

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов магистратуры направления 22.04.01*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информатики и компьютерных технологий

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов магистратуры направления 22.04.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 62.001.63(073)

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ: Методические указания к лабораторным работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *Г.Н. Журов*. СПб, 2021. 49 с.

Представлены три лабораторные работы, связанные с решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Содержатся краткие теоретические сведения по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, примеры решения типовых задач с помощью математического пакета Mathcad, а также варианты заданий к лабораторным работам.

Предназначены для студентов магистратуры направления 22.04.01 «Материаловедение и технологии материалов» направленность (профиль) «Материаловедение и технологии наноматериалов и покрытий».

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

Рецензент канд. техн. наук *К.В. Столяров* (Корпорация «Telum inc» Барбадос)

© Санкт-Петербургский
горный университет, 2021

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов магистратуры направления 22.04.01*

Сост.: *Г.Н. Журов*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
информатики и компьютерных технологий

Ответственный за выпуск *Г.Н. Журов*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 06.04.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,8. Усл.кр.-отт. 2,8. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 75 экз. Заказ 285.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

ВВЕДЕНИЕ

Инженерные и научные задачи часто связаны с решением дифференциальных уравнений, так как с помощью последних описываются многие физические явления. Соответственно процессы в технических устройствах так же описываются дифференциальными уравнениями.

Природа этих процессов различна. При анализе тепловых режимов аппаратуры рассчитывают тепловые потоки, при изучении электромагнитных процессов – электрические и магнитные поля, при оценке прочности изделий вычисляют механические напряжения и деформации.

К сожалению, для многих практически важных случаев задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, весьма сложны. Как правило, эти задачи практически исключают получение аналитических решений. В первую очередь это относится к нелинейным дифференциальным уравнениям либо к системам линейных дифференциальных уравнений высокой размерности с переменными коэффициентами.

В таких случаях единственная возможность их исследования или решения обычно связана с применением численных методов. Однако решить подобные сложные задачи также как и более простые можно с помощью компьютера. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений на компьютере широко применяются в инженерной практике.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по методам решения задач, включающих обыкновенные дифференциальные уравнения, а именно, задачи с начальными и краевыми условиями. Для решения задачи Коши рассмотрены одношаговые методы Эйлера и Рунге-Кутты, а для решения краевой задачи метод стрельбы и метод прогонки. Представленные в методических указаниях алгоритмы решения реализованы в специализированном математическом пакете Mathcad.

Данный материал изучается магистрантами направления 22.04.01 в разделе «Инженерный анализ и компьютерное моделирование различных процессов».

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, $y^{(i)}$ – i -ая производная от искомой функции. n – порядок уравнения. Общее решение ОДУ n -го порядка содержит n произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n , т.е. общее решение имеет вид $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Для выделения единственного решения необходимо задать n дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача.

Задача Коши

Задачу Коши можно сформулировать следующим образом. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

и начальное условие

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти функцию $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_k]$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

На практике подобные задачи обычно связаны с расчётом переходных электрических, нестационарных тепловых или механических процессов при заданном в некоторый начальный момент времени исходном состоянии системы.

Краевая задача (граничная задача)

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями,

заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (3)$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[x_0, x_k]$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y(x_k) &= y_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_0, y_1 . Если функция $f(x, y, y')$ линейна по аргументам y, y' , то задача (3), (4) - линейная краевая задача, в противном случае - нелинейная.

Кроме граничных условий (14) называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах - граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= y_1 \end{aligned} \quad (5)$$

или линейная комбинация решений и производных - граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot y(x_0) + \beta_0 \cdot y'(x_0) &= \gamma_0 \\ \alpha_1 \cdot y(x_k) + \beta_1 \cdot y'(x_k) &= \gamma_1. \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ - такие числа, что $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

Можно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Приближенное решение задачи Коши методом Эйлера».

Цель – сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = y(x_0)$ методом Эйлера, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Теоретические сведения

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i называются узлами сетки, а величина h - шагом ($h > 0$).

В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Этот метод относится к группе одношаговых методов, в которых для расчета точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация только о последней вычисленной точке (x_i, y_i) . Метод допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Предположим, что известна точка (x_i, y_i) на искомой интегральной кривой. Тогда касательная к этой кривой, проходящая через точку (x_i, y_i) ,

определяется уравнением $y = y'_i(x - x_i) + y_i$, а так как $y'_i = f(x_i, y_i)$ и $x_{i+1} = x_i + h$, то $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

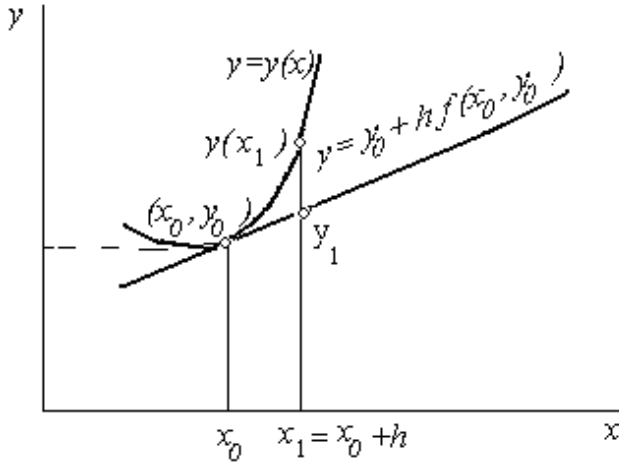


Рис. 1

Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности узла x_i

$$\begin{aligned}
 y(x_{i+1}) &= y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + O(h^2) = \\
 &= y(x_i) + hf(x_i, y_i) + O(h^2).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Сравнение формулы (7) с разложением (8) показывает, что они согласуются до членов первого порядка по h а погрешность формулы (1) равна $O(h^2)$. Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p , то число p называют порядком метода. Таким образом, Метод Эйлера – метод первого порядка.

Для практической оценки погрешности расчета можно рекомендовать правило Рунге. Для этого проведем вычисления с шагом h и $h/2$ и сравним величины $y_i^{(h)}$ и $y_{2i}^{(h/2)}$. За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max_i \left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|. \quad (9)$$

Используем описанный алгоритм Эйлера при решении примера 1.

