Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

Методические указания к самостоятельной работе для студентов магистратуры направления 21.04.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 519.2.06(073)

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Дифференциальные уравнения с частными производными. Основные понятия и классификация: Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *С.Е.Мансурова*. СПб, 2019. 39 с.

В методических указаниях приведены основные сведения о дифференциальных уравнениях с частными производными, показаны способы решения некоторых уравнений и задачи Коши, приведена классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и показаны способы приведения таких уравнений к каноническому виду.

Предназначены для студентов магистратуры направления «Нефтегазовое дело», изучающих курс «Методы математической физики».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент доц. *С.Е. Холодова* (Университет ИТМО)

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

Методические указания к самостоятельной работе для студентов магистратуры направления 21.04.01

Сост. *С.Е. Мансурова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *С.Е. Мансурова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 06.09.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,3. Усл.кр.-отт. 2,3. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 100 экз. Заказ 757. С 259.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

ВВЕДЕНИЕ

Курс "Методы математической физики" посвящен изучению математических моделей естественнонаучных явлений и процессов, изучаемых в гидродинамике, теории упругости, акустике, электродинамике и т.д. Математические модели этих процессов представляют собой краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Особую роль в физике, механике, гидродинамике и других науках играют линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

В данных методических указаниях рассматриваются особенности дифференциальных уравнений с частными производными, показаны решения некоторых простейших типов таких уравнений, приведены определения линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными для функции двух переменных, дана их классификация и методы приведения к каноническому виду. Разобраны многочисленные примеры и даны упражнения для самостоятельного решения с ответами.

Методические указания предназначены для студентов специалитета и магистратуры нефтегазового факультета, изучающих курс "Методы математической физики". Они могут быть также использованы студентами других специальностей, изучающих такие же курсы или желающих расширить свои знания по математике.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение

Прежде, чем изучать дифференциальные уравнения с частными производными, имеет смысл вспомнить основные сведения об обыкновенных дифференциальных уравнениях, введенных для функции одной переменной.

Пусть для неизвестной функции $y = f(x)$ задано уравнение, содержащее независимую переменную x, саму эту функцию, а также некоторые ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, … , $y^{(n)}(x)$. Такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* и записывается следующим образом:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{1.1}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения (1.1) на интервале (a, b) называется функция $y = f(x)$, определенная вместе с соответствующими производными на указанном интервале, если она обращает исходное уравнение на этом интервале в тождество.

Например, решением дифференциального уравнения

$$y' = \sqrt{x}$$

является функция

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C, \tag{1.2}$$

определенная, дифференцируемая и обращающая это уравнение в тождество при $\forall\, x \geq 0$.

Очевидно, что решение дифференциального уравнения находится неоднозначно и зависит от одной или нескольких *произвольных постоянных*, обозначаемых $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Количество произвольных постоянных совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Такое решение называется *общим* и обозначается

$$y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Задав конкретные значения свободным неизвестным, можно получить бесконечно много решений дифференциального уравнения, которые называются *частными*.

Например, из общего решения (1.2) можно получить частные решения

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ , \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 1, \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2019, \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \sqrt{7\pi}$$

и так далее.

1.2. Задача Коши

При решении задач физики, механики и др., как правило, кроме дифференциального уравнения, описывающего изучаемый процесс, известно также начальное положение системы.

В терминах теории дифференциальных уравнений такая информация называется *начальными условиями* и для дифференциального уравнения n-го порядка записывается как значение функции, а также всех ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно в некоторой точке x_0:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_1;\ y''(x_0) = y_2;\ ...\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \quad (1.3)$$

Дифференциальное уравнение вместе с начальными условиями называется *задачей Коши.*

***Теорема Коши* (*о существовании и единственности решения дифференциального уравнения*).** Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

и пусть в точке $M_0(x_0, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ n-мерного пространства $Oxyy'...y^{(n-1)}$ функция F, а также все ее частные производные по y, y', ..., $y^{(n-1)}$ непрерывны. Тогда существует единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (1.3).

Для дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется так: *найти функцию* $y = f(x)$*, удовлетворяющую дифференциальному уравнению* $y' = \varphi(x, y)$ *и проходящую через точку* $M_0(x_0, y_0)$.

Математическая постановка данной задачи имеет вид

$$\begin{cases} y' = \varphi(x, y); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Из теоремы Коши следует, что если функция $\varphi(x, y)$ и ее частная производная φ'_y непрерывны в точке M_0, то через эту точку проходит единственное решение заданного дифференциального уравнения.

Точки, в которых не выполняются условия теоремы Коши, называются *особыми*, и через такие точки может проходить несколько решений дифференциального уравнения или ни одного.

Пример 1.1. Решить задачу Коши $xy' = y,\ \ y\big|_{x=1} = 3$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка *с разделяющимися переменными*. Для его решения (см. п. 1.3) заменим производную y' на дифференциалы и разделим переменные:

$$xy' = y, \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{dy}{dx} = y \ \Big| \cdot dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\,dy = y \ \ dx \ \Big| : xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Теперь, когда переменные в этом уравнении разделены, можно проинтегрировать его левую и правую части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C_1.$$

Для получения более простого ответа возьмем новую константу C так, чтобы $C_1 = \ln|C|$, тогда

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad |y| = |Cx| \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$$

Итак, мы нашли *общее решение* заданного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения найденные решения представляют собой бесконечное множество различных прямых на плоскости Oxy, проходящих через начало координат. Некоторые из них изображены на рисунке 1.

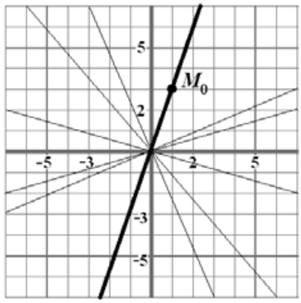

Рис.1.

