СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические указания по курсовому проектированию для студентов магистратуры направления 09.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информационных систем и вычислительной техники

СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические указания по курсовому проектированию для студентов магистратуры направления 09.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 681.3.06 (073)

СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ: Методические указания по курсовому проектированию / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *И.В. Иванова*. СПб, 2021. 41 с.

Методические указания предназначены для выполнения курсового проекта по дисциплине «Системы поддержки принятия решений». В состав методических указаний входят теоретический материал, описание методологии решения задач, принцип формирования варианта задания (согласно шифру), приведен пример выполнения курсового проекта, список рекомендуемой литературы. Цель – ознакомить с методами получения результата при решении сложных задач принятия решений и реализации возможности принятия рациональных решений в условиях неполной, нечеткой, расплывчатой информации, дать практические навыки выбора конкретной альтернативы проектного решения.

Предназначены для студентов магистратуры направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии», направленность «Информационные системы и технологии».

Научный редактор доц. *Е.Б. Мазаков*

Рецензент проф. *А.М. Заяц* Санкт-Петербургский государственный Лесотехнический университет им. С.М. Кирова)

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Изучение данной дисциплины завершается выполнением курсового проекта. Практические занятия позволили закрепить полученные на лекциях знания и выработать необходимые для решения задач навыки работы с изученными алгоритмами. Цель курсового проекта – расширить и углубить эти навыки, научить студента самостоятельно применять полученные знания для решения конкретных задач.

В ходе выполнения курсового проекта студент должен показать умение:

– проводить формализацию задачи, описанной на содержательном уровне;

– осуществлять обоснованный выбор метода решения задачи;

– использовать известные методы для получения решения;

–проводить качественный анализ результатов решения, раскрывающий его смысл в контексте данной задачи.

Курсовой проект должен продемонстрировать способность студента самостоятельно и творчески использовать полученные знания, понимание студентом сути применяемых методов, исходных допущений и ограничений. Студент должен ясно представлять возможные области использования изучаемых методов и круг задач, которые могут быть решены с их помощью.

При выполнении курсового проекта студенты руководствуются следующим:

– заданием на курсовую работу;

– методическими указаниями по курсовому проекту;

– указаниями руководителя;

– конспектом лекций по курсу «Системы поддержки принятия решений»;

– учебным пособием и другой рекомендованной литературой.

Прежде, чем приступить к выполнению проекта, следует тщательно изучить содержание типового задания. Уяснив смысл задач и их связь с разделами курса, необходимо повторить соответствующий теоретический материал, затем с помощью имеющихся в типовом задании формул определить для каждой задачи требуемые исходные данные. Решать задачи надо в той последовательности, в которой они приведены, поскольку результаты решения каждой предыдущей задачи служат исходными данными для решения последующей. Во избежание грубых ошибок следует внимательно анализировать полученные результаты и осуществлять проверку всех проводимых расчетов.

Окончательно оформленный и подготовленный к сдаче курсовой проект должен содержать:

– титульный лист;

– оглавление;

– задание на курсовой проект;

– расчет всех исходных данных в соответствии с цифрами шифра студента;

– расчетно-пояснительную записку на 20–30 страниц;

– перечень использованной литературы;

– приложение.

Расчетно-пояснительная записка должна содержать решение трех оптимизационных задач по определению плановых показателей, включая необходимые для этого расчеты и иллюстрации. При описании задач рекомендуется выделять подзаголовками этапы решения. Все задачи курсового проекта необходимо реализовать на ЭВМ. Руководитель имеет право выдавать также и индивидуальные задания на программирование.

Курсовой проект пишется на стандартных листах бумаги. Рисунки, графики и таблицы выполняются на отдельных листах. Тексты программ следует помещать в приложении. Работа должна быть выполнена аккуратно, сброшюрована и пронумерована.

Курсовой проект сдается руководителю. Руководитель отмечает дату сдачи работы, составляет заключение и проставляет оценку на титульном листе. Защита курсового проекта производится в установленном порядке и в сроки, указанные руководителем.

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

Фирма «X», специализирующаяся на сборке компьютеров, разрабатывает план работы на год. В плане, помимо прочих показателей, необходимо указать:

– общее число стационарных (двуядерных и одноядерных) компьютеров, которое выпустит фирма за год;

– общее число ноутбуков (двуядерных и одноядерных), которое выпустит фирма за год;

– количество стационарных двуядерных компьютеров, которое выпустит фирма за год;

– количество стационарных двуядерных компьютеров, которое фирма планирует собирать в каждом квартале.

Перечисленные плановые показатели работы фирмы должны быть определены, исходя из следующих основных целей, сформулированных руководством фирмы:

– обеспечение максимального суммарного объема сбыта компьютеров всех типов, собираемых фирмой;

– обеспечение максимальной прибыли от сбора стационарных двуядерных компьютеров;

– минимизация затрат на сборку и хранение двуядерных компьютеров.

Руководство считает, что первая цель существенно важнее второй, вторая – существенно важнее третьей. Поэтому, определяя показатели работы объединения, студент должен в первую очередь, стремиться к достижению первой цели, затем второй и, наконец, – третьей, что соответствует последовательному решению трех различных оптимизационных задач.

Для расчета плановых показателей фирмы студент располагает следующей исходной информацией:

1. По данным торговых организаций потенциальный рынок региона, в котором фирма сбывает свою продукцию, составит в следующем году $N = 3 \cdot 10^6$ компьютеров

2. При наличии на рынке региона как стационарных, так и переносных компьютеров, половина покупателей предпочтет купить ноутбук.

3. В следующем году откроется фирма «Y», продукция

которой также поступит на рынок региона.

4. Фирма «X», будет собирать в следующем году стационарную модель «X-1» и переносную «X-2», а фирма «Y» – стационарную модель «Y-1» и переносную модель «Y-2».

5. Специалисты, проанализировав потребительские свойства продукции фирм, считают, что при наличии выбора между моделями «X-1» и «Y-1» покупатель выберет компьютер «X-1» с вероятностью

$$P_1 = 0,5 + \frac{k_2 + 1}{2\left(k_3 + 11\right)},$$

а при наличии выбора между моделями «X-2» и «Y-2» – модель «X-2» с вероятностью

$$P_1 = 0,5 + 0,02\left(k_1 + k_2 + 1\right),$$

где k_3, k_2 и k_1 – последние $k_3 k_2 k_1$ цифры номера зачетной книжки студента.

6. Сборка двуядерных стационарных компьютеров дает фирме прибыль, определяемую по функции прибыли

$$V = S\left(N_{\text{В}} - \frac{d}{2}\left|N_{\text{В}} - N_{\text{П}}\right|\right),$$

где $S = 10\left(k_2 + k_3 + 5\right)$ – прибыль от продажи одного двуядерного компьютера; $N_{\text{В}}$ – количество двуядерных компьютеров, планируемых к выпуску в следующем году; $N_{\text{П}}$ – прогнозируемый объем продажи двуядерных компьютеров фирмой в следующем году; d – число отделений фирмы, необходимое для производства двуядерных компьютеров в количестве, равном $N_{\text{В}}$.

7. Квартальная мощность одного отделения фирмы составляет $\eta = 4 \cdot 10^4$ двуядерных компьютеров.

8 Величина $N_{\text{П}}$ может быть определена либо путем выяснения и математической обработки мнений экспертов, либо после тщательного обследования, рынка сбыта региона. Стоимость подобного обследования составит $W = \left(2 + k_1\right) \cdot 10^5$ руб.

9. Спрос на двуядерные компьютеры в регионе распределен

по кварталам года неравномерно. Поэтому различны и планы их производства на квартал в фирме. Недовыполнение квартальных планов не разрешается.

В процентах от числа $N_В$ квартальные планы сборки для первых трех кварталов года составляют соответственно величины:

$$n_1 = \frac{80k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + 2};\ n_2 = \frac{80k_2}{k_1 + k_2 + k_3 + 2};\ n_3 = \frac{80k_3}{k_1 + k_2 + k_3 + 2}.$$

10. Затраты на сборку одного двуядерного компьютера составляют величину (в рублях)

$$F(d) = \frac{200(d+1)}{d} + 10k_1.$$

11. Затраты на хранение одного двуядерного компьютера составляют величину (в рублях)

$$Q = k_3 + 20\,.$$

12. Уровень запасов двуядерных компьютеров на фирме на начало и конец года должен быть равен нулю.

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Задание на курсовую работу требует от студента решения трех оптимизационных задач по заданным руководством объединения трем критериям эффективности.

