Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания к самостоятельным работам для студентов магистратуры направления 13.04.02

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 519.2.06(073)

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. Применение математических методов к задачам электротехники: Методические указания к самостоятельным работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *С.Е. Мансурова, А.А. Яковлева*. СПб, 2021. 29 с.

В методических указаниях содержатся необходимые сведения для самостоятельного изучения раздела «Операционное исчисление» и применения различных математических методов к задачам электротехники, показаны примеры решения типовых задач, приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для самостоятельной работы магистрантов направления 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», направленностей «Автоматизированные электромеханические комплексы и системы», «Электроприводы и системы управления электроприводов» и «Системы электроснабжения», изучающих курс «Дополнительные главы математики».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент д.ф.-м.н. *С.И. Перегудин* (СПбГУ)

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью изучения дисциплины «Дополнительные главы математики» является приобретение и закрепление магистрантами знаний различных математических методов и навыков их применения к практическим задачам, умении критически оценить полученный результат и уметь проверить его правильность, а также дальнейшее развитие математического мышления и приобретение опыта в самостоятельном чтении учебной литературы и грамотном оформлении полученных результатов.

В методических указаниях, предназначенных для самостоятельного изучения магистрантами, рассмотрен раздел "Операционное исчисление" и возможности применения его методов к решению задач электротехники. Приведены теоретические основы, рассмотрены некоторые задачи, даны задачи для самостоятельного решения.

В результате освоения данной темы магистрант должен:

- знать основные понятия и методы операционного исчисления, играющих важную роль в ряде задач электротехники;
- уметь составлять дифференциальные и интегральные уравнения, а также системы уравнений, соответствующие различным электрическим схемам и находить их решения операторными методами;
- уметь применять методы моделирования и анализа при решении инженерных задач;
- владеть инструментарием для решения математических задач в своей предметной области, навыками математической формализации инженерных задач, навыками решения типовых задач.

1. Операционное исчисление. Основные теоретические сведения

Кусочно-непрерывная функция $f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, называется *оригиналом*, если выполняются следующие условия:

- $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- существуют постоянные числа $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$, такие, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < M e^{\sigma_0 t}$.

Число σ_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$, где $p = \sigma + iw$, называется *интегралом Лапласа*.

Если функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста σ_0, то интеграл Лапласа сходится при $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, определяемая равенством

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \ \operatorname{Re} p > \sigma_0. \qquad (1)$$

Соотношение (1.1), при помощи которого оригиналу $f(t)$ ставится в соответствие его изображение $F(p)$, называется *преобразованием Лапласа*.

Свойства преобразования Лапласа следующие:

1) если $f(t)$ – оригинал и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$;

2) *<u>свойство линейности</u>*: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$, то $\lambda f(t) + \mu g(t) \leftrightarrow \lambda F(p) + \mu G(p)$.

3) *<u>свойство подобия</u>*: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то $f(\lambda t) \leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$.

4) *<u>теорема смещения</u>*: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то $e^{at} f(t) \leftrightarrow F(p-a)$.

5) *<u>теорема запаздывания</u>*: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$e^{-p\tau}F(p) \leftrightarrow f(t-\tau) = \left[\begin{array}{ll} 0, & t<\tau; \\ f(t-\tau), & t \ge \tau. \end{array}\right.$$

6) <u>*теорема о дифференцировании оригинала*</u>: если $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \quad .... ;$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

7) <u>*теорема о дифференцировании изображения*</u>: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$-\frac{dF}{dp} \leftrightarrow tf(t); \quad \frac{d^2F}{dp^2} \leftrightarrow t^2 f(t); \quad .... \quad (-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n} \leftrightarrow t^n f(t).$$

8) <u>*теорема об интегрировании оригинала*</u>: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

9) <u>*теорема об интегрировании изображения*</u>: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(p)dp.$$

С помощью преобразования Лапласа и теоремы смещения можно составить таблицу изображений и оригиналов (см. табл.1).

Таблица 1.