Для решения задачи Коши надо найти ту линию, которая проходит через точку $M_0(1; 3)$. Подставим координаты точки в общее решение:

$$3 = 1 \cdot C \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция $y = 3x$, обращающая заданное дифференциальное уравнение в тождество при $\forall x$ и проходящая через точку $M_0(1; 3)$.

Отметим, что точки, лежащие на оси Oy, являются *особыми* точками данного дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения второго порядка начальные условия состоят из значения функции в заданной точке и значения ее первой производной:

$$\begin{cases} y'' = \varphi(x, y, y'); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0; \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Таким образом, мы ищем функцию, проходящую через заданную точку плоскости с заданным углом наклона касательной.

Пример 1.2. Найти решение задачи Коши

$$y''(x) = 4\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Решение. Дважды последовательно интегрируя функцию в правой части дифференциального уравнения, находим его общее решение

$$y(x) = -\cos 2x + C_2 x + C_1 .$$

Так как $y(0) = 2$, то для определения C_1 получаем уравнение

$$2 = -1 + 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3 .$$

Для определения постоянной C_2 продифференцируем общее решение по переменной x и учтем второе начальное условие:

$$y'(x) = 2\sin 2x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 .$$

Следовательно, искомое частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = -\cos 2x + C_2 x + C_1 .$$

1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)\,y' + f_2(x)g_2(y) = 0 , \tag{1.6}$$

называется дифференциальным уравнением с *разделяющимися переменными*.

Так как $y = f(x)$, то $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение (1.6) примет вид

$$f_1(x)g_1(y)\frac{dy}{dx} + f_2(x)g_2(y) = 0 ,$$

или

$$f_1(x)g_1(y)\,dy = -f_2(x)g_2(y)\,dx .$$

Разделив это соотношение на $f_1(x)$ и $g_2(y)$, получим

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx .$$

Полученное уравнение называется уравнением с *разделенными переменными*, и его общий интеграл может быть записан в виде

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C .$$

Решение дифференциального уравнения такого типа было рассмотрено в примере 1.1.

Идея разделения переменных может быть использована при решении простейших уравнений более высоких порядков, чем первый.

Пример 1.3. Решить уравнение $xy'' + 2y' = 0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка. Сделаем замену переменной, а именно введем новую зависимую переменную $z(x) = y'(x)$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $z' + 2z = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = -2\int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|z| = \widetilde{C}_0 - 2\ln|x| .$$

Обозначив $\widetilde{C}_0 = \ln|C_0|$ и упростив результат, получим

$$z(x) = \frac{C_0}{x^2}.$$

Сделав теперь обратную подстановку $z(x) = y'(x)$, получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{C_0}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad dy = \frac{C_0}{x^2}dx \quad \Leftrightarrow \quad \int dy = \int \frac{C_0}{x^2}dx \quad \Leftrightarrow$$

Интегрируя это уравнение и обозначив $C_1 = -C_0$, окончательно находим

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 .$$

1.4. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)\,. \tag{1.7}$$

Если $q(x) \equiv 0$, уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае — *линейным неоднородным*.

Рассмотрим один из методов решения ДУ (1.7), который называется методом вариации произвольной постоянной.

Рассмотри сначала однородное ДУ

$$y' + p(x)y = 0\,. \tag{1.8}$$

Это уравнение легко решается как уравнением с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -p(x)y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx\,,$$

откуда $\ln|\,y\,| = -\int p(x)\,dx + C_1$ или $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Полученная функция является общим решением однородного ДУ (1.8). Для нахождения общего решения заменим константу C на неизвестную функцию $\varphi(x)$ и предположим, что функция

$$y = \varphi(x)\,e^{-\int p(x)dx}$$

является решением неоднородного уравнения (1.7).

Пример 1.4. Решить уравнение $xy' - 3y = x^2 + 1$.

Решение. Рассмотрим линейное однородное ДУ

$$xy' - 3y = 0.$$

Решим его методом разделения переменных:

$$x\frac{dy}{dx} = 3y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = C_1 + 3\ln|x| \;\Leftrightarrow\; y = Cx^3.$$

Заменим теперь константу C на неизвестную функцию $\varphi(x)$:

$$y = x^3\varphi(x).$$

Эта функция является решением заданного (неоднородного) ДУ, и, следовательно, должна ему удовлетворять. Подставим функцию и ее производную в заданное ДУ:

$$y' = 3x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x); \quad xy' - 3y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow$$

$$x \cdot \left(3x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x)\right) - 3 \cdot x^3\varphi(x) = x^2 + 1.$$

Упростив, получим

$$\varphi'(x) = \frac{x^2+1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$$

Таким образом,

$$y(x) = x^3\varphi(x) = x^3\left(C - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3}\right) = Cx^3 - x^2 - \frac{1}{3}.$$

Отметим, что решение линейного дифференциального уравнения (1.7) можно найти и другими способами, например, методом Бернулли [**].

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

2.1. Основные понятия

***Дифференциальным уравнением с частными производными* (*ДУЧП*)** называется уравнение, содержащее искомую функцию от нескольких аргументов, ее частные производные, а также сами аргументы.

Порядком такого дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, в него входящей.

Например,

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + y^3u(x, y)$$

является ДУЧП первого порядка функции двух переменных $u = f(x, y)$, а

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = xyz \frac{\partial u}{\partial t}$$

— ДУЧП третьего порядка функции четырех переменных $u = f(x, y, z, t)$.

Решением ДУЧП называется функция, обращающая уравнение в тождество при всех допустимых значениях независимых переменных.

Например, легко убедиться, что функция

$$u(x, y) = xy + 2x^2 + e^{3y}$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 4x .$$

2.2. Особенности решения дифференциальных уравнений с частными производными

Пусть $u = f(x, y)$ — функция двух переменных. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{2.1}$$

Ясно, что искомая функция $u(x, y)$ не зависит от переменной x, но может быть *любой функцией от переменной* y:

$$u(x, y) = \varphi(y) . \tag{2.2}$$

Действительно, легко убедиться, что, дифференцируя подобную функцию по x, равенство (2.1) будет справедливым для ***любой*** функции $\varphi(y)$.

