

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Санкт-Петербургский горный университет**

**Кафедра информатики и компьютерных технологий**

# **КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ**

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов магистратуры направления 22.04.01*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2023**

УДК 62.001.63(073)

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ:** Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Г.Н. Журов, В.Н. Кризский*. СПб, 2023. 33 с.

В методических указаниях содержатся краткие теоретические сведения по численным методам решения дифференциальных уравнений эллиптического типа, примеры решения типовых задач с помощью математического пакета Mathcad, а также варианты заданий для выполнения на практических занятиях.

Методические указания предназначены для магистрантов направления подготовки «22.04.01 Материаловедение и технологии материалов» направленность (профиль) «Материаловедение и технологии наноматериалов и покрытий».

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

Рецензент к.т.н. *К.В. Столяров* (Корпорация «Телум Инк»)

© Санкт-Петербургский  
горный университет, 2023

## **ВВЕДЕНИЕ**

Большое число задач, связанных с анализом физических полей описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. К сожалению, во многих случаях, представляющих практический интерес, найти аналитическое решение таких задач трудно или практически невозможно. Это обычно обусловлено сложной формой или неоднородностью свойств области, в которой отыскивается решение. Однако результат можно получить численно с помощью компьютера. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений на ЭВМ широко применяются в инженерной практике.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по решению дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей, который является одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений с частными производными (уравнений математической физики).

Рассмотрены основные понятия и методы решения дифференциальных уравнений в частных производных: классификация уравнений в зависимости от их математической природы и физического смысла, постановка задач Дирихле и Неймана, понятия сходимости, устойчивости, погрешности метода конечных разностей при аппроксимации уравнений эллиптического типа.

Приведены примеры решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа (Пуассона и Лапласа). Представленные в методических указаниях алгоритмы решения реализованы в специализированном математическом пакете MathCAD.

Данный материал изучается студентами направления подготовки 22.04.01 в разделе «Инженерный анализ и компьютерное моделирование различных процессов».

### **КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ**

Подходы к решению дифференциальных уравнений с частными производными определяются их математической формой. Поэтому рассмотрим классификацию уравнений с этой точки зрения.

Во многих случаях для описания физических процессов используют уравнений с частными производными до второго порядка включительно.

Так, например, изучение свободных колебаний различной природы приводит к волновым уравнениям вида

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где  $u(x, y, z, t)$  – функция, описывающая волновой процесс,  $x, y, z$  – координаты,  $c$  – скорость распространения волны в данной среде,  $t$  – время.

Оператор  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  принято обозначать значком  $\Delta$ , который в этом случае носит название оператора Лапласа.

Процессы распространения тепловой энергии описываются уравнением теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = Q, \quad (2)$$

где  $\rho$  и  $C$  – плотность и теплоемкость вещества,  $T$  – температура,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $Q$  – плотность источников тепла.

Анализ стационарных состояний, например, статических тепловых, электрических, магнитных полей или деформаций при статических нагрузках проводят, используя уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (3)$$

где  $u(x, y, z)$  – функция, описывающая статическое поле,  $f(x, y, z)$  – распределенные источники. Если  $f(x, y, z) = 0$ , то (3) обращается в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Известны и другие виды задач и соответствующие им дифференциальные уравнения в частных производных, например, уравнение диффузии или уравнение Гельмгольца.

Несмотря на различие процессов, описываемых рассмотренными уравнениями, и форм их записи, все они с математической точки зрения могут быть представлены как частные случаи обобщенной формы дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными  $x$  и  $y$  :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0, \quad (5)$$

где  $A, B, C$  и  $D$  – некоторые функции, зависящие в общем случае от  $x, y, u, \partial u / \partial x$  и  $\partial u / \partial y$ , причем  $A, B$  и  $C$  одновременно не обращаются в ноль. Дифференциальные уравнения, описывающие физические поля, могут быть нелинейными. Однако на практике многие задачи рассматриваются в линейном приближении, когда уравнение с частными производными линейно относительно неизвестной функции  $u$  и ее частных производных.

На основании того, что уравнению (5) можно поставить в соответствие квадратичную форму  $A\zeta_1^2 + B\zeta_1\zeta_2 + C\zeta_2^2 = 0$ , по математической природе различают следующие типы квазилинейных уравнений:

- 1) гиперболический, если  $B^2 - 4AC > 0$  – его аналогом является волновое уравнение (1);
- 2) параболический, если  $B^2 - 4AC = 0$  – его аналог уравнение теплопроводности (2);
- 3) эллиптический, если  $B^2 - 4AC < 0$  – аналог уравнение Пуассона (3) или Лапласа (4).

В задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, другой важной составляющей помимо самого уравнения является формулировка дополнительных условий (это необходимо для обеспечения единственности решения).

Для задач с уравнениями гиперболического или параболического типа, содержащих в качестве независимой переменной время  $t$ , условия по  $t$  обычно формулируются как начальные, описывающие исходное состояние системы. По координатам  $x, y$  и  $z$  задают граничные условия. В тепловых задачах они, например, описывают распределение температуры на границе расчетной области. В задачах с уравнениями эллиптического типа, не содержащими переменную  $t$ , используют только граничные условия по координатам  $x, y$  и  $z$ , а саму задачу называют краевой.

Если краевое условие задает распределение функции  $u$  на границе, то его принято называть условием Дирихле. Условие, определяющее производную  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{grad}(u) \equiv \vec{n} \cdot \overrightarrow{\nabla} u$  на границе расчетной области, называют условием Неймана. Здесь  $\vec{n}$  – единичная нормаль к границе. Условия, представляющие собой комбинацию двух вышеназванных, называют смешанными.

Приведенная классификация позволяет определить общие подходы к решению дифференциальных уравнений в задачах различных по физической сути, но сходных с математической точки зрения. В настоящее время широкое распространение получил метод конечных разностей, основы которого и будут рассмотрены ниже.

## ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Метод конечных разностей заключается в том, что дифференциальное уравнение в частных производных заменяется соответствующей ему системой алгебраических уравнений. Решение этой системы дает приближенное решение для искомой функции  $u(x, y, z, t)$ .

Метод включает следующие основные этапы:

- 1) построение сетки, охватывающей рассматриваемую область, например, элемент конструкции какого-нибудь устройства;
- 2) построение на полученной сетке конечно-разностной аппроксимации, эквивалентной исходному дифференциальному уравнению и дополнительным условиям;

3) формирование на основе конечно-разностной аппроксимации системы алгебраических уравнений и ее решение.