Пример 1. Получить численное решение дифференциального уравнения $y' + 3y = x^2 \sin x$ с начальным условием $y(0) = 40$ на интервале $[0, 20]$. Полученное решение сравнить с точным решением:

$$y_{\tau}(x) = -\frac{1}{10} \cdot x^2 \cdot \cos x + \frac{3}{25} \cdot x \cdot \cos(x) - \frac{13}{250} \cdot \cos(x) + \\ + \frac{3}{10} \cdot x^2 \cdot \sin x - \frac{4}{25} \cdot x \cdot \sin(x) + \frac{9}{250} \cdot \sin x + \frac{10013}{250} \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 2-5. На рис. 2 задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция Euler(x0,xk,n,y0), решающая это уравнение по формуле (7). На рис. 3 задается функция Ytez, которая уточняет полученное решение по формуле (9) с заданной точностью. На рис. 4 представлен график решения. На рис. 5 представлены результаты решения и проведено сравнение полученного решения с точным. Как видим, полученное решение с заданной точностью совпадает с точным решением.

x_0 - начальное значение x_0

x_k - конечное значение отрезка интегрирования уравнения

y_0 - значение y в точке x_0

n - число точек интегрирования

h - шаг интегрирования

eps - оценка погрешности вычислений

f - правая часть уравнения

$x_0 := 0$ $x_k := 20$ $y_0 := 40$ $n := 10$ $\text{eps} := 0.001$

$f(x, y) := x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot y$

```
Euler(x0, xk, n, y0) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x_0 \\ y_0 \leftarrow y_0 \\ h \leftarrow \frac{x_k - x_0}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{array} \right. \\ Y^{(0)} \leftarrow x \\ Y^{(1)} \leftarrow y \\ Y \end{array} \right.$ 
```

Рис. 2 Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Эйлера

```

Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..100000000
        |   y1 ← Euler(x0,xk,n,y0)
        |   y2 ← Euler(x0,xk,2n,y0)
        |   for k ∈ 0..n
        |     rk ← max(|y1k,1 - y2k,1|)
        |     break if max(r) < eps
        |     n ← 2 · n otherwise
        |   (y2)
        |   (n)
nm := 0,  $\frac{Yrez_1}{5} \dots (2Yrez)_1$ 
(Yrez0)nm,0 (Yrez0)nm,1 =


|    |         |
|----|---------|
| 0  | 40      |
| 2  | 1.02    |
| 4  | -2.409  |
| 6  | -5.575  |
| 8  | 18.564  |
| 10 | -8.042  |
| 12 | -33.149 |
| 14 | 53.607  |
| 16 | 1.343   |
| 18 | -90.863 |
| 20 | 91.3    |


n1 := Yrez1
y1 := Euler(x0,xk,n1,y0)
y2 := Euler(x0,xk,2n1,y0)
k := 0..n1
rk := max(|y1k,1 - y2k,1|)
max(r) = 0.0007
Yrez1 = 3.277 × 105

```

Рис. 3 Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, уточняющей решение с заданной точностью

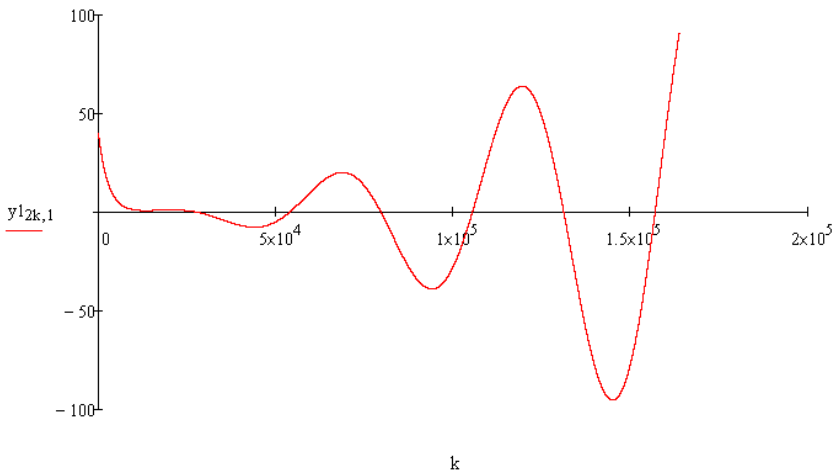


Рис. 4 Фрагмент рабочего документа MATHCAD с графиком решения

точное решение

$x := 0..20$

$$y_T(x) := \frac{10013 \cdot e^{-3x}}{250} - \frac{13 \cdot \cos(x)}{250} + \frac{9 \cdot \sin(x)}{250} - \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{10} + \frac{3 \cdot x^2 \cdot \sin(x)}{10} + \frac{3 \cdot x \cdot \cos(x)}{25} - \frac{4 \cdot x \cdot \sin(x)}{25}$$

$E_x := (\text{Yrez0})_{\frac{\text{Yrez1}}{10} - x, 1}$ **Решение методом Эйлера**

$x =$	$y_T(x) =$	$E_x =$	$x =$	$y_T(x) =$	$E_x =$
0	40	40	11	-34.624	-34.624
1	2.125	2.125	12	-33.149	-33.149
2	1.02	1.02	13	6.476	6.476
3	0.909	0.909	14	53.607	53.607
4	-2.409	-2.409	15	58.122	58.123
5	-7.013	-7.013	16	1.343	1.343
6	-5.575	-5.575	17	-73.368	-73.368
7	5.845	5.845	18	-90.862	-90.863
8	18.564	18.564	19	-17.708	-17.708
9	15.879	15.879	20	91.3	91.3
10	-8.042	-8.042			

Рис. 5 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – сравнение решения методом Эйлера с точным решением

Задание 1. Используя метод Эйлера получить численное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, x_k]$ с точностью eps . Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 1.

Варианты заданий

Таблица 1

Номер варианта	$f(x, y)$	x_0	x_k	y_0	eps
1	$\cos(x \cdot y)$	1	4	3	0,001
2	$x \cdot y^2 - \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	0	4	-0,5	0,0001

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	$f(x, y)$	x_0	x_k	y_0	eps
3	$y + \ln(x + y)$	1	2	5	0,01
4	$x \cdot \sin\left(\frac{x \cdot y}{x + y}\right)$	2	10	3	0,001
5	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	3	9	-1	0,001
6	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	6	-0,5	0,0001
7	$x \cdot \sin\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	7	0,65	0,001
8	$x^3 \cdot y^2 - e^{x \cdot y}$	1	4	2,5	0,001
9	$y - \ln(x^2 \cdot y)$	1	6	2	0,01
10	$y^{-x} - \tan(x \cdot y^2)$	1,5	7	2	0,001
11	$2 \cdot x^2 - \ln(x^2 \cdot y)$	1	9	1	0,01
12	$2 \cdot x^2 + \ln(x + y)$	1,3	2,8	1	0,1
13	$x^2 \cdot \cos(x - y)$	1	5	1	0,001
14	$x^2 \cdot \sin(x^2 - y)$	1	3	1	0,001
15	$y^2 \cdot \sin(x^2 + y)$	0	4	0,5	0,001
16	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y)$	0	7	0,7	0,001
17	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y^2)$	0	4	1,5	0,001
18	$x^3 \cdot \sin(x^3 - y^2)$	0	8	-1	0,0001
19	$y^{-3 \cdot x} \cdot \sin(x + y^2)$	0	7	1,4	0,001
20	$y^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x - y^2)$	0	8	1,1	0,001

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 6.

$$x_0 := 0 \quad x_k := 3 \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -xy_0 \end{pmatrix} \quad n := 30 \quad \text{eps} := 0.001$$

```

Euler(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n - 1
    xi+1 ← xi + h
    yi+1 ← yi + h · f(xi, yi)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..100000000
    y1 ← Euler(x0, xk, n, y0)
    y2 ← Euler(x0, xk, 2n, y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k, 1 - y2k, 1|)
    break if max(r) < eps
    n ← 2 · n otherwise
  (y1
   n)
  