В этом заключается ***коренное*** отличие ДУЧП от обыкновенных дифференциальных уравнений: вместо произвольных постоянных при интегрировании надо прибавлять к решению ***произвольную***

функцию от тех аргументов, по которым не выполнялось интегрирование.

Таким образом, ***общим решением*** дифференциального уравнения с частными производными называется функция, удовлетворяющая заданному уравнению при всех допустимых значениях аргументов и содержащая столько ***произвольных функций***, каков порядок данного уравнения.

Частным решением ДУЧП называется функция, полученная из его общего решения при замене произвольных функций на конкретные функции.

Таким образом, выражение (2.2) является общим решением уравнения (2.1). Задавая вместо $\varphi(y)$ конкретные функции, можно получить сколько угодно частных решений уравнения (1.1). Например, его частными решениями будут функции

$$u(x,y)=y^2+1;\ u(x,y)=e^{3y}\cos(y);\ u(x,y)=\sqrt{1+\ln y} \quad \text{и т.д.}$$

2.3. Решение простейших дифференциальных уравнений с частными производными

К простейшим ДУЧП можно отнести уравнения, решаемые методом разделения переменных, рассмотренным в п.1.3 и примерах 1.1–1.3.

При этом будем учитывать, что частная производная, например, по переменной x функции нескольких переменных вычисляется в предположении, что все остальные аргументы этой функции зафиксированы (считаются равными константе). Восстановить искомую функцию в этом случае можно, если проинтегрировать ее производную по x, так же считая все остальные аргументы константами и прибавляя к результату произвольную функцию от этих аргументов.

Пример 2.1. Найти функцию $u=f(x,y)$, если

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy^2.$$

Решение. Проинтегрировав данное выражение по x и считая $y=\text{const}$, получим

$$u(x,y)=\int xy^2dx+\varphi(y)=y^2\int xdx+\varphi(y)=\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция. В том, что данная функция является искомым общим решение, легко убедиться, продифференцировав ее по x.

Пример 2.2. Найти функцию $u=f(x,y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x+2\cos y\ .$$

Решение. Это ДУЧП второго порядка. Сделаем замену

$$z(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\ .$$

Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}$. Следовательно, с учетом замены заданное уравнение примет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}=12x+2\cos y\ .$$

Проинтегрировав его по x, получим

$$z(x,y)=\int(12x+\cos y)dx+\varphi(y)=6x^2+2x\cos y+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция.

С учетом замены получим ДУЧП первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2+2x\cos y+\varphi(y)$$

и, проинтегрировав его еще раз по x, получим общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$u(x,y)=2x^3+x^2\cos y+x\varphi(y)+\psi(y),$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

Пример 2.3. Найти функцию $u = f(x, y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{e^{3y}}{x+1}.$$

Решение. Сделаем замену $z(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{3y}}{x+1}.$$

Проинтегрируем его по y:

$$z(x, y) = \frac{e^{3y}}{3(x+1)} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{3y}}{3(x+1)} + \varphi(x).$$

Проинтегрировав это соотношение по x, получим

$$u(x, y) = \frac{1}{3} e^{3y} \ln|x+1| + \int \varphi(x)\, dx + \psi(y).$$

Учитывая, что интеграл от произвольной функции также является произвольной функцией и обозначив $\Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$, получим общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$u(x, y) = \frac{1}{3} e^{3y} \ln|x+1| + \Phi(x) + \psi(y),$$

где $\Phi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 24x^3 y^2 z.$$

Решение. Проинтегрируем данное уравнение последовательно по x, y и z:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 24x^3 y^2 z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6x^4 \cdot y^2 z + \varphi(y,z) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2x^4 y^3 \cdot z + \int \varphi(y,z) dy + \psi(x,z) \quad \Leftrightarrow$$

$$u(x,y,z) = x^4 y^3 z^2 + \int \left(\int \varphi(y,z) dy \right) dz + \int \psi(x,z) dz + \omega(x,y),$$

где $\varphi(y,z)$, $\psi(y,z)$ и $\omega(y,z)$ — произвольные функции своих аргументов. Первообразные от произвольных функций сами являются произвольными функциями. Вводя обозначения

$$\Phi(y,z) = \int \left(\int \varphi(y,z) dy \right) dz; \quad \Psi(x,z) = \int \psi(x,z) dz,$$

получаем общее решение

$$u(x,y,z) = x^4 y^3 z^2 + \Phi(y,z) + \Psi(x,z) + \omega(x,y),$$

где $\Phi(y,z)$, $\Psi(y,z)$ и $\omega(y,z)$ — произвольные функции своих аргументов.

Пример 2.5. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Решение. Учтем, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$. Тогда, обозначив $z = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2z \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = 2\int dy$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|z| = 2y + \ln(\varphi(x)) \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x)\, e^{2y} .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x)\, e^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \int \varphi(x)\, e^{2y} dx + \psi(y) .$$

Упростив выражение, получим

$$u(x,y) = \Phi(x)\, e^{2y} + \psi(y) ,$$

где $\Phi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Линейное однородное ДУЧП первого порядка для функции двух переменных имеет вид

$$g_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \tag{2.3}$$

где $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ — заданные функции.