Процесс решения каждой задачи содержит следующие основные этапы, которых рекомендуется придерживаться при выполнении курсовой работы:

1. Получение содержательного (словесного) описания задачи.
2. Формализация задачи.
3. Выбор метода решения.
4. Получение решения.
5. Анализ результатов решения.

На первом этапе необходимо дать качественное описание задачи, содержащее:

– формулировку цели решения задачи;
– перечисление переменных управления;
– перечисление неуправляемых переменных;

– перечисление переменных состояния;

– перечисление имеющихся для решения задачи исходных данных.

После этого можно приступать к этапу формализации, суть которого заключается в построении математической модели, описывающей задачу. Вид математической модели зависит, прежде всего, от характерных для данной задачи условий принятия решений. Уже было отмечено, что различают четыре класса задач:

– задачи принятия решений в условиях определенности;

– задачи принятия решений в условиях риска;

– задачи принятия решений в условиях неопределенности;

– многокритериальные задачи принятия решений.

Необходимо выяснить класс решаемой задачи, после чего подобрать для нее наиболее подходящую – из изученных в соответствующем разделе курса – математическую модель. При этом следует убедиться, что все ограничения и допущения, на которых построена модель, справедливы для данной задачи.

Как правило существует больше одного метода получения решения на модели данного класса. Поэтому этап выбора метода решения часто бывает нетривиальным. Предпочтение следует отдать методу, решающему данную задачу наиболее просто, не требующему больших затрат времени при расчетах и обеспечивающему достаточную точность.

На этапе получения решения необходимо правильно и точно произвести все расчеты в соответствии с выбранным методом. Порядок расчетов должен быть четко описан, все расчетные формулы приведены в общем виде.

Анализ результатов важен для уяснения физического смысла полученного решения. За формальными математическими схемами, используемыми для расчетов, студент должен не упускать из виду содержательную сторону процесса решения. Совершенно необходимо уметь придать каждому результату конкретный смысл, позволяющий связать его с существом решаемой задачи. Это умение студент Должен продемонстрировать на этапе анализа результатов, завершающем процесс решения задачи.

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

1.1 ЗАДАЧА 1

Описание. Согласно заданию, целью решения первой задачи является максимизация суммарного объема сбыта компьютеров всех типов (стационарных и переносных), собираемых фирмой. Объем сбыта зависит от размеров рынка сбыта, числа компьютеров каждого типа, выпущенных фирмой, наличия на рынке сбыта конкурирующей продукции и предпочтений покупателей. Из перечисленных переменных руководство фирмы может изменять по своему усмотрению только число собираемых стационарных и переносных компьютеров. Следовательно, переменными управления в первой задаче служат: q_1 – количество стационарных компьютеров, которое укомплектует фирма за год; q_2 – количество ноутбуков, которое поставит фирма за год.

Оптимальные значения q_1 и q_2 и есть искомые значения первых двух показателей плана работы фирмы на следующий год.

Объем сбыта фирмы зависит не только от производственной деятельности собственно фирмы, но и от работы конкурирующей фирмы «Y». Однако руководство фирмы не в состоянии влиять на ассортимент и количество продукции, выпускаемой на фирме «Y». Поэтому переменные x_1 – количество стационарных компьютеров, которое выпустит фирмы «Y» за год, и x_2 – количество ноутбуков, которое выпустит фирма «Y» за год, являются в данной задаче неуправляемыми.

Осталось выяснить переменные состояния задачи. К таким переменным относятся все характеристики, определяющие возможности реализации продукции на рынке сбыта, а именно: P_1 P_2, N и P_1, где P – вероятность того, что при наличии выбора между стационарным и переносным компьютерами покупатель предпочтет стационарный.

Для определения исходных данных следует воспользоваться п. 1–5 задания, в которые сведена вся необходимая для решения задачи информация.

Формализация. Построение математической модели следует начинать с уяснения класса задачи. Анализируя данное выше описание задачи на содержательном уровне, следует показать, что первая оптимизационная задача относится к классу игровых задач принятия решений.

Как известно [7], игра формально задается кортежем

$$\Gamma =< J, \{S_i\}_{i\in J}, \{\varphi_i\}_{i\in J} >,$$

где J – множество игроков, S_i – множество стратегий i -го игрока, φ_i – функция выигрыша i -го игрока.

В данной задаче можно выделить двух игроков – фирма «X» и фирма «Y», – что дает $J = \{1, 2\}$. Оба игрока располагают двумя чистыми стратегиями:

1) выпускать стационарные компьютеры – S_{1i} ;

2) выпускать ноутбуки – S_{2i} .

Следовательно, $S_1 = \{S_{11,} S_{21}\}$, а $S_2 = \{S_{12,} S_{22}\}$.

Функции выигрыша игроков при конечном числе используемых стратегий удобно задавать в матричном виде. Для первого игрока – фирма «X» – матрица выигрыша $\varphi = \varphi_{kj}$, $k = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$. Величина φ_{kj} должна по условию задачи характеризовать максимальное число компьютеров, которое сможет реализовать фирма на рынке региона, если оно изберет k -ю стратегию, а фирма «Y» будет придерживаться j -й стратегии. Величина φ_{kj} по разному определяется для случаев $k = j$ и $k \neq j$.

При $k = j$ фирма «X» и фирма «Y» выбирают одинаковые стратегии, т. е. на рынке региона будут продаваться две модели стационарных компьютеров $(k = j = 1)$ или две модели ноутбуков $(k = j = 2)$. Эти модели будут конкурировать между собой на рынке сбыта объемом N и согласно п. 5 задания, фирма сможет в этом случае реализовать $\varphi_{kj} = P_k N$ своих компьютеров.

Если же $k \neq j$, то фирма «X» и фирма «Y» будут выпускать компьютеры разных классов (одна их фирм – стационарные, а другая – ноутбуки). При этом рынок сбыта стационарных компьютеров составит величину

$$N_1 = PN,$$

а ноутбуков

$$N_2 = (1-P)N,$$

Имея разделенные рынки сбыта, фирма «X» и фирма «Y» не конкурируют между собой и могут их полностью насытить, т. е. $\varphi_{12} = N_1$, $\varphi_{21} = N_2$.

Аналогично определяются и остальные элементы матрицы φ . Затем следует построить матрицу выигрыша второго игрока ψ и доказать на основе анализа матриц φ и ψ , что наша задача описывается игрой с постоянной суммой.

Выбор метода решения. Игры двух лиц с постоянной суммой стратегически эквивалентны антагоническим, поэтому имеют с ними одни и те же ситуации равновесия. Это позволяет использовать в данной задаче методы решения антагонистических игр [4], Студент может выбрать любой из этих методов, но с обязательным обоснованием своего выбора, включая анализ основных достоинств и недостатков перечисляемых им методов.

Выбрав метод, необходимо кратко описать его суть и возможности. Например, если решено использовать графический метод, то следует указать, что он основан на построении семейства прямых, характеризующих изменение ожидаемого выигрыша игрока в зависимости от применяемой смешанной, стратегии. Метод прост и нагляден, однако может использоваться только, если один из игроков имеет всего две стратегии.

Решение. Описывается алгоритм получения решения с помощью выбранного метода. Все необходимые для расчетов формулы и соотношения приводятся в общем виде.

На основе решения задачи устанавливаются значения двух плановых показателей фирмы, а именно: количество стационарных и переносных компьютеров, которое фирме следует выпустить в следующем году. Подсчитывается число отделений фирмы, необходимое для реализации планируемого объема сборки.

Рассмотрим пример решения задачи, который показывает выполнение в основном расчетной части задачи, а потому не содержит всех, описанных этапов и, конечно, не может рассматриваться как эталон, которому студент должен следовать при оформлении работы. Сделанное замечание относится и к примерам решения остальных задач курсовой работы.

