каждому фактору ставят в соответствие строчные буквы латинского алфавита: $x_1 \rightarrow a$, $x_2 \rightarrow в$, $x_3 \rightarrow c$ и т.д., если факторы находятся на верхнем уровне. Факторы на нижнем уровне никак не обозначают. Если все факторы в какой-либо строке МПЭ находятся на нижнем уровне, то такое состояние обозначают единицей, если на верхнем уровне, то произведением букв. Тогда строчная запись МПЭ будет (1), *а, в, ав*. Такая запись тем эффективнее, чем больше факторов (k).

Для построения МПЭ при k > 2…3, т.е. перебора всех возможных сочетаний уровней факторов, существует ряд приемов. Одно из правил построения МПЭ: первая строка матрицы выбирается так, чтобы все управляемые переменные находились на нижнем уровне (–); частота смены знака управляемой переменной для каждой последующей переменной вдвое меньше, чем для предыдущей (см. табл. 2.2). Для построения линейной модели, как указывалось ранее, достаточно изменять факторы на двух уровнях. Этого же достаточно для построения модели неполного высшего порядка (квазилинейной)

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{i<j} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i<j<l} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_l, \quad (2.6)$$

т.е. если два фактора, то

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_1 \cdot x_2, \quad (2.7)$$

если три фактора, то

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

В приведенных уравнениях $b_i \cdot x_i$ – линейные члены уравнения регрессии, остальные члены – это взаимодействия двух или трех факторов. Они носят название *эффект взаимодействия первого порядка* – $b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ и *эффект взаимодействия второго порядка* – $b_{ijl} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_l$. Например, в приведенном выше уравнении регрессии для трех факторов могут существовать три двойных и один тройной эффекты взаимодействия. МПЭ при этом имеет вид (табл. 2.3). В связи с этим вводятся понятия «эффект фактора» и «эффект взаимодействия».

Эффект фактора – это вклад фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора от нижнего уровня к верхнему (линейный, основной или главный эффект). Этот эффект численно равен удвоенному коэффициенту b_i уравнения регрессии, поскольку переход фактора с нулевого уровня на верхний или нижний определяется коэффициентом b_i.

Таблица 2.3

ПФЭ типа 2^3

№ опыта	План эксперимента				Эффекты взаимодействия				y
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Эффект взаимодействия – это эффект, который имеет место в том случае, когда эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Этот эффект численно равен удвоенному коэффициенту полинома b_{ij}, если эффект взаимодействия первого порядка, или коэффициенту b_{ijl}, если эффект взаимодействия второго порядка.

ПФЭ позволяет оценить линейные эффекты и эффекты взаимодействия, т.е. определить коэффициенты полинома: линейной части – b_i, взаимодействий парных (первого порядка) – b_{ij} и других (более высокого порядка).

Планы ПФЭ являются *ненасыщенными*, т.е. число опытов в них может существенно превышать число опытов, необходимых для определения неизвестных коэффициентов регрессии. Например, при k = 4, число опытов будет $N = 2^k = 2^4 = 16$, а число неизвестных коэффициентов для линейной модели равно 5. Это значит, что число опытов в три раза больше необходимого, что не эффективно, поскольку ведет к неоправданному расходу времени и средств.

2.4 Свойства матрицы ПФЭ типа 2^k

Отметим, что эти свойства не зависят от числа факторов k и определяют качество модели, которая должна быть оптимальной. Всего таких свойств четыре: два из них следуют из построения МПЭ и являются свойствами отдельных столбцов, третье – следствие совокупности столбцов и четвертым должна обладать матрица].

1. **Симметричность** относительно центра плана: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0, \qquad (2.8)$$

где i – номер фактора, $i = \overline{1, k}$,
N – количество опытов.

2. **Условие нормировки**: сумма квадратов элементов каждого вектор-столбца равна числу опытов

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 = N \qquad (2.9)$$

в связи с тем, что значения факторов в матрице составляют ±1.

3. **Ортогональность** матрицы: сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot x_{lj} = 0, i \neq l, i, l = \overline{1, k}. \qquad (2.10)$$

Планы, имеющие такое свойство, называются *ортогональными.* Это очень важное свойство, так как при его выполнении значительно уменьшаются трудности вычисления коэффициентов регрессии. Ортогональные планы позволяют определять коэффициенты регрессии независимо друг от друга.

4. **Ротатабельность** – точки, в которых проводятся опыты, в МПЭ располагаются таким образом, что точность предсказания значений параметра оптимизации (y) одинакова на равных расстояниях от центра плана и не зависит от направления. Планы, обладающие таким свойством, называются *ротатабельными* (ротация – круговращение). Ротатабельность означает, что предсказанные значения параметра оптимизации имеют одинаковую дисперсию.

МПЭ, имеющая указанные свойства, называется *оптимальной*, а ПФЭ типа 2^k является оптимальным при построении линейной модели.

2.5 Дробный факторный эксперимент

Для уменьшения числа опытов, т.е. чтобы сделать план более насыщенным, проводится дробный факторный эксперимент (ДФЭ). Проводится он в том случае, если нас интересует только линейная модель. Тогда подбирается ПФЭ, в котором число факторов и опытов меньше, чем в ПФЭ с исследуемым числом факторов k, но больше, чем число неизвестных коэффициентов регрессии. В выбранном ПФЭ в матрице планирования указываются эффекты взаимодействия.

Новый план для ДФЭ строится на основе выбранного плана ПФЭ, а вектор-столбцы факторов, которые превышают число факторов выбранного плана ПФЭ, заполняются в соответствии с вектор-столбцами выбранных эффектов взаимодействия. Например, необходимо построить более насыщенный план, чем при ПФЭ, для исследования объекта или процесса, зависящего от k = 3 факторов. При этом N = 8, а число неизвестных коэффициентов регрессии равно 4. Для проведения ДФЭ выбираем план ПФЭ для $k = 2$, который содержит 4 опыта и эффект взаимодействия (табл. 2.4).

Таблица 2.4

ПФЭ типа 2^2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$
1	+	-	-	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	+

План ДФЭ приведен в табл. 3.5.

Таблица 2.5

ДФЭ типа 2^{3-1}

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3
1	+	-	-	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	+

Вектор-столбец x_3 приравниваем столбцу эффекта взаимодействия $x_1 \cdot x_2$. План получился насыщенным. Он содержит половину опытов ПФЭ и носит название *полуреплики*. Дробные реплики (или план ДФЭ) обозначаются следующим образом:

$$\text{ДФЭ типа } 2^{k-p},$$

где k – общее число факторов;
p – число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия или дробность реплики;
$(k - p)$ – число факторов в ПФЭ, к которому приравнивается дробная реплика. Если $p = 1$, то имеем 1/2 реплика, $p = 2$ – 1/4 реплика, $p = 3$ – 1/8 реплика и т.д. (табл. 2.6)

Таблица 2.6

Количество факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Количество опытов ДФЭ	Количество опытов в ПФЭ
3	1/2 реплика от 2^3	2^{3-1}	4	8

Продолжение таблицы 2.6

Количество факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Количество опытов ДФЭ	Количество опытов в ПФЭ
4	1/2 реплика от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/2 реплика от 2^5	2^{5-1}	16	32
5	1/4 реплика от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/4 реплика от 2^6	2^{6-2}	16	64
6	1/8 реплика от 2^{12}	2^{6-3}	8	64
…	…	…	…	…
12	1/256 реплика от 2^{12}	2^{12-8}	16	4096

Чем больше факторов, участвующих в эксперименте, тем целесообразнее применять дробные реплики. Но применение дробных реплик приводит к снижению точности определения коэффициентов регрессии b_i, т.к. чем больше опытов, тем точнее можно вычислить коэффициенты. В табл. 3.5 для дробного факторного эксперимента приравняли линейный фактор x_3 к эффекту взаимодействия $x_1 \cdot x_2$ (табл. 3.4):

$$x_3 = x_1 \cdot x_2.$$

Это соотношение называется *генерирующим соотношением*, поскольку оно генерирует дробную реплику 2^{3-1}.

Таких генерирующих соотношений может быть несколько, т.к. они определяются количеством линейных факторов, приравненных эффектам взаимодействия. Если генерирующее соотношение умножить на x_3, то получим

$$x_3^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

где в левой части столбец имеет все значения +1.