Рассмотрим *линии уровня* искомой функции $u(x,y) = C$, которые являются неявно заданной функцией $y = f(x)$. По формуле производной неявно заданной функции

$$y'(x) = -\frac{u'_x}{u'_y} ,$$

с учетом которой уравнение (2.3) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$y'(x) = \frac{g_2(x,y)}{g_1(x,y)} . \tag{2.4}$$

Пусть $\varphi(x,y) = C$ — общий интеграл (2.4). Тогда общее решение линейного ДУ (2.3) записывается в виде

$$u(x,y) = F\big(\varphi(x,y)\big), \tag{2.5}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 2.6. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (\sin x + y\operatorname{ctg} x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Решение. Это линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка. По формуле (2.4):

$$y'(x) = \frac{\sin x + y\operatorname{ctg} x}{1} \quad \Leftrightarrow \quad y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x . \tag{2.6}$$

Для решения получившегося неоднородного линейного уравнения воспользуемся методом вариации произвольной постоянной, рассмотренном в п. 1.4:

$$\frac{dy}{dx} = y\operatorname{ctg} x \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|\, y\,| = \ln|\sin x\,| + \ln C_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 \sin x .$$

Заменив $C_1 = g(x)$, получим

$$y = g(x)\sin x, \quad y'(x) = g'(x)\sin x + g(x)\cos x .$$

Подставим найденные выражения в соотношения (2.6):

$$g'(x)\sin x + g(x)\cos x - g(x)\sin x \operatorname{ctg} x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(x)\sin x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x + C .$$

Таким образом,

$$y = (x + C)\sin x \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{y}{\sin x} - x ,$$

откуда, с учетом формулы (2.5), получим искомую функцию

$$u(x,y)=F\left(\frac{y}{\sin x}-x\right),$$

где F — произвольная функция своего аргумента.

2.5. Задача Коши для дифференциальных уравнений с частными производными

Задачей Коши называется задача отыскания частного решения дифференциального уравнения при наличии одного или нескольких *начальных условий* (см. п.1.2).

Для ДУЧП постановка задачи Коши в общем виде более сложна, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, до сих пор не доказаны условия существования и единственности решения ДУЧП[1].

Для ДУЧП первого порядка в качестве начального условия задается значение функции при фиксированном значении одного из аргументов, причем в дифференциальном уравнении обязательно должна присутствовать частная производная от этого аргумента. Причем, в отличие от задачи (1.4), начальное условие в общем случае задается не константой, а функцией от всех остальных аргументов, кроме зафиксированного. Так, для функции двух переменных $u=u(x,y)$ задача Коши будет иметь, например, вид

$$\begin{cases} F\left(x,t,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0; \\ u(x,y_0)=g(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

где $g(x)$ — заданная функция, а в дифференциальном уравнении обязательно присутствует $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Пример 2.7. Найти функцию $u=f(x,y)$, если

---

[1] См., например, https://ru.wikipedia.org, статья "Дифференциальное уравнение в частных производных".

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 \sin y; \; u(x,0) = 3x^2 - 1.$$

Решение. Дана задача Коши, где начальное условие сформулировано для $y = 0$. Проинтегрировав дифференциальное уравнение по *y*, найдем его общее решение:

$$u(x, y) = -x^3 \cos y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Учтем начальное условие:

$$u(x,0) = -x^3 + \varphi(x) = 3x^2 - 1,$$

откуда $\varphi(x) = 3x^3 + x^2 - 1$.

Тогда искомым частным решением будет функция

$$u(x, y) = -x^3 \cos y + x^3 + x^2 - 1.$$

Пример 2.8. Найти при $y > 0$ функцию $u = f(x, y)$, если

$$(x^2 + 4)\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(0, y) = e^{y/2}.$$

Решение. Данное ДУЧП является линейным однородным. По формуле (2.4)

$$y'(x) = \frac{xy}{x^2 + 4} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| + C_1.$$

Записав константу в виде логарифма: $C_1 = \dfrac{1}{2}\ln C$, получим

$$\ln C = 2\ln|y| - \ln|x^2 + 4| \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{y^2}{x^2 + 4}.$$

С учетом (2.5), получим общее решение ДУ:

$$u(x, y) = F\left(\frac{y^2}{x^2 + 4}\right),$$

где F — произвольная функция своего аргумента.

Учтем начальное условие:

$$u(0, y) = e^{y/2} \quad \Rightarrow \quad u(0, y) = F\left(\frac{y^2}{4}\right).$$

Так как $e^{y/2} = e^{\sqrt{y^2/4}}$ (при $y > 0$), то $F(\alpha) = e^{\sqrt{\alpha}}$. Таким образом, при $y > 0$ решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, y) = e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}}.$$

Убедимся в правильности решения, сделав проверку.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{(x^2+4)^3}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Подставив найденные частные производные в ДУ, получим

$$-(x^2+4) \cdot e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{(x^2+4)^3}} + xy \cdot e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$-e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+4}} + e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+4}} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Очевидно, что количество начальных условий в задаче Коши для ДУЧП должно совпадать с порядком дифференциального уравнения. При этом, если уравнение содержит старшую производную n-го порядка по некоторому аргументу, необходимо задать значение искомой функции, а также всех ее частных производных по этому аргументу до (n–1)-го порядка включительно, при фиксированном значении этого аргумента (см. пример 2.9). Если же старшая производная является смешанной, начальные условия задаются для разных аргументов (пример 2.10).

Пример 2.9. Найти функцию $u = f(x, y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x + \cos y;$$

$$u(1, y) = 2 + 5e^y; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 6 + \cos y + 5e^y.$$

Решение. Дана задача Коши для ДУЧП второго порядка. Общее решение ДУЧП найдено в примере 2.2:

$$u(x, y) = 2x^3 + x^2 \cos y + x\varphi(y) + \psi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 + 2x \cos y + \varphi(y).$$

Для нахождения функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ учтем начальные условия:

$$\begin{cases} u(0, y) = 2 + \cos y + \varphi(y) + \psi(y) = 2 + 5e^y; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 6 + 2\cos y + \varphi(y) = 6 + \cos y. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $\varphi(y) = -\cos y$, откуда $\psi(y) = 5e^y$. Таким образом, искомая функция имеет вид

$$u(x, y) = 2x^3 + (x^2 - x)\cos y + 5e^y.$$

Пример 2.10. Найти функцию $u = f(x, y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{6x}{y^2}; \quad \begin{cases} u(0, y) = 3y^2 - 1; \\ u(x, 3) = x^2 + 3x + 27 - \cos x. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = z$, тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{6x}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad z(x, y) = y + \frac{6x}{y} + \Phi(x),$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{6x}{y} + \Phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = xy + \frac{3x^2}{y} + \varphi(x) + \psi(y)$$

— общее решение дифференциального уравнения, где $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции, причем $\varphi(x) = \int \Phi(x)\,dx$.