Вычислим исходные данные. Пусть $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$. Тогда, согласно п. 5 задания, получим:

$$P_1 = 0,5 + \frac{k_2 + 1}{2\left(k_3 + 11\right)} = 0,5 + \frac{1+1}{2\left(3+11\right)} = 0,571;$$

$$P_2 = 0,5 + 0,02\left(k_1 + k_2 + 1\right) = 0,5 + 0,02(5+1+1) = 0,640.$$

По п. 2 задания имеем $P = 0,5.$

Для построения матрицы выигрыша первого игрока (фирмы «X») найдем выигрыш φ_{kj} для всех $k, j = \overline{1,2}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{11} = P_1 N = 0,571 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,71 \cdot 10^6;\\
&\varphi_{22} = P_2 N = 0,640 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,92 \cdot 10^6;\\
&\varphi_{12} = N_1 = PN = 0,5 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^6;\\
&\varphi_{21} = N_2 = (1-P)N = 0,5 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^6.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Следовательно, матрица выигрыша фирмы «X»

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1,71 \cdot 10^6 & 1,5 \cdot 10^6 \\ 1,5 \cdot 10^6 & 1,92 \cdot 10^6 \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 1,71 & 1,5 \\ 1,5 & 1,92 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находится матрица выигрыша $\psi = \left(\psi_{kj}\right)$ второго игрока (фирмы «Y»):

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{11} = (1-P_1)N = 0,429 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,29 \cdot 10^6; \\ &\psi_{22} = (1-P_2)N = 0,360 \cdot 3 \cdot 10^6 = 1,08 \cdot 10^6; \\ &\psi_{12} = N_2 = (1-P)N = 1,5 \cdot 10^6; \\ &\psi_{21} = N_1 = PN = 1,5 \cdot 10^6. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

откуда имеем

$$\psi = 10^6 \begin{pmatrix} 1,29 & 1,5 \\ 1,5 & 1,08 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из формул (1) и (2) ясно, что

$\varphi_{kj} + \psi_{kj} = N$ для всех $k, j = \overline{1,2}$,

т.е. данная игра относится к классу игр с постоянной суммой. Однако полезно сделать численную проверку этого факта, чтобы убедиться в отсутствии арифметических ошибок:

$$\varphi_{11} + \psi_{11} = 10^6\left(1,71 + 1,29\right) = 3 \cdot 10^6;$$

$$\varphi_{22} + \psi_{22} = 10^6\left(1,92 + 1,08\right) = 3 \cdot 10^6;$$

$$\varphi_{12} + \psi_{12} = 10^6\left(1,5 + 1,5\right) = 3 \cdot 10^6;$$

$$\varphi_{21} + \psi_{21} = 10^6\left(1,5 + 1,5\right) = 3 \cdot 10^6.$$

При нахождении решения игры следует, прежде всего, попытаться найти ситуацию равновесия в чистых стратегиях. Как известно [2], это возможно в случае, когда выполняется равенство максиминов

$$\max_k \min_j \varphi_{kj} = \max_j \min_k \varphi_{kj}. \tag{3}$$

Проверим, выполняется ли равенство (3) для матрицы φ или, что тоже самое, для матрицы $\varphi' = 10^{-6}\varphi$:

$$\varphi' = \begin{vmatrix} 1,71 & 1,5 \\ 1,5 & 1,92 \end{vmatrix} \begin{matrix} \to \min\limits_j \varphi_{1j} = 1,5 \\ \to \min\limits_j \varphi_{2j} = 1,5 \end{matrix} \Bigg\} \max_k \min_j \varphi_{kj} = 1,5;$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\underbrace{\max_k \varphi_{k1} = 1,71 \quad \max_k \varphi_{k2} = 1,92}_{\min\limits_j \max\limits_k \varphi_{kj} = 1,71.}$$

Итак, равенство максиминов не выполняется, и решение игры существует только в смешанных стратегиях. Для нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков воспользуемся графическим методом. Пусть $x = (x_1, 1 - x_1) -$ смешанная стратегия фирмы «X». Тогда ожидаемый выигрыш фирмы «X» в ситуации (x, j)

$$M\varphi\left(x, j\right) = x_1\varphi_{1j} + \left(1 - x_1\right)\varphi_{2j}.$$

Если фирма «Y» использует первую чистую стратегию, то $j = 1$ и

$$M\varphi\left(x, 1\right) = x_1 \cdot 1,71 \cdot 10^6 + \left(1 - x_1\right)1,5 \cdot 10^6, \tag{4}$$

если же $j = 2$, то

$$M\varphi\left(x, 2\right) = x_1 \cdot 1,5 \cdot 10^6 + \left(1 - x_1\right)1,92 \cdot 10^6. \tag{5}$$

Построив уравнение (4) и (5) на графике (см. рис. 1), находим нижнюю огибающую, высшая точка которой дает оптимальное значение

$$x_1 = x_1^0 = 0,67,$$

что соответствует цене игры

$$V = M\varphi\left(x^0,1\right) = M\varphi\left(x^0,2\right) = 1,6\cdot 10^6. \quad M\varphi\left(x,j\right)\cdot 10^{-6}$$

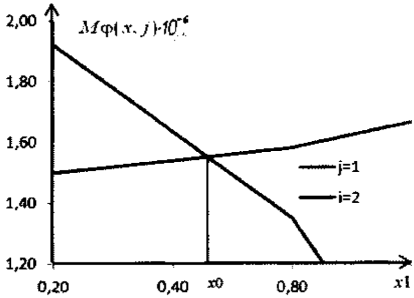

Рис. 1. Нахождение седловой точки графическим методом

Более точный результат можно получить аналитически, разрешив уравнение

$$M\varphi\left(x^0,1\right) = M\varphi\left(x^0,2\right)$$

относительно x_1^0, В этом случае имеем

$$x_1^0\varphi_{11} + (1-x_1^0)\varphi_{21} = x_1^0\varphi_{12} + (1-x_1^0)\varphi_{22},$$

откуда после элементарных преобразований получим

$$x_1^0 = \frac{\varphi_{22}-\varphi_{21}}{\varphi_{11}-\varphi_{12}-\varphi_{21}+\varphi_{22}} = \frac{1,92-1,5}{1,71-1,5-1,5+1,92} = 0,667,$$

что дает цену игры

$$V = x_1^0 \varphi_{11} + \left(1 - x_1^0\right) \varphi_{21} = 0,667 \cdot 1,71 \cdot 10^6 + 0,333 \cdot 1,5 \cdot 10^6 = 1,64 \cdot 10^6.$$

Таким образом, фирме «Х» следует запланировать на следующий год сборку $1,64 \cdot 10^6$ компьютеров, из них стационарных

$$q_1 = x_1^0 V = 0,667 \cdot 1,64 \cdot 10^6 = 1,09 \cdot 10^6,$$

т, е. $1,09$ миллиона, а остальные – переносные в количестве

$$q_2 = (1 - x_1^0) \cdot V = 0,333 \cdot 1,64 \cdot 10^6 = 0,55 \cdot 10^6.$$

1.2 ЗАДАЧА 2

Описание. Целью решения задачи является максимизация прибыли от сборки стационарных двуядерных компьютеров. Эта прибыль зависит от выручки за один компьютер S, числа выпущенных $N_{\text{В}}$ и проданных $N_{\text{П}}$ двуядерных компьютеров так, как указано в п. 6 задания, а именно:

$$V = S \cdot (N_{\text{В}} - \frac{d}{2} \left| N_{\text{В}} - N_{\text{П}} \right|). \tag{6}$$

Из (6) видно, что фирма «Х» может влиять на прибыль V , только изменяя величину $N_{\text{В}}$, которая, таким образом, является единственной переменной управления в данной задаче.

Неуправляемых входных воздействий задача не содержит. Переменными состояния, характеризующими рынок региона, являются величины S и $N_{\text{П}}$. Величина d есть функция от $N_{\text{В}}$:

$$d = \left] \frac{N_{\text{В}}}{4\eta} \right[, \tag{7}$$

где $]x[$ означает округление числа x до ближайшего целого числа с избытком.

Для решения задачи необходимо знать величину $N_{\text{П}}$. Согласно п. 8 задания, $N_{\text{П}}$ можно определить либо экспертным путем, либо проведя соответствующее обследование рынка сбыта. Задача студента – определить, какой путь выгоднее избрать.

Формализация и метод решения. Из приведенного описания ясно, что данная задача относится к классу задач принятия решений в условиях риска. Формализация такой задачи сводится к построению дерева решений, наглядно отображающего взаимосвязь всех стратегий и исходов (см. рис. 2).

Дерево решений содержит вершины двух типов: вершины-решения и вершины-случаи. В вершине-решении право выбора ветви (стратегии) принадлежит лицу, принимающему решение (ЛПР). В вершине-случае выбор ветви происходит случайным образом в соответствии с вероятностным распределением, которое должно быть известно ЛПР. На рис. 2 вершины-решения обозначены квадратами, а вершина-случай – кружком. Точками обозначены возможные исходы. Рядом проставлены соответствующие им значения выигрыша (прибыли).

Опишем дерево решений на рис. 2. Дерево имеет корнем вершину A, в которой ЛПР имеет право выбора между стратегиями A_1 (не проводить обследование рынка сбыта) и A_2 (провести обследование рынка сбыта). Если ЛПР выберет A_1, то окажется в вершине B. Задача ЛПР в этой вершине – определить оптимальный объем выпуска $N_{\text{В}}$ двуядерных стационарных компьютеров.

