# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

***Методические указания к самостоятельной работе для студентов специальности 21.05.04***

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**
**2020**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра механики

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

*Методические указания к самостоятельной работе*
*для студентов специальности 21.05.04*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020

УДК 539.3/4 (073)

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Статика. Кинематика:** Методические указания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *М.И. Вершинин, В.Г. Мельников, Е.В. Шишкин.* СПб, 2020. 60 с.

Приведены методические указания и варианты расчетных заданий по разделам «Статика» и «Кинематика» курса «Теоретическая механика». Указания снабжены примерами с решениями типовых задач.

Предназначены для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело».

Научный редактор проф. *В.Л. Трушко*

Рецензент д-р физ.-мат. наук, *А.О. Смирнов* (Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения).



**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**СТАТИКА. КИНЕМАТИКА**

***Методические указания к самостоятельной работе***
***для студентов специальности 21.05.04***

Сост.: *М.И. Вершинин, В.Г. Мельников, Е.В. Шишкин*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой механики

Ответственный за выпуск *Е.В. Шишкин*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 14.09.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,5. Усл.кр.-отт. 3,5. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ 625.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

# ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» входит в состав базовой части подготовки студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» и изучается в третьем и четвертом семестрах.

Целью преподавания этой дисциплины является формирование у студентов представлений об общих законах механики, равновесия и движения твердых тел. Задача курса теоретической механики, являющейся первой в цикле читаемых в институте механических дисциплин, состоит в том, чтобы на ее основе иметь возможность изучать другие инженерные дисциплины (сопротивление материалов, теорию механизмов и машин, строительную механику, теорию колебаний др.).

В рамках данного курса студенты должны освоить проведение расчетов типовых конструкций: определять реакции опор, усилия в стержневых системах, параметры движения материальной точки и твердого тела.

Курс теоретической механики базируется на учебных дисциплинах «Математика», «Физика», «Начертательная геометрия», «Инженерная и компьютерная графика».

Работы необходимо выполнять на листах бумаги формата А4, оформляя при помощи ПК (*Word*, поля по 2,5 см, шрифт *Times New Roman*, кегль 12, интервал 1,5, выравнивание по ширине, абзацный отступ 1,25 см, рисунки допускается чертить карандашом в соответствии с требованиями ЕСКД или графическими средствами *Word*).

Вариант задания указывается преподавателем при выдаче его студенту.

# 1. СОСТАВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

***Задание.*** Найти опорные реакции составной конструкции, которая испытывает воздействие внешней нагрузки.

***Пример 1.1***: Дано: $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 18$ кН, $q_1 = 2{,}5$ кН/м, $q_2 = 4$ кН/м, $M_1 = 10$ кН·м, $M_2 = 21$ кН·м, $M_3 = 32$ кН·м (рис. 1.1). Найти реакции заделки *A* и опор *C, E*. Геометрические размеры указаны в метрах.

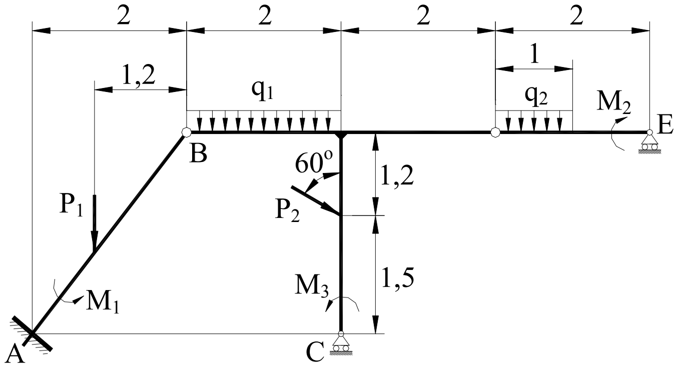



Рис. 1.1

***Решение***. Рассматриваемая конструкция является два раза статически неопределимой, т.к. число неизвестных реакций – 5 (3 – в заделке *A* и по одной в *C* и *E*), а уравнений статики – три. Расчленим конструкцию на элементы, что даст возможность записать дополнительные уравнения равновесия.

Рассмотрим условия равновесия участка конструкции *DE* (рис. 1.1.1):

$$\sum M_{\mathrm{D}}\left(\overline{F}_i\right) = y_E \cdot 2 - \mathrm{q}_2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - M_2 = 0;$$

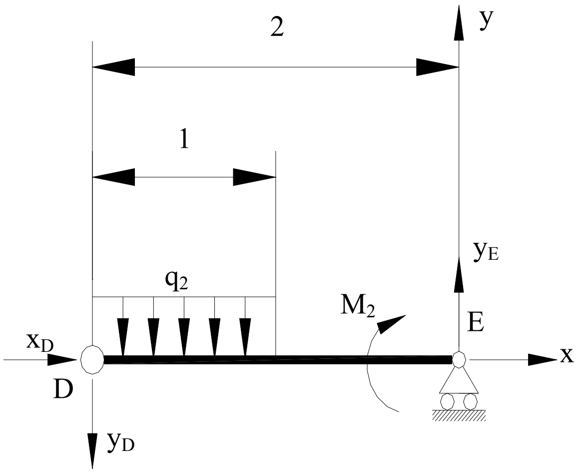



Рис. 1.1.1

$$y_E = \frac{q_2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + M_2}{2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 21}{2} = 11{,}5 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_{\text{i}} = y_E - y_D - q_2 \cdot 1 = 0;$$

$$y_D = y_E - q_2 \cdot 1 = 11{,}5 - 4 = 7{,}5 \text{ кН.}$$

$$\sum X_{\text{i}} = 0;\ x_D = 0.$$

Рассмотрим условия равновесия участка конструкции *BDC* (рис. 1.1.2):

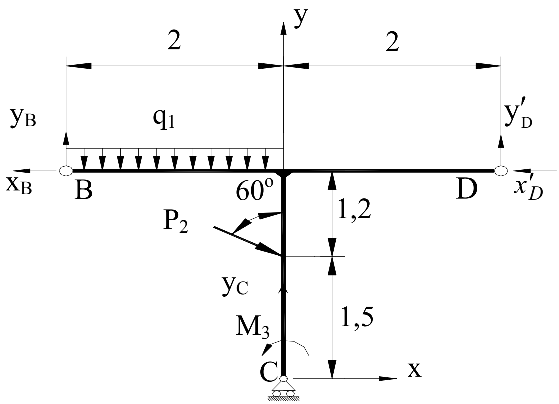


Рис.1.1.2

$$\sum M_B\left(\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}}\right) = y'_D \cdot 4 + y_C \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 +$$
$$+P_2 \sin 60^\circ \cdot 1{,}2 - P_2 \cos 60^\circ \cdot 2 + M_3 = 0;$$

$$y_C = \left(-4\mathrm{y}'_\mathrm{D} + q_1 \cdot 2 \cdot 1 - 1{,}2 P_2 \sin 60^\circ +\right.$$
$$\left.+2P_2 \cos 60^\circ - M_3\right) / 2 =$$
$$= \left(-4 \cdot 7{,}5 + 2{,}5 \cdot 1 - 1{,}2 \cdot 18 \cdot 0{,}866 -\right.$$
$$\left.-18 \cdot 0{,}5 \cdot 2 - 32\right) / 2 = -28{,}85 \text{ кН.}$$