Тогда $1 = x_1\, x_2\, x_3$.

Это соотношение носит название *определяющий контраст*. Он определяет разрешающую способность дробной реплики.

Разрешающая способность состоит в возможности нахождения коэффициентов уравнения регрессии b_i, являющихся несмешанными оценками теоретических коэффициентов регрессии $\beta_i (b_i \rightarrow \beta_i)$.

Кроме несмешанных (независимых), оценки коэффициентов регрессии могут быть смешанными (зависимыми). Являются оценки смешанными или несмешанными зависит от совпадения или несовпадения знаков в вектор-столбцах матрицы. Так, при ПФЭ и линейной модели знаки столбцов в МПЭ (табл. 2.2) не совпадают. Значит, оценки будут несмешанными, т.е. $b_0 \rightarrow \beta_0$, $b_1 \rightarrow \beta_1$ и $b_2 \rightarrow \beta_2$.

При построении ДФЭ типа 2^{3-1} (табл. 2.5) мы пренебрегли эффектами взаимодействия. Если ими пренебречь нельзя и они существенны, то МПЭ будет фактически иметь следующий вид (табл. 2.7).

В таблице 2.7 фактор x_3 приравнен эффекту взаимодействия ($x_3 = x_1 \cdot x_2$) из таблицы 2.4. Как следует из таблицы 2.7, знаки столбцов из плана эксперимента и взаимодействий совпадают, например x_1 и $x_2 \cdot x_3$. Это значит, что оценки коэффициентов будут смешанными, например $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$.

Определяющий контраст позволяет найти и другие смешанные оценки, т.е. найти столбцы с одинаковыми знаками. Возьмем $x_3 = x_1 \cdot x_2$ и умножим на x_3, получим $1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Последовательно умножая определяющий контраст на независимые переменные, получаем *систему смешивания* дробной реплики, т.е. столбцы МПЭ, знаки которых совпадают:

$$x_1 = x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3;$$
$$x_2 = x_1 \cdot x_3;$$
$$x_3 = x_1 \cdot x_2;$$
$$x_0 = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Таблица 2.7

ДФЭ типа 2^{3-1}

№ опыта	x_0	План эксперимента			Взаимодействия				y
		x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	
1	+	-	-	+	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
4	+	+	+	+	+	+	+	+	y_4

Это значит, что оценки линейных коэффициентов уравнения регрессии

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 \qquad (2.11)$$

будут смешанными, так как они определяются совместно с оценками для эффектов взаимодействия:

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{123};$$

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23};$$

$$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13};$$

$$b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}.$$

Что касается разрешающей способности дробной реплики: она тем выше, чем больше в определяющий контраст входит переменных. Например, при числе факторов $N = 4$ и дробной реплике типа 2^{4-1} в качестве генерирующего соотношения следует брать $x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. В этом случае реплика будет называться *главной*, так как она обладает наибольшей разрешающей способностью. Это следует делать также, исходя из того, что обычно эффекты более высокого порядка менее значимы, чем эффекты взаимодействия низких порядков. Как показывает опыт, в радиоэлектронных устройствах тройными эффектами взаимодействия можно пренебречь. Это связано с самокомпенсацией на выходе устройства эффектов от того или иного соотношения между тремя и более первичными нормированными факторами в силу комбинаторного характера их взаимосвязей. Более того, в ряде случаев можно априори полагать незначительными и ряд парных взаимодействий, когда отклонения параметров схемных элементов от их номинальных значений малы.

Дробные реплики, в которых число опытов равно числу линейных коэффициентов регрессии, называются *насыщенными*. Однако стремление сделать дробную реплику насыщенной, т.е. провести минимальное число опытов, не всегда приводит к положительному результату в определении линейных коэффициентов регрессии, т.к. если линейная модель неадекватна, то эффекты взаимодействия будут заметно влиять на оценки линейных эффектов.

2.6 Определение коэффициентов регрессии

Перед постановкой эксперимента необходимо выбрать план, в котором количество опытов должно быть больше числа коэффициентов регрессии и отвечать соотношению

$$N \geq C_{k+d}^{d}, \tag{2.12}$$

где C_{k+d}^{d} – число коэффициентов регрессии;
d – степень полинома;
k – число независимых факторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Коэффициенты регрессии определяются методом наименьших квадратов

$$S = \sum_{j=1}^{N} \left(y_j - \widehat{y_j}\right)^2 = min, \tag{2.13}$$

где y_j – результаты наблюдений в эксперименте;
$\widehat{y_j} = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_{ij}$ – оценка параметра оптимизации по выбранному уравнению регрессии, в котором члены любого порядка заменены линейными членами.

Для минимизации суммы S следует брать частные производные и приравнивать их нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0, i = \overline{1, k}. \tag{2.14}$$

Число нормальных уравнений полученной системы равно числу неизвестных коэффициентов регрессии. В общем случае решение системы уравнений проводится на основе матричной алгебры.

Если матрица плана первого порядка обладает свойствами ортогональности, то коэффициенты регрессии определяются по формуле:

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot y_j. \tag{2.15}$$

Из приведенной формулы следует простое правило: чтобы определить коэффициент b_i для i-го фактора (x_i) необходимо знаки столбца этого фактора приписать измеренным значениям y_j, просуммировать все y_i, $(j = \overline{1, N})$ и разделить на число опытов N. Это допустимо, т.к. факторы меняются в двух уровнях: +1 и –1.

2.7 Проверки

После составления плана и проведения эксперимента следует при обработке его результатов выполнить следующие проверки:

- воспроизводимости опытов;
- значимости коэффициентов регрессии (полинома);
- адекватности модели.

2.7.1 Проверка воспроизводимости опытов

Эта проверка проводится с целью убедиться, что грубая ошибка не влияет на результаты опытов при малом числе экспериментов, т.е. результаты исследования однородны (воспроизводятся). Проверка выполняется с помощью дисперсий, которые, в случае воспроизводимости опытов, должны быть однородны. Для того чтобы убедиться, что дисперсии однородны, используют критерий Кохрена, который представляет собой отношение максимальной выборочной дисперсии наблюдений к сумме всех N дисперсий наблюдений (по числу опытов):

$$G_{\text{расч}} = \frac{S_{j.max}^2}{\sum_{j=1}^{N} S_j^2}. \qquad (2.16)$$

Полученное значение сравнивают с табличным значением $G_{\text{крит}}$, найденным по таблице критерия Кохрена при $f_{\max}$ – числе степеней свободы максимальной выборочной дисперсии и f_Σ – числе степеней свободы суммы выборочных дисперсий.

$$f_{max} = m - 1, \qquad (2.17)$$

где m – количество параллельных опытов (табл. 2.1),

$$f_\Sigma = N. \qquad (2.18)$$

Если $G_{\text{расч}} < G_{\text{крит}}$ ($f_{\max}$; f_{Σ}), то дисперсии признаются однородными и, следовательно, опыт воспроизводим.

Дисперсии наблюдений находятся по формуле:

$$S_j^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{l=1}^{m}\left(y_{jl} - \bar{y}_j\right)^2, \qquad (2.19)$$

где $\bar{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} y_{jl}$ – среднее значение параметра оптимизации (целевой функции) в m параллельных опытах ($j = \overline{1, N}$).

2.7.2. Проверка значимости коэффициентов регрессии

Эта проверка проводится по коэффициенту Стьюдента:

$$t_{i.\text{расч}} = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}, \qquad (2.20)$$

где $S\{bi\}$ – среднее квадратичное отклонение для коэффициента b_i.

Полученное значение сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента $t_{i\text{крит}}(\alpha, f)$, где α – выбранный уровень значимости, $f = N(m - 1)$ – число степеней свободы. Если $t_{i\text{ расч}} > t_{i\text{ крит}}$, то коэффициент b_i является статистически значимым, если $t_{i\text{ расч}} < t_{i\text{ крит}}$, то – незначимым. Для нахождения дисперсии коэффициентов b_i необходимо вначале вычислить *дисперсию воспроизводимости* опыта:

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j^2 = \frac{1}{N(m-1)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{m}\left(y_{jl} - \bar{y}_j\right)^2. \qquad (2.21)$$

Затем определяется дисперсия коэффициентов регрессии, которая одинакова для всех коэффициентов (при линейной регрессии и ПФЭ 2^k):

$$S^2\{b\} = \frac{S_y^2}{N \cdot m}. \qquad (2.22)$$

2.7.3 Проверка адекватности модели

Эта проверка проводится с целью определения соответствия модели экспериментальным данным. Используется F-критерий (Фишера), который представляет собой отношение *дисперсии адекватности* или *остаточной дисперсии* к дисперсии воспроизводимости

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2}. \tag{2.23}$$

Полученное значение сравнивается с табличным значением $F_{\text{крит}}$ ($f_{\text{ад}}$, f_y), найденным при числе степеней свободы $f_{\text{ад}} = N - d$ и $f_y = N$ (m – 1). Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{крит}}$, то принимается гипотеза об адекватности построенной модели результатам эксперимента.