Рассмотрим перечисленные этапы на примере двухмерных задач.

### Построение сетки

Формирование сетки производится с учетом геометрии задачи, например, формы детали, для которой выполняется расчет. Обычно для деталей, имеющих прямоугольную форму, используют декартову систему координат и соответственно прямоугольную сетку. На рис. 1 приведен пример такой двухмерной сетки, нанесенной на прямоугольную пластину.

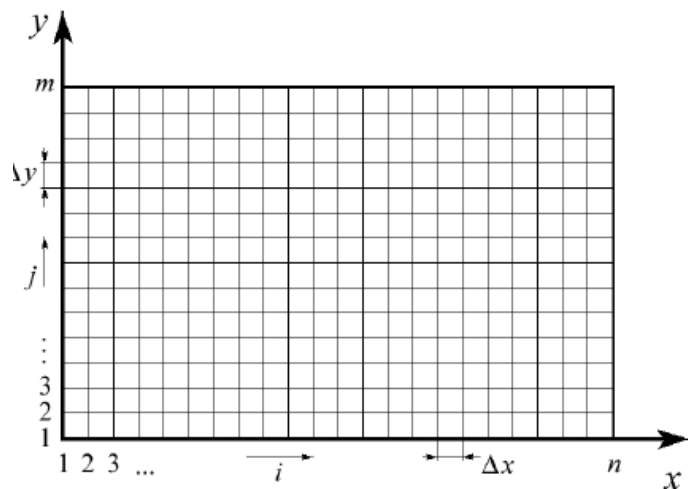


Рис. 1 Прямоугольная сетка

В методе конечных разностей применяют и другие виды сеток. Например, если исследуемая конструкция содержит элементы с осевой симметрией, используют полярную сетку.

В дальнейшем решение задачи строят, опираясь на узлы сетки, то есть на точки пересечения ее линий.

Конечно-разностная аппроксимация производных в дифференциальном уравнении строится путем замены этих производных на их приближенные аналоги с помощью сетки. Так, например, ча-

стную производную  $\partial u / \partial x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [u(x + \Delta x) - u(x)] / \Delta x$  в точке  $(x_i, y_i)$  можно заменить приближенным значением так называемой "правой производной"

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{\text{правая}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (6)$$

или "левой производной"

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{\text{левая}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (7)$$

где  $\Delta u$  и  $\Delta x$  – приращения функции и аргумента,  $u_i, x_i$  и  $u_{i+1}, x_{i+1}$  – значения функции и аргумента в узлах  $i$  и  $i + 1$ , причем  $\Delta x$  – шаг сетки по координате  $x$ .

Аналогично получается формула для второй производной  $\partial^2 u / \partial x^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{\text{правая}} - \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{\text{левая}}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right) - \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В полученных выражениях в отличие от точных производных используются малые, но не бесконечно малые разности  $\Delta u$  и  $\Delta x$ . Поэтому сам метод и получил название метода конечных разностей. Формулы для производных по независимым переменным  $y, z, t$  получают аналогично.

#### **Аппроксимация уравнения эллиптического типа**

Преобразование уравнения эллиптического типа (3) для двумерной задачи (когда  $\partial^2 u / \partial z^2 \equiv 0$ ) производится путем замены в



нем производных  $\partial^2 u / \partial x^2$  и  $\partial^2 u / \partial y^2$  конечно-разностными формулами. Заменяя в (2)  $\partial^2 u / \partial x^2$  с помощью (8) и используя аналогичное выражение для  $\partial^2 u / \partial y^2$ , получим

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j) \quad (9)$$

где индексы  $i$  и  $j$  отсчитываются соответственно по осям  $X$  и  $Y$ .

Для упрощения анализа предположим, что в сетке используются квадратные ячейки, то есть  $\Delta x = \Delta y = h \neq 0$ , тогда

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = f(x_i, y_j). \quad (10)$$

Уравнение (10) связывает между собой неизвестное значение функции  $u_{i,j}$  с ее значениями в четырех соседних узлах. На сетке эти узлы образуют пятиточечный шаблон (рис. 2), позволяющий легко определить индексы в (10) для любого произвольно выбранного на сетке узла  $i, j$ .

Записывая (10) для каждого узла  $2 < i < n-1$ ,  $2 < j < m-1$  и заменяя  $i$  и  $j$  соответствующими номерами, получим систему связанных уравнений. Количество уравнений будет равно количеству узлов, в которых необходимо найти неизвестные  $u_{i,j}$ . Иначе говоря, число неизвестных равно числу уравнений и система будет замкнутой.

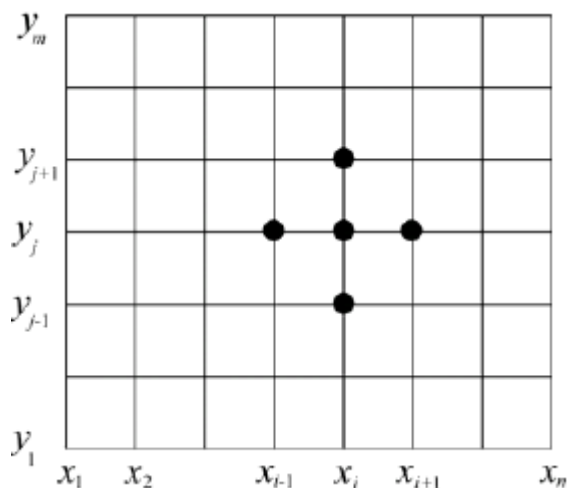


Рис. 2 Шаблон "крест" для уравнения эллиптического типа

Значения функции  $u$  в узлах сетки, лежащих на границе рассматриваемой области, определяются заданными граничными условиями. Например, если в задаче об изгибе пластины ее края считаются жестко закрепленными, то смещение в граничных узлах полагается нулевым:  $u_{1,j} = u_{n,j} = u_{i,1} = u_{i,m} = 0$ .

Решение системы алгебраических уравнений, получаемой в результате конечно-разностной аппроксимации уравнения эллиптического типа, является одним из наиболее тяжелых по вычислительным затратам этапов расчета. Для повышения точности решения приходится использовать сетки с большим числом узлов, на которых формируются и довольно большие системы – нередко до нескольких тысяч алгебраических уравнений. Одним из способов уменьшения числа узлов и является использование сеток с неравномерным шагом. При этом сетку сгущают в наиболее важных с точки зрения точности участках, например, вблизи углов или отверстий.