Реакция $y_C$ направлена в противоположную сторону по отношению к обозначенной на рис. 1.1.2.

$$\sum X_{\mathrm{i}} = -x_B - x'_D + P_2 \sin 60^\circ = 0;$$

$$x_B = -x'_D + P_2 \sin 60^\circ = 0 + 18 \cdot 0{,}866 = 15{,}59 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_{\mathrm{i}} = y_B + y'_D + y_C - 2q_1 - P_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$y_B = -y'_D - y_C + q_1 \cdot 2 + P_2 \cos 60° = -7{,}5 - \left(-37{,}85\right) + 25 \cdot 2$$
$$+18 \cdot 0{,}5 = 35{,}35 \text{ кН.}$$

Рассмотрим условие равновесия участка конструкции *AB* (рис. 1.1.3):

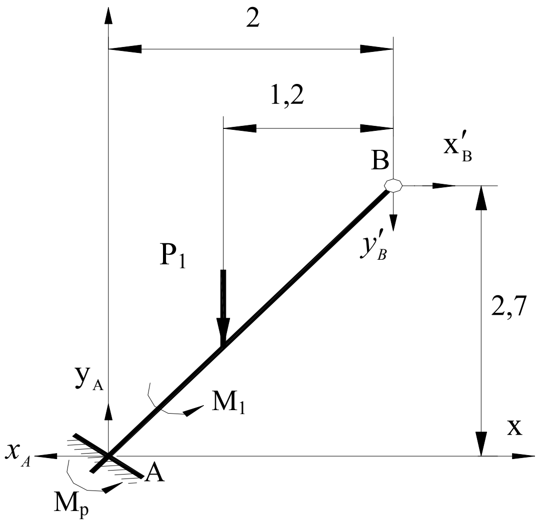



Рис. 1.1.3

$$\sum M_A\left(\bar{F}_i\right) = +M_p + M_1 - P_1 \cdot 0{,}8 - y'_B \cdot 2 - x'_B \cdot 2{,}7 = 0;$$

$$M_p = -M_1 + P_1 \cdot 0{,}8 + y'_B \cdot 2 + x'_B \cdot 2{,}7 = -10 +$$
$$+12 \cdot 0{,}8 + 35{,}35 \cdot 2 + 15{,}59 \cdot 2{,}7 = 112{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\sum Y_i = y_A - P_1 - y'_B = 0; \; y_A = P_1 + y'_B = 12 + 35{,}35 = 47{,}35 \text{ кН.}$$

$$\sum X_i = -x_A + x'_B = 0; \; x_A = x'_B = 15{,}59 \text{ кН.}$$

Для проверки полученных результатов составим уравнения равновесия для всей конструкции (реакции промежуточных шарниров *B* и *D* при составлении уравнений не учитываются):

$$\Sigma Y_{\mathrm{i}} = y_A - P_1 - q_1 \cdot 2 - P_2 \cos 60° - y_C - q_2 \cdot 1 + y_E = 0;$$

$$47{,}35 - 12 - 2{,}5 \cdot 2 - 18 \cdot 0{,}5 - 28{,}85 - 4 \cdot 1 + 11{,}5 = 58{,}85 - 58{,}85 = 0.$$

$$\Sigma X_{\mathrm{i}} = -x_A + P_2 \sin 60° = 0;$$

$$-15{,}59 + 18 \cdot 0{,}866 = -15{,}59 + 15{,}59 = 0.$$

$$\sum M_{\mathrm{A}}\left(\overline{F}_i\right) = M_p + M_1 - P_1 \cdot 0{,}8 - q_1 \cdot 2 \cdot 3 - q_2 \cdot 1 \cdot 6{,}5 - M_2 +$$
$$+ y_E \cdot 8 - y_C \cdot 4 + M_3 - P_2 \cos 60^o \cdot 4 - P_2 \sin 60° \cdot 1{,}5 = 0;$$

*Таблица 1.1*

**Результаты расчета**

| Момент в заделке $M_{\mathrm{p}}$, кН·м | Силы, кН | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_A$ | $y_A$ | $x_C$ | $y_E$ |
| 112,4 | 15,6 | 47,4 | 28,9 | 11,5 |

Варианты заданий на рис. 1.2 – 1.31 (нагрузки даны в табл. 1.2).