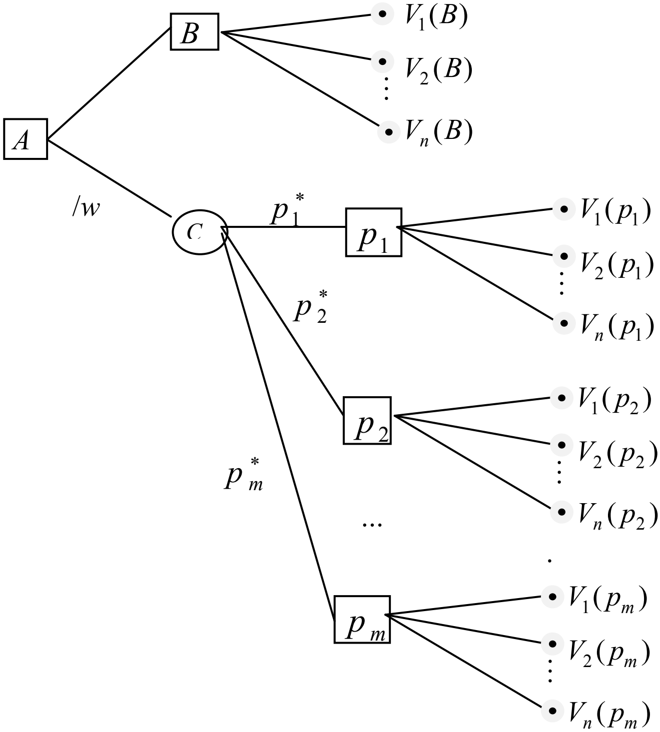

Рис. 2. Дерево решений

На рис. 3 приведена зависимость $\frac{d}{2}\left|N_{\text{В}} - N_{\text{П}}\right|$ от величины $N_{\text{В}}$ для случая, когда $N_{\text{П}} = 0{,}36 \cdot 10^6$. Эта зависимость имеет вид ломаной, каждый участок которой соответствует значению d , указанному на графике.

Разность $N_{\text{В}} - \frac{d}{2}\left|N_{\text{В}} - N_{\text{П}}\right|$ пропорциональна, прибыли V и, как видно из графика, может достигнуть максимума только в точке, являющейся одним из углов ломаной, что соответствует полной загрузке всех d отделов фирмы.

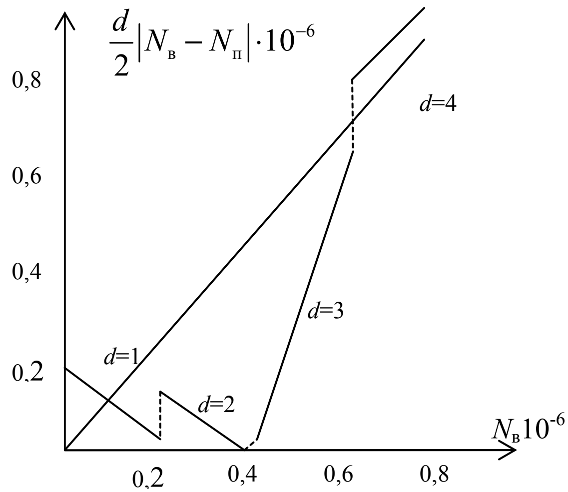

Рис.3. Зависимость прибыли от объема выпуска

Следовательно, задача определения величины $N_{\text{В}}$, максимизирующей прибыль V, сводится к отысканию оптимального значения d. Очевидно, что $d=\overline{1,n},$ где максимальное число отделений фирмы по сборке двуядерных компьютеров.

$$n=\left]\frac{q_1}{4\eta}\right[. \tag{8}$$

Для каждого значения $d=\overline{1,n},$ по формуле (6) легко подсчитать прибыль $V_d\left(B\right)$, если известна величина $N_{\text{П}}$. В вершине B для определения $N_{П}$ ЛПР может воспользоваться только своими субъективными соображениями о том, какая часть стационарных компьютеров может быть собрана в двуядерном исполнении. Так, ЛПР может считать, что

$$N_{\text{П}} = q_1 p*, \tag{9}$$

где $p*$ – субъективная вероятность, с которой, по мнению ЛПР, покупатель предпочтет двуядерный компьютер одноядерному. Непосредственно назначить величину $p*$, как правило, не представляется возможным. Поэтому следует положить $p* = \overline{p}*$, где $\overline{p}*$ – математическое ожидание значения $p*$, вычисленное по субъективному интегральному распределению, $p*(p \leq x)$, а для нахождения интегрального распределения воспользоваться алгоритмом, описанным ниже.

Определив $V_d(B)$, для всех $d = \overline{1,n}$, следует выбрать

$$V^{\circ}(B) = \max_d V_d(B). \tag{10}$$

Найденное при этом оптимальное число отделений фирмы h определит оптимальный объем выпуска двуядерных компьютеров за квартал в случае принятия стратегии A_1:

$$N_{\text{ВОПТ}}(A_1) = 4\eta. \tag{11}$$

Если ЛПР выберет стратегию A_2, то из вершины A он перейдет в вершину-случай C, заплатив за проведение обследования W рублей. Результатом обследования должно быть нахождение объективной вероятности p, с которой покупатель предпочитает покупку двуядерного компьютера покупке одноядерного. Поскольку выбор между стратегиями A_1 и A_2 ЛПР обязан сделать до начала обследования рынка региона, значение p ему неизвестно. В принципе p может оказаться любым числом в интервале $[0,1]$. Однако для упрощения задачи будем полагать, что множество возможных значений p дискретно. Для этого достаточно разбить интервал $[0,1]$ на m равных отрезков и считать, что p может попадать только в середину каждого из отрезков. Для случая $m=10$ (см. рис. 4) получим тогда множество возможных значений вероятности p $p=\{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$, где $p_1=0{,}05$, $p_2=0{,}15$, $p_3=0{,}25$ и так далее.

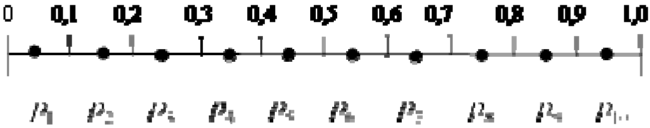

Рис. 4. Выбор точек

В вершине C дерева решений с некоторой субъективной вероятностью p_i^* реализуется одно из возможных значений $p_i, \left(i=\overline{1,m}\right)$. Следовательно, из C должно выходить m ветвей.

Пусть, например, $p=p_1$. Тогда ЛПР окажется в вершине p_1, где он должен выбрать оптимальный объем выпуска, доставляющий прибыль $V^\circ(p_1)=\max\limits_d V_d(p_1)$ в предположении, что $p=p_1$ и, следовательно, $N_\Pi = g_1 p_1$.

Аналогично находятся максимальные прибыли и для остальных вершин p_i.

В общем случае оптимальная прибыль в вершине p_i

$$V^\circ(p_i)=\max_d V_d(p_i). \tag{12}$$

После вычисления $V^\circ(p_i)$ для всех $i=\overline{1,m}$ ЛПР будет знать выигрыши, которые он получит при попадании в каждую из вершин p_i Поэтому часть дерева, имеющая корнем вершину C, примет вид, показанный на рис. 5.

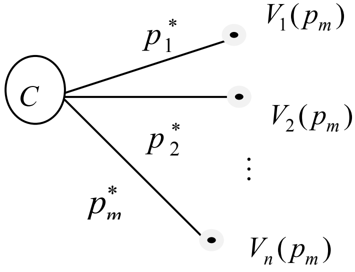

Рис. 5. Часть дерева решений после нахождения значений $V^\circ\left(p_i\right)$.

Теперь легко определить ожидаемый выигрыш в вершине C:

$$V^\circ\left(C\right)=\sum_{i=1}^{\cdot m} p_i^* \cdot V^\circ\left(p_i\right), \tag{13}$$

если, конечно, известны значения p_i^* для всех $i=\overline{1,m}$.

Будем считать, что p_i^* равна субъективной вероятности попадания непрерывной случайной величины $p\in\left[0,1\right]$ в i -й интервал l_i.

Согласно рис. 4 интервал

$$l_i=\left(\frac{i-1}{m},\frac{1}{m}\right).$$

Следовательно, вероятность

$$p_i^*=p^*\left(\frac{i-1}{m}\le p\le\frac{1}{m}\right)$$

или, что то же самое,

$$p_i^* = p^*\left(p \le \frac{1}{m}\right) - p^*\left(p \le \frac{i-1}{m}\right). \tag{14}$$

Для расчета p_i^* по формуле (14) требуется знать субъективное интегральное распределение $p^*\left(p \le x\right)$. Однако это распределение ЛПР должно быть уже известно, поскольку оно было необходимо при нахождении $V^{\circ}\left(B\right)$.