С учетом начальных условий получим систему уравнений

$$\begin{cases} u(0,y) = \varphi(0) + \psi(y) = 3y^2 - 1; \\ u(x,3) = 3x + x^2 + \varphi(x) + \psi(3) = x^2 + 3x + 27 - \cos x. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) + \psi(y) = 3y^2 - 1; \\ \varphi(x) + \psi(3) = 27 - \cos x. \end{cases}$$

Подставим $y = 3$ в первое уравнение и исключим из системы $\psi(3)$:

$$\begin{cases} \varphi(0) + \psi(3) = 27 - 1; \\ \varphi(x) + \psi(3) = 27 - \cos x; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) - \varphi(0) = -\cos x + 1,$$

откуда можно предположить, что $\varphi(x) = -\cos x$. Из первого уравнения теперь найдем, что $\psi(y) = 3y^2$.

Подставив найденные функции в общее решение, получим решение задачи Коши:

$$u(x,y) = xy + \frac{3x^2}{y} + 3y^2 - \cos x.$$

Отметим, что при решении подобных задач в общем случае получаются системы *функциональных* уравнений, решение которых может быть весьма затруднительным.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

а) $\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2$; **б)** $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; **в)** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^3}{y}$; **г)** $\frac{\partial u}{\partial y} = x \sin 2y$;

д) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$; **ж)** $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$; **з)** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(x-2y\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; **б)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$; **в)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^3y$; **г)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$;

д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\sqrt{x}+\cos 3y$; **е)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$; **ж)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка.

а) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=xy$; **б)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=3+\dfrac{1}{x}$; **в)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$; **г)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=e^{xy}$;

д) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; **е)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$; **ж)** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=x\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Задача 4. Решить задачу Коши.

а) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\cos y}{x}$; $u\left(x,\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **б)** $\dfrac{\partial u}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$; $u(x,1)=x$.

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$; $u(x,1)=1$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=\dfrac{2x+1}{x}$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$; $u(2,y)=9+3y\sin y$; $u(x,0)=x^3+1$.

д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2+y$; $u(0,y)=2e^{3y}$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{\cos y}$.

е) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{x+y}$; $u(x,1)=e^{x+1}+\ln x+\sin 2x$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=e^{x+1}+\ln x$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Классификация линейных ДУЧП второго порядка

В математической физике, для упрощения записи уравнений, пользуются следующими обозначениями частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} \quad \text{и т.д.}$$

Тогда уравнение первого порядка для функции двух переменных в общем виде можно представить как

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

а уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xu}, u_{yy}) = 0.$$

ДУЧП второго порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F\left(x, y, u, u_x, u_y\right), \tag{3.1}$$

где A, B, C – функции *только* от независимых переменных, а F – *линейная функция* относительно аргументов u, u_x, u_y. Если F не линейна относительно этих аргументов, то уравнение называется ***квазилинейным***.

Для классификации ДУЧП (3.1) составляют уравнение, которое называется ***характеристическим***:

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0, \tag{3.2}$$

и вычисляют его *дискриминант*

$$D = B^2 - 4AC. \tag{3.3}$$

Уравнение называется ***гиперболическим***, если $D > 0$, ***эллиптическим***, если $D = 0$, и ***параболическим***, если $D < 0$.

3.2. Приведение линейных ДУЧП второго порядка к каноническому виду

Линейное ДУЧП можно упростить, сделав замену переменных. Простейшая форма линейного ДУЧП называется ***каноническим видом*** этого уравнения.

Для приведения ДУ (3.1) к каноническому виду разделим характеристическое уравнение (3.2) на dx^2:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0 \tag{3.4}$$

и решим полученное квадратное уравнение относительно величины $\frac{dy}{dx}$. Получим два (при $D \neq 0$) дифференциальных уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{D}}{2A} \tag{3.5}$$

— ***уравнения характеристик***. Решения этих ДУ можно представить в виде *общих интегралов* $f_{1,2}(x, y) = C_{1,2}$. В зависимости от типа ДУ вводятся новые переменные ξ и η.

1) У ДУ гиперболического типа получаются два общих интеграла и новые переменные вводятся по формулам $\xi = f_1(x, y)$, $\eta = f_2(x, y)$.
2) У ДУ параболического типа есть только один общий интеграл $f_1(x, y) = C_1$, поэтому принимают $\xi = f_1(x, y)$, а в качестве второй переменной берут произвольную функцию переменных x и y, линейно независимую с ξ. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 . \tag{3.6}$$

3) У ДУ эллиптического типа получаются два комплексных общих интеграла, которые можно записать в виде $f_1(x, y) \pm i\, f_2(x, y) = C_{1,2}$, тогда $\xi = f_1(x, y)$, $\eta = f_2(x, y)$. При

этом функции ξ и η должны быть линейно независимыми, т.е. удовлетворять соотношению (3.6).

Теперь, введя новые переменные, можно найти частные производные искомой функции, используя формулы частных производных 1-го порядка для сложной функции

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x; \qquad u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y. \tag{3.7}$$

и частных производных 2-го порядка:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}; \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}; \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Найденные по этим формулам производные надо подставить в исходное уравнение и упростить его, приведя подобные слагаемые. Полученное таким образом уравнение будет иметь наиболее простой вид и называться ***каноническим***.