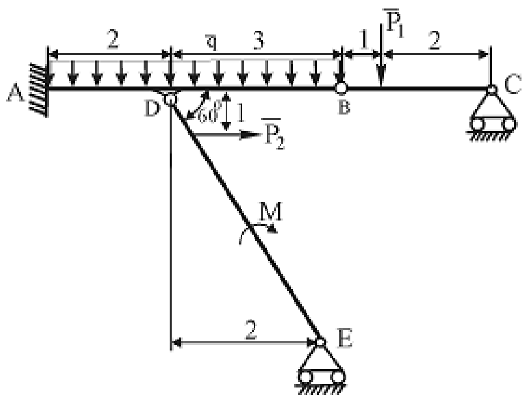

2
q
3
1
$\overline{P}_1$
2
A
C
D
60°
1
B
$\overline{P}_2$
M
2
E

Рис. 1.2

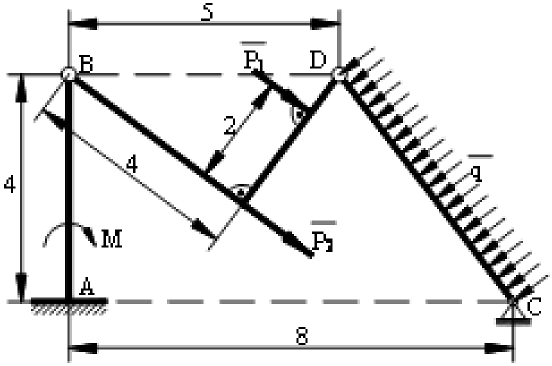

5
B
$\overline{P}_1$
D
2
4
4
q
M
$\overline{P}_2$
A
C
8

Рис. 1.3

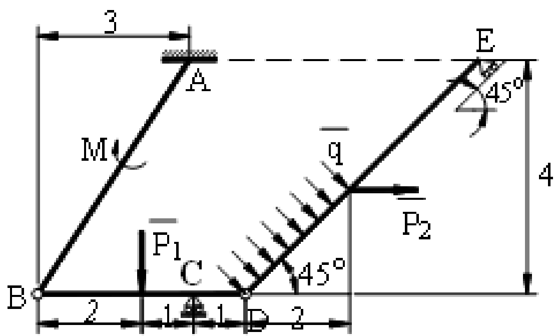



Рис. 1.4

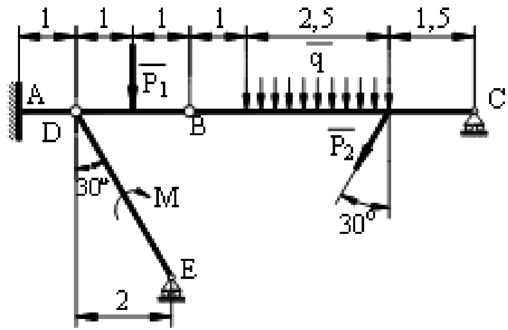



Рис. 1.5

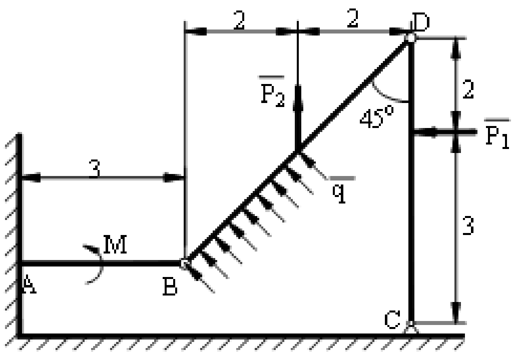



Рис. 1.6

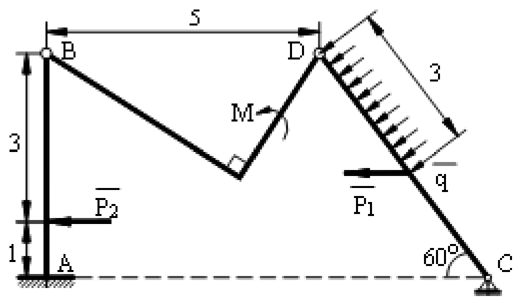



Рис. 1.7

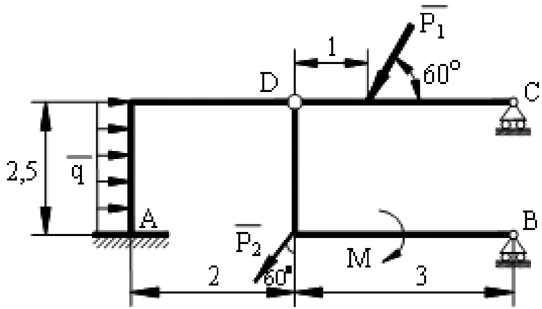



Рис. 1.8

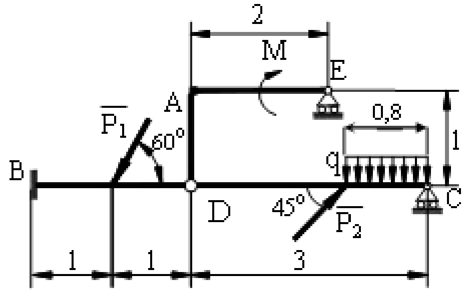



Рис. 1.9

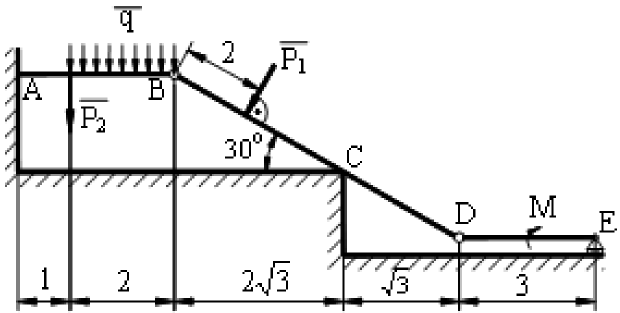



Рис. 1.10

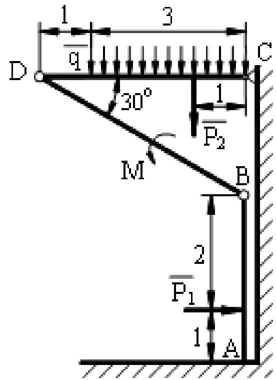



Рис. 1.11

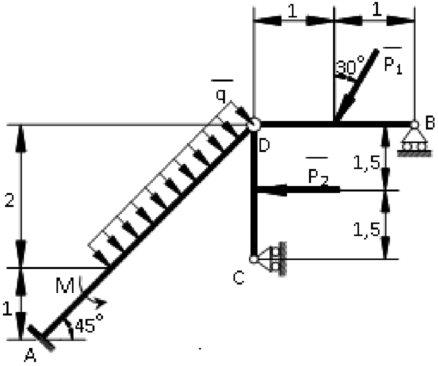



Рис.1. 12

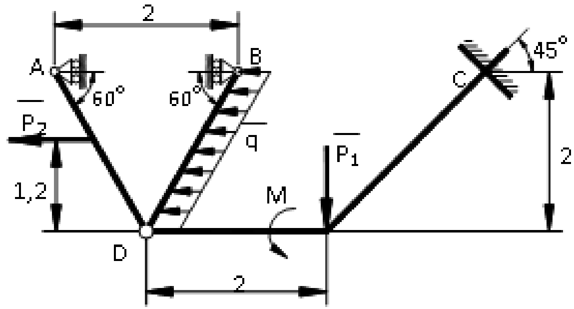



Рис. 1.13

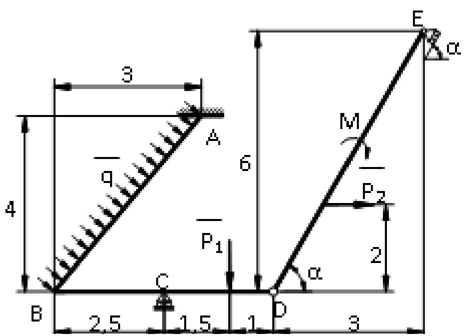



Рис. 1.14

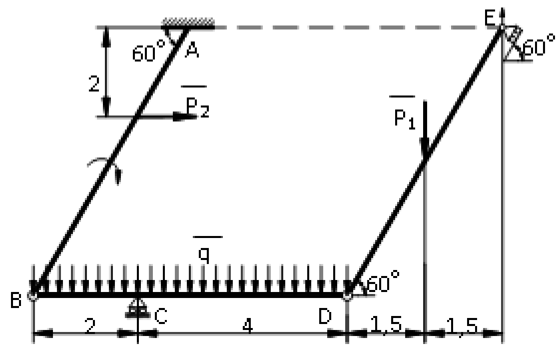



Рис. 1.15

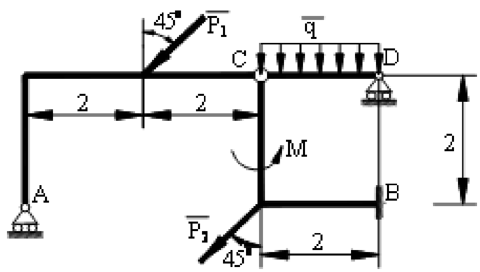



Рис. 1.16

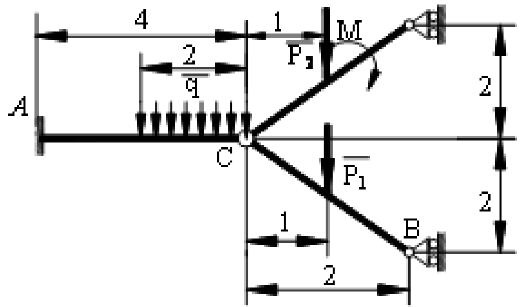



Рис. 1.17

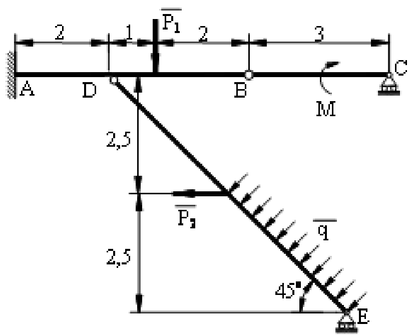



Рис. 1.18

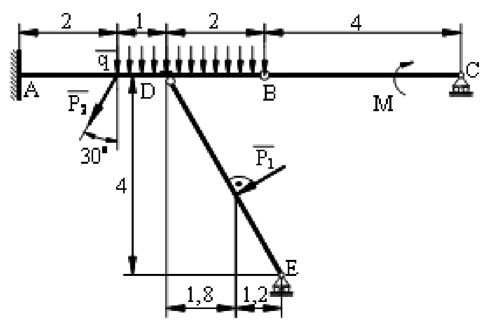



Рис. 1.19

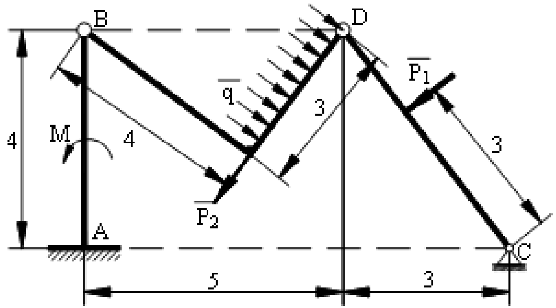



Рис. 1.20

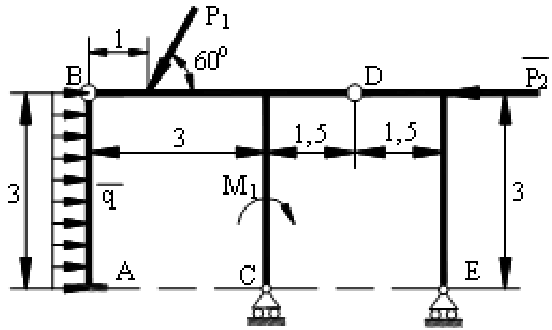



Рис.1. 21

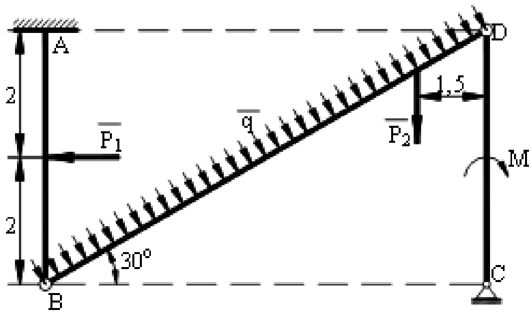



Рис.1. 22

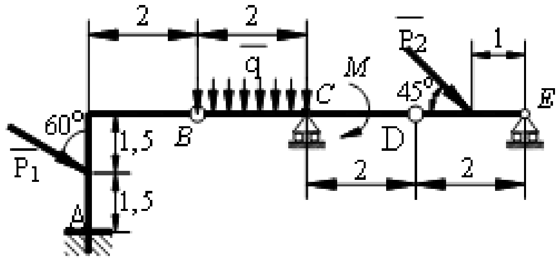



Рис. 1.23

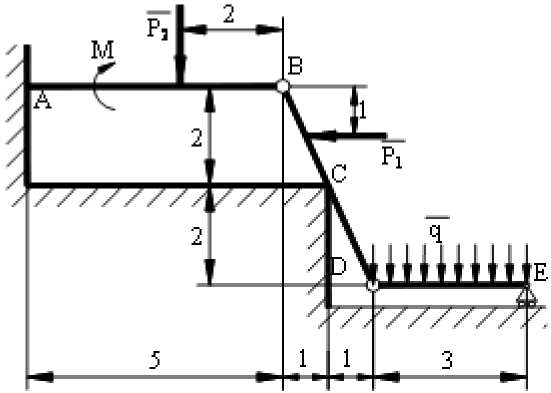



Рис.1. 24

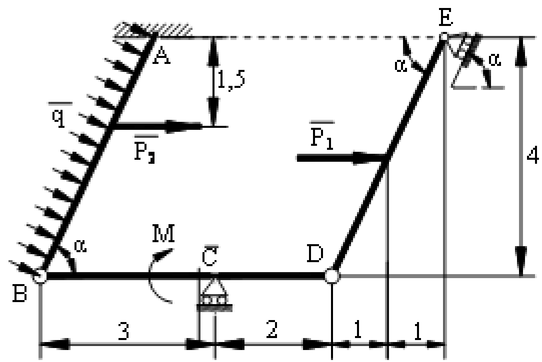



Рис. 1.25

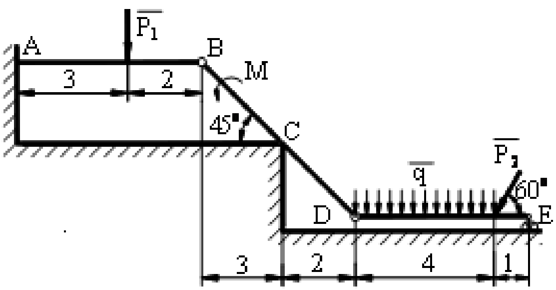



Рис.1. 26

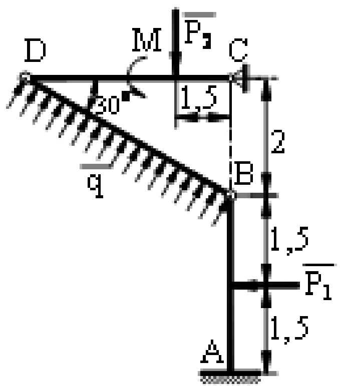