Вычислив $V^{\circ}\left(B\right)$и $V^{\circ}\left(C\right)$ легко произвести выбор стратегии составления годового плана. Для этого следует определить ценность информации, которая может быть получена при проведении обследования рынка сбыта,

$$F = V^{\circ}\left(C\right) - V^{\circ}\left(B\right). \tag{15}$$

Если $E \le W$, то предпочтение следует отдать стратегии A_1, записав в план значение $N_{\text{В}}$, обеспечивающее получение прибыли $V^{\circ}\left(B\right)$. В случае, когда $E > W$, ценность информации превышает затраты на ее получение и организация обследования становится целесообразной, что соответствует выбору стратегии A_2 Поскольку студент не в состоянии провести реальное обследование рынка сбыта, при выборе. A_2 следует принять $N_{\text{П}} = 0,7P_1g_1$, где P_1 определяется по п. 5 задания на курсовую работу.

Решение. Последовательность необходимых для решения задачи действий сводится к следующему:

1. Строится дерево решений, для чего определяются n и m.

2. На ветвях дерева, выходящих из вершин-решений, проставляются соответствующие им стратегии.

3. На ветвях, выходящих, из вершины-случая, проставляются вероятности их реализации. Поскольку эти вероятности носят субъективный характер, то для их нахождения используется специальный алгоритм, описанный ниже.

4. По формуле (6) находятся $V_d(B)$ для $d=\overline{1,n}$ и проставляются в конечных точках ветвей, выходящих из вершины B. При этом объем выпуска $N_{\text{В}} = 4\eta d$, а объем продажи определяется до формуле (9).

5. Производится свертка ветвей, выходящих из вершины B, для чего по формуле (10) определяется максимально возможная прибыль в этой вершине $V^{\circ}(B)$.

6. Для каждой вершины p_i находятся значения $V_d(p_i)$ для всех $d=\overline{1,n}$. При этом полагается, что $N_{\text{П}} = p_i g_1$. Полученные значения $V_d(p_i)$ проставляются в конечных точках ветвей, выходящих из вершин $p_i \left(i=\overline{1,m}\right)$.

7. Сворачиваются ветви, выходящие из вершины p_i, для чего по формуле (12) определяются максимально возможные прибыли $V^{\circ}(p_i)$ для всех $i=\overline{1,m}$.

8. Значения $V^{\circ}(p_i)$ усредняются по формуле (13), что позволяет определить ожидаемую прибыль $V^{\circ}(C)$ в вершине C.

9. По формуле (15) определяется ценность E информации о числе покупателей, предпочитающих двуядерный стационарный компьютер одноядерному.

10. Сравнивая значение E и стоимость обследования W, выбирают стратегию составления плана (A_1 или A_2).

11. Зная оптимальную стратегию и соответствующую ей максимальную прибыль, определяют оптимальное значение $N_{\text{В}}$, которое и следует принять в качестве искомого планового показателя – числа двуядерных стационарных компьютеров, которое фирма «X» выпустит в следующем году.

Анализ решения. Определяется число отделений фирмы d, необходимое для сборки в течение года запланированного числа двуядерных компьютеров, и доля двуядерных компьютеров в общем объеме сборки стационарных компьютеров в фирме «Х».

Алгоритм построения интегрального распределения субъективной вероятности. Интегральное распределение $p^*\left(p \le x\right)$ позволяет вычислить субъективную вероятность попадания величины p в интервал $\left[0,x\right]$. В нашем случае под p понимается объективная вероятность того, что покупатель предпочтет двуядерный стационарный компьютер одноядерному.

Алгоритм содержит несколько шагов, на каждом из которых ЛПР производит разбиение некоторого интервала на два подынтервала так, чтобы попадание величины p в первый подынтервал осуществлялось, по мнению ЛПР, с той же субъективной вероятностью, что и во второй. Такие подынтервалы будем называть равновероятными (равноправдоподобными).

Рассмотрим несколько шагов алгоритма определения функции $p^*\left(p \le x\right)$.

1. На отрезке $\left[0,1\right]$, являющемся областью определения величины p, ЛПР просят указать точку x_1, такую, что, по его мнению, вероятность попадания p в интервал $\left[0,x_1\right]$ равна вероятности попадания p в интервал $\left[x_1,1\right]$. Если ЛПР указал такую точку x_1, то можно записать, что

$$p^*\left(p \le x_1\right) = 0,5.$$

Эту же запись можно представить и так: $p_{0,5} = x_1$, т. е. квантиль порядка $0,5$ равен x_1. Напомним, что квантилем $p_a = x_{\text{В}}$ порядка a называется такая верхняя граница $x_{\text{В}}$ интервала изменения случайной величины x, при которой x попадает в интервал $\left[0,x_{\text{В}}\right]$ с вероятностью a. Следовательно, квантиль порядка $0,5$ показывает, какой интервал надо взять для величины p, чтобы она попала в него с вероятностью $0,5$.

2. ЛПР говорят, что $p \in [0, x_1]$, и просят с учетом этого факта разбить интервал $[0, x_1]$ на два равновероятных подынтервала. В результате получим точку x_2, для которой

$$p^*(p \le 0,25) = x_2 \text{ или } p_{0,25} = x_2,$$

т.е. в интервал $[0, x_2]$ случайная величина p попадает с вероятностью $0,25$.

3. Интервал $[x_1, 1]$ ЛПР разбивает на два равновероятных, указав точку $x_3 \in [x_1, 1]$, такую, что, по его мнению,

$$p^*(x_1 \le p \le x_3) = p^*(x_3 \le p \le 1).$$

Указанное разбиение ЛПР осуществляет, исходя из предположения о том, что $p \in [x_1, 1]$.

Очевидно (см. шаг 1), что

$$p^*(x_1 \le p \le x_3) + p^*(x_3 \le p \le 1) = 0,5.$$

Поэтому

$$p^*(x_1 \le p \le x_3) = 0,25,$$

а вероятность

$$p^*(p \le x_3) = p^*(p \le x_1) + p^*(x_1 \le p \le x_3) = 0,5 + 0,25 = 0,75,$$

откуда имеем

$$p_{0,75} = x_3,$$

т. е. величина p попадает в интервал $[0, x_3]$ с вероятностью $0,75$.

На последующих шагах процесс разбиения интервалов на все более мелкие подинтервалы осуществляется аналогичным образом. Процесс заканчивается, когда набирается достаточное число квантилей для аппроксимации искомого распределения.

Проиллюстрируем суть рассмотренного алгоритма на примере решения следующей задачи. Пусть статистическому управлению (O) нужно выяснить долю семей, проживающих в Санкт-Петербурге и имеющих двух детей. Данные по этому вопросу у О отсутствуют, обследование проводить дорого и долго. Поэтому О обращается к наиболее компетентному в данном вопросе должностному лицу (ДЛ). Приведем начало диалога, в ходе которого О получает необходимые для построения искомого субъективного распределения данные.

О . Я хотел бы узнать, какой процент p городских семей имеют двоих детей в возрасте до 16 лет?

ДЛ. Сожалею, но я не располагаю такими данными. У меня нет ни малейшего понятия о том, какова эта доля. Даже если вы попросите указать хотя бы ее приблизительное значение, я не смогу этого сделать.

О . Я не собираюсь заставлять вас заниматься «угадыванием». Позвольте мне просто задать вам ряд наводящих вопросов. Как вы считаете, что более правдоподобно: что p меньше $0,1$ или больше?

ДЛ. Конечно больше.

О . Что более правдоподобно: что p больше $0,9$ или меньше?

ДЛ. Меньше.

О . Следовательно, между $0,1$ и $0,9$ находится некоторое число x_1 , относительно которого вам трудно было бы решить, превосходит p значение x_1 или нет. Не могли бы вы назвать такое число x_1?

ДЛ. Я думаю, что приблизительно $x_1 = 0,3$. Во всяком случае, я не могу решить, что более вероятно: $p \le 0,3$ или $p \ge 0,3$.

О . Указав число $x_1 = 0,3$, мы, по существу, разбили интервал от 0 до 1 на два равновероятных интервала. Давайте продолжим этот процесс дальше. Что вы считаете более вероятным: что p меньше $x_2 = 0,2$ или что p лежит в пределах от $0,1$ до $0,3$?

ДЛ. Что p лежит в пределах от $0,1$ до $0,3$?

О . А если взять $x_2 = 0,2$?

ДЛ. Тогда я затрудняюсь ответить на ваш вопрос.

О . Значит, в интервал от 0 до 0,2 величина p попадает с вероятностью $0,25$. А как разбить интервал от $0,3$ до 1 на два равновероятных подынтервала?