Пример 3.1. Установить тип и привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x - u_y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его по формулам (3.2)–(3.5):

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 5 = 0,$$

$$D = B^2 - 4AC = 16 - 20 = -4,$$

$D < 0 \Rightarrow$ данное уравнение — эллиптического типа. Тогда уравнения характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 \pm i.$$

Это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделим переменные и проинтегрируем правую и левую части этого уравнения:

$$dy = (2 \pm i)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int dy = \int (2 \pm i)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad y = (2 \pm i)x + C\,.$$

Таким образом, общими интегралами уравнений характеристик являются функции $y - 2x \pm ix = C_{1,2}$.

Введем новые переменные ξ и η, взяв за ξ вещественную, а за η мнимую часть общего интеграла: $\xi = y - 2x$, $\eta = x$. Убедимся, что эти функции линейно независимые, воспользовавшись соотношением (3.6):

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Вычислим частные производные функций $\xi = y - 2x$, $\eta = x$ по переменным x и y:

$$\xi_x = -2\,; \quad \xi_y = 1\,; \quad \xi_{xx} = 0\,; \quad \xi_{xy} = 0\,; \quad \xi_{yy} = 0\,;$$

$$\eta_x = 1\,; \quad \eta_y = 0\,; \quad \eta_{xx} = 0\,; \quad \eta_{xy} = 0\,; \quad \eta_{yy} = 0\,.$$

Подставив найденные производные в формулы (3.7) и (3.8), получим

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = -2u_\xi + u_\eta\,; \qquad u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi\,.$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,;$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = -2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\,;$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi}\,.$$

Подставим найденные значения вторых производных в исходное уравнение

$$\left(4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) + 4\left(-2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) + 5\left(u_{\xi\xi}\right) + 3\left(-2u_\xi + u_\eta\right) - \left(u_\xi\right) = 0\,.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 7u_\xi - 3u_\eta$$

— канонический вид заданного эллиптического уравнения.

Пример 3.2. Установить тип, привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} - x\, u_x - y\, u_y = 0.$$

Найти частное решение, если $u\big|_{x=1} = 1 + \ln y$; $u_x\big|_{x=1} = 1$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его решение:

$$x^2 dy^2 - 2xydxdy + y^2 dx^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 , \quad D = (2xy)^2 - 4x^2 y^2 = 0 .$$

Так как дискриминант $D = 0$ $\Rightarrow$ данное уравнение — параболического типа. Составим уравнение характеристик (3.5):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .$$

Это *обыкновенное дифференциальное уравнение* первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем получившееся соотношение.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + C \quad \text{или} \quad y = Cx .$$

Таким образом, общий интеграл уравнения характеристик имеет вид $\frac{y}{x} = C$ и новую переменную ξ можно принять равной $\xi = \frac{y}{x}$.

В качестве второй переменной η в случае параболического уравнения берется *произвольная* функция, линейно независимая с ξ. Естественно взять ее наиболее простой. Положим $\eta = y$.

Убедимся в линейной независимости ξ и η:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0 .$$

Найдем частные производные функций $\xi = \dfrac{y}{x}$ и $\eta = y$ по переменным x и y:

$$\xi_x = -\frac{y}{x^2}; \quad \xi_y = \frac{1}{x}; \quad \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}; \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}; \quad \xi_{yy} = 0;$$

$$\eta_x = 0; \quad \eta_y = 1; \quad \eta_{xx} = 0; \quad \eta_{xy} = 0; \quad \eta_{yy} = 0.$$

Тогда по формулам (3.7) и (3.8) будем иметь:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = -\frac{y}{x^2} u_\xi; \qquad u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = \frac{1}{x} u_\xi + u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = \frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} u_\xi;$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} =$$
$$= -\frac{y}{x^3} u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} u_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} u_\xi;$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} =$$
$$= \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} + \frac{2}{x} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставим найденные значения в заданное ДУ

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} u_\xi\right) + 2xy\left(-\frac{y}{x^3} u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} u_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} u_\xi\right) +$$
$$+ y^2\left(\frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} + \frac{2}{x} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - x\left(-\frac{y}{x^2} u_\xi\right) - y\left(\frac{1}{x} u_\xi + u_\eta\right) = 0$$

и, приведя подобные слагаемые, получим

$$y^2 u_{\eta\eta} - y u_\eta = 0.$$

С учетом соотношения $\eta = y$ получим каноническую форму заданного ДУ:

$$\eta^2 u_{\eta\eta} - \eta u_\eta = 0 \quad \text{или} \quad u_{\eta\eta} = \frac{1}{\eta} u_\eta.$$

Найдем общее решение полученного уравнения. Для этого сделаем замену $u_\eta = z(\xi,\eta)$. Тогда, считая (временно) $\xi = \text{const}$, получим

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{z}{\eta} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z} = \frac{d\eta}{\eta} \quad\Rightarrow\quad \ln|z| = \ln|\eta| + \Phi(\xi) \quad \text{или} \quad z = \eta\Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi)$ — произвольная функция. Вернемся к функции u:

$$u_\eta = z(\xi,\eta) \quad\Rightarrow\quad u_\eta = \Phi(\xi)\cdot\eta \quad\Rightarrow$$

$$u(\xi,\eta) = \int \Phi(\xi)\cdot\eta\, d\eta = \frac{\eta^2}{2}\varphi(\xi) + \psi(\xi).$$

Для записи ответа в наиболее простой форме обозначим $\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\Phi(\xi)$, тогда $u(\xi,\eta) = \eta^2\varphi(\xi) + \psi(\xi)$. Подставив вместо ξ и η исходные переменные, получим

$$u(x,y) = y^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

— общее решение заданного ДУ, где φ и ψ — произвольные функции.

