

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет**

Кафедра машиностроения

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГОРНЫХ МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЛЬЦЕВОГО МАХОВИКА ПО МАССЕ

*Методические указания лабораторным работам
для студентов специальности 21.05.04*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020**

УДК 531.8 (073)

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГОРНЫХ МАШИН. Оптимизация геометрических параметров кольцевого маховика по массе: Методические указания к лабораторным работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *Н.С. Голиков*. СПб, 2020. 17 с.

Представлены методические указания к лабораторной работе, выполняемой по учебной дисциплине «Исследование и проектирование горных машин и оборудования». Приведены основные теоретические сведения и необходимый справочный материал.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Горные машины и оборудование»

Научный редактор проф. *В.В. Максаров*

Рецензент канд. техн. наук *С.В. Казаков* (АО НПК «Механобр-Техника»)

ВВЕДЕНИЕ

Представлены методические указания к лабораторной работе, выполняемой по учебной дисциплине «Исследование и проектирование горных машин и оборудования». Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специализации «Горные машины и оборудование» специальности «Горное дело».

Приведена методика построения математической модели, связывающей геометрические параметры кольцевого маховика и его массу.

Допуск к лабораторной работе предваряется обязательным ознакомлением студентов с правилами техники безопасности, вступительным пояснением и кратким контрольным опросом.

Лабораторная работа выполняется индивидуально. Индивидуальные задания и исходные данные для неё выдаются преподавателем.

Каждый студент оформляет отчет по лабораторной работе, в котором указывает ее цель, основные теоретические положения, исходные и полученные данные, окончательные выводы. Оформление отчета должно соответствовать требованиям ЕСКД и Горного университета.

Отчет сдается на проверку преподавателю. Проверенный и подписанный отчет подлежит защите.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Маховик - это массивное колесо, закрепляемое на валу и уменьшающее неравномерность его движения в установившемся режиме работы машины, за счет накопления кинетической энергии в периоды, когда движущие силы превосходят силы сопротивления, и отдачи кинетической энергии в периоды, когда силы сопротивления превосходят движущие силы.

Неравномерность движения является негативным фактором, поскольку вызывает динамические давления в кинематических парах, снижает коэффициент полезного действия и надежность машины, ухудшает выполняемый машиной рабочий технологический процесс, вызывает упругие колебания в звеньях, что является нежелательным как с точки зрения их прочности, так и с точки зрения потери мощности.

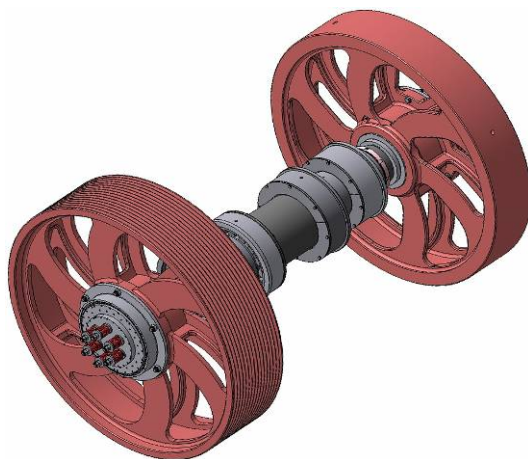


Рис. 1. Главный вал щековой дробилки модели ЩДП 1200x1500 мм производства Электростальского завода тяжелого машиностроения

В щековых дробилках наличие маховика совершенно необходимо, поскольку позволяет аккумулировать весьма

значительные запасы кинетической энергии и использовать их для преодоления повышенных полезных нагрузок без увеличения мощности двигателя. С этой целью на концевых частях приводного вала дробилок закрепляется сразу два маховика – по одному с каждой стороны (рис. 1).

2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Форма маховика бывает различной, но по конструктивным соображениям наиболее удобной является форма в виде диска с тяжелым ободом и ступицей. Такой маховик называется кольцевым и представляет собой тело вращения, ось симметрии которого совпадает с одной из главных центральных осей инерции.

Геометрически такая форма описывается параметрами: шириной ступицы L_1 , шириной диска L_2 и шириной обода L_3 , внутренним R_1 и наружным R_2 радиусами ступицы, а также внутренним R_3 и наружным R_4 радиусами обода (рис. 2).