В то же время решение задачи облегчается тем, что каждое из алгебраических уравнений содержит небольшое количество неизвестных. Для решения подобных систем используют специальные методы, учитывающие разреженность матрицы коэффициентов. К

специальным прямым методам относятся некоторые матричные методы и метод прогонки (аналог метода Гаусса). Из итерационных применяют метод Якоби (одновременных смещений) и метод Гаусса-Зейделя (последовательных смещений), а также модификации последнего, например, метод верхней релаксации.

### Погрешность решения

Погрешность решения методом конечных разностей в первую очередь определяется ошибкой, вносимой при замене исходного дифференциального уравнения на его конечно-разностный аналог.

Вначале оценим погрешность аппроксимации (6) для первой производной, используя разложение  $u(x)$  в окрестностях точки  $x_i$  в ряд Тейлора:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x_i)}{\partial x^4} + \dots, \quad (11)$$

откуда

$$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i)}{\partial x^3} - \dots \quad (12)$$

Согласно (11) погрешность конечно-разностной аппроксимация по формуле (6) обусловлена тем, что в ней не учитываются слагаемые высоких порядков, начиная с  $(\Delta x/2!) (\partial^2 u / \partial x^2)$ . Можно утверждать, что в (12) слагаемые убывают по мере увеличения их порядка. Поэтому ошибка (6) приближенно равна  $(\Delta x/2) (\partial^2 u / \partial x^2)$ .

Аналогичную оценку нетрудно провести и для второй производной. Для этого необходимо воспользоваться (11) и аналогичным разложением, записанным для  $u(x_i - \Delta x)$ :

$$\begin{aligned}
u(x_i - \Delta x) = & u(x_i) - \Delta x \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} - \\
& \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x_i)}{\partial x^4} - \dots,
\end{aligned} \tag{13}$$

Сложив (11) и (13), получим выражение для второй производной:

$$\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i)}{\partial x^4} - \dots \tag{14}$$

Из сравнения (14) и (8) видно, что погрешность (8) определяется не учтенными в ней слагаемыми высоких порядков, начиная с  $(\Delta x^2/12)(\partial^4 u/\partial x^4)$ . Поэтому ошибка (8) уменьшается пропорционально квадрату  $\Delta x$ . Данный результат полезно учитывать при выборе шага сетки. Так, например, уменьшение вдвое шага  $\Delta x = \Delta y = h$  приводит к снижению ошибки аппроксимации для уравнения эллиптического типа в четыре раза.

Нельзя утверждать, что уменьшение шага сетки однозначно повышает точность решения методом конечных разностей. С увеличением количества узлов сетки возрастает объем вычислений и, следовательно, растут вычислительные погрешности. На практике для оценки погрешности решения можно провести ряд пробных расчетов с разными значениями шага сетки и выбрать вариант, обеспечивающий приемлемую точность при невысоких вычислительных затратах.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА (ПУАССОНА И ЛАПЛАСА)

Решим методом сеток задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Эта задача ставится следующим образом.

Найти непрерывную функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  (рис. 3), уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (15)$$

и принимающую на границе области  $\Omega$  заданные значения, т.е.

$$u(0, y) = \Gamma_1(y), \quad u(a, y) = \Gamma_3(y), \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u(x, 0) = \Gamma_4(x), \quad u(x, b) = \Gamma_2(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  - заданные функции.

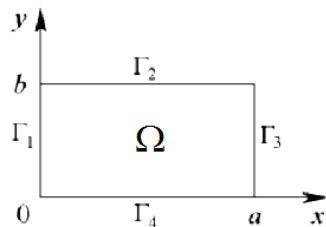


Рис. 3

Будем считать, что  $u(x, y)$  непрерывна на границе области  $\Omega$ , т. е.  $\Gamma_1(0) = \Gamma_4(0)$ ,  $\Gamma_1(b) = \Gamma_2(0)$ ,  $\Gamma_3(0) = \Gamma_4(a)$ ,  $\Gamma_3(b) = \Gamma_2(a)$ . Выбрав шаги  $h_x, h_y$  по  $x$  и  $y$  соответственно, строим сетку  $x_i = i \cdot h_x$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $y_j = j \cdot h_y$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , где  $x_n = n \cdot h_x = a$ ,  $y_m = m \cdot h_y = b$ . Далее для упрощения расчетов положим  $h_x = h_y$ .

Уравнение (15) является уравнением эллиптического типа. Из формулы (10) следует, что решение таких уравнений можно получить, используя явную разностную схему:

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 \cdot f_{i,j}), \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j) \\
u_{i,m} &= \Gamma_2(x_i), \quad u_{i,0} = \Gamma_4(x_i), \quad u_{0,j} = \Gamma_1(y_j), \quad u_{n,j} = \Gamma_3(y_j), \\
i &= 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.
\end{aligned} \tag{16}$$

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике состоит в нахождении приближенных значений  $u_{i,j}$  функции  $u(x, y)$  во внутренних узлах сетки. Для определения величин  $u_{i,j}$  требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (16).

Эту систему будем решать итерационным методом Гаусса-Зейделя, который состоит в последовательности итераций вида

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{4} [u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - h^2 \cdot f_{i,j}] \\
f_{i,j} &= f(x_i, y_j).
\end{aligned} \tag{17}$$

(верхним индексом  $k$  обозначен номер итерации). При  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $u_{i,j}^k$  сходится к точному решению системы (16). В качестве условия окончания итерационного процесса можно принять

$$\max |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Однако этот критерий недостаточно надежен, поскольку итерационный процесс сходится медленно.

На практике применяют более надежный критерий

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon(1 - \nu), \quad \text{где } \nu = \frac{\max_{i,j} |u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}|}{\max_{i,j} |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)}|}.$$

Таким образом, погрешность приближенного решения, полученного методом сеток, складывается из двух погрешностей: погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностными уравнениями; погрешности, возникающей в результате приближенного решения системы разностных уравнений (16).

Известно, описанная здесь разностная схема обладает свойством устойчивости и сходимости. Устойчивость схемы означает, что малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям решения разностной задачи. Только такие схемы имеет смысл применять в реальных вычислениях. Сходимость схемы означает, при стремлении шага сетки к нулю (т. е. при  $h \rightarrow 0$ ) решение разностной задачи стремится в некотором смысле к решению исходной задачи. Таким образом, выбрав достаточно малый шаг  $h$ , можно, как угодно, точно решить исходную задачу.