Если $F_{\text{расч}} > F_{\text{крит}}$, то линейная модель не является адекватной. В этом случае она дополняется нелинейными членами или переходят к построению планов второго порядка и т.д.

Дисперсия адекватности (остаточная) определяется по формуле:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N-d} \sum_{j=1}^{N} \left(\overline{y_i} - \widehat{y_j}\right)^2, \tag{2.24}$$

где d – число членов аппроксимирующего полинома (уравнения регрессии);
$\widehat{y_j}$ – оценка целевой функции (параметра оптимизации) по принятой модели в каждом j-м опыте.

2.8. Построение математической модели для действительных значений факторов

В результате проведения эксперимента получается математическая модель в кодированных значениях факторов. Для получения математической модели в натуральных (действительных) значениях факторов необходимо заменить кодированные значения натуральными, т.е. подставить в модель

$$x_i = \frac{\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i0}}}{\Delta \widetilde{x_i}} = \frac{1}{\Delta \widetilde{x_i}} (\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i0}}). \tag{2.25}$$

Значения $\widetilde{x_{i0}}$ и $\Delta \widetilde{x_i}$ известны, так как они выбираются перед составлением плана эксперимента. После подстановки кодированных значений всех факторов и выполнения необходимых преобразований получим модель в натуральных значениях факторов с новыми коэффициентами регрессии $y = \widetilde{b_0} + \widetilde{b_1} \cdot \widetilde{x_1} + \widetilde{b_2} \cdot \widetilde{x_2} + \cdots$.

2.9 Планы второго порядка

Методы планирования эксперимента используются при решении задач оптимизации. При этом используются два подхода. Первый подход состоит в том, что когда нужно исследовать поверхность отклика, далекую от области экстремума, то достаточно знать направление движения в область оптимизации и не обязательно знать точное описание поверхности отклика. В градиентных методах для выбора направления движения определяются составляющие градиента, которые представляют собой коэффициенты линейного уравнения регрессии $b_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$. Поэтому при первом подходе используются планы первого порядка, по которым проводится полный или дробный факторный эксперимент.

Второй подход используется при приближении к области экстремума, когда требуется более точное описание поверхности отклика. Используются, как правило, планы второго порядка, которые позволяют получить квадратичную модель. Для этого к плану, по которому строится линейная модель, добавляются новые опыты, чтобы более подробно описать поверхность отклика.

При этом бо́льшую часть эксперимента следует проводить в области оптимума, т.е. в «почти стационарной» области. Её обычно удается описать полиномом второго порядка:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{i<j} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2. \quad (2.26)$$

Для оценки коэффициентов регрессии такого полинома при ПФЭ типа 2^k не хватает количества точек, в которых проводятся опыты. Это значит, что факторы надо менять не в двух уровнях, а не менее чем в трех. Используются *композиционные* планы, которые позволяют сократить число опытов. Эти планы состоят в том, что к плану ПФЭ или ДФЭ, в случае неадекватности линейной модели, добавляются точки, расположенные симметрично относительно центра плана. Они носят название *«звездные точки»* и прибавляются по две на каждую координату (переменную) x_i на расстоянии α от центра. α – «звездное плечо». Еще одна точка (или несколько) добавляется в центре эксперимента (рис. 2.3 для $k = 3$).

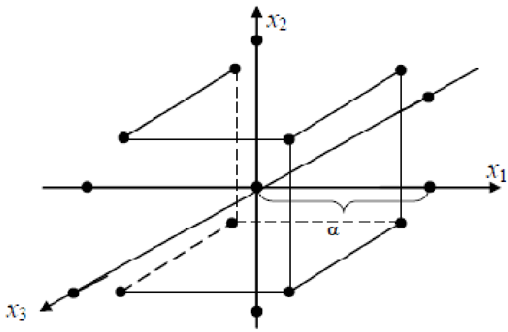

Рис. 2.3 «Звездные точки» при $k = 3$

В результате получаем варьирование каждого фактора в пяти уровнях:

$$-\alpha, -1, 0, +1, +\alpha, \qquad (2.27)$$

т.е. на оси каждого фактора имеется пять точек.

Натуральное расстояние до «звездной точки» определяется следующим образом: $\Delta_{i\text{зв}} = (x_{i.\max} - x_{i0})\cdot\alpha$, тогда значения фактора в «звездных точках» будут:

$$\pm x_{i.\text{зв}} = x_{i0} \pm \Delta_{i.\text{зв}} = x_{i0} \pm (x_{i.max} - x_{i0}) \cdot \alpha. \qquad (2.28)$$

Полученные значения округляются до удобных величин. Например, время изменяется от 57 мин до 83 мин. Среднее время 70 мин.

Тогда $\Delta_{\text{зв}}$= (83–70)·1,55=20,2 мин. Значения этого фактора в звездных точках будут $x_{\text{зв}}$= 70 ± 20,2 = (–50… + 90) мин.

При $k = 3$ точки в вершинах куба представляют собой точки исходного ПФЭ типа 2^3, или *ядро планирования*.

При расположении всех добавленных точек симметрично относительно центра плана получаем *центральный композиционный план* (ЦКП).

Планы второго порядка не обладают одновременно свойствами ортогональности и ротатабельности. Существуют ортогональные ЦКП и ротатабельные ЦКП.

Общее число опытов композиционного плана при k факторах равно:

$$N = 2^k + 2k + n_0, \tag{2.29}$$

где 2^k – число опытов в ПФЭ (в ДФЭ будет 2^{k-p});
$2k$ – число «звездных точек»;
n_0 – число опытов в центре плана.

2.9.1 Ортогональные ЦКП

Для того чтобы ЦКП получил свойства ортогональности, необходимо обеспечить эти свойства для столбцов, соответствующих фиктивной переменной и квадратам факторов, так как они все имеют значения +1. Следовательно, попарные произведения этих столбцов не будут равны нулю. Введение «звездных точек», для которых расстояние α выбирается в зависимости от размерности (числа факторов k), обеспечивает условие ортогональности квадратичных столбцов (табл. 2.8). В центре плана достаточно провести испытание в одной точке. Начиная с k = 5 можно в качестве планов первого порядка использовать ДФЭ.

Таблица 2.8

Параметры плана	Число независимых переменных k			
	2	3	4	5
Ядро планирования	2^2	2^3	2^4	2^{5-1}
Расстояние α	1,000	1,215	1,414	1,547

В ортогональных центральных композиционных планах (ОЦКП) коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга, но их дисперсии будут различными, поскольку этот план не является ротатабельным. Кроме того, изменится уравнение регрессии, так как для обеспечения условий ортогональности необходимо вводить преобразование квадратов переменных.

Матрица ОЦКП имеет вид (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Виды точек	№ опыта (точки)	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	x_1^2	x_2^2	y
Точки ядра плана 2^2	1	+	-	-	+	+	+	y_1
	2	+	+	-	-	+	+	y_2
	3	+	-	+	-	+	+	y_3
	4	+	+	+	+	+	+	y_4
«Звездные точки»	5	+	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
	6	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
Центральная точка	9	+	0	0	0	0	0	y_9

2.9.2 Ротатабельные ЦКП

Свойство ротатабельности предполагает, что дисперсия параметра оптимизации $\sigma^2(y) = const$ при $R = const$.

Для выполнения этого условия в ЦКП добавляют «звездные точки» на расстоянии $\alpha = 2^{k/4}$ для ПФЭ типа 2^k и $\alpha = 2^{\frac{k-1}{4}}$ для ДФЭ типа 2^{k-1} по две на каждый фактор и несколько точек в центре плана в соответствии с табл. 2.10. Число центральных точек выбирается в таком количестве, чтобы обеспечить *униформость* плана, т.е. неизменность дисперсии параметра оптимизации внутри области планирования (на некотором расстоянии R от центра плана).