ДЛ. До этого момента мне было все более-менее ясно, но теперь я не совсем понимаю смысл вопроса.

О . Хорошо, тогда я сформулирую вопрос несколько по-другому. Предположим, вы точно знаете, что p больше $0,3$. Зная это, как вы разобьете интервал от $0,3$ до 1 на два одинаково правдоподобных отрезка? На этот вопрос ответить уже проще. Думаю, что это точка $x_3 = 0,4$.

О . (про себя). Значит, $p_{0,75} = 0,4$. Скажите . . .

Найденные в ходе беседы работника статистического управления и должностного лица квантили образуют на графике (см. рис. 6) точки, по которым строится интегральное распределение. Аналогичный график, но характеризующий собственные субъективные представления о спросе на двуядерные компьютеры, студент должен построить на миллиметровой бумаге в достаточно крупном масштабе и привести в работе.

Пример. Для решения задачи воспользуемся деревом, показанным на рис. 2. Согласно решению первой задачи фирма «Х» должна собрать за год $q_1 = 1,09 \cdot 10^6$ стационарных компьютеров. Тогда по формуле (8) получим

$$n = \left]\frac{1,09 \cdot 10^6}{4 \cdot 4 \cdot 10^4}\right[= \left]6,81\right[= 7.$$

Величину m выберем равной 10, что обеспечит достаточную для учебных целей точность обработки графика на рис.6. Математическое ожидание величины p^*

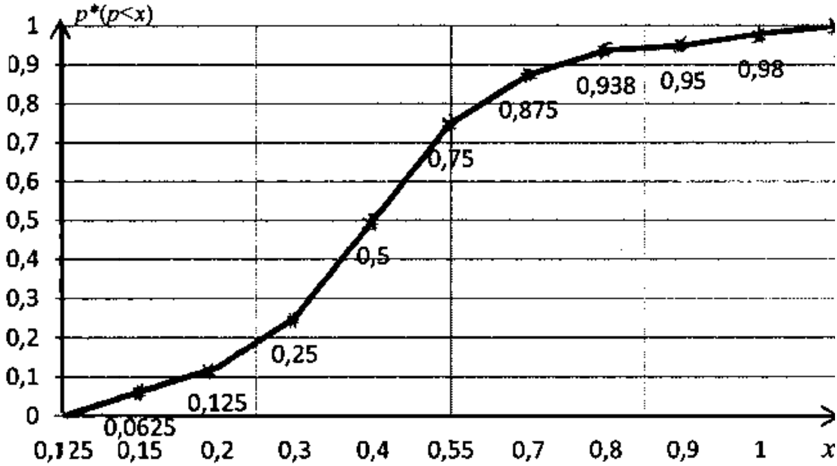

Рис. 6. Пример интегрального распределения

$$p^* \approx \sum_{i=1}^{m} p_i^* \cdot p_i, \tag{16}$$

где p_i, согласно рис. 4, есть координата средней точки интервала l_i, $p_i^* = p^*\left(p \in l_i\right) -$ субъективная вероятность попадания p в интервал l_i.

Воспользовавшись (14), определим p_i^* для всех $i = \overline{1,m}$. Из графика (рис. 6) имеем

$$p_1^* = p^*\left(p \le 0,1\right) - p^*\left(p \le 0\right) = p^*\left(p \le 0,1\right) = 0,4;$$
$$p_2^* = p^*\left(p \le 0,2\right) - p^*\left(p \le 0,1\right) = 0,25 - 0,04 = 0,21;$$
$$p_3^* = p^*\left(p \le 0,3\right) - p^*\left(p \le 0,2\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25;$$
$$p_4^* = p^*\left(p \le 0,4\right) - p^*\left(p \le 0,3\right) = 0,75 - 0,5 = 0,25;$$
$$p_5^* = p^*\left(p \le 0,5\right) - p^*\left(p \le 0,4\right) = 0,85 - 0,75 = 0,1;$$
$$p_6^* = p^*\left(p \le 0,6\right) - p^*\left(p \le 0,5\right) = 0,9 - 0,85 = 0,05;$$
$$p_7^* = p^*\left(p \le 0,7\right) - p^*\left(p \le 0,6\right) = 0,94 - 0,9 = 0,04;$$
$$p_8^* = p^*\left(p \le 0,8\right) - p^*\left(p \le 0,7\right) = 0,97 - 0,94 = 0,03;$$
$$p_9^* = p^*\left(p \le 0,9\right) - p^*\left(p \le 0,8\right) = 0,99 - 0,97 = 0,02;$$
$$p_{10}^* = p^*\left(p \le 1,0\right) - p^*\left(p \le 0,9\right) = 1 - 0,99 = 0,01.$$

Правильность произведенных расчётов легко проверить, определив сумму p_i^* по всем $i = \overline{1,10}.$ Очевидно, что эта сумма должна равняться 1.

Имея, значения p_i^* легко, подсчитать

$$\overline{p^*} = 0,04 \cdot 0,05 + 0,21 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,35 + 0,1 \cdot 0,45 +$$

$$+0,05 \cdot 0,55 + 0,04 \cdot 0,65 + 0,03 \cdot 0,75 + 0,02 \cdot 0,85 + 0,01 \cdot 0,95 = 0,33$$

и объем продажи двуядерных компьютеров

$$N_{\text{П}} = \overline{p^*} q_1 = 0,33 \cdot 1,09 \cdot 10^6 = 0,36 \cdot 10^6.$$

Прибыль от продажи двуядерных компьютеров определяется формулой (6). Полагая, как и в предыдущей задаче $k_1 = 5,\ k_2 = 1$ и $k_3 = 3$, имеем

$$S = 10\left(k_2 + k_3 + 5\right) = 90\,\text{руб.}$$

Теперь определим максимальную ожидаемую прибыль в вершине B, для чего воспользуемся формулой (10). При $d = 1$ имеем $N_{\text{В}} = 4\eta = 0,16 \cdot 10^6$ и, согласно формуле (6),

$$V_1(B)=90\cdot 10^6\left(0{,}16-0{,}5\cdot\left|0{,}16-0{,}36\right|\right)=5{,}4\cdot 10^6 \text{ руб.}$$

При $d=2$ имеем $N_{\text{В}}=0{,}32\cdot 10^6$, откуда

$$V_2(B)=90\cdot 10^6\left(0{,}32-\left|0{,}32-0{,}36\right|\right)=25{,}2\cdot 10^6 \text{ руб.}$$

При $d=3$ имеем $N_{\text{В}}=0{,}48\cdot 10^6$,

$$V_3(B)=90\cdot 10^6\left(0{,}48-1{,}5\left|0{,}48-0{,}36\right|\right)=27{,}0\cdot 10^6 \text{ руб.}$$

При больших значениях d прибыль будет меньше, чем $V_3(B)$. Следовательно,

$$V^\circ(B)=V_2(B)=27{,}0 \text{ млн. руб.}$$

Затем необходимо определить $V^\circ(p_i)$ для всех $i=\overline{1,m}$.

При $i=1$ имеем $p_1=0{,}05$, и $N_{\text{П1}}=0{,}05\cdot 1{,}09\cdot 10^6=0{,}054\cdot 10^6$.

Если $d=1$, то $V_1(p_1)=90\cdot 10^6\left(0{,}16-0{,}5\cdot\left|0{,}16-0{,}054\right|\right)=9{,}63\cdot 10^6$ руб.

Нетрудно показать, что остальные значения $V_d(p_1)$ будут меньше, чем $V_1(p_1)$,следовательно,

$$V^\circ(p_1)=V_1(p_1)=9{,}63 \text{ млн. руб.}$$

При $i=2$ имеем $p_2=0{,}15$ $N_{П2}=0{,}163\cdot 10^6$, а максимальная ожидаемая прибыль $V^\circ(p_2)=V_1(p_2)=14{,}3$ млн. руб.