Рис.1. 27

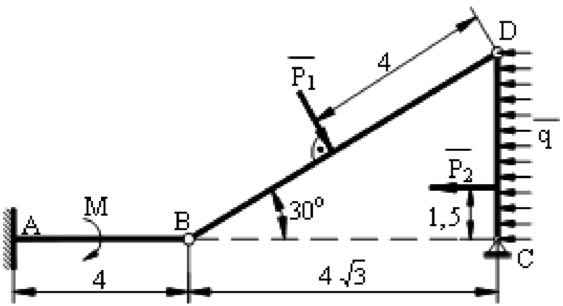



Рис. 1.28

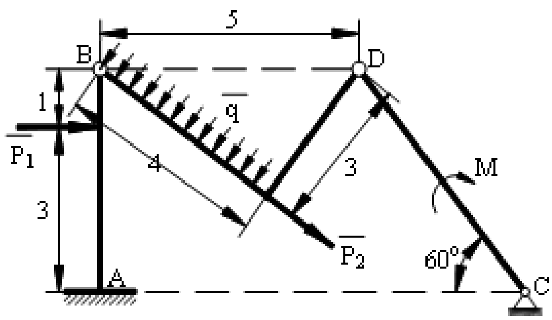



Рис.1. 29

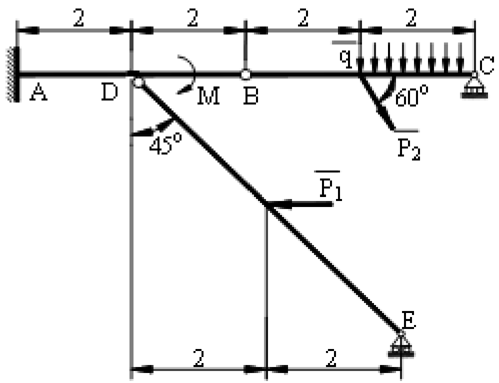



Рис.1.30

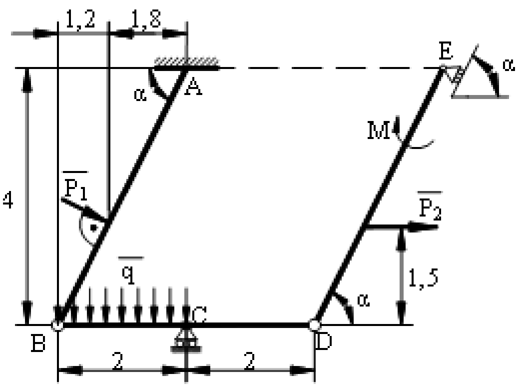



Рис. 1.31

*Таблица 1.2*

| Номер задачи | Номер рисунка | $P_1$, кН | $P_2$,кН | $q$, кН/м | $M$, кНм |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 а | 1.2 | 6 | 4 | 0,8 | 25 |
| 1.2 а | 1.3 | 11 | 5 | 1 | 34 |
| 1.3 а | 1.4 | 9 | 2 | 1,2 | 20 |
| 1.4 а | 1.5 | 10 | 7 | 1,5 | 30 |
| 1.5 а | 1.6 | 8 | 3 | 0,6 | 22 |
| 1.6 а | 1.7 | 10 | 3 | 4 | 28 |
| 1.7 а | 1.8 | 16 | 6 | 6 | 30 |
| 1.8 а | 1.9 | 13 | 9 | 1,2 | 25 |
| 1.9 а | 1.10 | 11 | 12 | 2,5 | 29 |
| 1.10 а | 1.11 | 12 | 8 | 1,6 | 34 |
| 1.11 а | 1.12 | 8 | 15 | 2 | 28 |
| 1.12 а | 1.13 | 12 | 4 | 3 | 36 |
| 1.13 а | 1.14 | 15 | 7 | 6 | 30 |
| 1.14 а | 1.15 | 10 | 9 | 4 | 35 |
| 1.15 а | 1.16 | 12 | 8 | 6 | 32 |
| 1.16 а | 1.17 | 13 | 5 | 1,2 | 22 |
| 1.17 а | 1.18 | 7 | 7 | 2 | 34 |
| 1.18 а | 1.19 | 9 | 9 | 1,3 | 29 |
| 1.19 а | 1.20 | 12 | 7 | 2,2 | 33 |
| 1.20 а | 1.21 | 11 | 4 | 0,8 | 38 |
| 1.21 а | 1.22 | 6 | 10 | 3,5 | 25 |
| 1.22 а | 1.23 | 11 | 8 | 2 | 34 |
| 1.23 а | 1.24 | 9 | 12 | 1 | 20 |
| 1.24 а | 1.25 | 10 | 14 | 3 | 30 |
| 1.25 а | 1.26 | 8 | 15 | 4,5 | 22 |
| 1.26 а | 1.27 | 10 | 17 | 1,2 | 28 |
| 1.27 а | 1.28 | 16 | 6 | 4,2 | 15 |
| 1.28 а | 1.29 | 13 | 7 | 2,5 | 32 |
| 1.29 а | 1.30 | 11 | 8 | 1,5 | 20 |
| 1.30 а | 1.31 | 12 | 6 | 3,5 | 25 |

*Продолжение табл. 1.2*