Оригиналы и их изображения

$1 \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$	$\cos bt \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+b^2}$	$\mathrm{e}^{at}\cos bt \leftrightarrow \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{at} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}$	$\sin bt \leftrightarrow \dfrac{b}{p^2+b^2}$	$\mathrm{e}^{at}\sin bt \leftrightarrow \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$t^n \leftrightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{ch}\, bt \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-b^2}$	$e^{at}\,\mathrm{ch}\, bt \leftrightarrow \dfrac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$
$t^n\mathrm{e}^{at} \leftrightarrow \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\mathrm{sh}\, bt \leftrightarrow \dfrac{b}{p^2-b^2}$	$e^{at}\,\mathrm{sh}\, bt \leftrightarrow \dfrac{b}{(p-a)^2-b^2}$

Пример 1. Найти изображение для оригинала

$$f(t)=e^{3t}t^3-\mathrm{sh}\,2t+e^{-2t}\cos 3t\,.$$

Решение. Воспользуемся таблицей оригиналов и изображений, а также свойством линейности. Тогда

$$f(t)\leftrightarrow F(p)=\frac{6}{(p-3)^4}-\frac{2}{p^2-4}+\frac{p+2}{p^2+4p+13}\,.$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению

$$F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}\,.$$

Решение. Для нахождения оригинала, отвечающего правильной рациональной дроби, разложим ее на сумму простейших дробей:

$$F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5}\,.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и составим систему уравнений, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$5p+3=A(p^2+2p+5)+(Bp+C)(p-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0; \\ 2A-B+C=5; \\ 5A-C=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A; \\ 2A+A+5A-3=5; \\ C=5A-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1; \\ B=-1; \\ C=2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$F(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{-p+2}{p^2+2p+5}=\frac{1}{p-1}+\frac{-p+2}{(p+1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{p-1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2} \quad \leftrightarrow$$

$$f(t)=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t .$$

2. Решение дифференциальных уравнений операторными методами

Пусть нужно найти решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y''+a_1 y'+a_2 y=f(t), \tag{2}$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y(0)=y_0;\ y'(0)=y_1 . \tag{3}$$

Для нахождения решения к обеим частям уравнения (2) применим преобразование Лапласа (1). Пусть функция $y(t)$ и ее производные являются оригиналами и $y(t)\leftrightarrow Y(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$y'(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0); \quad y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-py(0)-y'(0).$$

Пусть $f(t)\leftrightarrow F(p)$. Тогда, подставив найденные выражения в дифференциальное уравнение (2), получим соответствующее ему *операторное* уравнение:

$$A(p)Y(p) = F(p) + y_0(a_0 p + a_1) + y_1 a_0 \equiv F_1(p), \qquad (4)$$

где $A(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ – *характеристический многочлен* уравнения (2).

Решив (4) относительно $Y(p)$, найдем *операторное решение*

$$Y(p) = \frac{F_1(p)}{A(p)}.$$

Оригинал, отвечающий этому изображению, является решением исходной задачи Коши (2)–(3).

Аналогично можно решить линейное дифференциальное уравнение любого порядка.

Пример 3. Найти решение задачи Коши $y'' + 4y = 2\cos 2t$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$.

Решение. Пусть $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, тогда

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p); \quad y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - 4;$$

$$f(t) = 2\cos 2t \leftrightarrow \frac{2p}{p^2 + 4}.$$

Таким образом, уравнение в изображениях примет вид:

$$p^2 Y(p) - 4 + 4Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 4} \quad \Leftrightarrow \quad (p^2 + 4)Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 4} + 4,$$

откуда $Y(p) = \dfrac{2p}{(p^2 + 4)^2} + \dfrac{4}{p^2 + 4}$.

Возвращаясь к оригиналам, будем иметь

$$\frac{4}{p^2 + 4} = 2 \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \leftrightarrow 2\sin 2t.$$

По теореме о дифференцировании изображения

$$\frac{2p}{(p^2 + 4)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2 + 4}\right) \leftrightarrow -\frac{1}{2}(-t)\sin 2t = \frac{1}{2}t\sin 2t.$$

Таким образом, окончательно получаем: $y(t)=\frac{1}{2}t\sin 2t+2\sin 2t$.

Пример 4. Решить систему дифференциальных уравнений $y'=z$; $z'=y+\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}$ с начальными условиями $y(0)=z(0)=0$.