Определение коэффициентов регрессии и их дисперсий после проведения РЦКП значительно сложнее, чем при ОЦКП. Матрица РЦКП имеет вид (табл. 2.11)

Если на независимые переменные (факторы) накладываются ограничения, т.е. указывается диапазон изменения каждого фактора, то точки выбираются следующим образом.

Таблица 2.10

Параметры плана	Число независимых переменных k			
	2	3	4	5
Ядро планирования	2^2	2^3	2^4	2^{5-1}
Расстояние α	1,414	1,682	2,000	2,000
Число центральных точек n_0	5	6	7	6

На каждой оси факторного пространства выделяются также пять точек: центральная, соответствующая середине диапазона, две точки на его краях, называемые «звездными», и две промежуточные точки, расстояния до которых в α раз меньше, чем до звездных. Тогда матрица плана строится так, что точки ядра плана соответствуют промежуточным точкам, а «звездные точки» соответствуют точкам на краях диапазона.

Таблица 2.11

Виды точек	№ опыта (точки)	x_0	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	x_1^2	x_2^2	y
Точки ядра плана 2^2	1	+	-	-	+	+	+	y_1
	2	+	+	-	-	+	+	y_2
	3	+	-	+	-	+	+	y_3
	4	+	+	+	+	+	+	y_4
«Звездные точки»	5	+	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
	6	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
Центральные точки (в центре плана)	9	+	0	0	0	0	0	y_9
	10	+	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	+	0	0	0	0	0	y_{12}
	13	+	0	0	0	0	0	y_{13}

Рассмотрим целевые функции усилителя $R_{вх}$ и $K_{ие}$, которые зависят от сопротивлений $R_г$, $R_{ос}$, $R_н$, которые изменяются в диапазонах: $R_г = 0,1 \ldots 1,1$ кОм; $R_{ос}$=2,0…4,0 кОм;

$R_н$ = 0,8…4,2 кОм. Эти значения берутся в качестве звездных точек. Промежуточные точки определяются следующим образом. Так как имеем 3 фактора, то для ротатабельного плана α = $2^{k/4}$ = 1,68. Средние значения сопротивлений будут: $R_{г.ср}$= 0,6 кОм; $R_{ос.ср}$ = 3,0 кОм; $R_{н.ср}$ = 2,5 кОм. Они определяют центр плана.

Тогда значения промежуточных точек составляют для $R_г$:

$$R_{г.ср} \pm \frac{R_г - R_{г.ср}}{\alpha} = 0{,}6 \pm \frac{1{,}1-0{,}6}{1{,}68} = 0{,}6 \pm 0{,}3 = (0{,}3 \ldots 0{,}9)\ кОм;$$

для $R_{ос}$:

$$R_{ос.ср} \pm \frac{R_{ос} - R_{ос.ср}}{\alpha} = 3{,}0 \pm \frac{4-3}{1{,}68} = 3{,}0 \pm 0{,}6 = (2{,}4 \ldots 3{,}6)\ кОм;$$

для $R_н$:

$$R_{н.ср} \pm \frac{R_н - R_{н.ср}}{\alpha} = 2{,}5 \pm \frac{4{,}2-2{,}5}{1{,}68} = 2{,}5 \pm 1{,}0 = (1{,}5 \ldots 3{,}5)\ кОм.$$

Матрица плана (фрагмент) для натуральных значений факторов приведена в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Виды точек	Номер точки	Факторы			Факторы		
		$R_г$	$R_{ос}$	$R_н$	x_1	x_2	x_3
Точки ядра плана 2^3	1	0,3	2,4	1,5	-	-	-
	2	0,9	2,4	1,5	+	-	-
	3	0,3	3,6	1,5	-	+	-
	4	0,9	3,6	1,5	+	+	-
	5	0,3	2,4	3,5	-	-	+
	6	0,9	2,4	3,5	+	-	+
	7	0,3	3,6	3,5	-	+	+
	8	0,9	3,6	3,5	+	+	+
«Звездные точки»	9	0,1	3,0	2,5	-(α)	0	0
	10	1,1	3,0	2,5	+(α)	0	0
	11	0,6	2,0	2,5	0	-(α)	0
	12	0,6	4,0	2,5	0	+(α)	0
	13	0,6	3,0	0,8	0	0	-(α)
	14	0,6	3,0	4,2	0	0	+(α)

Продолжение таблицы 2.12

Виды точек	Номер точки	Факторы			Факторы		
		$R_г$	$R_{ос}$	$R_н$	x_1	x_2	x_3
Центральные точки (в центре плана)	15	0,6	3,0	2,5	0	0	0
	16	0,6	3,0	2,5	0	0	0
	17	0,6	3,0	2,5	0	0	0
	18	0,6	3,0	2,5	0	0	0
	19	0,6	3,0	2,5	0	0	0
	20	0,6	3,0	2,5	0	0	0

В матрице «звездное плечо» α взято в скобки, как условно соответствующее «звездным точкам».

2.10 Другие разновидности планов эксперимента

Кроме рассмотренных ранее ПФЭ, ДФЭ и планов 2-го порядка, используются и другие планы. Так, для уменьшения количества факторов осуществляют планирование отсеивающих экспериментов (метод случайного баланса, планы последовательного отсеивания и др.). Они используются до проведения тех экспериментов, по результатам которых определяются коэффициенты регрессии.

При определении оценок коэффициентов регрессии полагают, что они принадлежат некоторому эллипсоиду рассеивания. Различают Д-, А- и Е-оптимальные планы.

Для минимизации объема эллипсоида рассеивания используют Д-оптимальный план.

А-оптимальный план минимизирует сумму квадратов главных полуосей эллипсоида рассеивания.

Е-оптимальный план минимизирует максимальную ось эллипсоида рассеивания.

G-оптимальный план, в отличие от предыдущих, относится к оценкам параметра оптимизации (функции отклика). Это план, при котором обеспечивается наименьшее значение их дисперсии. Все эти планы применяются в зависимости от решаемых задач.

3. Контрольная работа

Целью контрольной работы является освоение методики планирования и обработки результатов активного эксперимента на примере полного факторного эксперимента. Такой эксперимент выполняется для получения математического описания (модели) исследуемого процесса или объекта.

Модель, по плану 1-го порядка, находится в форме линейного уравнения регрессии:

$$\hat{y} = \widehat{b_0} + \sum_{i=1}^{k} \widehat{b_i} \cdot x_i \tag{3.1}$$

или квазилинейного уравнения регрессии:

$$\hat{y} = \widehat{b_0} + \sum_{i=1}^{k} \widehat{b_i} \cdot x_i + \sum_{i<l} \widehat{b_{il}} \cdot x_i \cdot x_l. \tag{3.2}$$

В заданиях даны натуральные значения факторов и приведены результаты эксперимента.

При выполнении работы необходимо вначале составить матрицу планирования эксперимента (план эксперимента), в которой указываются порядок проведения двух или трёх параллельных опытов и значения факторов в каждом опыте. Параллельные опыты проводятся для исключения влияния неконтролируемых факторов на результаты экспериментов.

Последовательность проведения опытов в каждой серии устанавливается с помощью таблиц случайных чисел. Значения факторов указываются в кодированном виде

$$x_i = \frac{\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i0}}}{\Delta\widetilde{x_i}} = \pm 1, \tag{3.3}$$

где $\widetilde{x_i}$ – натуральное (действительное) значение фактора;
$\widetilde{x_{i0}}$ – базовый (основной) уровень фактора;
$\widetilde{\Delta x_i}$ – шаг варьирования фактора.

В матрицу планирования вводится фиктивная переменная x_0, которая во всех опытах принимает значения +1. Введение этой переменной позволяет свести уравнения регрессии к удобному для использования виду:

$$y = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_i. \tag{3.4}$$

В матрице планирования единицы не записываются, а проставляются только плюс или минус в соответствии с правилами чередования знаков факторов в каждом опыте.

Затем проводится эксперимент в соответствии с планом и наблюдаемые значения выходного параметра y записываются в таблицу.

После проведения эксперимента проводится обработка его результатов, которая содержит:

- проверку воспроизводимости опытов;
- расчет коэффициентов регрессии;
- проверку значимости коэффициентов регрессии;
- построение математической модели;
- проверку адекватности модели результатам эксперимента;
- построение математической модели для действительных (натуральных) значений факторов.