```

$$Yrez_1 = 1.92 \times 10^3 \quad n := Yrez_1 \quad mn := 0, \frac{n}{10} \dots n \quad y := \text{Euler}(x_0, x_k, n, y_0)$$

$$(y_{nn, 1})_0 = \quad (y_{nn, 1})_1 =$$

0	0
0.045	0.299
0.178	0.585
0.391	0.827
0.667	1.001
0.984	1.101
1.322	1.147
1.669	1.164
2.019	1.169
2.37	1.17
2.721	1.171

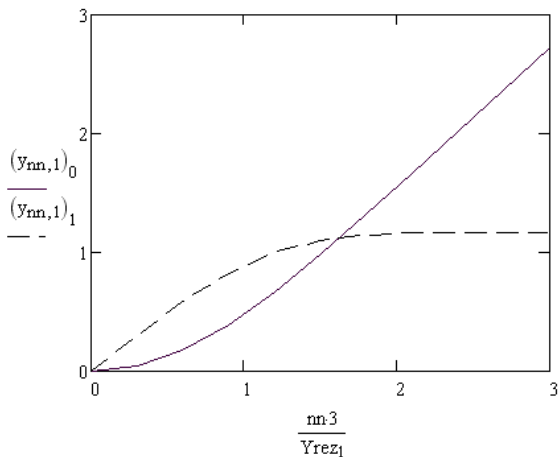


Рис. 6 Рабочий документ MATHCAD – решение примера 2 методом Эйлера

Задание 2. Методом Эйлера на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью eps решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 2.

Варианты заданий

Таблица 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
1	$\cos(x + y_2)$ $\sin(x - y_1)$	0	8	0,5 -0,5	0,001
2	$arctg(x \cdot y_2)$ $\sin(y_1)$	-2,2	1,8	0,1 0	0,001
3	$\sin(y_2)$ $\cos(y_1)$	1	7	0,4 -0,6	0,01
4	$\sqrt{1 + x^2 + y_2^2}$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	4	-1 1	0,01
5	$arctg\left(\frac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}\right)$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	5	1 1	0,0001
6	$\frac{1}{3 + e^{-y_2}}$ $\frac{1}{2 + e^{-y_1}}$	2	7	0,2 -3	0,0001

Продолжение таблицы 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
7	$e^{-(y_1+y_2)}$ $arctg(y_1)$	0	5	1 -1	0?001
8	$\frac{y_1^2}{y_2}$ $y_1^2 - y_2$	1	3	1 1	0,001
9	$\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}$ $\frac{2}{y_1^2 + y_2^2}$	2	12	1 -1	0,001
10	$\sin(y_1) \cdot \cos^3(y_2)$ $\cos(y_1) \cdot \cos(y_2)$	-1	3	0,8 0,2	0,01
11	$\frac{1}{ch(x + y_2)}$ $sh(x^2 - y_1)$	0	3	2 1	0,01
12	$\ln(x) \cdot y_2$ $y_1 + y_2^2$	1	4	-4 -6	0,01
13	$y_2 + \sqrt{x^2 + y_1^2}$ $\cos(x) \cdot y_2 - \sin(2 \cdot x)$	2	4	4 8	0,001
14	$\sin^3(y_2)$ $\cos^2(y_1)$	0	6	0,5 -1	0,01
15	$\frac{\cos^2(x + y_2)}{\sin(x - y_1)}$ 2	0	3	0,3 -0,6	0,0001

Продолжение таблицы 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	eps
16	$\frac{\cos(x + y_2^2)}{2}$ $\ln(x) \cdot \sin^3(x - y_1)$	1	6	0,2 -0,5	0,01
17	$\ln(x + 2) \cdot y_2^2$ $\sin(x - y_1^2)$	1	3	-1 1	0,001
18	$\sin(x) \cdot e^{-x \cdot y_1}$ $\cos(y_2) \cdot e^{-\frac{x}{y_1^2}}$	1	6	0,2 0,5	0,0001
19	$e^{\frac{x + y_1}{y_1 + y_2}}$ $e^{\frac{y_1 - x_1}{y_1 + y_2}}$	2	4	1 -1	0,01
20	$\arctg\left(\frac{1}{1 + y_1^2}\right)$ $\cos^4(y_1 \cdot y_2)$	-2	5	1 1	0,0001

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема: «Метод Рунге-Кутты четвертого порядка».

Цель – сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умение решать задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = y(x_0)$ методом Рунге-Кутты, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Теоретические сведения

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Точки x_1, x_2, \dots, x_n - узлы сетки. Используем систему равноотстоящих узлов. Величина h - шаг сетки ($h > 0$).

Методом Рунге-Кутты обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов типа Рунге-Кутты. В этом методе величины y_{i+1} вычисляют по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad (10)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна Ch^4 , но на практике оценить величину C обычно трудно. При оценке погрешности используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления сначала с шагом h , а затем – с шагом $h/2$. Если $y_i^{(h)}$ – приближение, вычисленное с шагом h , а $y_{2i}^{(h/2)}$ – с шагом $h/2$, то справедлива оценка

$$\left| y_{2i}^{(h/2)} - y(x_{2i}) \right| \leq \frac{16}{15} \left| y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)} \right|. \quad (11)$$

За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ вместо оценки (11) можно принять величину

$$\max \frac{\left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|}{15}. \quad (12)$$

Решим пример 1 из лабораторной работы 1 методом Рунге-Кутта. Результаты представим на рис. 7. Сначала задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция $\text{RungeKutta}(x_0, x_k, n, y_0)$, решающая это уравнение по формулам (10). Затем задается функция Yrez , которая уточняет полученное решение по формуле (12) с заданной точностью.

Как видим результаты вычислений по методу Рунге-Кутта, также совпали с точным решением, как и с помощью метода Эйлера. Однако, для того чтобы это совпадение произошло по методу Рунге-Кутта нам пришлось умешать шаг в 2048 раз меньше, чем с помощью метода Эйлера, что приводит к уменьшению ошибки округления и значительной экономии машинного времени.

Задание 3. Используя метод Рунге-Кутта получить численное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, с

начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, x_k]$ с точностью eps . Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 1 из лабораторной работы № 1. Сравнить результаты решения. Сделать выводы.

```

x0 := 0  xk := 20  y0 := 40  n := 10  eps := 0.001  f(x,y) := x^2 * sin(x) - 3 * y
RungeKutta(x0,xk,n,y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h * f(xi, yi)
    k2i ← h * f(xi + h/2, yi + k1i/2)
    k3i ← h * f(xi + h/2, yi + k2i/2)
    k4i ← h * f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi + 1/6 * (k1i + 2 * k2i + 2 * k3i + k4i)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

  Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..1000000
    y1 ← RungeKutta(x0, xk, n, y0)
    y2 ← RungeKutta(x0, xk, 2n, y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k,1 - y2k,1|) / 15
    break if max(r) < eps
    n ← 2 * n otherwise
  (y2)
  mn := 0, Yrez1 / 5 .. (2Yrez)1

  (Yrez0)mn,0  (Yrez0)mn,1 =
  0 40
  2 1.02
  4 -2.409
  6 -5.575
  8 18.564
  10 -8.042
  12 -33.149
  14 53.607
  16 1.343
  18 -90.862
  20 91.3

  n1 := Yrez1
  y1 := RungeKutta(x0,xk,n1,y0)
  y2 := RungeKutta(x0,xk,2n1,y0)
  k := 0..n1
  rk := max(|y1k,1 - y2k,1|) / 15
  max(r) = 0.000208
  Yrez1 = 160