Решение. Система уравнений в изображениях имеет вид

$$\begin{cases} pY(p)=Z(p); \\ pZ(p)=Y(p)+\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{p+1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} pY(p)-Z(p)=0; \\ -Y(p)+pZ(p)=\dfrac{2p}{p^2-1}. \end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы и вспомогательные определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix}=p^2-1; \quad \Delta_Y=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{2p}{p^2-1} & p \end{vmatrix}=\frac{2p}{p^2-1};$$

$$\Delta_Z=\begin{vmatrix} p & 0 \\ -1 & \dfrac{2p}{p^2-1} \end{vmatrix}=\frac{2p}{p^2-1}.$$

По формулам Крамера получим изображения искомых решений (операторное решение системы):

$$Y(p)=\frac{2p}{(p^2-1)^2}; \quad Z(p)=\frac{2p^2}{(p^2-1)^2}.$$

Найдем оригиналы, отвечающие полученным изображениям:

$$\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2}=-\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2-1}\right)\leftrightarrow t\,\mathrm{sh}\,t;$$

$$\frac{2p^2}{\left(p^2-1\right)^2}=p\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2}\leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(t\,\mathrm{sh}\,t\right)=\mathrm{sh}\,t+t\,\mathrm{ch}\,t$$

Таким образом, окончательно имеем $y(t)=t\,\mathrm{sh}\,t$, $z(t)=\mathrm{sh}\,t+t\,\mathrm{ch}\,t$.

3. Свертка функций. Решение некоторых интегральных уравнений

Если $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы, то их *сверткой* называется функция

$$(f_* g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\,ds = \int_0^t g(s) f(t-s)\,ds .$$

Пример 5. Найти свертку функций $f(t) = t$ и $g(t) = \sin t$.

Решение.

$$(f_* g)(t) = \int_0^t s \sin(t-s)\,ds = \left\{ \begin{matrix} u = s; \ dv = \sin(t-s) \\ du = ds; \ v = \cos(t-s) \end{matrix} \right\} =$$

$$= s\cos(t-s)\Big|_0^t - \int_0^t \cos(t-s)\,ds = t + \sin(t-s)\Big|_0^t = t - \sin t .$$

Теорема о свертке. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$, то $(f_* g)(t) \leftrightarrow F(p)G(p)$.

Пример 6. Найти оригинал, отвечающий изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} .$$

Решение. Представим данную функцию $F(p)$ в виде произведения двух изображений с известными оригиналами

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{p}{p^2+4} \frac{1}{p^2+1} = F_1(p) F_2(p) .$$

Так как $F_1(p) = \dfrac{p}{p^2+4} \leftrightarrow \cos 2t = f_1(t)$; $F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \leftrightarrow \sin t = f_2(t)$, то по теореме о свертке

$$F_1(p)F_2(p)\longrightarrow\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t \cos 2\tau\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(t-3\tau)+\sin(t+\tau)]d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cos(t-3\tau)-\cos(t+\tau)\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{3}\cos t-\cos 2t+\cos t\right]=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t\ .$$

Таким образом, получаем: $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+1)}\leftrightarrow\dfrac{1}{3}\cos t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$.

Пример 7. Решить интегральное уравнение $\int_0^t e^{t-s}x(s)ds=t$.

Решение. Интеграл в левой части уравнения представляет собой свертку функций $f(t)=e^t$ и $x(t)$. Запишем данное уравнение в виде

$$(f_*x)(t)=t$$

и применим теорему о свертке: $(f_*x)(t)\leftrightarrow F(p)X(p)$.

Учитывая, что $t\leftrightarrow 1/p^2$ и $f(t)=e^t\leftrightarrow 1/(p-1)$, получим

$$\frac{1}{p^2}=\frac{X(p)}{p-1}\ \Leftrightarrow\ X(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\leftrightarrow 1-t$$

Таким образом, решением данного уравнения является функция $x(t)=1-t$.

Пример 8. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\sin(t)+2\int_0^t\cos(t-s)x(s)ds\ .$$

Решение. Положим $f(t)=\cos t$ и перепишем уравнение в виде $x(t)=\sin t+2(f_*x)(t)$.

Переходя к изображениям и используя теорему о свертке, получим

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}+2F(p)X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}X(p).$$

Тогда

$$X(p)=\frac{1/(p^2+1)}{1-2p/(p^2+1)}=\frac{1}{(p-1)^2}\leftrightarrow t\mathrm{e}^t=x(t).$$

4. Интеграл Дюамеля

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2) с однородными (нулевыми) начальными условиями $y(0)=0,\ y'(0)=0$. Операторное решение в этом случае имеет вид

$$Y(p)=\frac{1}{A(p)}F(p).$$

Функция $\dfrac{1}{A(p)}$ называется *передаточной*, а ее оригинал $w(t)$ — *весовой* функцией. По теореме о свертке получим

$$y(t)=(w_* f)(t)=\int_0^t w(t-s)f(s)ds\,. \qquad (5)$$

Соотношение (5) называется *интегралом (формулой) Дюамеля*.