**Пример 1.** Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8 \cos^2(x + y) - 4, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$u(0, y) = \sin^2(y), \quad u(2, y) = \sin^2(y + 2), \quad 0 \leq y \leq 3, \quad (18)$$

$$u(x, 0) = \sin^2(x), \quad u(x, 3) = \sin^2(x + 3), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,0001$ .

Сравнить полученное решение с точным решением:

$$u(x, y) = \sin^2(x + y). \quad (19)$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 4-6.

```

n := 20   a := 2   b := 3   eps := 0.0001   f(x,y) := 8*cos(x+y)^2 - 4
Γ1(y) := sin(y)^2   Γ2(x) := sin(x+3)^2   Γ3(y) := sin(y+2)^2   Γ4(x) := sin(x)^2
Ellipt :=
  r2 ← 1010
  h ←  $\frac{1}{n}$ 
  for i ∈ 0..n-a
    | xi ← i·h
    | U0,i ← Γ4(xi)
    | Un-b,i ← Γ2(xi)
  for j ∈ 0..n-b
    | yj ← j·h
    | Uj,0 ← Γ1(yj)
    | Uj,n-a ← Γ3(yj)
  for i ∈ 1..n-a-1
    for j ∈ 1..n-b-1
      Uj,i ← 1
  for i ∈ 0..n-a
    for j ∈ 0..n-b
      fj,i ← f(xi,yj)
  for n1 ∈ 0..10000
    | r1 ← r2
    | r2 ← 0
    for i ∈ 1..n-a-1
      for j ∈ 1..n-b-1
        | x ← 0.25(Uj-1,i + Uj+1,i + Uj,i-1 + Uj,i+1 - h2·fj,i)
        | r ← |x - Uj,i|
        | r2 ← r if r2 ≤ r
        | Uj,i ← x
        | te ← eps ·  $\left(1 - \frac{r2}{r1}\right)$ 
        break if r2 ≤ te
    continue
  (n1)
  (U)

```

Рис. 4 Фрагмент рабочего документа МАТНСАД с функцией, возвращающей решение задачи Дирихле (35) по формуле (34).

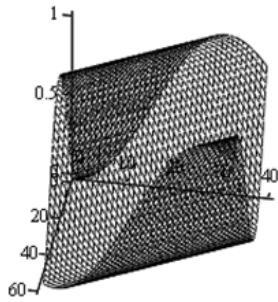


Ellipt<sub>0</sub> = 2044    n1 := 0..10    n2 := 0..10    SR<sub>n1,n2</sub> := (Ellipt<sub>1</sub>)<sub>6,n1,4,n2</sub>

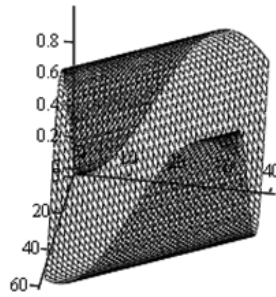
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.039	0.152	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827
1	0.087	0.23	0.415	0.614	0.795	0.929	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556
2	0.319	0.515	0.708	0.869	0.972	1	0.949	0.827	0.654	0.456	0.266
3	0.614	0.794	0.929	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057
4	0.869	0.971	0.999	0.949	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003
5	0.995	0.984	0.896	0.745	0.556	0.358	0.182	0.057	0.001	0.025	0.123
6	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374
7	0.745	0.556	0.358	0.182	0.057	0.001	0.024	0.123	0.28	0.473	0.67
8	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906
9	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67	0.839	0.956	1
10	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906	0.987	0.992	0.92

$u(x,y) := \sin(x+y)^2$      $i := 0..10$      $j := 0..10$      $x_i = 0.2i$      $y_j = 0.3j$      $u_{i,j} := u(x_i, y_j)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.039	0.152	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827
1	0.087	0.23	0.415	0.614	0.794	0.928	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556
2	0.319	0.515	0.708	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266
3	0.614	0.794	0.928	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057
4	0.869	0.971	0.999	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003
5	0.995	0.983	0.895	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123
6	0.948	0.827	0.654	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374
7	0.745	0.556	0.358	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67
8	0.456	0.266	0.112	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906
9	0.183	0.057	0.002	0.025	0.123	0.281	0.473	0.67	0.839	0.956	1
10	0.02	0.003	0.065	0.196	0.374	0.573	0.76	0.906	0.987	0.992	0.92



Ellipt<sub>1</sub>



$u^T$

Рис. 5 Фрагмент рабочего документа МАТНСАД. Результаты вычислений: приближенное и точное решение

```

M := | r0,0 ← |SR0,0 - (u^T)0,0|
      | max ← r0,0
      | s ← 0
      | c ← 0
      | for n ∈ 1..10
      |   for n1 ∈ 1..10
      |     | rn,n1 ← |SRn,n1 - (u^T)n,n1|
      |     | if rn,n1 > max
      |     |   | max ← rn,n1
      |     |   | s ← n
      |     |   | c ← n1
      |     |   | (max s c)^T
      |     |   | SR_M1,M2 - (u^T)_M1,M2 |
      |     |   | SR_M1,M2 | = 0.000466
      |     |   M0 = 0.000458
      |     |   M1 = 3    M2 = 4

```

Рис. 6 Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение приближенного и точного решений.

На рис.4 задаются начальные значения, число узлов сетки по  $x$  и  $y$ , границы сетки, оценка погрешности, начальные условия и функция Ellipt, решающая задачу Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа (18) по явной разностной схеме (16) и уточняющее решение методом Гаусса-Зейделя по формуле (17). На рис. 5 представлены результаты вычислений приближенного и точного решений (19): таблицы значений и графики вычислений. На рис. 6 проведено сравнение приближенного и точного решений. Анализ результатов сравнения указывает на совпадение приближенного и точного решений. Максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,0466 %.

Пакет MATHCAD не содержит встроенных функций, решающих уравнения эллиптического типа в прямоугольной области. На квадратной области уравнение Лапласа в случае ненулевых граничных условий решается с помощью функции relax.

Обращение к функции:

$relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac),$

где  $a, b, c, d, e$  - квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты аппроксимирующего уравнения;  $f$  - квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения в каждой точке области, где ищется решение;  $u$  - квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границах квадратной области и начальное приближение для решения внутри области;  $rjac$  - спектральный радиус итераций Якоби. Это число между 0 и 1, которое управляет сходимостью процесса релаксации.

**Пример 2.** Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(0, y) = \sin(y), \quad u(1, y) = e \cdot \sin(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (20)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = e^x \cdot \sin(1), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,00001$ .

Построить график решения.