```

Рис. 7 Рабочий документ MATHCAD – решение примера 1 методом Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутта легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобно записывать в векторной форме

$$Y'(x) = F(x, Y),$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Для получения расчетных формул методом Рунге-Кутта достаточно в формулах (7) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$, а коэффициенты k_j - на K_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Пример 3. Методом Рунге-Кутта на отрезке $[0, 2]$ с точностью $eps = 0,0000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2 + \sin(x \cdot y_3), \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_3 - y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 8.

$$x0 := 0 \quad xk := 2 \quad eps := 0.0000001 \quad n := 10 \quad f(x,y) := \begin{bmatrix} -y1 + \sin(x \cdot y2) \\ (y0)^2 \\ -y2 - y0 \end{bmatrix} \quad y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```

RungeKutta(x0,xk,n,y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi + h/2, yi + k1i/2)
    k3i ← h · f(xi + h/2, yi + k2i/2)
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi + 1/6 · (k1i + 2 · k2i + 2 · k3i + k4i)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..1000000
    y1 ← RungeKutta(x0,xk,n,y0)
    y2 ← RungeKutta(x0,xk,2n,y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k,1 - y22k,1|)
    break if max(r) < eps
  n ← 2 · n otherwise
  (y2)
  Yrez1 = 40
  n := 0, Yrez1 / 5 .. (2Yrez)1

```

$$x(n) := (Yrez0)_{n,0} \quad y1(n) := [(Yrez0)_{n,1}]_0 \quad y2(n) := [(Yrez0)_{n,1}]_1 \quad y3(n) := [(Yrez0)_{n,1}]_2$$

x(n) =	y1(n) =	y2(n) =	y3(n) =
0	1	0	1
0.2	0.995	0.199	0.638
0.4	0.964	0.393	0.344
0.6	0.889	0.566	0.113
0.8	0.764	0.704	-0.057
1	0.591	0.797	-0.17
1.2	0.382	0.846	-0.227
1.4	0.151	0.861	-0.234
1.6	-0.086	0.862	-0.197
1.8	-0.313	0.871	-0.124
2	-0.519	0.907	-0.025

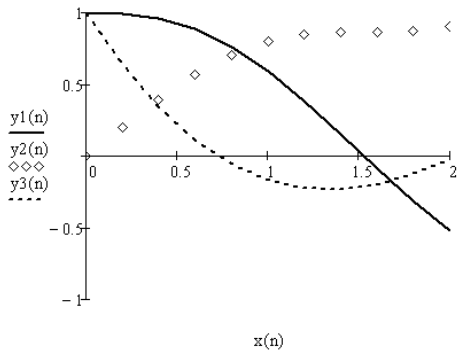


Рис. 8 Рабочий документ MATHCAD – решение примера 3 методом Рунге-Кутты

Задание 4. Методом Рунге-Кутты на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 3.

Варианты заданий

Таблица 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
1	$e^{y_3 - y_1}$ $\sin(x \cdot y_3)$ $\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2^2}$	1	3	2 -1 0
2	$2y_1^2 + y_2 \cdot y_3$ $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1^3$ $\sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}$	-1	0	-2 -7 2
3	$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$ $x^2 \cdot y_2^2$ $\lg(x^2 + y_1^2)$	0,2	2,2	0,1 -1 0,5
4	$\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $\ln(x^2 + y_3^2)$ $e^{-y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$	1	5	1 1 1

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
5	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $y_1^2 + y_2 + y_3^2$ $\sin(y_1 + y_3)$	1,5	3,5	0,7 1 -0,7
6	$sh(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $ch(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0,75	2	0,3 -1 0,4
7	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(arctg(y_1 \cdot y_3))$	-2	6	-2 -5 4
8	$\sin(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\cos(arctg(y_1 \cdot y_2))$	0	4	-1 -2 2
9	$-y_2 + \cos(x \cdot y_3)$ y_1^3 $-\frac{y_3}{2} - 2y_1^2$	1	5	0 0 0
10	$\frac{1}{2y_1^2 + y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{1 + y_3^2}$	-3	1	1 3 1

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
11	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $e^{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	1	5	-2 1 3
12	$e^{\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$ $y_1^2 + y_2 + y_3$ $\cos(y_1 + y_3)$	0,6	2,6	0,5 0,75 -0,5
13	$\ln(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\lg(x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3)$ $\cos(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	4	0,75 0,5 1
14	$e^{x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	1	0 0,5 0
15	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(\arctg(y_1 \cdot y_2))$	-3	3	-1 -7 2
16	$\frac{1}{2 + e^{y_1 \cdot y_2}}$ $\frac{1}{2 + \sin(y_1 \cdot y_3)}$ $\frac{3}{3 + \cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$	-1	3	-1 0,5 1,3

Продолжение таблицы 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
17	$\sqrt{x^2 + y_2^2}$ $e^{\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)}$ $\cos(\arctg(y_1 \cdot y_3))$	-4	2	-3 6 -4
18	$e^{x \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y_2^2}}$ $\cos(x^2 + y_3^2)$	0,9	2,2	0,1 0,2 0,3
19	$\sqrt[4]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt[3]{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	2	4	2 0 3
20	$-y_2 + \sin(x \cdot y_3)$ y_1^3 $-y_3 - y_1^2$	1	5	0 1 1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Краевая задача (граничная задача)».

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ при заданных краевых}$$

условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_k) = y_1$. методом стрельбы и конечно-разностным методом, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Теоретические сведения

Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть надо решить краевую задачу (3), (4) на отрезке $[x_0, x_k]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (3) и с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= \theta \end{aligned} \quad (13)$$

где θ - некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = x_0$.

Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\theta = \theta_0$, после чего решим каким-либо методом задачу Коши (1), (2).

Пусть $y = y_0(x, y_0, \theta_0)$ решение этой задачи на интервале $[x_0, x_k]$, тогда сравнивая значение функции $y_0(x_k, y_0, \theta_0)$ со значением y_1 в правом конце отрезка можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу для нового значения $\theta = \theta_1$, получим другое

решение со значением $y_1(x_k, y_0, \theta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(x_k, y_0, \theta)$ будет являться функцией одной переменной θ . Задачу можно сформулировать таким образом: требуется найти такое значение переменной θ^* , чтобы решение $y(x_k, y_0, \theta^*)$ в правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (13). Другими словами, решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\theta) = 0, \quad (14)$$

где $\Phi(\theta) = y(x_k, y_0, \theta) - y_1$.

Уравнение (13) является «алгоритмическим» уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (14) аналогичны методам решения нелинейных уравнений. Следует заметить, так как невозможно вычислить производную функции $\Phi(\theta)$, то вместо метода Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный аналог легко вычисляется по двум приближениям, например θ_j и θ_{j+1} . Следующее значение искомого корня определяется по соотношению

$$\theta_{j+2} = \theta_{j+1} - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Phi(\theta_{j+1}) - \Phi(\theta_j)} \Phi(\theta_{j+1}). \quad (15)$$

Итерации по формуле (15) выполняются до удовлетворения заданной точности.

Итак, если дана краевая задача, например, в вышеприведенной формулировке, то в методе стрельбы она заменяется задачей Коши для того же уравнения (15) но с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = k = tg\theta. \quad (16)$$

Здесь $y(x_0)$ – точка, которая является началом кривой решения $y(x)$ дифференциального уравнения, θ – угол наклона касательной к этой кривой в начальной точке.

Считая решение задачи Коши зависящим от начального условия $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = tg\theta$, будем подбирать такое значение θ , при котором кривая решения $y(x)$ в точке x_k даст совпадающий с (13) результат $y(x_k) = y_1$. Если это условие будет выполнено, то решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи.

Применительно к описанному подходу название "метод стрельбы" вполне оправдано, поскольку в нем производится как бы "пристрелка" по углу наклона кривой $y(x)$ в начальной точке.

Чтобы сократить количество попыток при поиске решения $y(x)$, применяют различные стратегии подбора параметра θ . Например, при использовании метода половинного деления действуют следующим образом. Вначале выполняют два пробных расчета при значениях параметра θ равных θ_1 и θ_2 . Эти значения выбирают таким образом, чтобы при $\theta = \theta_1$ решение давало в точке $x = x_k$ "перелет", то есть $y(x_k) > y_1$, а при $\theta = \theta_2$ – "недолет", то есть $y(x_k) < y_1$.

Далее, используя в начальном условии (20) значение $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2)/2$, вновь численно решают задачу Коши. Из трех полученных решений отбрасывают то, которое дает в точке $x = x_k$ наибольшее отклонение от y_1 . Затем от двух оставшихся значений параметра θ находят среднее θ_4 и вновь выполняют с этим значением расчет.

Повторение описанного процесса прекращают, когда разность двух последовательно найденных значений θ станет меньше некоторого заданного малого числа или достаточно малым

будет отклонение $y(x_k)$ от y_1 . Подобный алгоритм может быть построен и с использованием метода Ньютона.

Пример 4. Методом стрельбы на отрезке $[0,1]$ с точностью $eps = 0,0001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = e^x + \sin(y), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 9-12.

x_0 и x_k - начальное и конечное значение отрезка интегрирования

a - значение y в точке x_0

b_k - значение y в точке x_k

b_1 и b_2 - два пристрелочных значений

n - число точек интегрирования

eps - погрешность вычислений

$f(x, y)$ - вектор_определяющий_правую_часть_уравнения

$$\begin{array}{l}
 x_0 := 0 \quad x_k := 1 \quad eps := 0.0001 \quad n := 10 \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ e^x + \sin(y_0) \end{pmatrix} \\
 a := 1 \quad b_k := 2 \quad b_1 := 1 \quad b_2 := 0.8
 \end{array}$$

Рис. 9. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (задание исходных данных)