При ненулевых начальных данных интеграл Дюамеля непосредственно не применим. В этом случае необходимо предварительно преобразовать исходную задачу Коши к задаче с однородными (нулевыми) начальными условиями. Для этого вводим новую искомую функцию $z(t)$, полагая

$$y(t)=z(t)+q(t)=z(t)+\gamma_0+\gamma_1 t, \qquad (6)$$

где $\gamma_0=y(0), \gamma_1=y'(0)$ – начальные значения искомого решения $y(t)$ и его производной.

Как легко видеть, $q(0)=\gamma_0=y(0)$, $q'(0)=\gamma_1=y'(0)$ и, следовательно, $z(0)=z'(0)=0$. Подставив (6) в (2), получим для $z(t)$ задачу Коши с однородными начальными условиями

$$a_0 z''+a_1 z'+a_2 z=f(t)-a_1\gamma_1-a_2(\gamma_0+\gamma_1 t)\equiv f_1(t).$$

Применяя (5), найдем сначала $z(t)=(w_* f_1)(t)$, затем $y(t)=q(t)+\ (w_* f_1)\ (t)$.

Пример 9. С помощью интеграла Дюамеля найти решение задачи Коши $x''-2x'+x=\dfrac{e^t}{t+1}-t,\ x(0)=2,\ x'(0)=-1$.

Решение. Начальные данные не нулевые. Полагаем в соответствии с (6), $x(t)=y(t)+2-t$. Тогда $x'(t)=y'(t)-1,\ x''(t)=y''(t)$, и для определения $y(t)$ получим уравнение $y''-2y+y=\dfrac{e^t}{t+1}\equiv f_1(t)$ с однородными начальными условиями.

Для рассматриваемой задачи характеристический многочлен $A(p)=p^2-2p+1=(p-1)^2$, передаточная функция $1/A(p)=1/(p-1)^2$, весовая функция $w(t)=te^t$.

По формуле Дюамеля (5)

$$y(t)=(w_* f_1)(t)=\int_0^t (t-s)e^{t-s}\,\frac{e^s}{s+1}ds=e^t\int_0^t\frac{t-s}{s+1}ds=e^t\left((t+1)\ln(t+1)-t\right).$$

Окончательно $x(t)=2-t+e^t\left((t+1)\ln(t+1)-t\right)$.

5. Примеры применения методов операционного исчисления к задачам электротехники

Пример 10. Для схемы, изображенной на рис. 1, составлена система дифференциальных уравнений и заданы начальные условия:

$$\begin{cases} i_1 + \dfrac{di_1}{dt} = e_1(t) + e_0(i); \\ i_2 + \dfrac{di_2}{dt} = e_2(t) + e_0(i); \quad i_1(0) = 2,\ i_2(0) = 4. \\ i = i_1 + i_2; \end{cases}$$

Решить систему методами операционного исчисления, найти функции $i_1(t)$ и $i_2(t)$, если $e_0(i) = 2i$, $e_1(t) = t$, $e_2(t) = 30\sin t$.

Сделать проверку полученного решения. Построить графики найденных функций.

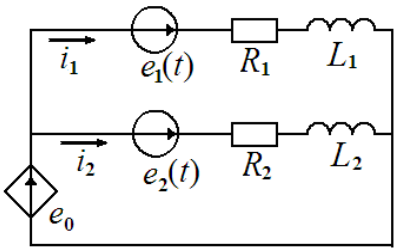

Рис. 1.

Решение. Подставим в систему уравнений заданные условия и упростим ее:

$$\begin{cases} i_1 + \dfrac{di_1}{dt} = t + 2(i_1 + i_2); \\ i_2 + \dfrac{di_2}{dt} = 30\sin t + 2(i_1 + i_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} - i_1 - 2i_2 = t; \\ \dfrac{di_2}{dt} - 2i_1 - i_2 = 30\sin t. \end{cases} \qquad (7)$$

Применим таблицу оригиналов-изображений и формулу дифференцирования оригинала:

$$t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}; \quad \sin t \leftrightarrow \frac{1}{1+p^2}; \quad f(t) \leftrightarrow F(p) \ \Rightarrow \ \frac{df}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