Сравнить полученное решение с решением с помощью встроенной функции `relax` и с точным решением:

$$u(x, y) = e^x \cdot \sin(y). \quad (21)$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 7-12.

```

n := 10  a := 1  b := 1  eps := 0.00001  f(x,y) := 0
Γ1(y) := sin(y)  Γ2(x) := ex·sin(1)  Γ3(y) := e·sin(y)  Γ4(x) := 0
Ellipt :=
  r2 ← 1010
  h ←  $\frac{1}{n}$ 
  for i ∈ 0..n-a
    | xi ← i·h
    | U0,i ← Γ4(xi)
    | Un,b,i ← Γ2(xi)
  for j ∈ 0..n-b
    | yj ← j·h
    | Uj,0 ← Γ1(yj)
    | Uj,n-a ← Γ3(yj)
  for i ∈ 1..n-a-1
    for j ∈ 1..n-b-1
      Uj,i ← 1
  for i ∈ 0..n-a
    for j ∈ 0..n-b
      fj,i ← f(xi,yj)
  for n1 ∈ 0..10000
    | r1 ← r2
    | r2 ← 0
    for i ∈ 1..n-a-1
      for j ∈ 1..n-b-1
        | x ← 0.25(Uj-1,i + Uj+1,i + Uj,i-1 + Uj,i+1 - h2·fj,i)
        | r ← |x - Uj,i|
        | r2 ← r if r2 ≤ r
        | Uj,i ← x
        | te ← eps ·  $\left(1 - \frac{r2}{r1}\right)$ 
      break if r2 ≤ te
    continue
  (
    n1
    U
  )

```

Рис. 7 Фрагмент рабочего документа МАТНСАД с функцией, возвращающей решение задачи Дирихле (37) по формуле (34).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0.11	0.122	0.135	0.149	0.165	0.182	0.201	0.222	0.246	0.271
2	0.199	0.22	0.243	0.268	0.296	0.328	0.362	0.4	0.442	0.489	0.54
3	0.296	0.327	0.361	0.399	0.441	0.487	0.539	0.595	0.658	0.727	0.803
4	0.389	0.43	0.476	0.526	0.581	0.642	0.71	0.784	0.867	0.958	1.059
5	0.479	0.53	0.586	0.647	0.715	0.791	0.874	0.966	1.067	1.179	1.303
6	0.565	0.624	0.69	0.762	0.842	0.931	1.029	1.137	1.257	1.389	1.535
7	0.644	0.712	0.787	0.87	0.961	1.062	1.174	1.297	1.434	1.585	1.751
8	0.717	0.793	0.876	0.968	1.07	1.183	1.307	1.445	1.597	1.764	1.95
9	0.783	0.866	0.957	1.057	1.169	1.292	1.427	1.577	1.743	1.927	2.129
10	0.841	0.93	1.028	1.136	1.255	1.387	1.533	1.695	1.873	2.07	2.287

Рис. 8 Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Результаты численного решения

$i := 0..10 \quad j := 0..10 \quad x_i := 0.1i \quad y_j := 0.1j \quad u(x,y) := e^{-x} \sin(y) \quad \underline{u}_{i,j} := u(x_i, y_j)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.1	0.11	0.122	0.135	0.149	0.165	0.182	0.201	0.222	0.246	0.271
2	0.199	0.22	0.243	0.268	0.296	0.328	0.362	0.4	0.442	0.489	0.54
3	0.296	0.327	0.361	0.399	0.441	0.487	0.538	0.595	0.658	0.727	0.803
4	0.389	0.43	0.476	0.526	0.581	0.642	0.71	0.784	0.867	0.958	1.059
5	0.479	0.53	0.586	0.647	0.715	0.79	0.874	0.965	1.067	1.179	1.303
6	0.565	0.624	0.69	0.762	0.842	0.931	1.029	1.137	1.257	1.389	1.535
7	0.644	0.712	0.787	0.87	0.961	1.062	1.174	1.297	1.434	1.585	1.751
8	0.717	0.793	0.876	0.968	1.07	1.183	1.307	1.445	1.597	1.764	1.95
9	0.783	0.866	0.957	1.057	1.169	1.291	1.427	1.577	1.743	1.927	2.129
10	0.841	0.93	1.028	1.136	1.255	1.387	1.533	1.695	1.873	2.07	2.287

Рис. 9 Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Результаты точного решения по формуле (38)

На рис. 7 задаются начальные значения, число узлов сетки по  $x$  и  $y$ , границы сетки, оценка погрешности, начальные условия и функция Ellipt, решающая задачу Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа (20) по явной разностной схеме (16) и уточняющее решение методом Гаусса-Зейделя по формуле (17). На рис. 8 представлены результаты численных вычислений. На рис. 9 представлены результаты точного решения по формуле (21). Далее на рис. 10 приведено решение задачи Дирихле (20) с

помощью, встроенной в пакет МАТНСАD функции relax. На рис. 11 приведены графики приближенных решений с помощью функции Ellipt и с помощью встроенной функции relax. На рис. 12 проведено сравнение приближенных решений с точным решением.

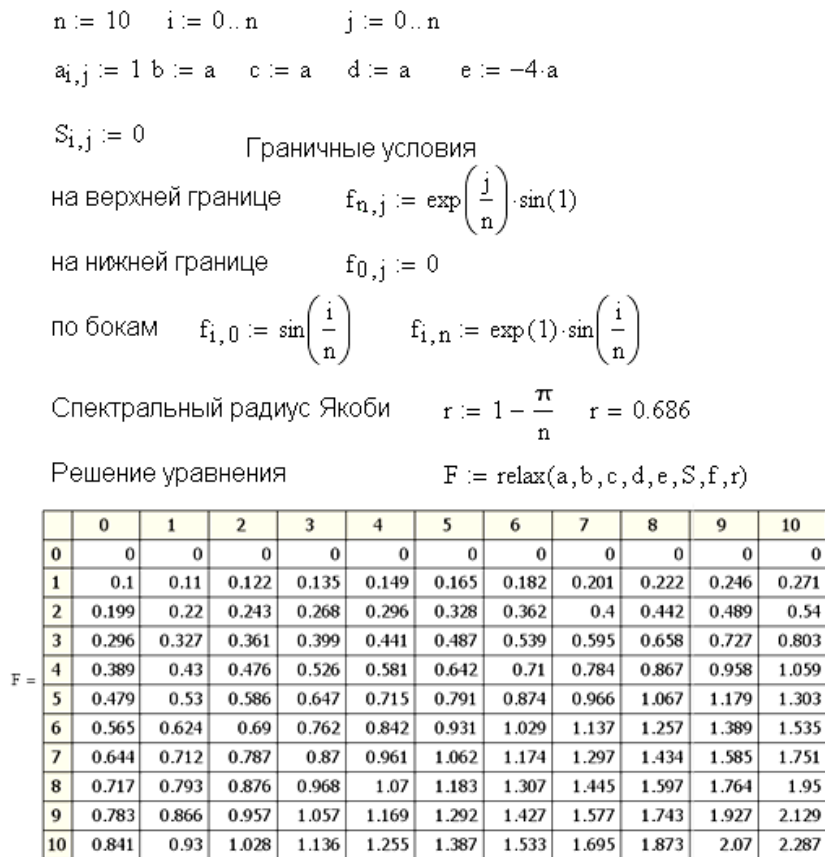


Рис. 10 Фрагмент рабочего документа МАТНСАD. Решение задачи Дирихле (37) с помощью встроенной функции relax