| Номер задачи | Номер рисунка | $P_1$, кН | $P_2$,кН | $q$, кН/м | $M$, кНм |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 б | 1.2 | 6 | 12 | 3,5 | 20 |
| 1.2 б | 1.3 | 8 | 11 | 1,5 | 18 |
| 1.3 б | 1.4 | 13 | 7 | 2,5 | 30 |
| 1.4 б | 1.5 | 6 | 15 | 4,5 | 15 |
| 1.5 б | 1.6 | 17 | 12 | 1,2 | 28 |
| 1.6 б | 1.7 | 15 | 8 | 4 | 20 |
| 1.7 б | 1.8 | 10 | 14 | 3 | 30 |
| 1.8 б | 1.9 | 12 | 9 | 1 | 20 |
| 1.9 б | 1.10 | 8 | 11 | 2 | 32 |
| 1.10 б | 1.11 | 10 | 6 | 3,5 | 25 |
| 1.11 б | 1.12 | 4 | 11 | 1,2 | 36 |
| 1.12 б | 1.13 | 7 | 12 | 2,2 | 33 |
| 1.13 б | 1.14 | 9 | 9 | 1,3 | 25 |
| 1.14 б | 1.15 | 7 | 7 | 2 | 30 |
| 1.15 б | 1.16 | 5 | 13 | 1,2 | 22 |
| 1.16 б | 1.17 | 8 | 12 | 5 | 32 |
| 1.17 б | 1.18 | 9 | 10 | 4 | 35 |
| 1.18 б | 1.19 | 7 | 15 | 6 | 30 |
| 1.19 б | 1.20 | 4 | 12 | 3 | 36 |
| 1.20 б | 1.21 | 15 | 8 | 2 | 28 |
| 1.21 б | 1.22 | 8 | 12 | 1,6 | 34 |
| 1.22 б | 1.23 | 11 | 10 | 2 | 28 |
| 1.23 б | 1.24 | 9 | 13 | 1,5 | 25 |
| 1.24 б | 1.25 | 6 | 16 | 6 | 30 |
| 1.25 б | 1.26 | 3 | 10 | 4 | 28 |
| 1.26 б | 1.27 | 8 | 3 | 2 | 22 |
| 1.27 б | 1.28 | 7 | 10 | 1,5 | 30 |
| 1.28 б | 1.29 | 9 | 2 | 1,2 | 20 |
| 1.29 б | 1.30 | 5 | 11 | 2 | 15 |
| 1.30 б | 1.31 | 6 | 8 | 3 | 25 |

# 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ

Центром тяжести плоской фигуры называется точка, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum S_i \bar{r}_i}{S}, \tag{2.1}$$

где $S_i$ и $\bar{r}_i$ – площадь и радиус-вектор центра тяжести $i$-той части фигуры; $S = \sum S_i$ – площадь всей фигуры.