Тогда

$$i_1 \leftrightarrow X(p) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{di_1}{dt} \leftrightarrow pX(p) - \frac{58}{9};$$
$$i_2 \leftrightarrow Y(p) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{di_2}{dt} \leftrightarrow pY(p) + \frac{86}{9}.$$

Подставив найденные соотношения в систему (7), получим

$$\begin{cases} pX(p) - \dfrac{58}{9} - X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p^2}; \\ pY(p) + \dfrac{86}{9} - 2X(p) - Y(p) = \dfrac{1}{1+p^2}. \end{cases}$$

Упростим полученную операторную систему:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{58}{9}; \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{1}{1+p^2} - \dfrac{86}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = \dfrac{58p^2+9}{9p^2}; \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)}. \end{cases}$$

Решим эту систему, например, методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{58p^2+9}{9p^2} & -2 \\ \dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)} & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)\cdot\frac{58p^2+9}{9p^2} + \frac{-368p^2+192}{9(1+p^2)} =$$

$$=\frac{(58p^3-58p^2+9p-9)\cdot(p^2+1)-368p^4+192p^2}{9p^2(p^2+1)}=$$

$$=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{58p^2+9}{9p^2} \\ -2 & \dfrac{-184p^2+96}{9(1+p^2)} \end{vmatrix}=(p-1)\cdot\frac{-184p^2+96}{9(1+p^2)}+\frac{116p^2+18}{9p^2}=$$

$$=\frac{-184p^5+184p^4+96p^3-96p^2+116p^2+116p^4+18p^2+18}{9p^2(p^2+1)}=$$

$$\frac{-86p^5+202p^4+184p^3-50p^2+18}{9p^2(p^2+1)}.$$

Получим

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}; \qquad (8)$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-86p^5+202p^4+184p^3-50p^2+18}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}. \qquad (9)$$

Найденные функции $X(p)$ и $Y(p)$ являются изображениями искомых функций-оригиналов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ соответственно. Для нахождения оригиналов разложим алгебраическую дробь (8) на простейшие дроби:

$$X(p)=\frac{58p^5-230p^4+67p^3+301p^2+9p-9}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}+\frac{K}{p-3}+\frac{M}{p+1}\right).$$

Приведя дроби к общему знаменателю и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + C + K + M = 58; \\ -2A + B - 2C + D + K - 3M = -230; \\ -2A - 2B - 3C - 2D + K + M = 67; \\ -2A - 2B - 3D + K - 3M = 301; \\ -3A - 2B = 9; \\ -3B = -9. \end{cases}$$

Решив систему метод Гаусса, получим

$A = -5;\quad B = 3;\quad C = 54;\quad D = -108;\quad K = 0;\quad M = 9.$

Тогда

$$X(p) = \frac{1}{9}\left(-\frac{5}{p} + \frac{3}{p^2} + \frac{54p - 108}{p^2 + 1} + \frac{9}{p+1}\right) =$$

$$= -\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2} + 6\cdot\frac{p}{p^2+1} - 12\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получим

$$i_1(t) == -\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t}\ .$$

Аналогично, из соотношения (9) найдем

$$Y(p) = \frac{-86p^5 + 202p^4 + 184p^3 - 50p^2 + 18}{9p^2(p^2+1)(p-3)(p+1)} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2+1} + \frac{K}{p-3} + \frac{M}{p+1}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C + K + M = -86; \\ -2A + B - 2C + D + K - 3M = 202; \\ -2A - 2B - 3C - 2D + K + M = 184; \\ -2A - 2B - 3D + K - 3M = -50; \\ -3A - 2B = 0; \\ -3B = 18. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = 4; \quad B = -6; \quad C = -81; \quad D = 27; \quad K = 0; \quad M = -9.$$

Откуда,

$$Y(p) = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{p} - \frac{6}{p^2} + \frac{-81p + 27}{p^2 + 1} - \frac{9}{p+1}\right) =$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2} - 9\cdot\frac{p}{p^2+1} + 3\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p+1}.$$

и, пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получим

$$i_2(t) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}.$$

Таким образом, мы получили ***<u>ответ</u>***:

$$i_1(t) == -\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t},$$

$$i_2(t) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}.$$

Выполним проверку полученного решения. Проверим сначала выполнение начальных условий:

$$i_1(0) == -\frac{5}{9} + \frac{1}{3}\cdot 0 + 6\cos(0) - 12\sin(0) + e^0 = -\frac{5}{9} + 6 + 1 = \frac{58}{9},$$

$$i_2(0) == \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\cdot 0 - 9\cos(0) + 3\sin(0) - e^0 = \frac{4}{9} - 9 - 1 = -\frac{86}{9}.$$