Проверка воспроизводимости опытов проводится по критерию Кохрена:

$$G_{\text{расч}} = \frac{S_{j.max}^2}{\sum_{j=1}^{N} S_j^2}, \tag{3.5}$$

где S_j^2 – выборочная дисперсия параметра в j-м опыте;
$S_{j.max}^2$ – максимальня выборочная дисперсия выходного параметра;
N – количество опытов.

$$S_j^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{g=1}^{1} \left(y_{jg} - \overline{y_j}\right)^2, \tag{3.6}$$

где g – номер серии параллельных опытов (1, 2, 3);
m – количество параллельных опытов (2 или 3);
y_{jg} – измеренное значение выходного параметра в серии параллельных опытов;
$\overline{y_j} = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg}$ – среднее значение выходного параметра в j-м опыте.

Полученное расчётное значение критерия Кохрена $G_{\text{расч}}$ сравнивается с его табличным значением $G_{\text{крит}}$, которое находится при числе степеней свободы $f_1 = m - 1$ и $f_2 = N$ и заданном уровне значимости α.

Если $G_{расч} < G_{крит}$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается. Это значит, что условия проведения опытов одинаковы (воспроизводимы) и отклонения выходного параметра случайны.

Если $G_{расч} \geq G_{крит}$, то отклонения максимальной дисперсии от остальных не случайны и, следовательно, опыты не воспроизводимы, т.е. имеется доминирующий фактор. В итоговой таблице делается вывод: дисперсии однородны или не однородны.

Расчет коэффициентов регрессии при ортогональном плане эксперимента проводится по формуле:

$$\widehat{b_i} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot \overline{y_i}, \qquad (3.7)$$

где i – номер фактора (параметра), $i = 0, k$;
x_{ij} – значение i-го фактора в j-м опыте (+1, -1).

Поскольку факторы в опытах имеют кодированные значения +1 или –1, то для вычисления коэффициентов регрессии b_i нужно при суммировании каждому значению $\overline{y_j}$ в j-м опыте просто приписывать знак i-го фактора в этом опыте. Аналогично определяются коэффициенты b_{il} для эффектов взаимодействия.

Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится по критерию Стьюдента:

$$t_{i.расч} = \frac{|\widehat{b_i}|}{S\{b\}}, \qquad (3.8)$$

где $S\{b\} = \sqrt{S^2\{b\}}$,

$S^2\{b\} = \frac{1}{N^2 m}\sum_{j=1}^{N} S_j^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m}$.

Оценка $S\{b\}$ одинакова для всех коэффициентов регрессии.

Дисперсия воспроизводимости опытов по выборочным дисперсиям выходного параметра равна

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j^2. \qquad (3.9)$$

Для коэффициентов эффектов взаимодействия

$$t_{i.\text{расч}} = \frac{|\widehat{b_{ie}}|}{S\{b\}}. \qquad (3.10)$$

Расчетное значение t-критерия Стьюдента сравнивается с его табличным значением $t_{\text{крит}}$, которое определяется при числе степеней свободы $f = N(m - 1)$ и уровне значимости α. Для всех коэффициентов в данном эксперименте $t_{\text{крит}}$ одинаково.

Если найденный для коэффициента регрессии критерий $t_{i.\text{расч}} > t_{\text{крит}}$, то данный коэффициент регрессии является статистически значимым. Незначимы будут коэффициенты, для которых $t_{i.\text{расч}} < t_{\text{крит}}$. Соответственно в выводах таблицы оставляем ЗН или НЗМ.

Построение математической модели исследуемого процесса (объекта) проводится в соответствии с результатами проверки значимости коэффициентов регрессии: члены уравнения, содержащие незначимые коэффициенты регрессии, исключаются. Линейное уравнение регрессии (1) записывается в правой нижней части таблицы. Нелинейное (квазилинейное) уравнение регрессии записывается в левой нижней части таблицы. Если все коэффициенты регрессии для эффектов взаимодействия оказались незначимыми, то нелинейное уравнение регрессии не записывается.

Проверка адекватности математической модели результатам эксперимента проводится по F-критерию Фишера:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2}, \qquad (3.11)$$

где $S_{\text{ад}}^2$ – дисперсия адекватности.

Вначале проводится проверка линейного уравнения регрессии. Если оно не адекватно, то проверяется нелинейное уравнение регрессии. Для проверки адекватности необходимо по составленной математической модели рассчитать оценку выходного параметра $\widehat{y_j}$ для каждого опыта путем подстановки кодированных значений факторов (+1, –1), которые они имеют в соответствующем опыте. Если проверяются обе модели (линейная и нелинейная), то результаты вычислений $\widehat{y_J}$ записываются в таблицу в виде дроби: в числителе для линейной модели и в знаменателе для нелинейной модели.

Затем вычисляется дисперсия адекватности:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{N-d}\sum_{j=1}^{N}\left(\overline{y_J} - \widehat{y_J}\right)^2, \tag{3.12}$$

где d – число линейных членов аппроксимирующего полинома (уравнения регрессии). Результаты вычисления $\left(\overline{y_J} - \widehat{y_J}\right)^2$, $\sum_{j=1}^{N}\left(\overline{y_J} - \widehat{y_J}\right)^2$, $S_{\text{ад}}^2$ и $F_{\text{расч}}$ в таблице также записываются дробью для двух моделей.

Расчетное значение F-критерия сравнивается с табличным $F_{\text{крит}}$, которое находится при заданном уровне значимости α и степенях свободы $f_1 = N - d$ и $f_2 = N(m-1)$.

Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{крит}}$, то принимается гипотеза об адекватности построенной математической модели результатам эксперимента.

Если $F_{\text{расч}} > F_{\text{крит}}$, то гипотеза отвергается: линейная (или нелинейная) модель не адекватна результатам эксперимента. В этом случае переходят к построению плана второго порядка для получения квадратичной модели.

Построение математической модели для действительных (натуральных) значений факторов выполняется путем подстановки в полученную математическую модель кодированных значений факторов в виде (3). Из задания известны номинальные величины факторов в виде базового (основного) уровня x_{i0} и интервалы изменения факторов (шаг варьирования). После преобразования получаем уравнение регрессии для действительных (натуральных) значений факторов

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \widetilde{x_i} \text{ или } y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \widetilde{x_i} + \sum_{i<l} b_{il} \cdot \widetilde{x_i} \cdot \widetilde{x_l}, \tag{3.13}$$

где b_i и b_{il} – новые значения коэффициентов регрессии.

В этих уравнениях вместо x и y должны быть записаны обозначения действительных параметров.

В отчете по работе (в тексте) должны быть представлены все расчеты, результаты которых записаны в таблицу. В тексте достаточно также привести примеры расчета одной строки таблицы, соответствующей какому-либо номеру опыта, одного коэффициента регрессии. Порядок расчетной записи: формула, формула с подставленными числами, ответ.

Таблица 3.1

Таблица планирования и обработки результатов активного эксперимента

№ опыта	Порядок проведения опытов			Матрица планирования				Эффекты взаимодействия				Результаты эксперимента и проверка воспроизводимости					Проверка адекватности	
				x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	$\overline{y_J}$	S_j^2	$\widehat{y_J}$	$\left(\overline{y_J} - \widehat{y_J}\right)^2$
1	8	2	5															
2	4	5	2															
3	7	3	4															
4	1	6	7															
5	6	1	1															
6	5	7	8															
7	2	4	6															
8	3	8	3															
$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot \overline{y_J}$												$\sum_{j=1}^{N} S_j^2$					$\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{y_J} - \widehat{y_J}\right)^2$	
$\widehat{b_\iota}, \widehat{b_{\iota l}}$												$S_{j.max}^2$					$S_{j.\text{ад}}^2$	

Продолжение таблицы 3.1

f=N(m-1)		Проверка значимости коэффициентов									$G_{расч}$		$F_{расч}$	
α		$S^2\{b\} = \dfrac{S_y^2}{N \cdot m} =$									α		$f_1 = N–d$	
$t_{крит}$		$S\{b\}$									$f_1 = m–1$		$f_2 = N(m–1)$	
S_y^2		$t_{i.крит}$									$f_2 = N$		α	
		Вывод	нзн	нзн	нзн	нзн	нзн	нзн	нзн	нзн	$G_{крит}$		$F_{крит}$	
Нелинейное уравнение регрессии											Вывод	$G_{расч}$ $G_{крит}$	Вывод	$F_{расч}$ $F_{крит}$
											Дисперсии (не) однородны		Описание (не) адекватно	
											Линейное уравнение регрессии			

ВАРИАНТ 1

Исследовать процесс получения резистивных плёнок рения. На основании анализа технологического процесса и результатов предварительных опытов установлено, что на температурный коэффициент сопротивления (ТКС) плёнок рения оказывают влияние температура испарения (A); температура подложки при осаждении (B) и термообработке (C) плёнок. Исследование технологического процесса для получения локального описания поверхности отклика осуществляется с помощью ПФЭ типа 2^3.