Остальные значения $V^\circ(p_i)$ в млн. рублей оказались следующими:

$$V^\circ(p_3)=V_2(p_3)=24{,}5\,,\quad V^\circ(p_4)=V_3(p_4)=29{,}9,$$

$$V^{\circ}(p_5) = V_3(p_5) = 41{,}8, \qquad V^{\circ}(p_6) = V_4(p_6) = 50{,}3,$$

$$V^{\circ}(p_7) = V_4(p_7) = 51{,}4, \qquad V^{\circ}(p_8) = V_5(p_8) = 68{,}1,$$

$$V^{\circ}(p_9) = V_6(p_9) = 77{,}4, \qquad V^{\circ}(p_{10}) = V_7(p_{10}) = 74{,}2,$$

Теперь, воспользовавшись (13), найдем ожидаемую прибыль в вершине C (млн. руб.):

$$V^{\circ}(C) = 0{,}04 \cdot 9{,}6 + 0{,}21 \cdot 14{,}3 + 0{,}25 \cdot 24{,}5 + 0{,}25 \cdot 29{,}9 + 0{,}1 \cdot 41{,}8 +$$
$$+0{,}05 \cdot 50{,}3 + 0{,}04 \cdot 51{,}4 + 0{,}03 \cdot 68{,}1 + 0{,}02 \cdot 77{,}4 + 0{,}01 \cdot 74{,}2 = 30{,}1$$

Поскольку оказалось, что разность $V^{\circ}(C) - V^{\circ}(B) > 0$, целесообразно провести обследование рынка сбыта. Максимальная ожидаемая прибыль, согласно расчетам, составит $V^{\circ}(B) = 27{,}0$ млн. руб. при выпуске $N_{\text{В}}^{0} = 0{,}32 \cdot 10^{6}$ двуядерных компьютеров в год.

1.3 ЗАДАЧА 3

Описание. Целью решения данной задачи является определение таких объемов сборки двуядерных компьютеров по каждому кварталу года, которые позволят минимизировать суммарные затраты на их сборку и хранение в течение всего года.

Спрос на каждый квартал определен типовым заданием, там же приведены расчетные соотношения для определения затрат на сборку и хранение компьютеров.

Существенно, что по условию задачи выполнение квартальных планов обязательно. Это означает, что изменять затраты на сборку и хранение компьютеров можно только за счет перевыполнения квартальных планов с последующим хранением избыточной продукции. Подобная стратегия целесообразна, поскольку себестоимость сборки единицы продукции, как правило, снижается при увеличении объемов выпуска.

Так как объем выпуска компьютеров в $l-$ м квартале однозначно определяется числом работающих в этот период отделений фирмы d_l , то для решения задачи мы располагаем четырьмя переменными управления $d_1, d_2 \ldots, d_4$. Кроме того, имеется четыре переменные состояния $q_l\left(l=\overline{1,4}\right)$, где q_l – уровень запасов на начало l-го квартала года. Исходными данными для решения задачи являются квартальные планы выпуска N_l.

Для $k_1=5$, $k_2=1$ и $k_3=3$ согласно п. 9 задания на курсовую работу имеем:

$$n_1=\frac{80\cdot 5}{5+1+3+2}=36,4\%;$$

$$n_2=\frac{80\cdot 1}{5+1+3+2}=7,3\%;$$

$$n_3=\frac{80\cdot 3}{5+1+3+2}=21,8\%;$$

$$n_4=100-\sum_{i=1}^{4}n_l=34,5\%.$$

План выпуска в l-м квартале

$$N_l=0,01\cdot n_l N_{\text{В}}^{\circ}, \tag{17}$$

где $N_{\text{В}}^{\circ}=0,32\cdot 10^6$ – план сборки двуядерных компьютеров на год, найденный при решении второй оптимизационной задачи. Согласно (17) имеем: $N_1=11,6\cdot 10^4$, $N_2=2,3\cdot 10^4$, $N_3=7,0\cdot 10^4$, $N_4=11,1\cdot 10^4$.

Формализация. В задании определены зависимость $F\left(d\right)$ затрат на сборку единицы продукции от числа отделений фирмы d и затраты на хранение единицы продукции. Для простоты будем считать, что вся продукция производится в первом месяце квартала. Тогда затраты на производство в l-м квартале будут определяться числом d_{ij} отделений фирмы, которые необходимо открыть при уровне запаса q_i, на начало года, чтобы на конец этого года иметь уровень запаса, равный q_j . Эти затраты легко подсчитать по формуле*[1].

$$D\left(d_{ij}\right)=\left(200\cdot\frac{d_{ij}+1}{d_{ij}}+10\cdot k_3\right)d_{ij}\eta. \qquad (18)$$

Затраты на хранение будут зависеть от уровня запасов на начало следующего квартала, т. е. от величины q_j , следующим образом:

$$Q\left(q_i\right)=\left(20+k_3\right)q_j. \qquad (19)$$

Затраты на производство и хранение в l -м квартале

$$C\left(d_{ij},q_j\right)=D\left(d_{ij}\right)+Q\left(q_j\right). \qquad (20)$$

Задача состоит в том, чтобы определить в каждом квартале такие значения d_l , при которых

$$\sum_{i=1}^{4} C_l\left(d_{ij},q_j\right)\to \min \qquad (21)$$

при условии выполнения ограничений

$$d_l\eta+q_l-q_{l+1}=N_l, \qquad (22)$$

$d_l \geq 0,\ q_l \geq 0$ для всех $l=\overline{1,4}$.

Ссылка *Формула (18) может использоваться для расчета затрат на сборку только, если таковая имеет место, т. е. если $d_{ij}>0$. При $d_{ij}=0$ имеем, разумеется, $D_l\left(d_{ij}\right)=0$.

Величина d_l может изменяться в пределах от 0 до n, где максимальное число поточных линий n, как и в предыдущей задаче, определяется по формуле (8).

Выражения (21) и (22) представляют собой математическую запись третьей оптимизационной задачи.

Выбор метода решения. Согласно (21), задача содержит четыре последовательных этапа (квартала), на каждом из которых надо выбрать оптимальное значение переменной управления d_l с учетом работы фирмы на предыдущих этапах.

Следовательно, мы имеем типичную задачу многошаговой оптимизации, для решения которой целесообразно воспользоваться методом динамического программирования [5].

Для решения задач динамического программирования не существует универсального метода, подобного, например, симплекс-методу в линейном программировании. Это связано с тем, что каждая задача имеет свое рекуррентное соотношение для отыскания экстремума критерия эффективности. Однако для задач небольшой размерности достаточно общим и простым приемом является представление задачи динамического программирования в сетевом виде. Тем самым мы сводим нашу задачу к стандартной задаче выбора оптимального маршрута. Примем этот метод за основу.

Решение. Решение задачи выбора оптимального маршрута начинается с построения сети. Сеть содержит вершины, отображающие все возможные состояния производства (уровни запаса) на каждом этапе, и ребра, определяющие переходы из одного состояния в другое. Вершины будем обозначать квадратами, внутри которых проставляются уровни запасов q_j. Над ребрами будем писать значения d_{ij}, необходимые для осуществления перехода из i-го состояния в j-е с учетом спроса N_l на данном этапе.

На рис. 7 представлена сеть, описывающая нашу задачу для найденных выше значений спроса N_l. При построении сети особое внимание следует обратить на то, чтобы на каждом этапе были учтены все реализуемые состояния. Начинать построение сети лучше всего с первого этапа. Согласно условию задачи, уровень запаса на начало первого квартала равен нулю. Поэтому в вершине l проставлено значение $q_1 = 0$. Для удовлетворения спроса N_1 в первом квартале должно работать не менее четырех отделений фирмы. Максимально возможное число отделений $n = 7$. Поэтому из вершины l выходят только четыре ребра, соответствующие значениям $d_{ij} = 4,5,6,7$ Мы получим вершины $2,3,4,5$.

Из вершины 2 могут выходить ребра, соответствующие значениям $d_{2j} = \overline{0,4}$, и уровню запаса $q_2 = q_1 + 4\eta - N_1 = 4,4 \cdot 10^4$ (на рис. 7 множитель 10^4 во всех вершинах опущен) В результате получим вершины 6, 7, 8, 9, и 10.

Из вершины 3, вообще говоря, могут выходить пять ребер со значениями $d_{3j} = \overline{0,4}$. Первые четыре из них ведут в упомянутые выше вершины 6, 7, 8, 9 и 10. При $d_{3j} = 4$ уровень запаса на начало третьего квартала оказался бы равным 22,1, что превышает суммарный спрос за три последних квартала года. Следовательно, состояние с уровнем запаса 22,1 практически реализовано быть не может и подлежит исключению из сети.

Из вершины 4 могут выходить три ребра со значениями $d_{4j} = \overline{0,2}$. Ребра ведут в вершины 8, 9 и 10. Из вершины 5 выходит два ребра со значениями $d_{5j} = \overline{0,1}$, ведут в вершины 9 и 10. Аналогично находятся ребра, выходящие из вершин 6, 7, 8, 9 и 10. При этом мы придем в вершины 11, 12 и 13 из которых можно попасть только в конечную вершину 14.