Таким образом, значения найденных функций при $t=0$ совпадают с заданными начальными условиями. Проверим теперь выполнение системы дифференциальных уравнений.

$$\frac{di_1(t)}{dt} == \frac{1}{3} - 6\sin t - 12\cos t - e^{-t}, \quad \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{2}{3} + 9\sin t + 3\cos t + e^{-t}\ .$$

Первое уравнение:

$$\frac{di_1}{dt} - i_1 - 2i_2 = \left(\frac{1}{3} - 6\sin t - 12\cos t - e^{-t}\right) -$$

$$-\left(-\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t}\right) - 2\left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{8}{9}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)t + (-6 + 12 - 6)\sin t +$$

$$+ (-12 - 6 + 18)\cos t + (-1 - 1 + 2)e^{-t} = t;$$

Второе уравнение:

$$\frac{di_2}{dt} - 2i_1 - i_2 = \left(-\frac{2}{3} + 9\sin t + 3\cos t + e^{-t}\right) -$$

$$-2\left(-\frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + 6\cos t - 12\sin t + e^{-t}\right) - \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}t - 9\cos t + 3\sin t - e^{-t}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)t + (9 + 24 - 3)\sin t +$$

$$+ (3 - 12 + 9)\cos t + (1 - 2 + 1)e^{-t} = 30\sin t.$$

Таким образом, оба уравнения заданной системы обращаются в тождества, верные при любом значении t.

Графики найденных функций показаны на рис. 2.

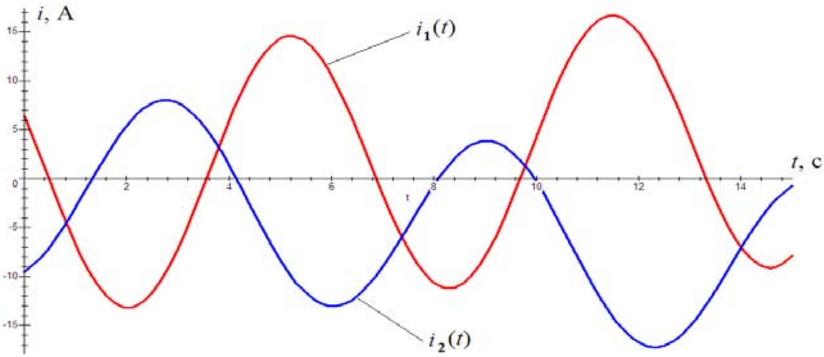

Рис. 2.

Пример 11. Для схемы, изображенной на рис. 3, составить дифференциальное уравнение, решить его с помощью интеграла Дюамеля и определить зависимость силы тока от времени, если

$$R = 6 \text{ Ом},\ L = 1 \text{ Гн},\ C = 40 \text{ мФ},$$

$$e(t) = \frac{e^t}{257}\left(464\cos 16t + 228\sin 16t\right) \text{ В},$$

в начальный момент времени $i(0) = 60$ А, $\dfrac{di}{dt}(0) = -190$ А/с. Сделать проверку полученного решения. Построить график найденной функции.

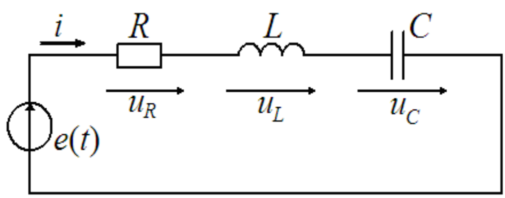

Рис. 3.

Решение. Для электрической схемы рис. 3 справедливо дифференциальное уравнение, составленное по 2-му закону Кирхгофа:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) = e(t).$$

Продифференцировав его по *t*, получим ДУ 2 порядка относительно силы тока $i(t)$:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{de(t)}{dt}.$$

Подставим данные из условия задачи:

$$\begin{aligned}\frac{de(t)}{dt}&=\frac{e^t}{257}\left(464\cos 16t+228\sin 16t\right)+\\&+\frac{e^t}{257}\left(-464\cdot 16\sin 16t+228\cdot 16\cos 16t\right)\end{aligned},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{de(t)}{dt}=e^t\left(16\cos 16t-28\sin 16t\right).$$

Таким образом,

$$\frac{d^2i}{dt^2}+6\frac{di}{dt}+25i=e^t\left(16\cos 16t-28\sin 16t\right). \qquad (10)$$