Спроектируем векторное равенство (1) на декартовы оси. В результате получим аналитические формулы для определения координат центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \tag{2.2}$$

При определении центра тяжести плоской фигуры часто используют метод отрицательных площадей. Суть этого метода заключается в следующем: фигура разбивается на две группы частей с известными площадями $S_i$ и координатами центров тяжести $x_i$ и $y_i$, одна из которых представляет сплошные тела с положительными площадями, а вторая – выемки с отрицательными площадями. Далее полученные значения координат $x_i$ и $y_i$, а также площадей $S_i$ с учетом их знака подставляются в выражения (2.2) для определения положения центра тяжести фигуры.

***Задание***. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры (варианты 1 – 30), показанной на рис. 2.2 – 2.31 (размеры указаны в сантиметрах).

***Пример 2.1***. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 2.1,*а*.

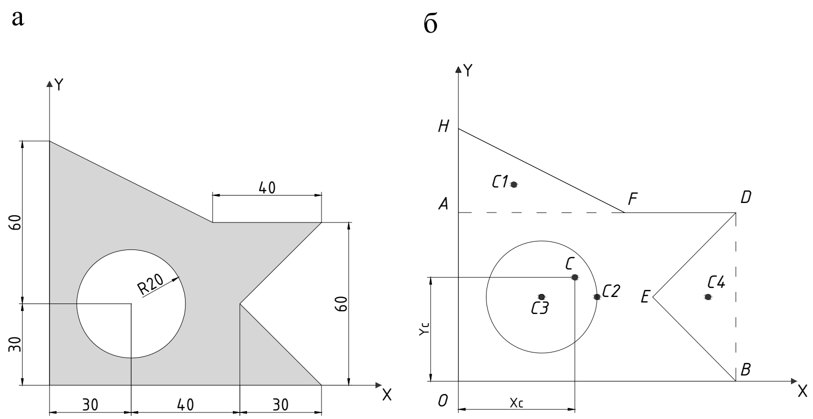



Рис. 2.1

***Решение***. Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам

$$x_c = S_y/S; \quad y_c = S_x/S. \qquad (2.3)$$

Здесь $S_y = \sum S_i x_i$, $S_x = \sum S_i y_i$ – статические моменты фигуры относительно осей y и x.

Чтобы воспользоваться формулами (2.3), применим метод отрицательных площадей. Разобьем фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади $S_i$ и координаты их центров тяжести $x_i$ и $y_i$. В данном случае в качестве таких частей принимаем (рис. 2.1,*б*): треугольник *AFH*; прямоугольник *OADB*, который считаем сплошным; круг; треугольник *BDE*. Площади круга и треугольника *BDE*, вырезанных из прямоугольника, считаем отрицательными.

Все результаты расчетов заносим в табл. 2.1.

*Таблица 2.1*

| Номер элемента | $S_i$, *см*$^2$ | $x_i$, *см* | $y_i$, *см* | $S_{iy} = \Sigma S_i x_i$, *см*$^3$ | $S_{ix} = \Sigma S_i y_i$, *см*$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 900 | 20 | 70 | 18000 | 63000 |
| 2 | 6000 | 50 | 30 | 300000 | 180000 |
| 3 | -1250 | 30 | 30 | -37500 | -37500 |
| 4 | -900 | 90 | 30 | -81000 | -27000 |
| Σ | 4750 | | | 199500 | 178500 |

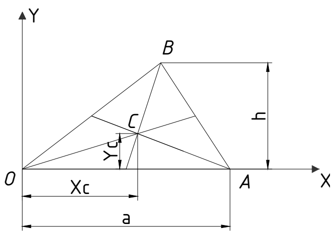
По формулам (2.3) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_c = 199500/4750 = 42{,}0 \text{ } см; \; y_c = 178500/4750 = 37{,}6 \text{ } см.$$

Центр тяжести всей фигуры (точка $C$) показан на рис. 2.1,*б*.

*Примечание.* Площадь и координаты центра тяжести треугольника приведены в таблице 2.2.

*Таблица 2.2*

| Плоская фигура | | Площадь | Координаты центра тяжести |
|---|---|---|---|
| Треуголь-ник |  | $S = ah/2$ | $y_c = h/3$;<br>$x_c = (x_1+x_2+x_3)/3$,<br>где $x_1$, $x_2$, $x_3$ – координаты вершин $O$, $A$, $B$ |