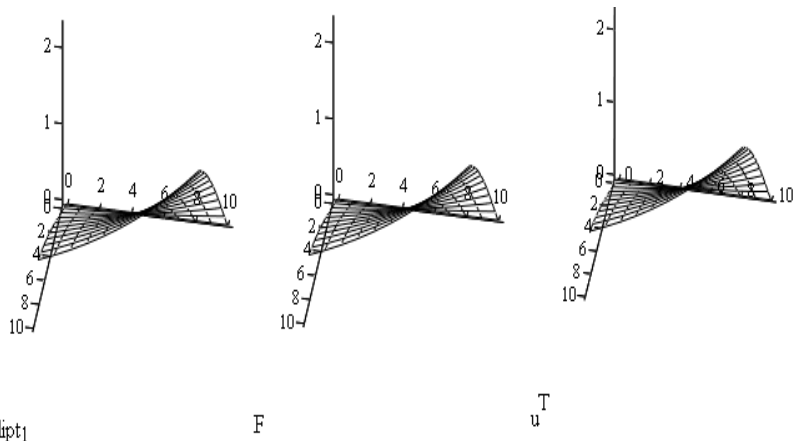


Рис. 11 Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Графики численных решений с помощью функций Ellipt и relax и график точного решения

$M := \left  \begin{array}{l} r_{0,0} \leftarrow \left  (\text{Ellipt1})_{0,0} - (u^T)_{0,0} \right  \\ \max \leftarrow r_{0,0} \\ s \leftarrow 0 \\ c \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10 \\ \quad \text{for } n1 \in 1..10 \\ \quad \quad \left  r_{n,n1} \leftarrow \left  (\text{Ellipt1})_{n,n1} - (u^T)_{n,n1} \right  \right. \\ \quad \quad \text{if } r_{n,n1} > \max \quad M_0 = 0.000092 \\ \quad \quad \quad \left  \begin{array}{l} \max \leftarrow r_{n,n1} \quad M_1 = 6 \quad M_2 = 6 \\ s \leftarrow n \\ c \leftarrow n1 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \left  \frac{(\text{Ellipt1})_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2}}{(\text{Ellipt1})_{M_1, M_2}} \right  = 0.0001 \end{array} \right. \\ (\max \ s \ c)^T \end{array} \right $	$M := \left  \begin{array}{l} r_{0,0} \leftarrow \left  F_{0,0} - (u^T)_{0,0} \right  \\ \max \leftarrow r_{0,0} \\ s \leftarrow 0 \\ c \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..10 \\ \quad \text{for } n1 \in 1..10 \\ \quad \quad \left  r_{n,n1} \leftarrow \left  F_{n,n1} - (u^T)_{n,n1} \right  \right. \\ \quad \quad \text{if } r_{n,n1} > \max \quad M_0 = 0.000092 \\ \quad \quad \quad \left  \begin{array}{l} \max \leftarrow r_{n,n1} \quad M_1 = 6 \quad M_2 = 6 \\ s \leftarrow n \\ c \leftarrow n1 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \left  \frac{F_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2}}{F_{M_1, M_2}} \right  = 0.0001 \end{array} \right. \\ (\max \ s \ c)^T \end{array} \right $
---	---

Рис. 12 Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение численных решений с помощью функций Ellipt и relax с точным решением

Анализ результатов вычислений говорит о совпадении численных решений как по схеме (17) так и с помощью встроенной в MATHCAD функции relax с точным решением по формуле (21). В обоих приближенных решениях максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,01 %.

### ЗАДАНИЕ 1

Найти решение  $u(x, y)$  задачи Дирихле в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  (смотри ранее приведенный рис. 3) для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \Gamma_1(y), & u(a, y) &= \Gamma_3(y), & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) &= \Gamma_4(x), & u(x, b) &= \Gamma_2(x), & 0 \leq x \leq a, \end{aligned}$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,00001$ . Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением. Варианты заданий с исходными данными представлены ниже.

#### Варианты заданий

##### Вариант 1.

$$a = 4, \quad b = 5,$$

$$\Gamma_1(y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad \Gamma_3(y) = e^{-4} \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad \Gamma_2(x) = e^{-x} \cos\left(\frac{5}{2}\right),$$

$$\Gamma_4(x) = e^{-x}, \quad f(x, y) = \frac{3}{4} \cdot e^{-x} \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right).$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = e^{-x} \cos\left(\frac{y}{2}\right)$$



**Вариант 2.**

$$a = 2, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = e^{2y}(2y^2 + 1), \quad \Gamma_3(y) = e^{2y}(2y^2 + 3), \quad \Gamma_2(x) = e^6(x + 19),$$

$$\Gamma_4(x) = x + 1, \quad f(x, y) = 4 \cdot e^{2y} \cdot (2y^2 + 4y + x + 2).$$

Точное решение:  $u(x, y) = e^{2y} \cdot (x + 2y^2 + 1)$

**Вариант 3.**

$$a = 0.9, \quad b = 0.4,$$

$$\Gamma_1(y) = tg^2 y, \quad \Gamma_3(y) = tg^2(y + 0.9), \quad \Gamma_2(x) = tg^2(x + 0.4),$$

$$\Gamma_4(x) = tg^2(x), \quad f(x, y) = 4 \cdot [3tg^2(x + y) + 1] \cdot [tg^2(x + y) + 1].$$