Так как начальные данные не нулевые: $i(0)=60$, $\frac{di}{dt}(0)=-190$, для применения интеграла Дюамеля сделаем замену переменной по формуле

$$z(t)=i(t)-i(0)-t\frac{di}{dt}(0)\quad\Rightarrow\quad z(t)=i(t)-60+190t.$$

Легко убедиться, что $z(0)=i(0)-60=0$ и

$$\frac{dz}{dt}(0)=\frac{di}{dt}(0)+190=0.$$

Тогда $i(t)=z(t)+60-190t$, $\frac{di}{dt}=\frac{dz}{dt}-190$, $\frac{d^2i}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}$.

Подставим найденные соотношения в (10):

$$\frac{d^2z}{dt^2}+6\left(\frac{dz}{dt}-190\right)+25(z+60-190t)=e^t(16\cos 16t-28\sin 16t)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d^2z}{dt^2}+6\frac{dz}{dt}+25z=e^t(16\cos 16t-28\sin 16t)-360+47500t\,, \qquad (11)$$

где

$$f_1(t)=e^t(16\cos 16t-28\sin 16t)-360+47500t\,. \qquad (12)$$

Решим уравнение (11) с нулевыми начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля. Составим характеристический многочлен данного уравнения:

$$A(p)=p^2+6p+25\,.$$

Тогда передаточная функция

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{p^2+6p+25}=\frac{1}{(p+3)^2+4^2}\,,$$

а весовая функция $w(t)=L^{-1}\left(\dfrac{1}{A(p)}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-3t}\sin 4t.$

По формуле Дюамеля с учетом $w(t)$ и (12) получим:

$$z(t)=(w*f_1)(t)=\int_0^t f_1(s)w(t-s)ds=$$

$$=\int_0^t \left(e^s(16\cos 16s-28\sin 16s)-360+47500s\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-3(t-s)}\sin 4(t-s)\,ds\,.$$

Откуда

$$z(t)=e^{-3t}(60\cos 4t-3\sin 4t)+190t-60+\frac{1}{8}e^t\sin 16t\,,$$

и, с учетом $i(t)=z(t)+60-190t$, получим решение поставленной задачи:

$$i(t) = e^{-3t}\left(60\cos 4t - 3\sin 4t\right) + \frac{1}{8}e^{t}\sin 16t\,.$$

Для проверки полученного решения найдем первую и вторую производные функции $i(t)$ и подставим их в левую часть (10):

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 25i =$$

$$-\frac{255}{8}e^{t}\sin 16t + 4e^{t}\cos 16t + 1461e^{-3t}\sin 4t - 348e^{-3t}\cos 4t \ +$$

$$+\,6\left(\frac{1}{8}e^{t}\sin 16t + 2e^{t}\cos 16t - 231e^{-3t}\sin 4t - 192e^{-3t}\cos 4t\right) +$$

$$+\,25\left(\frac{1}{8}e^{t}\sin 16t - 3e^{-3t}\sin 4t + 60e^{-3t}\cos 4t\right) \ =$$

$$=\left(\ \frac{-255+6+25}{8}\right)e^{t}\sin 16t + \left(\ 4+12\right)e^{t}\cos 16t +$$

$$+\left(1461-1381-75\right)e^{-3t}\sin 4t + \left(-348-1152+1500\right)e^{-3t}\cos 4t =$$

$$= e^{t}\left(16\cos 16t - 28\sin 16t\right),$$

Таким образом, найденная функция обращает заданное дифференциальное уравнение в тождество, верное при любом значении t.

Убедимся также, что выполняются начальные условия.

$$i(0) = e^{0}\left(60\cos(0) - 3\sin(0)\right) + \frac{1}{8}e^{0}\sin(0) = 60\,,$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{1}{8}e^{0}\sin(0) + 2e^{0}\cos(0) - 231e^{0}\sin(0) - 192e^{0}\cos(0) =$$
$$= 2 - 192 = -190.$$

Таким образом, значения найденной функции и ее первой производной при $t=0$ совпадают с заданными начальными условиями задачи, что и требовалось доказать.

График найденной функции $i(t)$ приведен на рис. 4.