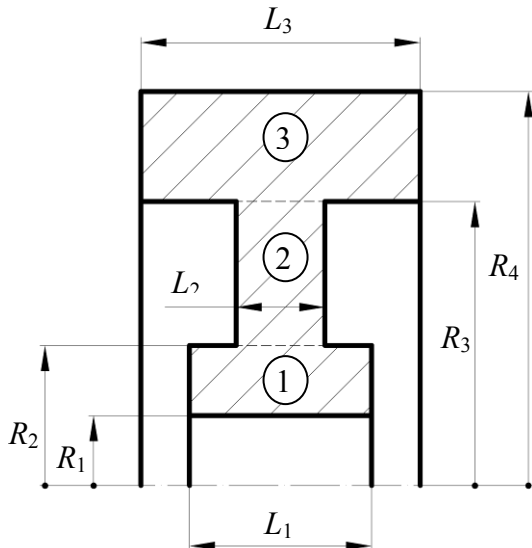


Рис. 2. Геометрические параметры кольцевого маховика: 1 – ступица; 2 – диск; 3 – обод

Значения этих параметров подбираются исходя из величины момента инерции J , необходимого для стабилизации движения механизма, а также некоторых конструктивных и прочностных соображений. Так, например, геометрия ступицы зависит от диаметра участка вала, на который она будет посажена, а внутренний и наружный радиусы обода ограничиваются величиной окружной скорости центра тяжести его сечения, определяемой по критерию прочности обода на разрыв.

Основная часть требуемого момента инерции J обеспечивается ободом маховика, поскольку он является самым массивным элементом конструкции. В большинстве методик проектирования ободу отводится решающая роль, в предположении, что именно в нем сосредоточена вся инертность маховика. Однако ступица и диск также обладают моментами инерции. Поэтому полный момент инерции маховика определяется как сумма моментов инерции отдельных его частей – ступицы, диска и обода:

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Каждая часть маховика представляет собой полый толстостенный цилиндр (рис. 3).

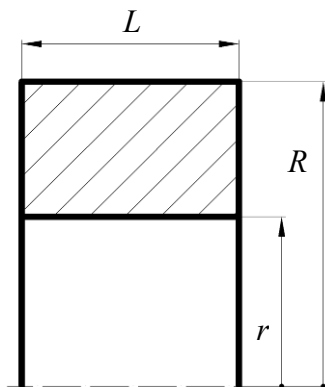


Рис. 3. Геометрические параметры полого толстостенного цилиндра

Момент инерции полого толстостенного цилиндра определяется выражением:

$$J = \frac{m}{2} \cdot (R^2 + r^2),$$

где: m - масса цилиндра; R и r - наружный и внутренний радиусы цилиндра.

Из формулы видно, что при уменьшении массы цилиндра, величина требуемого момента инерции обеспечивается увеличением радиусов этого цилиндра. Однако применительно к маховику, состоящему из трех концентрически расположенных вставленных один в другой полых цилиндров с взаимосвязанными радиальными размерами, картина может выглядеть несколько иначе. Дело в том, что у маховика наружный радиус диска R_3 является внутренним радиусом обода (рис. 2) и поэтому при увеличении R_3 , помимо отмеченного выше явления уменьшения массы обода m_3 , будет происходить наращивание массы диска m_2 .

Учет массы диска при выборе размеров обода маховика делает решение вопроса уже не столь однозначным. В связи с этим задача о нахождении такого значения R_3 , при котором с одной стороны маховик обладал бы требуемым моментом инерции, а с другой - минимальной массой, представляется практически значимой. Минимизация массы маховика является выгодной с различных точек зрения: это и повышение технологичности изготовления маховика, и снижение его себестоимости, и улучшение эргономичности.

Данная задача может быть решена установлением функциональной связи между массой маховика и геометрическими параметрами, характеризующими его форму, и определением минимума данной функции.