Проводилось две серии параллельных опытов (y = –ТКС·10^4 1/°С).

Значения факторов при исследовании свойств резистивных плёнок рения

Характеристика фактора	Входной фактор		
	A,°С	B,°С	C,°С
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	2500	400	400
Шаг варьирования	50	50	50
Верхний уровень	2550	450	450
Нижний уровень	2450	350	350

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	2,4	2,4	2,0	2,2	2,2	2,1	2,1	1,7
y_{j2}	2,8	2,2	2,4	2,4	2,2	1,7	1,9	1,7

ВАРИАНТ 2

При оптимизации температурного коэффициента сопротивления (ТКС) резистивных плёнок рения после движения по градиенту по поверхности отклика пришли в точку, в которой ставится новая серия опытов. Получить локальное описание поверхности отклика для данной точки на основании ПФЭ типа 2^3. Проводилось две серии параллельных опытов (y = = –ТКС·10^4 1/°С).

Значения факторов при исследовании свойств резистивных плёнок рения

Характеристика фактора	Входной фактор		
	A,°C	B,°C	C,°C
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	2630	530	610
Шаг варьирования	40	20	40
Верхний уровень	2670	550	650
Нижний уровень	2590	510	570

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	1,3	1,5	1,2	0,9	1,6	1,5	1,2	1,6
y_{j2}	1,1	1,5	1,4	0,9	1,4	1,3	1,2	1,4

ВАРИАНТ 3

Исследовалось влияние температуры, вакуума и нагрузки на характеристики реле. Определение зависимости напряжения срабатывания реле от указанных параметров проводилось в ПФЭ типа 2^3. Проводилось три серии параллельных опытов ($y = U$, В).

Значения факторов при исследовании реле

Характеристика фактора	Входной фактор		
	T°C	$P_П$, мм.тр.ст	$K_н$
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	+60	380	1,0
Шаг варьирования	22,3	245	0,2
Верхний уровень	+82,3	625	1,2
Нижний уровень	+37,7	135	0,8

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	15,76	17,23	16,31	15,90	17,22	16,28	16,66	16,28
y_{j2}	15,54	17,91	15,93	16,47	17,12	15,99	15,87	15,27
y_{j3}	16,42	16,88	16,54	16,53	16,82	16,19	15,73	15,18

ВАРИАНТ 4

Для отыскания математической модели, описывающей зависимость деформации упругих элементов фрезерного динамометра от приложенной силы резания, проведён ПФЭ типа 2^3. Независимые переменные – составляющие силы резания соответственно тангенциальная P_T, радиальная – P_R и осевая – P_A. Проводилось три серии параллельных опытов.

Значения факторов при исследовании динамометра

Характеристика фактора	Входной фактор		
	P_T, Н	P_R, Н	P_A, Н
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	3000	2000	2500
Шаг варьирования	3000	2000	2500
Верхний уровень	6000	4000	5000
Нижний уровень	0	0	0

Результат эксперимента для тангенциальной составляющей P_T

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	0,0	1,20	0,50	1,90	79,70	81,10	80,20	81,60
y_{j2}	0,0	1,08	0,57	1,78	80,50	80,40	79,50	80,20
y_{j3}	0,0	1,29	0,48	2,04	78,80	82,0	81,0	82,0

ВАРИАНТ 5

Условие варианта 4

Результат эксперимента для радиальной составляющей P_R

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	0,0	0,90	72,40	73,0	0,80	1,70	73,20	74,0
y_{j2}	0,0	0,81	73,60	72,50	0,87	1,81	72,50	73,20
y_{j3}	0,0	0,99	71,30	73,60	0,73	1,60	73,90	75,0

ВАРИАНТ 5

Условие варианта 4

Результат эксперимента для осевой составляющей P_A

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	0,0	50,80	0,80	51,60	1,30	52,0	2,0	52,70
y_{j2}	0,0	51,30	0,77	50,90	1,40	51,30	2,80	52,10
y_{j3}	0,0	50,0	0,84	52,40	1,20	52,60	1,50	53,20

ВАРИАНТ 7

Определялась зависимость коэффициента парной корреляции между определяющими параметрами резисторов интегральной схемы r_{on} от координат местоположения резисторов на подложке микросборки X, $У$ и от расстояния между резисторами по оси OY L_{RY} в ПФЭ типа 2^3. Проводилось две серии параллельных опытов.

Значения факторов при исследовании пленочных резисторов

Характеристика фактора	Входной фактор		
	L_{RY}, мм	X, мм	Y, мм
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	5,25	14,5	12
Шаг варьирования	3,75	7,5	6
Верхний уровень	9,00	22,0	18
Нижний уровень	1,50	7,0	6

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	2,205	1,630	2,060	1,380	2,249	1,245	1,909	1,071
y_{j2}	2,264	1,570	1,959	1,407	2,060	1,297	2,045	1,157

ВАРИАНТ 8

Для построения математической модели технологического процесса был проведён ПФЭ 2^3. Исследовалась операция спекания, в результате которой формируется пористая структура матрицы катода. За меру спекания было принято изменение пористости вольфрамового штабика. В качестве управляющих технологических факторов были взяты: скорость повышения температуры V_T, температура спекания T и время спекания τ. Проводилось три серии параллельных опытов.

Значения факторов при исследовании технологического процесса

Характеристика фактора	Входной фактор		
	V_T, °С/мин	T, °С	τ, мин
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	75	2150	30
Шаг варьирования	25	100	10
Верхний уровень	100	2250	40
Нижний уровень	50	2050	20

Результат эксперимента для тангенциальной составляющей P_T

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	26,8	29,7	21,6	21,6	27,1	26,6	18,3	17,1
y_{j2}	26,1	28,3	21,7	23,7	27,6	20,2	19,3	18,5
y_{j3}	25,9	26,6	21,6	21,0	23,1	24,9	15,7	17,2

ВАРИАНТ 9

Исследовалась зависимость коэффициента усиления K_u усилителя от изменения нагрузки $R_н$, внутреннего сопротивления генератора сигнала $R_г$ и сопротивления обратной связи $R_{ос}$. Проводился полный факторный эксперимент ПФЭ типа 2^3. Было выполнено две серии параллельных опытов.

Значения факторов

Характеристика фактора	Входной фактор		
	$R_г$,	$R_{ос}$,	$R_н$, кОм
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	0,6	3,0	2,5
Шаг варьирования	0,3	0,6	1,0
Верхний уровень	0,9	3,6	3,5
Нижний уровень	0,3	2,4	1,5

Результат эксперимента ($K_u = y$)

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	3,0	1,3	3,05	1,5	2,95	1,3	3,1	1,5
y_{j2}	2,7	1,5	2,90	1,4	3,00	1,4	3,2	1,6

ВАРИАНТ 10

Исследовалась зависимость входного сопротивления $R_{вх}$ усилителя от изменения нагрузки $R_н$, внутреннего сопротивления генератора сигнала $R_г$ и сопротивления обратной связи $R_{ос}$. Проводился полный факторный эксперимент ПФЭ типа 2^3. Было выполнено две серии параллельных опытов.