Найдем теперь решение задачи Коши. По условию

$$u(1,y) = y^2\varphi(y) + \psi(y) = 1 + \ln y.$$

С учетом формулы производной сложной функции,

$$u_x = y^2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad u_x\big|_{x=1} = -y^3\varphi'(y) - y\psi'(y) = 1.$$

Таким образом, для нахождения функций φ и ψ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y^2\varphi(y) + \psi(y) = 1 + \ln y; \\ -y\left[y^2\varphi'(y) + \psi'(y)\right] = 1. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение:

$$2y\,\varphi(y)+\left[y^2\,\varphi'(y)+\psi'(y)\right]=\frac{1}{y}.$$

Из второго уравнения системы можно увидеть, что

$$y^2\,\varphi'(y)+\psi'(y)=-\frac{1}{y}.$$

Тогда

$$2y\,\varphi(y)-\frac{1}{y}=1+\frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad 2y\,\varphi(y)=\frac{2}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Подставив найденную функцию в первое уравнение системы, получим

$$y^2\cdot\frac{1}{y^2}+\psi(y)=1+\ln y \quad\Leftrightarrow\quad \psi(y)=\ln y.$$

Таким образом,

$$\varphi(y)=\frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; \varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{y^2}; \qquad \psi(y)=\ln y \;\Rightarrow\; \psi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\frac{y}{x},$$

и искомое частное решение имеет вид

$$u(x,y)=y^2\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)=x^2+\ln y-\ln x.$$

Для завершения решения задачи убедимся, что найденная функция действительно является решением заданного ДУ. Найдем частные производные:

$$u_x=2x-\frac{1}{x};\quad u_y=\frac{1}{y};\quad u_{xx}=2+\frac{1}{x^2};\quad u_{xy}=0;\quad u_{yy}=-\frac{1}{y^2}$$

и подставим их в исходное уравнение:

$$x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)+2xy\cdot 0+y^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)-x\left(2x-\frac{1}{x}\right)-y\cdot\frac{1}{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x^2+1+0-1-2x^2+1-1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 0=0 \quad \text{(ч.т.д.)}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Определить тип линейного ДУЧП второго порядка и привести его к каноническому виду.

а) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$.

б) $4u_{xx} - u_{yy} = 0$.

в) $u_{xx} - 2x u_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0$.

г) $u_{xx} - y u_{yy} = 0$.

д) $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$.

е) $u_{xx} - x u_{yy} = 0$.

ж) $u_{xx} - 2u_{xy}\sin x + (2-\cos^2 x)u_{yy} = 0$.

з) $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0$.

и) $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$.

к) $xy^2 u_{xx} - 2x^2 y u_{xy} + x^3 u_{yy} - y^2 u_x = 0$.

Задача 6. Определить тип линейного ДУЧП второго порядка, привести его к каноническому виду и найти общее решение.

а) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$.

б) $2x u_{xx} - 2y u_{yy} + u_x - u_y = 0$ (при $x > 0,\ y > 0$).

в) $u_{xx} - 2u_{xy}\sin x - u_{yy}\cos^2 x - u_y \cos x = 0$.

г) $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$.

д) $u_{xx} + 2u_{xy}\cos x - \left(3+\sin^2 x\right)u_{yy} + 4\left(\sin x - y - 2x\right)u_x +$
$$+\left(2\cos 2x - 4(y+2x)\cos x - 9\sin x + 8y + 16x\right)u_y = 0.$$

Задача 7. Найти общее решение ДУЧП второго порядка, приведя его к каноническому виду, и частное решение, соответствующее заданным начальным условиям.

а) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0;\quad u\big|_{y=0} = 3x^2;\quad u_y\big|_{y=0} = 0$.

б) $u_{xx} + 2u_{xy}\cos x - u_{yy}\sin^2 x - u_y \sin x = 0;\quad u\big|_{y=0} = y;\quad u_y\big|_{y=0} = -1$.

в) $(1+y^2)\cdot\left(4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy}\right) = 2y(2u_x - u_y);$

$u\big|_{y=0} = x^2 - 3x;\quad u_y\big|_{y=0} = 4x$.

Ответы

Ответы к задаче 1[2].

а) $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\varphi(y)$. **б)** $u(x,y)=\frac{y}{x}+\ln|y|+\varphi(x)$.

в) $u(x,y)=\frac{x^4}{4y}+\varphi(y)$. **г)** $u(x,y)=-\frac{1}{2}x\cos 2y+\varphi(x)$.

д) $u(x,y)=F\left(x^2+y^2\right)$. **ж)** $u(x,y)=F\left(xy-\frac{x^2}{2}\right)$.

з) $u(x,y)=F\left(e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-y\right)\right)$.

Ответы к задаче 2.

а) $u(x,y)=x\varphi(y)+\psi(y)$. **б)** $u(x,y)=\frac{y^2}{2}+y\varphi(x)+\psi(x)$.

в) $u(x,y)=\frac{x^5y}{20}+x\varphi(y)+\psi(y)$. **г)** $u(x,y)=\varphi(x)e^y+\psi(x)$.

д) $u(x,y)=\frac{2}{3}y\sqrt{x^3}+\frac{1}{3}x\sin 3y+\Phi(y)+\psi(x)$.

е) $u(x,y)=\varphi(x)+\frac{1}{x}\psi(y)$. *Указание.* Сделать замену $z=\frac{\partial u}{\partial y}$.

ж) $u(x,y)=\varphi(x)e^{y^2}+\psi(y)$.

Ответы к задаче 3.

а) $u(x,y)=\frac{1}{12}x^3y^2+x\Phi(y)+\Psi(y)+\omega(x)$.

---

[2] В ответах ко всем задачам F, φ, ψ, ω, Φ, Ψ — произвольные функции своих аргументов.

б) $u(x,y)=\dfrac{3xy^2}{2}+\dfrac{y\ln|x|}{2}+\Phi(y)+y\psi(x)+\omega(x)$.

в) $u(x,y)=\dfrac{2}{3}y^2\sqrt{x^3}+x\Phi(y)+\Psi(y)+\omega(x)$.

г) $u(x,y)=\dfrac{1}{y^3}e^{xy}+\dfrac{x^2}{2}\varphi(y)+x\psi(y)+\omega(y)$.