Масса маховика складывается из массы его обода, диафрагмы и ступицы:

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Масса каждой части есть произведение плотности ρ материала, из которого изготовлен маховик, на объем соответствующей части V_i :

$$m_i = \rho \cdot V_i$$

Объем полого толстостенного цилиндра (рис. 3):

$$V = \pi \cdot L \cdot (R^2 - r^2).$$

Массы ступицы, диска и обода будут соответственно равны:

$$m_1 = \pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2), \quad m_2 = \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) \quad \text{и}$$

$$m_3 = \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot (R_4^2 - R_3^2);$$

и тогда полная масса маховика:

$$m = \pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2) + \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) + \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot (R_4^2 - R_3^2).$$

Параметры ступицы R_1 , R_2 и L_1 , а также ширина диска L_2 и обода L_3 определяются из конструктивных соображений и задаются в начале расчета.

Внутренний R_3 и наружный R_4 радиусы обода определяются исходя из требуемого значения момента инерции J и массы m маховика, являясь взаимосвязанными параметрами и могут быть выражены один через другой.

Поскольку масса полого цилиндра меняется с изменением геометрических параметров, удобнее представлять ее как произведение плотности ρ и объема V , выраженного через те же геометрические параметры:

$$J = \frac{m}{2} \cdot (R^2 + r^2) = \frac{\rho \cdot V}{2} \cdot (R^2 + r^2) = \frac{\rho \cdot \pi \cdot L}{2} \cdot (R^2 - r^2) \cdot (R^2 + r^2) = \frac{\rho \cdot \pi \cdot L}{2} \cdot (R^4 - r^4).$$

С учетом этого моменты инерции ступицы, диска и обода:

$$J_1 = \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_1 \cdot (R_2^4 - R_1^4), \quad J_2 = \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_2 \cdot (R_3^4 - R_2^4) \quad \text{и}$$

$$J_3 = \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_3 \cdot (R_4^4 - R_3^4);$$

и тогда полный момент инерции маховика:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_1 \cdot (R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_2 \cdot (R_3^4 - R_2^4) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot L_1 \cdot (R_4^4 - R_3^4) = \\
= & \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot (L_1 \cdot R_2^4 - L_1 \cdot R_1^4 + L_2 \cdot R_3^4 - L_2 \cdot R_2^4 + L_3 \cdot R_4^4 - L_3 \cdot R_3^4) = \\
= & \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot (-L_1 \cdot R_1^4 + R_2^4 \cdot (L_1 - L_2) + R_3^4 \cdot (L_2 - L_3) + L_3 \cdot R_4^4).
\end{aligned}$$

Выразим из этого уравнения R_4 :

$$R_4 = \left[\frac{2 \cdot J}{\pi \cdot \rho \cdot L_3} + R_1^4 \cdot \frac{L_1}{L_3} - R_2^4 \cdot \frac{(L_1 - L_2)}{L_3} - R_3^4 \cdot \frac{(L_2 - L_3)}{L_3} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Введем дополнительные обозначения для постоянных членов этого уравнения:

$$a = \frac{2 \cdot J}{\pi \cdot \rho \cdot L_3} + R_1^4 \cdot \frac{L_1}{L_3} - R_2^4 \cdot \frac{(L_1 - L_2)}{L_3} \quad \text{и} \quad b = \frac{(L_2 - L_3)}{L_3};$$

и тогда наружный радиус обода: $R_4 = [a - b \cdot R_3^4]^{\frac{1}{4}}$.

Подставим полученное выражение для R_4 в формулу массы маховика:

$$m = \pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2) + \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) + \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot \left([a - b \cdot R_3^4]^{\frac{1}{2}} - R_3^2 \right).$$

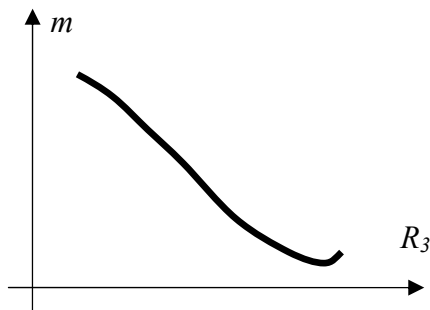


Рис. 4. График функции $m=f(R_3)$.