Значения факторов

Характеристика фактора	Входной фактор		
	$R_г$,	$R_{ос}$,	$R_н$, кОм
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	0,6	3,0	2,5
Шаг варьирования	0,3	0,6	1,0
Верхний уровень	0,9	3,6	3,5
Нижний уровень	0,3	2,4	1,5

Результат эксперимента ($R_{вх} = y$)

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	0,50	0,51	0,90	0,87	0,52	0,54	0,91	0,93
y_{j2}	0,57	0,52	0,87	0,90	0,54	0,52	0,89	0,95

ВАРИАНТ 11

При оптимизации температурного коэффициента сопротивления (ТКС) резистивных плёнок рения после движения по градиенту по поверхности отклика пришли в точку, в которой ставится новая серия опытов. Получить локальное описание поверхности отклика для данной точки на основании ПФЭ типа 2^3. Проводилось две серии параллельных опытов ($y = –ТКС\cdot10^4$ 1/°C).

Значения факторов при исследовании свойств резистивных плёнок рения

Характеристика фактора	Входной фактор		
	A,°C	B,°C	C,°C
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	2630	530	610
Шаг варьирования	30	20	30
Верхний уровень	2660	550	640

Характеристика фактора	Входной фактор		
	A,°С	B,°С	C,°С
Нижний уровень	2600	510	580

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	1,4	1,2	1,5	0,8	1,5	1,6	1,3	1,5
y_{j2}	1,2	1,5	1,3	0,9	1,3	1,3	1,4	1,5

ВАРИАНТ 12

Для построения математической модели технологического процесса был проведён ПФЭ 2^3. Исследовалась операция спекания, в результате которой формируется пористая структура матрицы катода. За меру спекания было принято изменение пористости вольфрамового штабика. В качестве управляющих технологических факторов были взяты: скорость повышения температуры V_T, температура спекания T и время спекания τ. Проводилось три серии параллельных опытов.

Значения факторов при исследовании технологического процесса

Характеристика фактора	Входной фактор		
	V_T, °С/мин	T, °С	τ, мин
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	75	2150	30
Шаг варьирования	25	100	10
Верхний уровень	100	2250	40
Нижний уровень	50	2050	20

Результат эксперимента для тангенциальной составляющей P_T

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	28,7	31,8	23,7	23,5	29,2	28,5	20,2	19,3
y_{j2}	27,2	28,4	22,6	24,8	26,7	21,1	20,4	19,6
y_{j3}	24,8	27,7	22,7	20,1	24,2	25,8	16,6	17,3

ВАРИАНТ 13

Исследовалась зависимость коэффициента усиления $K_и$ усилителя от изменения нагрузки $R_н$, внутреннего сопротивления генератора сигнала $R_г$ и сопротивления обратной связи $R_{ос}$. Проводился полный факторный эксперимент ПФЭ типа 2^3. Было выполнено две серии параллельных опытов.

Значения факторов

Характеристика фактора	Входной фактор		
	$R_г$,	$R_{ос}$,	$R_н$, кОм
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	0,6	3,0	2,5
Шаг варьирования	0,3	0,6	1,0
Верхний уровень	0,9	3,6	3,5
Нижний уровень	0,3	2,4	1,5

Результат эксперимента ($K_u = y$)

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	4,5	2,6	4,35	2,7	3,45	2,6	3,5	2,3
y_{j2}	3,8	2,6	3,95	2,5	4,30	2,7	4,4	2,5

ВАРИАНТ 14

Исследовалась зависимость входного сопротивления $R_{вх}$ усилителя от изменения нагрузки $R_н$, внутреннего сопротивления генератора сигнала $R_г$ и сопротивления обратной связи $R_{ос}$. Проводился полный факторный эксперимент ПФЭ типа 2^3. Было выполнено две серии параллельных опытов.

Значения факторов

Характеристика фактора	Входной фактор		
	$R_г$,	$R_{ос}$,	$R_н$, кОм
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	0,6	3,0	2,5
Шаг варьирования	0,3	0,6	1,0
Верхний уровень	0,9	3,6	3,5
Нижний уровень	0,3	2,4	1,5

Результат эксперимента ($R_{вх} = y$)

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	0,65	0,43	0,84	0,92	0,67	0,58	0,87	0,79
y_{j2}	0,73	0,54	0,78	0,65	0,51	0,79	0,84	0,92

ВАРИАНТ 15

При оптимизации температурного коэффициента сопротивления (ТКС) резистивных плёнок рения после движения по градиенту по поверхности отклика пришли в точку, в которой ставится новая серия опытов. Получить локальное описание поверхности отклика для данной точки на основании ПФЭ типа 2^3. Проводилось две серии параллельных опытов ($y = –\text{ТКС}\cdot 10^4$ 1/°С).

Значения факторов при исследовании свойств резистивных плёнок рения

Характеристика фактора	Входной фактор		
	A,°С	*B*,°С	*C*,°С
Кодовое обозначение	X_1	X_2	X_3
Базовый (основной) уровень	2630	530	610
Шаг варьирования	30	20	30
Верхний уровень	2660	550	640
Нижний уровень	2600	510	580

Результат эксперимента

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{j1}	2,7	2,4	23	1,7	1,9	2,5	2,4	1,7
y_{j2}	2,3	2,7	2,5	1,8	2,7	2,9	2,5	1,9

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1.1

Значения критерия Кохрена

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	∞
Уровень значимости α = 0,05														
2	0,999	0,975	0,939	0,906	0,877	0,853	0,833	0,816	0,801	0,788	0,734	0,660	0,581	0,500
3	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653	0,633	0,617	0,603	0,547	0,475	0,403	0,333
4	0,907	0,768	0,684	0,629	0,590	0,560	0,537	0,518	0,502	0,488	0,437	0,372	0,309	0,250
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,507	0,478	0,456	0,439	0,424	0,412	0,365	0,307	0,251	0,200
6	0,781	0,616	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398	0,382	0,368	0,357	0,314	0,261	0,212	0,167
7	0,727	0,561	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354	0,338	0,326	0,315	0,276	0,228	0,183	0,143
8	0,680	0,516	0,438	0,391	0,360	0,336	0,319	0,304	0,293	0,283	0,246	0,202	0,162	0,125
9	0,639	0,478	0,403	0,358	0,329	0,307	0,290	0,277	0,266	0,257	0,223	0,182	0,145	0,111
10	0,602	0,445	0,373	0,331	0,303	0,282	0,267	0,254	0,244	0,235	0,203	0,166	0,131	0,100
12	0,541	0,392	0,326	0,288	0,262	0,244	0,230	0,219	0,210	0,202	0,174	0,140	0,110	0,083
15	0,471	0,335	0,276	0,242	0,220	0,203	0,191	0,182	0,174	0,167	0,143	0,141	0,089	0,067
20	0,389	0,271	0,221	0,192	0,174	0,160	0,150	0,142	0,136	0,130	0,111	0,088	0,068	0,050
24	0,343	0,235	0,191	0,166	0,149	0,137	0,129	0,122	0,116	0,111	0,094	0,074	0,057	0,042
30	0,293	0,198	0,159	0,138	0,124	0,114	0,106	0,100	0,096	0,092	0,077	0,060	0,046	0,033

Продолжение таблицы П1.1

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	**∞**
Уровень значимости α = 0,05														
40	0,237	0,158	0,126	0,108	0,097	0,089	0,083	0,078	0,075	0,071	0,060	0,046	0,035	0,025
60	0,174	0,113	0,090	0,077	0,068	0062	0,058	0,055	0,052	0,050	0,041	0,032	0,023	0,017
120	0,100	0,063	0,050	0,042	0,037	0,034	0,031	0,029	0,028	0,027	0,022	0,017	0,012	0,008
∞	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Уровень значимости α = 0,01														
2	0,999	0,995	0,979	0,958	0,937	0,917	0,900	0,882	0,867	0,854	0,795	0,707	0,606	0,500
3	0,993	0,942	0,883	0,834	0,993	0,761	0,734	0,711	0,691	0,674	0,606	0,515	0,423	0,333
4	0,968	0,864	0,781	0,721	0,676	0,641	0,613	0,590	0,570	0,554	0,488	0,406	0,325	0,250
5	0,928	0,789	0,697	0,633	0,588	0,553	0,526	0,501	0,483	0,470	0,409	0,335	0,264	0,200
6	0,883	0,722	0,626	0,564	0,520	0,487	0,461	0,440	0,442	0,408	0,353	0,286	0,223	0,167
7	0,838	0,664	0,569	0,508	0,466	0,435	0,411	0,391	0,375	0,362	0,311	0,249	0,193	0,143
8	0,795	0,615	0,521	0,463	0,423	0,393	0,370	0,352	0,337	0,343	0,278	0,221	0,170	0,125
9	0,754	0,573	0,481	0,425	0,387	0,359	0,338	0,321	0,307	0,295	0,251	0,199	0,152	0,111
10	0,718	0,536	0,447	0,393	0,357	0,331	0,311	0,295	0,281	0,270	0,230	0,181	0,138	0,100
12	0,653	0,475	0,392	0,343	0,310	0,286	0,254	0,242	0,242	0,232	0,196	0,154	0,116	0,083