Точное решение:  $u(x, y) = tg(x + y)^2$

**Вариант 4.**

$$a = 3, \quad b = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = \cos(2y + \cos(3y)), \quad \Gamma_3(y) = e^6 \cos(3y) + e^9 \cos(2y),$$

$$\Gamma_2(x) = \cos(4) \cdot e^{3x} + \cos(6) \cdot e^{2x}, \quad \Gamma_4(x) = e^{2x} + e^{3x},$$

$$f(x, y) = 5 \cdot e^{3x} \cdot \cos(2y) - 5 \cdot e^{2x} \cdot \cos(3y).$$

Точное решение:  $u(x, y) = e^{3x} \cdot \cos(2y) + e^{2x} \cdot \cos(3y)$

**Вариант 5.**

$$a = 6, \quad b = 0.8,$$

$$\Gamma_1(y) = 0, \quad \Gamma_3(y) = 36 \cdot \sin(y) + \sin(6) \cdot y^2,$$

$$\Gamma_2(x) = \sin(x) + \sin(1) \cdot x^2, \quad \Gamma_4(x) = 0,$$

$$f(x, y) = (2 - y^2) \cdot \sin(x) + (2 - x^2) \sin(y).$$

Точное решение:  $u(x, y) = x^2 \cdot \sin(y) + y^2 \cdot \sin(x)$

**Вариант 6.**

$$a = 3, \quad b = 5,$$

$$\Gamma_1(y) = -\cos(y), \quad \Gamma_3(y) = 62 \cos(y),$$

$$\Gamma_2(x) = \cos(5) \cdot (2x^3 + 3x - 1), \quad \Gamma_4(x) = 2x^3 + 3x - 1,$$

$$f(x, y) = (9x - 2x^3 + 1) \cdot \cos(y).$$

Точное решение:  $u(x, y) = (2x^3 + 3x - 1) \cdot \cos(y)$

**Вариант 7.**

$$a = 3, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = 5y \cdot (y-1), \quad \Gamma_3(y) = 11y \cdot (y-1),$$

$$\Gamma_2(x) = 12x \cdot (x-1) + 60, \quad \Gamma_4(x) = 0,$$

$$f(x, y) = 2x \cdot (x-1) + 2y \cdot (y-1) + 10.$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = (x^2 - x + 5) \cdot (y^2 - y)$$

**Вариант 8.**

$$a = 2, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = -y^3, \quad \Gamma_3(y) = -(y-4) \cdot (y^2 - 2),$$

$$\Gamma_2(x) = -(x-16) \cdot (x^2 - 4), \quad \Gamma_4(x) = -x^3,$$

$$f(x, y) = 2x \cdot (x-3) + 2y \cdot (y-3).$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = (x^2 - y) \cdot (y^2 - x)$$

**Вариант 9.**

$$a = 5, \quad b = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = -3y^3, \quad \Gamma_3(y) = -(y-40) \cdot (3y^2 + 10),$$

$$\Gamma_2(x) = 2 \cdot (x+6) \cdot (x^2 + 3x - 2), \quad \Gamma_4(x) = 2x^2 \cdot (x+3),$$

$$f(x, y) = 6x \cdot (x+5) + 6y \cdot (y-3) + 12.$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = (x^2 + 3x - y) \cdot (2x + 3y^2)$$

**Вариант 10.**

$$a = 6, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = -(y^2 + 2), \quad \Gamma_3(y) = 35 \cdot (y^2 + 2),$$

$$\Gamma_2(x) = 18 \cdot (x^2 - 1), \quad \Gamma_4(x) = 2 \cdot (x^2 - 1),$$

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1).$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = (x^2 - 1) \cdot (y^2 + 2)$$

**Вариант 11.**

$$a = 4, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = \frac{\ln(4-y)}{\ln(10)}, \quad \Gamma_3(y) = \frac{\ln(12-y)}{\ln(10)},$$

$$\Gamma_2(x) = \frac{\ln(2x+1)}{\ln(10)}, \quad \Gamma_4(x) = \frac{\ln(2x+4)}{\ln(10)},$$

$$f(x, y) = \frac{5}{\ln(10) \cdot (2x - y + 4)^2}.$$

Точное решение:  $u(x, y) = \lg(2x - y + 4)$

**Вариант 12.**

$$a = 2, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = y, \quad \Gamma_3(y) = \sqrt{5} \cdot y,$$

$$\Gamma_2(x) = 4 \cdot \sqrt{x^2 + 1}, \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}.$$

Точное решение:  $u(x, y) = y \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

**Вариант 13.**

$$a = 2, \quad b = 1,$$

$$\Gamma_1(y) = \sin(3y), \quad \Gamma_3(y) = \sin(3y + 4),$$

$$\Gamma_2(x) = \sin(x^2 + 3), \quad \Gamma_4(x) = \sin(x^2),$$

$$f(x, y) = -(4x^2 + 9) \cdot \sin(x^2 + 3) + 2 \cos(x^2 + 3).$$

Точное решение:  $u(x, y) = \sin(x^2 + 3y)$

**Вариант 14.**

$$a = 12, \quad b = 8,$$

$$\Gamma_1(y) = \ln(y + 1), \quad \Gamma_3(y) = \ln(y + 25),$$

$$\Gamma_2(x) = \ln(2x + 9), \quad \Gamma_4(x) = (2x + 1),$$

$$f(x, y) = \frac{5}{\ln(10) \cdot (2x + y + 1)^2}.$$

Точное решение:  $u(x, y) = \ln(2x + y + 1)$

**Вариант 15.**

$$a = 5, \quad b = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = y^2, \quad \Gamma_3(y) = \cos(5) \cdot y^2,$$

$$\Gamma_2(x) = 16 \cdot \cos(x), \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = -\cos(x) \cdot (y^2 - 2).$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = \cos(x) \cdot y^2$$

**Вариант 16.**

$$a = 1, \quad b = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = 0, \quad \Gamma(y) = \ln(2) \cdot y,$$

$$\Gamma_2(x) = 3 \cdot \ln(x+1), \quad \Gamma_4(x) = 0, \quad f(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Точное решение: } u(x, y) = y \cdot \ln(x+1)$$

**ЗАДАНИЕ 2**

Найти решение задачи Дирихле в квадратной области для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$$

$$u(0, y) = \Gamma_1(y), \quad u(a, y) = \Gamma_3(y), \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$u(x, 0) = \Gamma_2(x), \quad u(x, a) = \Gamma_4(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

Решение провести с оценкой погрешности  $\varepsilon = 0,001$ . Построить график решения. Сравнить полученное решение с решением с помощью встроенной функции `relax` и с точным решением. Варианты заданий с исходными данными представлены ниже.