Минимум функции $m = f(R_3)$ приближенно можно установить, анализируя ее графическое изображение (рис. 4). Более точное значение минимума определяется методами дифференциального исчисления, для чего необходимо получить уравнение первой производной этой функции по аргументу R_3 и найти его корни:

$$m' = (\pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2))' + (\pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_3^2)' - (\pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_2^2)' + \left(\pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot [a - b \cdot R_3^4]^{1/2} \right)' - (\pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot R_3^2)'.$$

Первое слагаемое этого уравнения:

$$(\pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2))' = 0.$$

Второе слагаемое:

$$(\pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_3^2)' = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_3.$$

Третье слагаемое:

$$(\pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_2^2)' = 0.$$

Четвертое слагаемое представляет собой производную сложной функции, для вычисления которой необходимо ввести вспомогательную переменную $u = a - b \cdot R_3^4$, производная которой по аргументу R_3 будет равна $u' = -4 \cdot b \cdot R_3^3$, и тогда:

$$\begin{aligned} \left(\pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot (a - b \cdot R_3^4)^{1/2} \right)' &= (\pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot u^{1/2})' = \frac{\pi \cdot \rho \cdot L_3}{2 \cdot u^{1/2}} \cdot u' = \\ &= \frac{-4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot b \cdot R_3^3}{2 \cdot (a - b \cdot R_3^4)^{1/2}} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot b \cdot R_3^3}{(a - b \cdot R_3^4)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Пятое слагаемое:

$$(\pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot R_3^2)' = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot R_3.$$

Окончательно уравнение примет вид:

$$m' = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot R_3 - \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot b \cdot R_3^3}{(a - b \cdot R_3^4)^{1/2}} - 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot R_3.$$

Приравняв полученное выражение к нулю, и произведя некоторые преобразования, получим:

$$R_3(L_2 - L_3) - \frac{L_3 \cdot b \cdot R_3^3}{(a - b \cdot R_3^4)^{1/2}} = 0.$$

Раскрыв значение $b = (L_2 - L_3)/L_3$ в числителе дроби второго слагаемого, получим:

$$R_3 - \frac{R_3^3}{\sqrt{a - b \cdot R_3^4}} = 0.$$

Нахождение корней данного уравнения позволяет получить значение R_3 , при котором маховик будет обладать наименьшей массой. Наиболее просто данная задача может быть решена численными методами с применением ЭВМ.

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Значения R_3 могут существовать только в диапазоне от R_2 до R_4 . При $R_3=R_2$ масса диска становится равной нулю ($m_2=0$) и маховик оказывается состоящим только из двух частей: ступицы и обода. При $R_3=R_4$ масса обода становится равной нулю ($m_3=0$) и маховик оказывается состоящим только из двух частей: ступицы и диска. Поэтому предельным значением для R_3 , ограничивающем область поиск оптимального решения, можно считать такое, при котором масса обода оказывается равной нулю. Предельное значение может быть найдено из уравнения для R_4 :

$$\begin{aligned} R_3 &= [a - b \cdot R_3^4]^{1/4}, \\ R_3^4 &= a - b \cdot R_3^4, \\ a - b \cdot R_3^4 - R_3^4 &= 0, \end{aligned}$$

$$a - R_3^4(b+1) = 0,$$

$$R_3^4 = \frac{a}{(b+1)},$$

$$R_3 = \left[\frac{a}{(b+1)} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Таким образом, границы диапазона возможных значений определяется по следующим формулам:

$$R_3^{\min} = R_2 \quad \text{и} \quad R_3^{\max} = \left[\frac{a}{(b+1)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

А сам диапазон существования возможных значений:

$$\Delta = R_3^{\max} - R_3^{\min}$$

При решении задачи на ЭВМ шаг вычислений определим из выражения:

$$s = \frac{\Delta}{z-1},$$

где: z – число расчетных значений.

4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для проведения численного эксперимента, необходимо задать значения параметров, перечисленных в таблице 1 (численные значения приведены в качестве иллюстрации). Данные параметры являются основой для вычисления всех констант, входящих в уравнение массы.