```

RK(x0, xk, n, a, b1) :=
  x0 ← x0
  a ← a
  b1 ← b1
  y0 ←  $\begin{pmatrix} a \\ b1 \end{pmatrix}$ 
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..n-1
     $x_{i+1} \leftarrow x_i + h$ 
     $k1_i \leftarrow h \cdot f(x_i, y_i)$ 
     $k2_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right)$ 
     $k3_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right)$ 
     $k4_i \leftarrow h \cdot f(x_i + h, y_i + k3_i)$ 
     $y_{i+1} \leftarrow y_i + \frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i)$ 
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

```

Рис. 10 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 методом стрельбы (функция, возвращающая решение исходного уравнения методом Рунге-Кутты)


```

Firing(x0, xk, n, b1, b2) :=
|
|   $\theta \leftarrow \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$ 
|
|   $F \leftarrow \begin{bmatrix} (RK(x0, xk, n, a, b1)_{n,1})_0 \\ (RK(x0, xk, n, a, b2)_{n,1})_0 \end{bmatrix}$ 
|
|  for m ∈ 0..10
|  |
|  |   $\theta_{m+2} \leftarrow \theta_{m+1} - \frac{\theta_{m+1} - \theta_m}{F_{m+1} - F_m} \cdot (F_{m+1} - bk)_0$ 
|  |
|  |  break if  $|F_{m+1} - bk| < eps$ 
|  |
|  |  otherwise
|  |  |
|  |  |   $F_{m+2} \leftarrow (RK(x0, xk, n, a, \theta_{m+2})_{n,1})_0$ 
|  |  |
|  |  |  for j ∈ 0..n
|  |  |  |
|  |  |  |   $x_j \leftarrow RK(x0, xk, n, a, \theta_{m+2})_{j,0}$ 
|  |  |  |
|  |  |  |   $y_j \leftarrow (RK(x0, xk, n, a, \theta_{m+2})_{j,1})_0$ 
|  |  |
|  |
|   $Y1^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x$ 
|   $Y1^{\langle 1 \rangle} \leftarrow y$ 
|  Y1

```

Рис. 11 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 методом стрельбы (функция, возвращающая решение краевой задачи)

$j := 0..n$ $x_j := \text{Firing}(x_0, x_k, n, b1, b2)_j, 0$ $y_j := \text{Firing}(x_0, x_k, n, b1, b2)_j, 1$

$x_j =$

0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$y_j =$

1
0.993
1.006
1.039
1.095
1.174
1.279
1.412
1.575
1.77
2

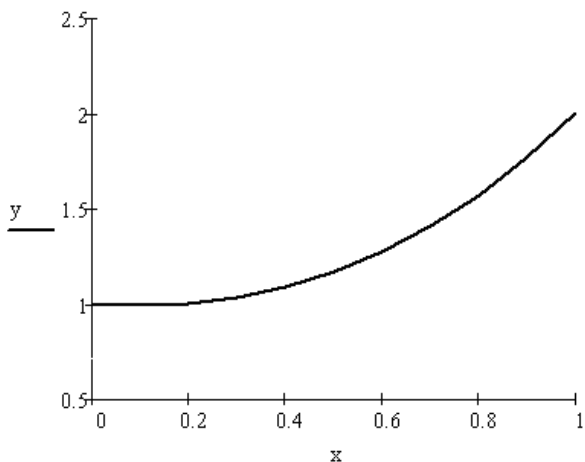


Рис. 12 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (числовое и графическое решение краевой задачи)

Задание 5. Методом стрельбы на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий

Вариант 1.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) + x^{2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot y'(x) + \sin(y(x)) \cdot y(x) = \lg\left(\frac{x-1}{x+3}\right),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = -1, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 10.$$

Вариант 3.

$$y''(x) + \sqrt{x^4 + 2 \cdot x + 1} \cdot y(x) = \sin^2(2 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = -1, \quad y(x_k) = -3, \quad y''(x_0) = 3 \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Вариант 4.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 2,5, \quad y(x_k) = 1,5, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) + \frac{6 \cdot x}{\sin(x)} \cdot y'(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y(x) = x \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + \operatorname{Arsh}(x) \cdot y'(x) + 3 \cdot x^2 \cdot y(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin(5 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 4.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(y(x)) \cdot y'(x) + [\lg(x+6) + \sin(y(x))] \cdot y(x) =$$

$$= x^2 + \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0,5, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + \operatorname{ch}(x) \cdot y'(x) + [\ln(|\sin(x+2)|) + \sin(y(x))] \cdot y(x) =$$

$$= x^2 \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -4, \quad x_k = 0.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + \left[\frac{2}{x} + y(x) \right] \cdot y'(x) + \sin(x) \cdot y^2(x) = \sqrt{x^2 + 4} + y(x),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + x^4 \cdot y'(x) + 2 \cdot x^3 \cdot \sin(y(x) + 1) \cdot y(x) = e^{x \cdot \cos(y(x))},$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.$$

Вариант 11.

$$y''(x) + \left[6 \cdot x^3 + \cos(y(x))\right] \cdot y'(x) + \operatorname{cth}\left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot y(x) =$$

$$= \ln(x - 2) + \sin(y(x)),$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 4, \quad x_0 = 15, \quad x_k = 2,5.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + \cos\left(y(x) + \frac{4}{x+1}\right) y'(x) + e^{\cos(y(x))} \cdot y(x) =$$

$$= \frac{x^2}{x+1} + \sin^2(y(x)),$$

$$y(x_0) = 8, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x + y(x)) \cdot y'(x) + e^{\sin(4-x+y(x))} \cdot y(x) =$$

$$= \sqrt{x^3 + 2 \cdot x^2 + 1} + \sin^2(y(x)),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + \left[4 \cdot x + \cos^3(y(x))\right] \cdot y'(x) +$$

$$+ \left[1 + \sqrt{|\sin(x + y(x)) + 3|}\right] \cdot y(x) = \frac{1}{x+5} \cdot \sin(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2.$$

Вариант 15.

$$y''(x) + \ln(x+2) \cdot y'(x) + x^2 \cdot \cos(y(x)+2) \cdot y(x) = \\ = \sqrt[3]{x^2+2} + \sin^3(y(x)),$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 8, \quad x_k = 10.$$

Вариант 16.

$$y''(x) + [3 \cdot x + \sin(y(x))] \cdot y'(x) + x^3 \cdot \lg(3 \cdot x) \cdot y(x) = \\ = 3 \cdot e^{3 \cdot x} + \cos(3 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 6, \quad x_0 = 0,5, \quad x_k = 3,5.$$

Вариант 17.

$$y''(x) + \frac{x+1}{y(x)+3} \cdot y'(x) + [\operatorname{tg}(x) + \cos(y(x))] \cdot y(x) = \\ = e^x + \cos^3[y(x)+1],$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 18.

$$y''(x) + y'(x) + [\cos(y(x) + \cos(x))] \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot e^x + \sin(2 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = -20, \quad y(x_k) = 200, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.$$