д) $u(x,y)=e^x\varphi(y)+x\psi(y)+\omega(y)$. *Указание:* замена $z=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

е) $u(x,y)=\dfrac{y^2}{2}\varphi(x)+\psi(x)+\omega(y)$.

ж) $u(x,y)=e^{xy}\varphi(x)+y\psi(x)+\omega(x)$.

Ответы к задаче 4.

а) $u(x,y)=\dfrac{\sin y-1}{x}$. Общее решение: $u(x,y)=\dfrac{\sin y}{x}+\varphi(x)$.

б) $u(x,y)=\sqrt{x^2+\ln y}$. Общее решение: $u(x,y)=F\left(ye^{x^2}\right)$.

в) $u(x,y)=y^2+\dfrac{y-1}{x}$. Общ. реш.: $u(x,y)=y^2+y\varphi(x)+\psi(x)$.

г) $u(x,y)=x^3+1+3y\sin y$. Общее реш.: $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$.

д) $u(x,y)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{x}{\cos y}+2e^{3y}$.

Общее решение: $u(x,y)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^2y}{2}+x\varphi(y)+\psi(y)$.

е) $u(x,y)=e^{x+y}+y\ln x+\sin 2x$.

Общее решение: $u(x,y)=e^{x+y}+y\varphi(x)+\psi(x)$.

Ответы к задаче 5[3]**.**

а) $u_{\xi\eta}=0$, гиперболическое, $\xi=x+\operatorname{arctg}y$, $\eta=x-\operatorname{arctg}y$.

б) $u_{\xi\eta}=0$, гиперболическое, $\xi=x-2y$, $\eta=x+2y$.

в) $u_{\eta\eta}=u_{\xi}$, параболическое, $\xi=\dfrac{x^2}{2}+y$, $\eta=x$.

г) $y>0$: $u_{\xi\eta}=\dfrac{u_\eta-u_\xi}{2(\xi-\eta)}$, гиперболич., $\xi=x+2\sqrt{y}$, $\eta=x-2\sqrt{y}$;

$y<0$: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\dfrac{u_\eta}{\eta}$, эллиптическое, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt{-y}$.

д) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, эллиптич., $\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

е) $x>0$: $u_{\xi\eta}=-\dfrac{u_\xi+u_\eta}{6(\xi+\eta)}$, гиперболич., $\xi=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+y$, $\eta=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+y$;

$x<0$: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{u_\xi}{3\xi}=0$, эллиптическое, $\xi=\dfrac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=y$.

ж) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta\cos\xi=0$, эллиптическое, $\xi=x$, $\eta=y-\cos x$.

з) $u_{\xi\eta}=\dfrac{u_\xi-u_\eta}{2(\xi-\eta)}+\dfrac{u_\xi+u_\eta}{4(\xi+\eta)}$, гиперболич., $\xi=y^2+e^x$, $\eta=y^2-e^x$.

и) $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, эллиптическое, $\xi=y$, $\eta=\operatorname{arctg}x$.

и) $u_{\eta\eta}=\dfrac{u_\eta}{\eta}-\dfrac{2\eta^2u_\xi}{\xi-\eta^2}$, параболическое, $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x$.

к) $x>0$: $u_{\xi\eta}=\dfrac{u_\eta-u_\xi}{2(\xi-\eta)}$, гиперб., $\xi=y-x+2\sqrt{x}$, $\eta=y-x-2\sqrt{x}$;

$x<0$: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\dfrac{u_\eta}{\eta}$, эллиптическое, $\xi=y-x$, $\eta=2\sqrt{-x}$;

$x=0$: $u_{yy}=0$, параболическое.

---

[3] В ответах к задаче 5 указаны канонический вид ДУЧП, его тип и рекомендуемая замена переменных.

Ответы к задаче 6.

а) $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}(y-3x)}\varphi(x+y)+\psi(y-3x)$; канонич. вид: $2u_{\xi\eta}=u_{\eta}$, $\xi=y-3x;\ \eta=y+x$.

б) $u(x,y)=\varphi\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+\psi\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)$; канонич. вид: $u_{\xi\eta}=0$.
общее решение $u(x,y)=\varphi\left(x+y-\sin x\right)+\psi\left(x-y+\sin x\right)$.

в) $u(x,y)=\varphi(y-x-\cos x)+\psi(y+x-\cos x)$; кан. вид: $u_{\xi\eta}=0$.

г) $u(x,y)=\varphi(xy)\ln(x)+\psi(xy)$; канонич. вид: $\eta u_{\eta\eta}+u_{\eta}=0$ при замене $\xi=xy;\ \eta=x$ (ДУ параболического типа)[4].

д) $u(x,y)=y\varphi(yx^2)+\psi(yx^2)$; канонич. вид: $u_{\eta\eta}=0$ при замене $\xi=yx^2;\ \eta=y$ (ДУ параболического типа).

Ответы к задаче 7.

а) $u(x,y)=3x^2+y^2$, общее решение: $u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(3x-y)$.

б) $u(x,y)=y-\sin x$,
общее решение $u(x,y)=\varphi\left(x+y-\sin x\right)+\psi\left(x-y+\sin x\right)$.

в) $u(x,y)=x^2-3x+2y^3+4y^2+4xy$,
общее решение $u(x,y)=\varphi\left(3x-2y^3\right)+\psi\left(x+2y\right)$.

---

[4] В ДУ параболического типа функция η выбирается произвольно, причем и канонический вид ДУ, и общее решение зависят от выбора η.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М., Наука, 2002.

2. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 400 с.
http://znanium.com/catalog/product/169279

3. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71690

4. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб, Лань, 2012.

5. Е.С. Соболева, Г.М. Фатеева. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 96 с. ISBN 978-5-9221-1053-2.
http://znanium.com/catalog/product/392891

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1999.

7. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – СПб: Лань, 2008. – 464 с.
https://e.lanbook.com/book/411

СОДЕРЖАНИЕ