Таблица 1

Исходные данные

J	400	кг*м2	Требуемый момент инерции
ρ	7 200	кг/м3	Плотность материала маховика
d	200	мм	Диаметр участка вала под маховиком
n	400	об/мин	Скорость вращения вала
[v]	45	м/с	Предельная окружная скорость ц. т. обода

Продолжение табл. 1

x1	1,10	-	Коэффициент при R2
x2	1,50	-	Коэффициент длины ступицы (L1)
x3	0,50	-	Коэффициент толщины диска (L2)
x4	2,25	-	Коэффициент ширины обода (L3)
z	21	-	Число расчетных значений

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ

Определение постоянных геометрических характеристик маховика (геометрических констант):

$$R_1 = \frac{d}{2}, \quad R_2 = x_1 \cdot d, \quad L_1 = x_2 \cdot d, \quad L_2 = x_3 \cdot d, \quad L_3 = x_4 \cdot d.$$

Вычисление дополнительных констант:

$$a = \frac{2 \cdot J}{\pi \cdot \rho \cdot L_3} + R_1^4 \cdot \frac{L_1}{L_3} - R_2^4 \cdot \frac{(L_1 - L_2)}{L_3} \quad \text{и} \quad b = \frac{(L_2 - L_3)}{L_3}.$$

Расчет предельно допустимого радиуса центра тяжести обода:

$$[R] = \frac{30 \cdot [v]}{\pi \cdot n}.$$

Определение диапазона изменения значений R_3 :

$$R_3^{\min} = R_2 \quad \text{и} \quad R_3^{\max} = \left[\frac{a}{(b+1)} \right]^{\frac{1}{4}},$$

а также величины самого диапазона и шага вычислений:

$$\Delta = R_3^{\max} - R_3^{\min} \quad \text{и} \quad s = \frac{\Delta}{z-1}.$$

Масса ступицы маховика:

$$m_1 = \pi \cdot \rho \cdot L_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2).$$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Определение расчетных значений R_3 на всем диапазоне вычислений:

$$R_3^i = R_3^{i-1} + s$$

Наружный радиус обода:

$$R_4 = \left[a - b \cdot R_3^4 \right]^{\frac{1}{4}}$$

Радиус центра тяжести обода:

$$R = \frac{R_3 + R_4}{2}$$

Массы диска и обода маховика:

$$m_2 = \pi \cdot \rho \cdot L_2 \cdot (R_3^2 - R_2^2) \quad \text{и} \quad m_3 = \pi \cdot \rho \cdot L_3 \cdot (R_4^2 - R_3^2)$$

Общая масса маховика:

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

Производная от массы маховика по R_3 :

$$m' = R_3 - \frac{R_3^3}{\sqrt{a - b \cdot R_3^4}}$$

7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты расчетов заносятся в таблицу (см. табл.2).

Таблица 2

Результаты моделирования									
№	R3	R4	R	[R]	m1	m2	m3	m	m'
	мм	мм	мм	мм	кг	кг	кг	кг	-
1	220	531	375	537	260	0	2 376	2 636	182
2	247	533	390	537	260	29	2 265	2 554	194
3	275	535	405	537	260	61	2 146	2 468	202
4	302	539	420	537	260	97	2 021	2 379	207
5	330	543	436	537	260	136	1 892	2 289	208
6	357	548	453	537	260	179	1 759	2 199	206
7	385	555	470	537	260	225	1 625	2 111	200
8	412	562	487	537	260	275	1 491	2 026	191
9	440	572	506	537	260	327	1 358	1 945	180
10	467	582	524	537	260	384	1 226	1 870	166
11	494	594	544	537	260	443	1 097	1 801	151
12	522	607	564	537	260	506	972	1 739	136
13	549	621	585	537	260	573	850	1 684	119
14	577	636	606	537	260	643	732	1 635	103
15	604	653	628	537	260	716	618	1 594	86
16	632	670	651	537	260	793	507	1 560	70
17	659	688	674	537	260	873	400	1 533	55
18	687	707	697	537	260	956	296	1 513	40
19	714	727	721	537	260	1 043	195	1 499	26
20	741	748	745	537	260	1 133	96	1 490	13
21	769	769	769	537	260	1 227	0	1 488	0

На основании данных из таблицы строятся графики функций (см. рис. 5): 1) $R_4 = f(R_3)$ и $R_3 = f(R_3)$; 2) $[R] = f(R_3)$ и $R = f(R_3)$; 3) $m_1, m_2, m_3 = f(R_3)$; 4) $m' = f(R_3)$.