Вариант 19.

$$y''(x) + \sqrt{x^2 + 4 \cdot x + 7} \sin[4 \cdot y(x)] \cdot y'(x) + \\ + \left[e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos[y(x)] \right] \cdot y(x) = \frac{x^2 + 1}{y(x) - 3},$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 8.$$

Вариант 20.

$$y''(x) + \frac{\lg(x)}{y(x)+1} \cdot y'(x) + x^3 \cdot \cos[y(x)] \cdot y(x) = x^{\sin[x+y(x)]},$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Конечно-разностный метод решения краевой задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[x_0, x_k]$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (17)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_k) = y_1. \quad (18)$$

Введем разностную сетку на отрезке $[x_0, x_k]$ $i = 0, 1, \dots, n$, $h = |x_k - x_0|/n$. Решение задачи (17), (18) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2); \\ \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя аппроксимации производных из (19) в (17), (18) получим систему уравнений для нахождения y_i :

$$\begin{cases} y_0 = y_{x_0} \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \\ y_n = y_{x_k} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ (20) \\ i = 1, \dots, n-1 \end{matrix}$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_n уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трех диагональной матрицей коэффициентов

$$\begin{aligned}
& (-2 + h^2 q(x_1))y_1 + \left(1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right)y_2 = h^2 f(x_1) - \left(1 - \frac{p_1(x_1)h}{2}\right)y_{x_0} \\
& \left(1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i-1} + (-2 + h^2 q(x_k))y_i + \\
& + \left(1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i+1} = h^2 f(x_k) \quad , i = 2, \dots, n-2 \\
& \left(1 - \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{n-1} + (-2 + h^2 q(x_{n-1}))y_{n-1} = \\
& = h^2 f(x_{n-1}) - \left(1 + \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{x_n} \tag{21}
\end{aligned}$$

Для системы (21) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k) < 0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\left| -2 + h^2 q(x_k) \right| > \left| 1 - \frac{p(x_k)h}{2} \right| + \left| 1 + \frac{p(x_k)h}{2} \right|,$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h); \tag{22}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{y_n - u_{n-1}}{h} + O(h)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2); \tag{23}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2)$$

В случае использования формул (22) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трех диагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (23) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трех диагональная.

Алгоритм метода прогонки состоит из нескольких шагов. Предварительно определяют коэффициенты уравнений вида (разностная схема)

$$A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

где $A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$, $B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$, $C_i = q_i - \frac{2}{h^2}$, $F_i = f_i$.

Затем находят прогоночные коэффициенты по формулам (прямая прогонка):

$$\nu_i = \frac{-B_i}{C_i + A_i \nu_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{F_i - A_i \mu_{i-1}}{C_i + A_i \nu_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (25)$$

$$\nu_0 = \frac{\frac{\beta_0}{2h} \left(3 - \frac{C_1}{B_1} \right)}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)}, \quad \mu_0 = \frac{\gamma_0 + \frac{\beta_0 F_1}{2h B_1}}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)},$$

Значения прогоночных коэффициентов на правой границе определяются из краевых условий по формулам

$$\nu_n = \frac{\frac{\beta_1}{h} \left(\frac{C_{n-1}}{2A_{n-1}} + 2 \right)}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)}, \quad \mu_n = \frac{\gamma_1 - \frac{\beta_1 F_{n-1}}{2h A_{n-1}}}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)} \quad (26)$$

После чего сеточная функция y_n на правой границе определяется из выражения

$$y_n = \frac{\mu_n + \nu_n \mu_{n-1}}{1 - \nu_n \nu_{n-1}} \quad (27)$$

Наконец, обратной прогонкой находят все значения сеточной функции

$$y_i = \nu_i y_{i+1} + \mu_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (28)$$

Таким образом, метод прогонки позволяет найти точное решение системы (21), значит, погрешность решения краевой задачи (17) – (18) определяется погрешностью разностной аппроксимации исходной задачи системой (21) и равна $O(h)$. Так как $h = (x_k - x_0)/n$, то, выбирая n достаточно большим, можно добиться уменьшения погрешности ценой увеличения объема вычислений при решении системы (21).

При практической оценке погрешности найденного решения обычно используют двойной пересчет и правило Рунге. Если $y(x_i)$ - точное значение решения в узле x_i , а y_i и \bar{y}_i - приближенные значения в том же узле, полученные соответственно с шагом h и $h/2$, то оценка погрешности решения y_i определяется формулой

$$|\bar{y}_i - y(x_i)| \cong |y_i - \bar{y}_i|/3.$$

Алгоритм метода прогонки реализован при решении примеров 5 и 6.

Пример 5. Методом прогонки на отрезке $[0,8]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями первого рода для дифференциального уравнения второго порядка $y''(x) + tg(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y(8) = 10$.

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением

$$y(x) = \cos(\sin(x)) + C \cdot \sin(\sin(x)), \quad C = \frac{(10 - \cos(\sin(8)))}{\sin(\sin(8))} = 11,309.$$

Результаты решения представлены на рис. 13-15.

$x_0 := 0$ $x_k := 8$ $\alpha_0 := 1$ $\beta_0 := 0$ $\gamma_0 := 1$ $\alpha_1 := 1$ $\beta_1 := 0$ $\gamma_1 := 10$

$p(x) := \tan(x)$ $q(x) := \cos(x)^2$ $f(x) := 0$ $n := 80$ $\text{eps} := 0.001$