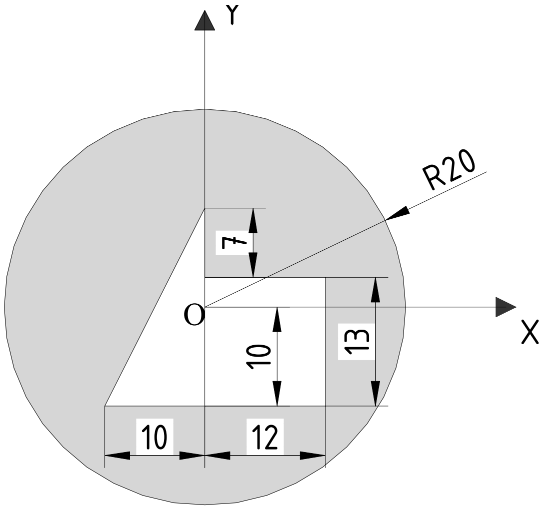



Рис. 2.2

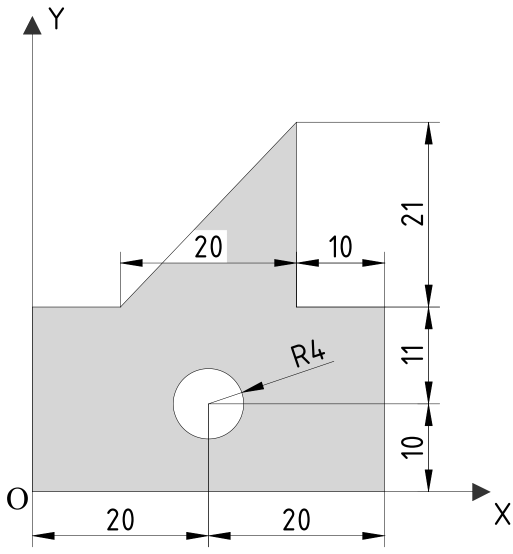



Рис. 2.3

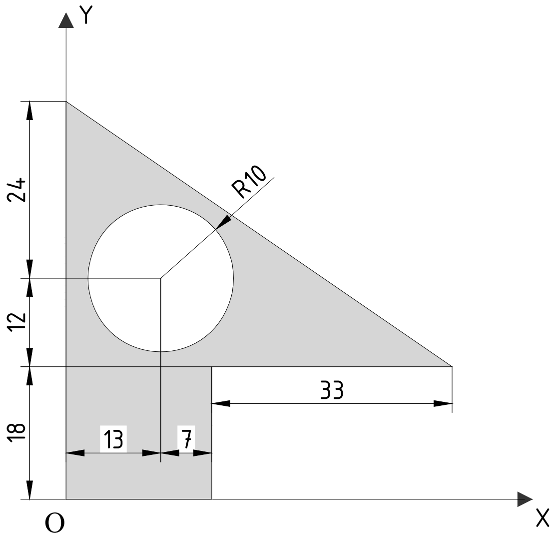



Рис. 2.4

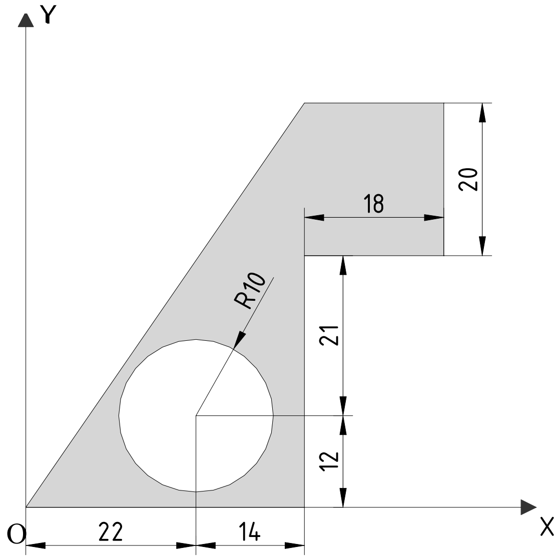



Рис. 2.5

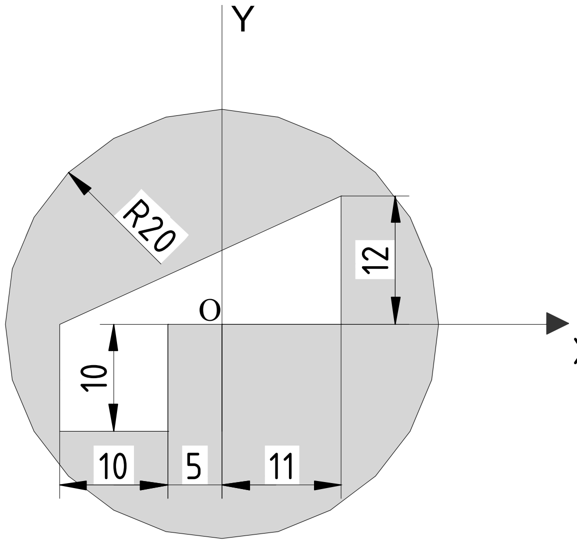



Рис. 2.6

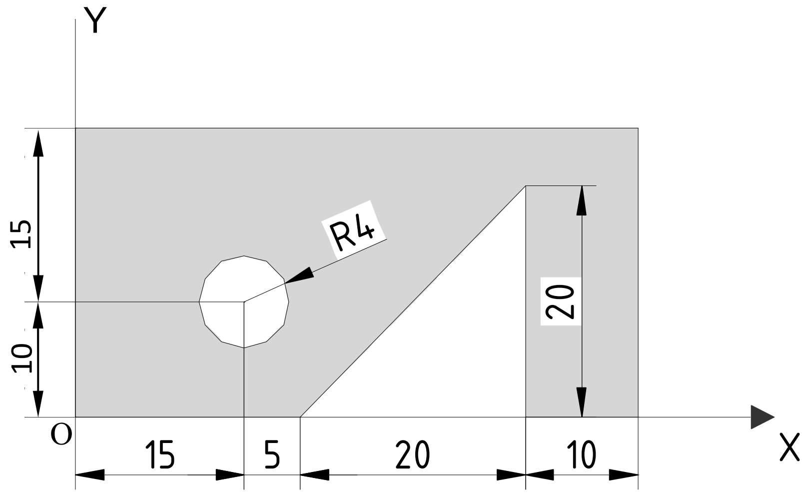



Рис. 2.7

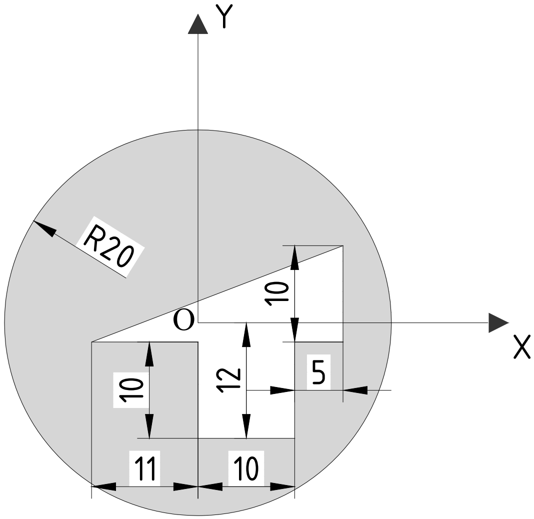



Рис. 2.8

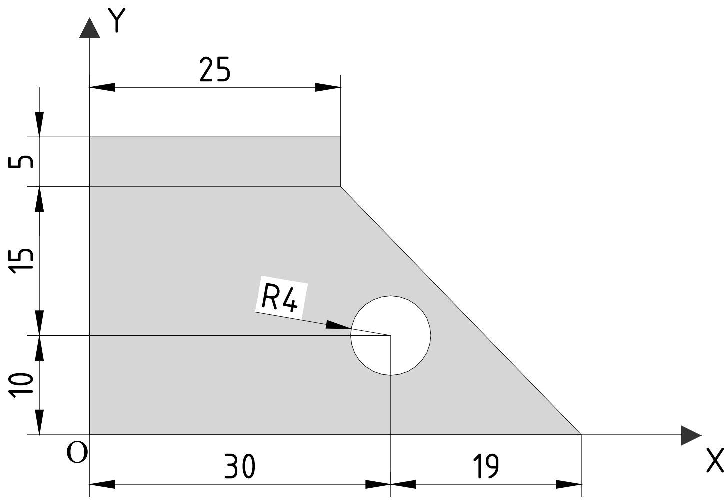



Рис. 2.9