### Варианты заданий

#### Вариант 1.

$$a = 5,$$

$$\Gamma_1(y) = -y^2 - 5, \Gamma_3(y) = 20 - y^2, \Gamma_2(x) = x^2 - 30, \Gamma_4(x) = x^2 - 5.$$

Точное решение:  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 5$ .

#### Вариант 2.

$$a = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = y + 5, \Gamma_3(y) = y + 11, \Gamma_2(x) = 2x + 8, \Gamma_4(x) = 2x + 5.$$

Точное решение:  $u(x, y) = 2x + y + 5$ .

#### Вариант 3.

$$a = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = -3y^2 + 2y, \Gamma_3(y) = -3y^2 + 2y + 14, \Gamma_2(x) = 3x^2 + x - 8,$$

$$\Gamma_4(x) = 3x^2 + 4.$$

Точное решение:  $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + x + 2y$ .

#### Вариант 4.

$$a = 2,$$

$$\Gamma_1(y) = 1 - \frac{y^3}{3}, \Gamma_3(y) = 1 + 4y - \frac{y^3}{3}, \Gamma_2(x) = 2x^2 - \frac{5}{3}, \Gamma_4(x) = 1.$$

Точное решение:  $u(x, y) = x^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} + 1$ .

#### Вариант 5.

$$a = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = 1, \Gamma_3(y) = -4y^2 + \frac{67}{3}, \Gamma_2(x) = \frac{x^3}{3} - 16x + 1,$$

$$\Gamma_4(x) = \frac{x^3}{3} + 1.$$

Точное решение:  $u(x, y) = \frac{x^3}{3} - x \cdot y^2 + 1$ .

**Вариант 6.**

$a = 3,$

$\Gamma_1(y) = y^3, \quad \Gamma_3(y) = y^3 - 9y^2 - 27y + 27,$

$\Gamma_2(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 27, \quad \Gamma_4(x) = x^3.$

Точное решение:  $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 \cdot y - 3x \cdot y^2.$

**Вариант 7.**

$a = 5,$

$\Gamma_1(y) = y^2, \quad \Gamma_3(y) = y^2 + 10y - 25,$

$\Gamma_2(x) = -x^2 + 10x + 25, \quad \Gamma_4(x) = -x^2.$

Точное решение:  $u(x, y) = -x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y.$

**Вариант 8.**

$a = 6,$

$\Gamma_1(y) = 1 - y^2, \quad \Gamma_3(y) = 37 - 12y - y^2,$

$\Gamma_2(x) = x^2 - 12x - 35, \quad \Gamma_4(x) = x^2 + 1.$

Точное решение:  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2 \cdot x \cdot y + 1.$

**Вариант 9.**

$a = 7,$

$\Gamma_1(y) = y + 1, \quad \Gamma_3(y) = 8 \cdot (y + 1), \quad \Gamma_2(x) = 8 \cdot (x + 1), \quad \Gamma_4(x) = x + 1.$

Точное решение:  $u(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1).$

**Вариант 10.**

$a = 2,$

$\Gamma_1(y) = 3 - 3y, \quad \Gamma_3(y) = 1 - y, \quad \Gamma_2(x) = x - 3, \quad \Gamma_4(x) = 3 - x.$

Точное решение:  $u(x, y) = (x - 3) \cdot (y - 1)$

**Вариант 11.**

$a = 5,$

$\Gamma_1(y) = y^3, \quad \Gamma_3(y) = y^3 - 15y \cdot (y + 5) + 125,$

$\Gamma_2(x) = x^3 - 15x \cdot (x + 5) + 125, \quad \Gamma_4(x) = x^3.$

Точное решение:  $u(x, y) = (x + y) \cdot (x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2).$

**Вариант 12.**

$$a = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = 3y^2, \Gamma_3(y) = 3y^2 + 16y - 48,$$

$$\Gamma_2(x) = -3x^2 + 16x + 48, \Gamma_4(x) = -3x^2.$$

Точное решение:  $u(x, y) = -3x^2 + 3y^2 + 4 \cdot x \cdot y$ .

**Вариант 13.**

$$a = 4,$$

$$\Gamma_1(y) = -4y^2, \Gamma_3(y) = -4y^2 + 64, \Gamma_2(x) = 4x^2 - 64, \Gamma_4(x) = 4x^2.$$

Точное решение:  $u(x, y) = 4 \cdot (x^2 - y^2)$ .

**Вариант 14.**

$$a = 1,$$

$$\Gamma_1(y) = \frac{y^3}{3} + 7, \Gamma_3(y) = \frac{y^3}{3} - y + 7, \Gamma_2(x) = \frac{22}{3} - x^2, \Gamma_4(x) = 7.$$

Точное решение:  $u(x, y) = \frac{y^3}{3} - x^2 \cdot y + 7$

**Вариант 15.**

$$a = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = 6y + 18, \Gamma_3(y) = 9y + 27,$$

$$\Gamma_2(x) = 6x + 36, \Gamma_4(x) = 3x + 18.$$

Точное решение:  $u(x, y) = (x + 6) \cdot (y + 3)$ .

**Вариант 16.**

$$a = 3,$$

$$\Gamma_1(y) = 5y^2 + 3, \Gamma_3(y) = 5y^2 - 42,$$

$$\Gamma_2(x) = -5x^2 + 48, \Gamma_4(x) = -5x^2 + 3.$$

Точное решение:  $u(x, y) = 5 \cdot (y^2 - x^2) + 3$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кириянов Д.В.* Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. /Д.В. Кириянов. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
2. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в MathCAD: Учебный курс. / Е.Г. Макаров. СПб.: Питер, 2011. 400 с.
3. *Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения. (Курс высшей математики и математической физики) / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Физматлит, 2005. 256 с.
4. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие. 6-е изд., исп. и доп. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Изд-во МГУ, 1999



## СОДЕРЖАНИЕ

Классификация уравнений по математической форме .....	3
Основы метода конечных разностей .....	6
Построение сетки .....	7
Аппроксимация уравнения эллиптического типа .....	8
Погрешность решения.....	11
Решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа (Пуассона И Лапласа) .....	13
Задание 1 .....	24
Варианты заданий.....	24
Задание 2 .....	28
Варианты заданий.....	29

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ**

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов магистратуры направления 22.04.01*

Сост.: *Г.Н. Журов, В.Н. Кризский*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой  
информатики и компьютерных технологий

Ответственный за выпуск *Г.Н. Журов*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 13.02.2023. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 1,9. Усл.кр.-отт. 1,9. Уч.-изд.л. 1,6. Тираж 50 экз. Заказ 114.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2