```

Progonka(n) :=
  x0 ← x0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n - 1
    |
    | xi+1 ← xi + h
    | Ai ← 1 + h2 - p(xi) + (2 · h)
    | Bi ← 1 + h2 + p(xi) + (2 · h)
    | Ci ← q(xi) - 2 + h2
    | Fi ← f(xi)
  r1 ← α0 + β0 + h · [2 + A1 + (2 · B1)]
  v0 ← [β0 + (2 · h) · (3 - C1 + B1)] + r1
  μ0 ← [γ0 + β0 + (2 · h) · F1 + B1] + r1
  for i ∈ 1..n - 1
    |
    | vi ←  $\frac{-B_i}{C_i + A_i \cdot v_{i-1}}$ 
    | μi ←  $\frac{F_i - A_i \cdot \mu_{i-1}}{C_i + A_i \cdot v_{i-1}}$ 
  r2 ← α1 + β1 + (2 · h) · (3 - Bn-1 + An-1)
  vn ← [β1 + h · [Cn-1 + (2 · An-1) + 2]] + r2
  μn ← [γ1 - β1 + (2 · h) · Fn-1 + An-1] + r2
  yn ←  $\frac{\mu_n + v_n \cdot \mu_{n-1}}{1 - v_n \cdot v_{n-1}}$ 
  for i ∈ n - 1, n - 2..0
    yi ← vi · yi+1 + μi
  R<0> ← x
  R<1> ← y
  R

```

Рис. 13 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 (задание исходных данных с функцией, возвращающей решение исходного уравнения методом прогонки)

```

Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0.. 100
        |   y1 ← Progonka(n)
        |   y2 ← Progonka(2n)
        |   for k ∈ 0.. n
        |     rk ← max( (|y1k,1 - y22k,1|) / 3 )
        |     break if max(r) < eps
        |     n ← 2 · n otherwise
        |   (y2)
        |   (n)

```

$x := 0, 0.5.. 8$
 $CC := \frac{10 - \cos(\sin(8))}{\sin(\sin(8))} = 11.309$
 $Y_{\text{точное}}(x) := \cos(\sin(x)) + CC \cdot \sin(\sin(x))$
 $Y_{\text{rez1}} = 640$
 $k := 0, \frac{Y_{\text{rez1}}}{8} .. (2Y_{\text{rez1}})_1$
 $xx(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,0} \quad y(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,1}$

x =	Y _{точное} (x) =	xx(k) =	y(k) =
0	1	0	1
0.5	6.104	0.5	5.52
1	9.099	1	8.922
1.5	10.043	1.5	10.053
2	9.538	2	9.442
2.5	7.198	2.5	6.742
3	2.581	3	1.683
3.5	-2.947	3.5	-4.112
4	-7.038	4	-8.217
4.5	-8.818	4.5	-9.922
5	-8.683	5	-9.796
5.5	-6.572	5.5	-7.76
6	-2.158	6	-3.301
6.5	3.391	6.5	2.554
7	7.699	7	7.308
7.5	9.711	7.5	9.649
8	10	8	10

Рис. 14 Фрагмент рабочего документа МАТНСАД – решение примера 5 методом прогонки (функция, уточняющая решение, числовое решение, сравнение с точным решением)

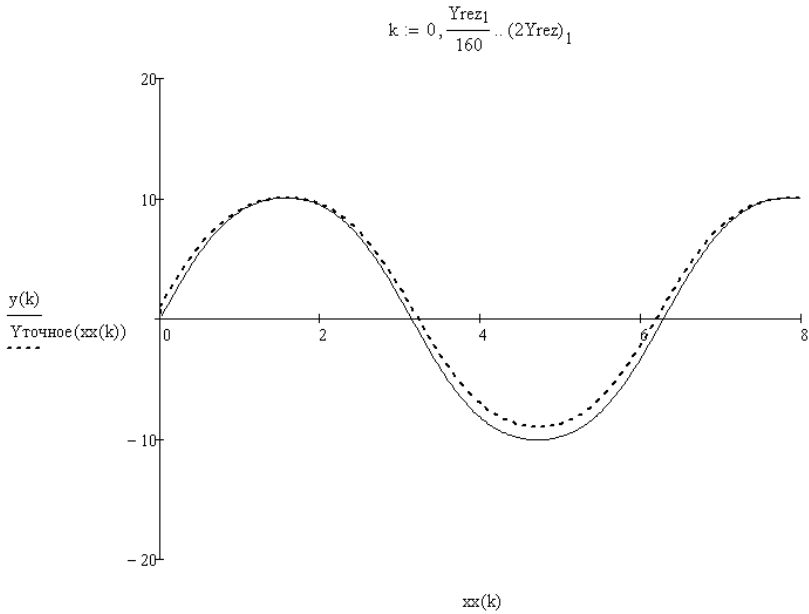


Рис. 15 Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом прогонки (график решения, сравнение с точным решением)

Пример 6. Методом прогонки на отрезке $[0,10]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями третьего рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x+1} \cdot y'(x) + x^2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \ln(x+1),$$

$$3y(0) + \frac{1}{2} y'(0) = 0.5, \quad -0.4y(10) - 2y'(10) = -1.141.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением $y(x) = \ln(x+1)$.

Результаты решения представлены на рис. 16.

ORIGIN:= 1 $f(x) := \frac{1}{x+1}$ $f(x) := x^2$ $f(x) := x^2 \cdot \ln(x+1)$ eps := 0.001 N1 := 11
 x0 := 0 xk := 10 $\alpha 0 := 3$ $\beta 0 := 0.5$ $\gamma 0 := 0.5$ $\alpha 1 := -0.4$ $\beta 1 := -2$ $\gamma 1 := -1.141$

```

Progon(N1) :=
  n ← N1
  n ← n - 1
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  r1 ←  $h^2$ 
  r2 ←  $\frac{h}{2}$ 
  p1 ←  $\frac{-\beta 0}{\alpha 0 h - \beta 0}$ 
  q1 ←  $\frac{-\gamma 0 \cdot h \cdot p1}{\beta 0}$ 
  x ← x0
  for i ∈ 2..n
    | i1 ← i - 1
    | x ← x + h
    | t ← 1 - f(x) r2
    |  $p_i \leftarrow \frac{(t-2)}{f(x) \cdot r1 + t \cdot p_{i1} - 2}$ 
    |  $q_i \leftarrow (f(x) \cdot r1 - t \cdot q_{i1}) \cdot \frac{p_i}{t-2}$ 
  pN1 ← 0
  qN1 ←  $\frac{\gamma 1 \cdot h + \beta 1 \cdot q_n}{\alpha 1 \cdot h + \beta 1 - \beta 1 \cdot p_n}$ 
  yN1 ← qN1
  xN1 ← xk
  for j ∈ 1..n
    | i ← n - j + 1
    | i1 ← i + 1
    |  $y_i \leftarrow p_i y_{i1} + q_i$ 
    |  $x_i \leftarrow x0 + h \cdot (i - 1)$ 
  REZ(1) ← X
  REZ(2) ← y
  REZ

```