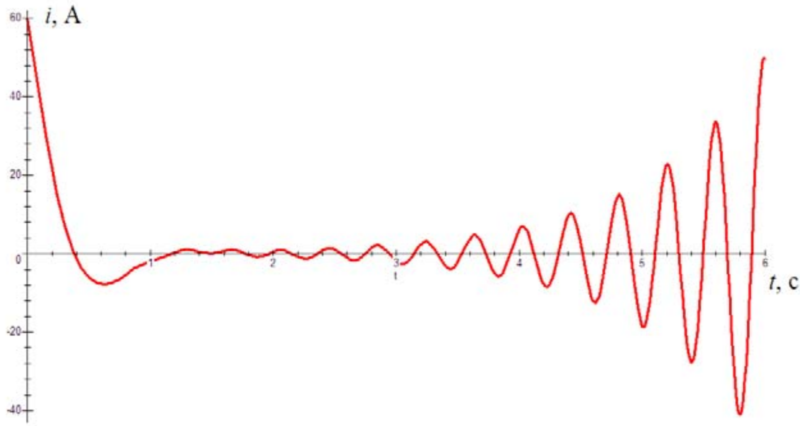

Рис. 4.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется оригиналом?
2. Что называется преобразованием Лапласа? Что такое Лаплас-образ, как он ещё называется? Как обозначается соответствие между оригиналом и Лаплас-образом?
3. Сформулируйте простейшие свойства преобразования Лапласа.
4. Чему равны изображения простейших функций (функция Хевисайда, e^{at}, $\sin bt$, $\cos bt$)?
5. Сформулируйте теорему смещения (затухания).
6. Сформулируйте теорему запаздывания.
7. Как определить изображение импульсной и периодической функции?

8. Что такое свёртка оригиналов, какие у неё свойства?
9. Сформулируйте теорему о свёртке оригиналов.
10. Сформулируйте теоремы интегрирования и дифференцирования оригиналов.
11. Сформулируйте теоремы интегрирования и дифференцирования изображений.
12. В чём идея операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений?
13. Что такое операторное решение дифференциального уравнения?
14. Что такое интеграл Дюамеля?
15. Для решения каких дифференциальных уравнений целесообразно применять интеграл Дюамеля?
16. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
17. В каких случаях система алгебраических уравнений имеет единственное решение? множество решений? не имеет решения?
18. Укажите методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основная литература

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 105 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71687

2. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 213 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71690

3. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 207 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71691

4. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.
http://znanium.com/catalog/product/851522

2. Дополнительная литература

1. Математический практикум. Часть 5. Теория вероятностей и основы математической статистики. Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление. Элементы теории поля: Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев, С.Е. Мансурова, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 187 с.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D907324<.>

2. Математический практикум. Часть 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье. Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, Т.Р. Акчурин, С.Е. Мансурова, Т.С. Обручева, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 152 с.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088717%2F%D0%9C%2034%2D147020047<.>

3. *Фихтенгольц, Г.М.* Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с.

https://e.lanbook.com/book/65055

4. *Фихтенгольц, Г.М.* Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс]: учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 464 с.

https://e.lanbook.com/book/411

5. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов ВУЗов / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: АСТ, 2014. [Электронный ресурс] - http://www.for-stydents.ru/matematika/uchebniki/vysshaya-matematika-v-uprazhneniyah-i-zadachah-v-2-h-chastyah.html

3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента

1. Господариков А.П. и др. Теория поля. Ряды Фурье. Операционное исчисление. Математическая физика. Математическая статистика. Линейное программирование (сборник РГЗ) / Учебно-методическое пособие – Горный университет, 2013.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088690%2F%D0%92%2093%2D462777832<.>

2. Волынская И.А., Козлова Н.Н. Математика (дополнительные главы). Учебное пособие. - Горный университет, 2013.

http://irbis.spmi.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=374&task=set_static_req&bns_string=NWPIB,ELC,ZAPIS&req_irb=<.>I=%D0%90%2088596%2F%D0%92%2070%2D954561949<.>

3. Гончар Л.И., Скепко О.А. Применение операционного исчисления для решения задач теории автоматического управления. Методические указания для выполнения расчетного задания. – Горный университет, 2017.

https://lk.spmi.ru/~T3iiz

СОДЕРЖАНИЕ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания к самостоятельным работам для студентов магистратуры направления 13.04.02

Сост. *С.Е. Мансурова, А.А. Яковлева*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *С.Е. Мансурова*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 02.09.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,7. Усл.кр.-отт. 1,7. Уч.-изд.л. 1,5 . Тираж 50 экз. Заказ 777.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2