Продолжение таблицы П1.1

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	**∞**
Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$														
15	0,575	0,407	0,332	0,288	0,259	0,239	0,223	0,210	0,200	0,192	0,161	0,125	0,093	0,067
20	0,480	0,330	0,265	0,229	0,205	0,188	0,175	0,165	0,157	0,150	0,125	0,096	0,071	0,050
24	0,425	0,287	0,230	0,197	0,176	0,161	0,150	0,141	0,134	0,128	0,106	0,081	0,060	0,042
30	0,363	0,241	0,191	0,164	0,145	0,133	0,123	0,116	0,110	0,105	0,087	0,066	0,048	0,033
40	0,294	0,192	0,151	0,128	0,114	0,103	0,096	0,090	0,085	0,082	0,067	0,050	0,036	0,025
60	0,215	0,137	0,107	0,090	0,080	0,072	0,067	0,063	0,059	0,057	0,046	0,034	0,025	0,017
120	0,123	0,076	0,059	0,049	0,043	0,039	0,036	0,033	0,032	0,031	0,024	0,018	0.013	0,008
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица П1.2

Значения F-критерия

Число степеней свободы f_1																
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$																	
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	254,32

Продолжение таблицы П1.2

	Число степеней свободы f_1															
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
	Уровень значимости α = 0,05																
2	18,513	19,00	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,496
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,745	8,703	8,660	8,639	8,617	8,594	8,527
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,912	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,628
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,773	4,735	4,678	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,000	3,938	3,874	3,842	3,808	3,774	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,575	3,511	3,445	3,411	3,376	3,340	3,330
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,501	3,438	3,388	3,347	3,284	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	2,928
9	5,117	4,257	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,073	3,006	2,937	2,901	2,864	2,826	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136	3,072	3,020	2,978	2,913	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,788	2,719	2,646	2,609	2,571	2,531	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,687	2,617	2,544	2,506	2,466	2,426	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,604	2,533	2,459	2,420	2,380	2,339	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,534	2,463	2,388	2,349	2,308	2,266	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,791	2,707	2,641	2,588	2,544	2,475	2,404	2,328	2,288	2,247	2,204	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,74 1	2,657	2,591	2,538	2,494	2,425	2,352	2,276	2,235	2,194	2,151	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,381	2,308	2,230	2,190	2,148	2,104	1,960

Продолжение таблицы П1.2

	Число степеней свободы f_1															
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
	Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$																
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,342	2,269	2,191	2,150	2,107	2,063	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,308	2,234	2,156	2,114	2,071	2,026	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,278	2,203	2,124	3,083	2,039	1,994	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,421	2,366	2,321	2,250	2,176	2,096	2,054	2,010	1,965	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,226	2,151	2,071	2,028	1,984	1,938	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275	2,204	2,128	2,048	2,005	1,961	1,914	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,183	2,108	2,027	1,984	1,939	1,892	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,237	2,165	2,089	2,007	1,964	1,919	1,872	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,266	2,220	2,148	2,072	1,990	1,946	1,901	1,853	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2 250	2,204	2,132	2,056	1,974	1,930	1,884	1,836	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,118	2,041	1,959	1,915	1,869	1,820	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,105	2,028	1,945	1,901	1,854	1,806	1,638
30	4,17	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,092	2,015	1,932	1,887	1,841	1,792	1,622
40	4,085	3,231	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249	2,180	2, 124	2,077	2,004	1,925	1,839	1,793	1,744	1,693	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993	1,917	1,836	1,748	1,700	1,649	1,594	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959	1,911	1,834	1,751	1,659	1,608	1,554	1,429	1,254

Продолжение таблицы П1.2

	Число степеней свободы f_1																
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
Уровень значимости $\alpha = 0,05$																	
∞	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880	1,831	1,752	1,666	1,571	1,517	1,459	1,394	1,000
Уровень значимости $\alpha = 0,01$																	
1	4052,2	4999,5	5403,3	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,1	6022,5	6055,8	6106,3	6157,3	6208,7	6234,6	6260,7	6286,8	6366,0
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388	99,399	99,416	99,432	99,449	99,458	99,466	99,474	99,499
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345	27,229	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,125
4	21,198	18,000	16,694	15,978	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,745	13,463
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051	9,888	9,722	9,553	9,467	9,379	9,291	9,020
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976	7,874	7,718	7,559	7,396	7,313	7,228	7,143	6,880
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719	6,620	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,650
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911	5,814	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	4,859
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351	5,527	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,311
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942	4,849	4,706	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	3,909
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,745	4,632	4,539	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,603
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,387	4,296	4,155	4,010	3,858	3,781	3,701	3,619	3,361
13	9,074	6,701	6,739	5,205	4,861	4,620	4,441	4,302	4,191	4,100	3,960	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,165

Продолжение таблицы П1.2

	Число степеней свободы f_1															
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
Уровень значимости α = 0,01																	
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030	3,939	3,800	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,004
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,005	3,895	3,805	3,666	3,522	3,372	3,294	3,214	4,132	2,868
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780	3,691	3,553	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,753
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682	3,593	3,455	3,312	3,162	3,084	3,003	2,921	2,653
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597	3,508	3,371	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,566
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523	3,434	3,297	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,489
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457	3,368	3,231	3,088	2,938	2,859	2,779	2,695	2,421
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398	3,310	3,173	3,030	2,880	2,801	2,720	2,636	2,360
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346	3,258	3,121	2,978	2,827	2,749	2,668	2,583	2,306
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299	3,211	3,074	2,931	2,781	2,702	2,620	2,536	2,256
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256	3,168	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,211
25	7,770	5,568	4,676	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217	3,129	2,993	2,850	2,699	2,620	2,538	2,453	2,169
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182	3,094	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,132
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149	3,062	2,926	2,783	2,632	2,552	2,470	2,384	2,097
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120	3,032	2,896	2,753	2,602	2,522	2,440	2,354	2,064
39	7,598	5,421	4,538	4,045	3,725	3,499	3,330	3,198	3,092	3,005	2,868	4,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,034

Продолжение таблицы П1.2

	Число степеней свободы f_1																
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**∞**
Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$																	
40	7,563	5,390	4,610	4,018	3,699	3,474	3,305	3,173	3,067	2,979	2,843	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,006
60	7,314	5,178	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888	2,801	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	1,805
100	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,719	2,632	2,496	2,352	2,198	2,115	2,029	1,936	1,601
220	6,851	4,786	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559	2,472	2,336	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,381
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407	2,321	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,000

Таблица П1.3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	**Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,98
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,65
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / В.И. Асатурян. - М.: Радио и связь, 1983. - 248 с.: ил. – Режим доступа: http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=108&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=22%2E19%2F%D0%9090%2D129229<.> – Загл. с экрана.
2. Решетников М.Т. Планирование эксперимента и статистическая обработка данных: Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2000.
3. Серафинович Л.П. Планирование эксперимента: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2006. – 128 с
4. Спецглавы надежности, планирование экспериментов и инженерных наблюдений [Электронный ресурс]: учеб.-метод. комплекс / сост. С. Е. Иванов. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2010. - 87 с.
5. Информационные технологии обработки данных и процесс принятия решений [Текст, электронный ресурс]: учеб.-метод. комплекс / сост.: К.А. Злотников, Л.В. Ткачева. - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009. – 180 с. – Режим доступа: http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=108&task=set_static_req&bns_string=NWPIB&req_irb=<.>I=%D0%9C%2D%2D20090626152132<.> – Загл. с экрана.

СОДЕРЖАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к самостоятельной работе для студентов бакалавриата направления 13.04.02

Сост.: *Д.А.Устинов, С.В. Бабурин*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой электроэнергетики и электромеханики

Ответственный за выпуск *Д.А. Устинов*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 21.03.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 5,2. Усл.кр.-отт. 5,2. Уч.-изд.л. 4,8. Тираж 100 экз. Заказ 237. С 91.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2