```

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..1000
    | y1 ← (Progon(N1))
    | y2 ← (Progon(2N1 - 1))
    | for k ∈ 1..N1
      |  $\eta_k \leftarrow \max\left(\frac{|y1_{k,2} - y2_{2k-1,2}|}{3}\right)$ 
    | break if max(t) < eps
    | N1 ← 2N1 - 1 otherwise
  (y2)
  (N1)

```

x := 0, 0.5..10 Yrez2 = 161
 Уточное(x) := ln(x+1) x(j) := (Yrez1)_{j,1}
 j := 1, 41..2·Yrez2-1 x(j) := (Yrez1)_{j,2}

x(j)	y(j)
0	2.992·10 ⁻³
1.25	0.812
2.5	1.252
3.75	1.558
5	1.792
6.25	1.981
7.5	2.14
8.75	2.277
10	2.398

Рис. 16 Рабочий документ MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки

Анализируя полученные решения, видим в примере 6 полное совпадение результатов, полученных методом прогонки, с точным решением, однако в примере 5 результаты, полученные методом прогонки, не на всем отрезке интегрирования совпадают с точным решением. Это происходит из-за того, что точным решением в примере 6 является функция, довольно медленно меняющаяся на всем промежутке интегрирования. В примере 5 на участках медленного изменения функции решение методом прогонки дает полное совпадение с точным решением, на участках быстрого изменения функции решение методом прогонки отклоняется от точного решения. Максимальное отклонение составило 22 %. Уменьшение шага даже в 1000 раз не позволило уменьшить это отклонение. Значит к численному решению, полученному методом прогонки, в местах быстрого изменения решения следует подходить с осторожностью.

Задание 6. Методом прогонки на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий

Вариант 1.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + (2 \cdot x + 1) \cdot y(x) = 0.8 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 1, \quad y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$1.5y(x_0) - y'(x_0) = 0.6, \quad 2y(x_k) = 0.3, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 3.

$$y''(x) - e^{-x^2} \cdot y'(x) + \cos(x) \cdot y(x) = x^2,$$

$$1.5y(x_0) + 1.94y'(x_0) = 2.31, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 0, \quad x_0 = -1, x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y''(x) - e^{\sqrt{x}} \cdot y'(x) + \frac{x}{3} \cdot y(x) = x^3,$$

$$y(x_0) - 3.6y'(x_0) = 1, \quad 0.43y(x_k) - 1.2y'(x_k) = 4, \quad x_0 = 0.2, x_k = 6.2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) - x^2 \cdot y'(x) - \frac{0.5}{x} \cdot y(x) = 2,$$

$$2y(x_0) + 3y'(x_0) = 4, \quad -0.2y'(x_k) = 3.9, \quad x_0 = 2, x_k = 5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + x^3 \cdot y'(x) + \ln(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x + \sin(x),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 6.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \frac{x}{2} \cdot y(x) = x^2,$$

$$y(x_0) - 1.2y'(x_0) = 0, \quad 2y(x_k) - 2.5y'(x_k) = -4, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) - 1.5 \cdot x \cdot y(x) = \frac{2}{x},$$

$$y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) + 2y'(x_k) = 1, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin^2(x),$$

$$2y(x_0) - 2y'(x_0) = 1, \quad 3y(x_k) = 1, \quad x_0 = 2, x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + \cos^2(x) \cdot y'(x) + \frac{3}{x+4} \cdot y(x) = -x,$$

$$-y(x_0) + 2y'(x_0) = 3, \quad -2y(x_k) + y'(x_k) = -4, \quad x_0 = -2, x_k = 2.$$

Вариант 11.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = 0, x_k = 7.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + (x^3 + 2 \cdot x) \cdot y'(x) - 2 \cdot x \cdot y(x) = e^x, \quad x_0 = -1, x_k = 4,$$

$$-y(x_0) - 3.5y'(x_0) = 4.6, \quad 1.6y(x_k) + 12.1y'(x_k) = 2.7.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + e^{-x} \cdot y'(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = \sin^3(x),$$

$$1.1y(x_0) + 2.5y'(x_0) = -1, \quad 2.6y(x_k) + y'(x_k) = 7.4, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 15.

$$y''(x) - \frac{1}{2} \cdot y'(x) + \frac{3}{x+6} \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) + 2y'(x_0) = 0.6, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, x_k = 3.$$

Вариант 16.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + e^{-2 \cdot x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 11, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 17.

$$y''(x) + \frac{2}{x} \cdot y'(x) + e^{-3 \cdot x} \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) - y'(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 18.

$$y''(x) + \sin(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$1.2y(x_0) + 3.1y'(x_0) = 3.9, \quad -y(x_k) + 3.3y'(x_k) = 4.2, \quad x_0 = -3, x_k = 1.$$

Вариант 19.

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + 2 \cdot \ln(x) \cdot y(x) = x,$$

$$y(x_0) = 0.5, \quad 2y(x_k) + 3y'(x_k) = 1.2, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 20.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$2.1y(x_0) - 1.4y'(x_0) = 0.9, \quad 1.7y(x_k) + 0.6y'(x_k) = 0.1, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Онокой Л.С.* Компьютерные технологии в науке и образовании: учебное пособие / Л.С. Онокой, В.М. Титов. - М.: ИД ФОРУМ: ИНФРА-М, 2019. 224 с. - (Высшее образование). ISBN 978-5-8199-0469-5. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1002715> (дата обращения: 21.10.2020).

2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы / СПб.: Н.Н. Калиткин.- Издательство «БХВ-Петербург», 2011. 592 с.

3. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс. / Е.Г. Макаров. СПб. Издательство «Питер», 2011. 400 с.

4. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple: Учебное пособие / Егоров А.И. – М.: СОЛОН-Пр., 2016. 392 с.: ISBN 978-5-91359-205-7. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/858610> (дата обращения: 21.10.2020).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Основные понятия	4
Задача Коши	4
Краевая задача (граничная задача)	4
Лабораторная работа № 1	6
Теоретические сведения	6
Пример 1	8
Задание 1	11
Варианты заданий	11
Пример 2	13
Задание 2.	15
Варианты заданий	15
Лабораторная работа № 2	18
Теоретические сведения	18
Задание 3	19
Пример 3	21
Задание 4.	23
Варианты заданий	23
Лабораторная работа № 3	27
Теоретические сведения	27
Метод стрельбы	27
Пример 4	30
Задание 5.	33
Варианты заданий	33
Конечно-разностный метод решения краевой задачи	37
Пример 5	40
Пример 6	43
Задание 6.	45
Варианты заданий	45
Библиографический список	48