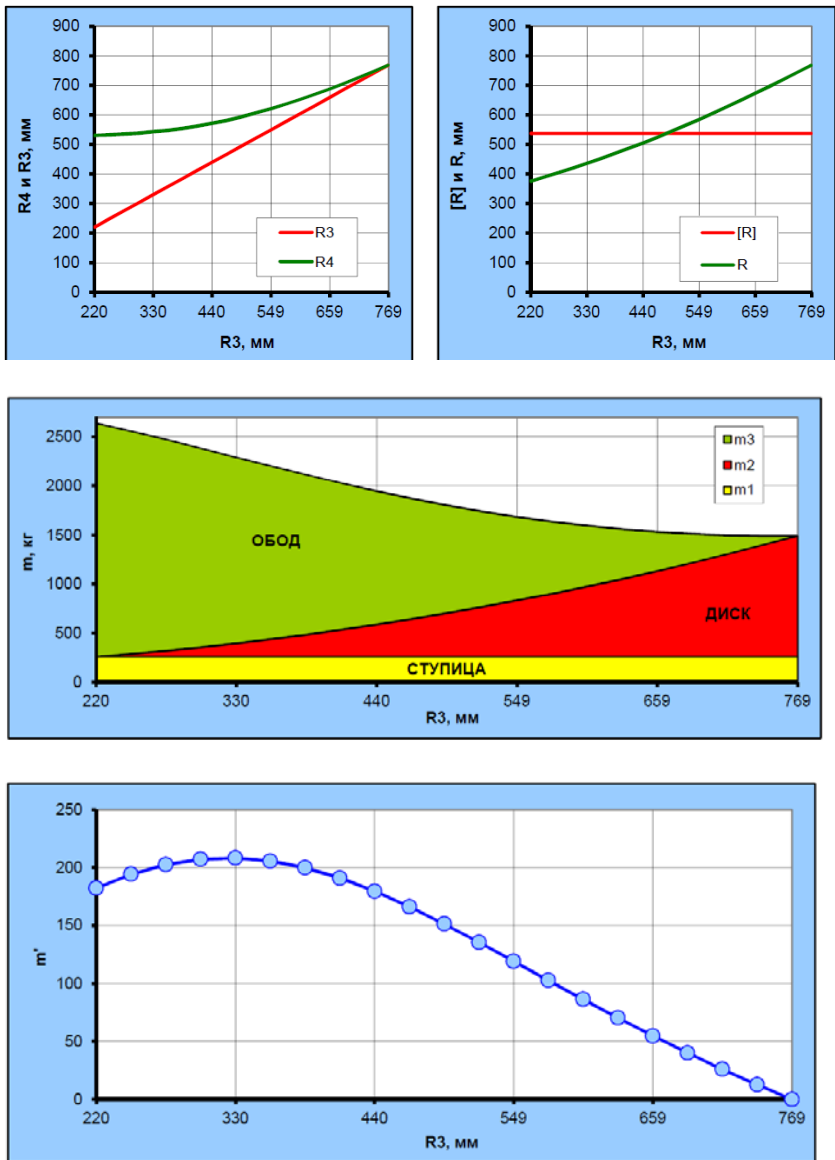


Рис. 5. Построение графиков функций

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988.
2. Бабичев Д.Т. Расчет маховика. / Д. Т. Бабичев, В.В. Долгушин. Тюмень: Тюменский индустриальный институт, 1990.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2006.
4. Фаворин М.В. Моменты инерции тел. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	4
2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	5
3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ	11
4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ	12
5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ	13
6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН.....	14
7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ	15
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	17

**ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ГОРНЫХ МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ
ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
КОЛЬЦЕВОГО МАХОВИКА ПО МАССЕ**

*Методические указания лабораторным работам
для студентов специальности 21.05.04*

Сост. *Н.С. Голиков*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
машиностроения

Ответственный за выпуск *Н.С. Голиков*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 29.10.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,0. Усл.кр.-отг. 1,0. Уч.-изд.л. 0,9. Тираж 75 экз. Заказ 791.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2