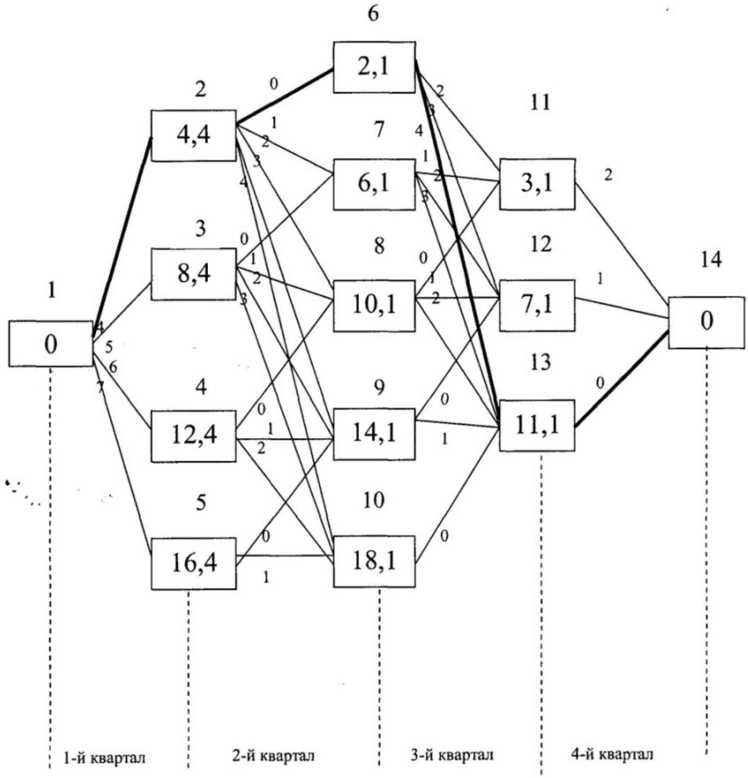

Рис.7. Сетевое представление задачи управления запасами

Сеть построена и задача решается путем нахождения оптимального маршрута из начальной вершины сети в конечную с минимальными затратами на сборку и хранение продукции.

Анализ решения. Определяется число отделений фирмы, работающих в каждом квартале года, соответствующие этим числам квартальные объемы сборки и общие затраты на сборку и хранение продукции в течение года.

Пример. Следуя схеме решения задачи выбора оптимального маршрута, описанной в [1], определим минимальные затраты $f(i)$, необходимые для перехода из i -й вершины в конечную для всех $i=\overline{0,14}$. (см. рис. 7). Задачу начнем решать с конца, продвигаясь, от последнего этапа к первому. На каждом шаге минимальные затраты определяются по рекуррентной формуле:

$$f(i)=\min_j\left\{C\left(d_{ij},q_j\right)+f(i)\right\}. \tag{23}$$

Как и в предыдущих задачах, положим $k_1=5$, $k_3=3$, тогда из (18) и (19) получим расчетные соотношения:

$$D\left(d_{ij}\right)=4\cdot10^4\left(200\frac{d_{ij}+1}{d_{ij}}+50\right)d_{ij} \tag{24}$$

$$Q\left(q_j\right)=23q_j \tag{25}$$

Шаг 1. На этом шаге $l=4$ и, согласно рис. 7, необходимо определить значения $f(11)$ и $f(12)$. Воспользовавшись (23) и (24), имеем:

$$f(11)=\min\left\{C(2,0)\right\}=4\cdot10^4\cdot\left(200\frac{2+1}{2}+50\right)\cdot2=28\cdot10^6 \text{ руб},$$

$$f(12)=\min\left\{C(1,0)\right\}=4\cdot10^4\cdot\left(200\frac{1+1}{1}+50\right)\cdot1=18\cdot10^6 \text{ руб},$$

$$f(13)=\min\left\{C(0,0)\right\}=0.$$

Шаг 2. При $l=3$ имеем $i=\overline{6,10}$, $j=\overline{11,13}$, $d_{ij}=0,4$. Для расчетов по формуле (23) нам понадобятся значения $D\left(d_{ij}\right)$ и $Q\left(q_j\right)$ Согласно (24) и (25) получим $D(1)=18\cdot10^6$, $D(2)=28\cdot10^6$, $D(3)=38\cdot10^6$, $D(4)=48\cdot10^6$ $Q(3,1)=0,71\cdot10^6$, $Q(7,1)=1,63\cdot10^6$, $Q(11,1)=2,55\cdot10^6$ руб.

Теперь можно определить (в млн. руб.)

$$f(6)=\min\{28,71+28;39,63+18;50,55+0\}=50,55;$$

$$f(7)=\min\{18,71+28;29,63+18;40,55+0\}=40,55;$$

$$f(8)=\min\{0,71+28;19,63+18;30,55+0\}=28,71;$$

$$f(9)=\min\{1,63+18;20,55+0\}=19,63;$$

$$f(10)=\min\{2,55+0\}=2,55.$$

Итак, оптимальными являются пути $6\to13$, $7\to13$, $8\to11$, $9\to12$ и $10\to13$.

Шаг 3. При $l=2$ имеем $i=\overline{2,5}$, $j=\overline{6,10}$, $d_{ij}=\overline{0,4}$. Для расчетов понадобятся значения $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$, найденные на шаге 2, а также значения

$Q(2,1)=0,48\cdot10^6$, $Q(6,1)=1,40\cdot10^6$, $Q(10,1)=2,32\cdot10^6$, $Q(14,1)=3,24\cdot10^6$ и $Q(18,1)=4,16\cdot10^6$ руб.

По рекуррентной формуле (23) имеем (в млн. руб.)

$$f(2)=\min\{0,48+50,55;19,40+40,55;30,32+28,71;41,24+19,63;$$

$$52,16+2,55\}=50,80(2\to6);$$

$$f(3)=\min\{1,40+40,55;20,32+28,71;31,24+19,63;42,16+2,55\}=$$

$$=41,72(3\to7);$$

$$f(4)=\min\{2,32+28,71;21,24+19,63;32,16+2,55\}=30,80(4\to8);$$

$$f(5)=\min\{3,24+19,63;22,16+2,55\}=22,64(5\to9);$$

После значений $f(i)$ в скобках указаны оптимальные маршруты.

Шаг 4. При $l=1$ имеем $i=1$ $j=\overline{2,5}$, $d_{ij}=\overline{4,7}$. Для расчетов понадобится величина $D(4)$, найденная на шаге 2, а также значения

$D(5)=58\cdot10^6$, $D(6)=68\cdot10^6$, $D(7)=78\cdot10^6$,

$$Q(4,4)=1{,}01\cdot 10^6,\ \ Q(8,4)=1{,}93\cdot 10^6,$$

$$Q(12,4)=2{,}85\cdot 10^6,\ \ Q(16,4)=3{,}77\cdot 10^6 \text{ руб.}$$

Теперь вычислим (в млн. руб.):

$$f(1)=\min\{49{,}01+50{,}80;59{,}93+41{,}72;70{,}85+30{,}80;81{,}77+22{,}64\}=$$
$$=99{,}81(1\to 2).$$

Таким образом, оптимальный маршрут проходит через вершины 1, 2, 6, 13 и 14, что соответствует следующим значениям годовых выпусков G_l, $G_1=4$ $\eta=0{,}04\cdot 10^6$, $G_2=0,$ $G_3=4$ $\eta=0{,}04\cdot 10^6$, $G_4=0$, $G_5=0$ Затраты на производство и хранение продукции составят при этом 99,81 млн. руб.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Орлов А.И.* Теория принятия решений: учебник /А.И. Орлов. – М.: Экзамен, 2006. – 573 с.
2. *Таха Хемди А.* Введение в исследование операций / Хемди А Таха, 7-е изд.– М.: Вильямс. 2007. – 912 с.
3. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений/ И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 408 с.
4. *Голик Е. С.* Математические методы системного анализа и теории принятия решений: Учеб. пособие/ Е.С. Голик. – СПб.: СЗТУ, 2005 – Ч. 1. – 54 с
5. *Голик Е. С.* Математические методы системного анализа и теории принятия решений: Учеб. пособие/ Е.С. Голик. – СПб.: СЗТУ, 2005 – Ч. 2. – 100 с.
6. *Попов Г.В.* Методы принятия решений / Г.В. Попов. – Иваново: ИГЭУ, 2002. – 68 с.
7. *Черноморов Г.А.* Теория принятия решений / Г.А. Черноморов.– Новочеркасск: Южно-Рос. госуд. техн. ун-т, 2002. – 276 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические указания по курсовому проектированию для студентов магистратуры направления 09.04.02

Сост. *И.В. Иванова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой информационных систем и вычислительной техники

Ответственный за выпуск *И.В. Иванова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 08.09.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,4. Усл.кр.-отт. 2,4. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 50 экз. Заказ 804.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2