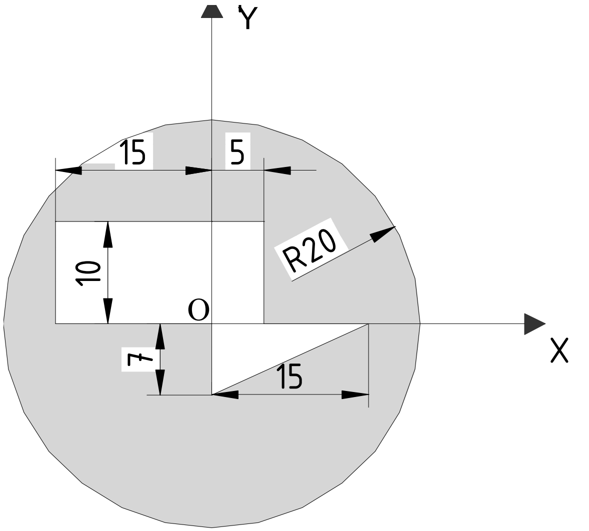



Рис. 2.10

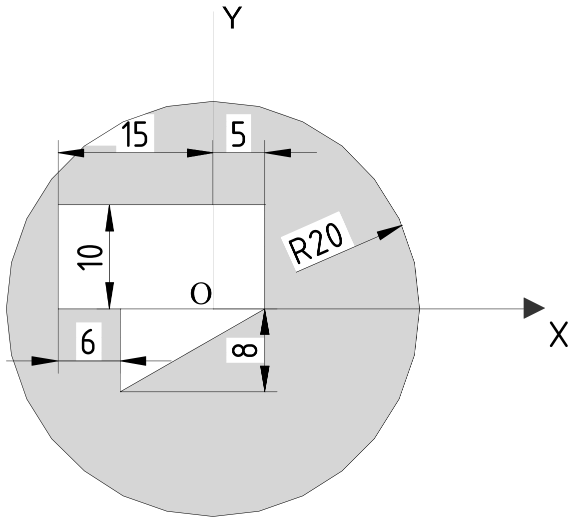



Рис. 2.11

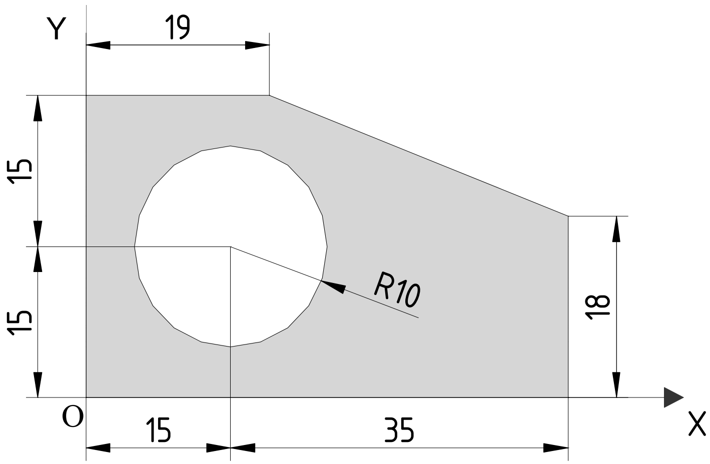



Рис. 2.12

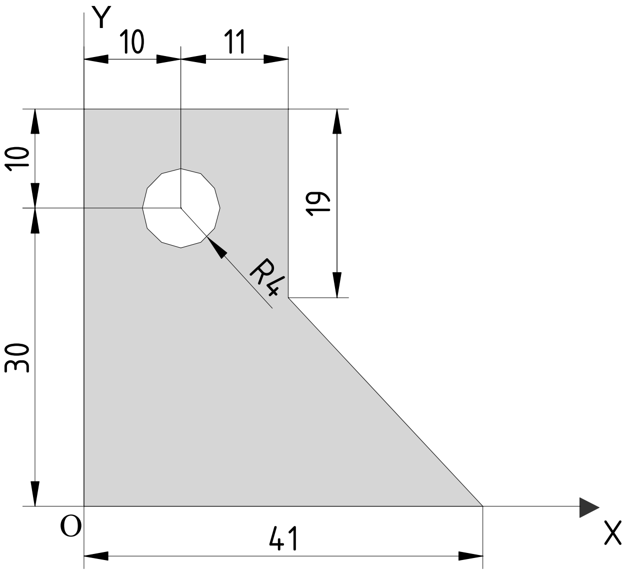



Рис. 2.13

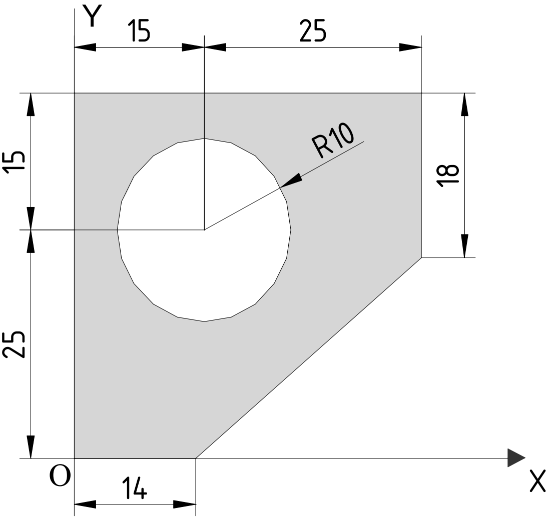



Рис. 2.14

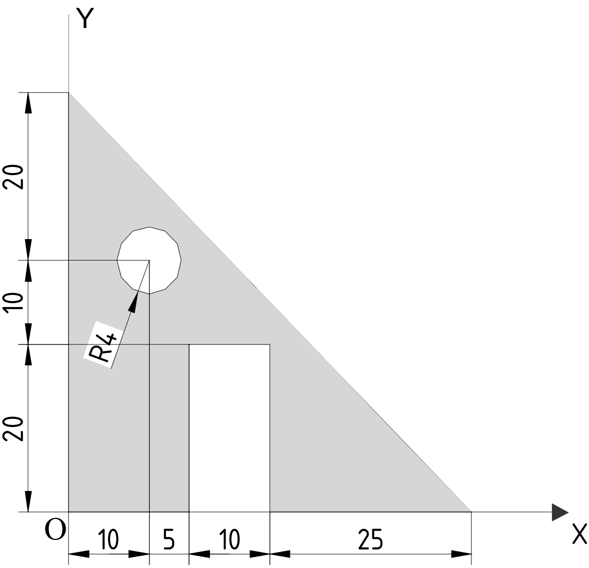



Рис. 2.15

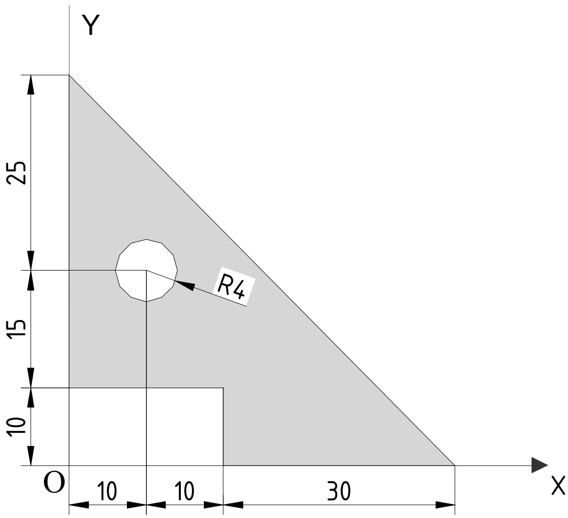



Рис. 2.16

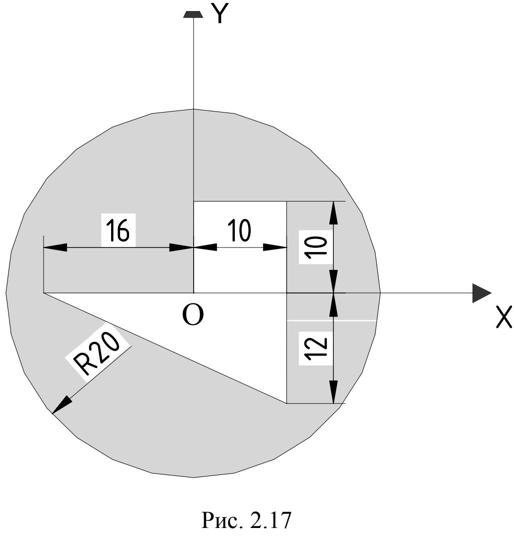



Рис. 2.17

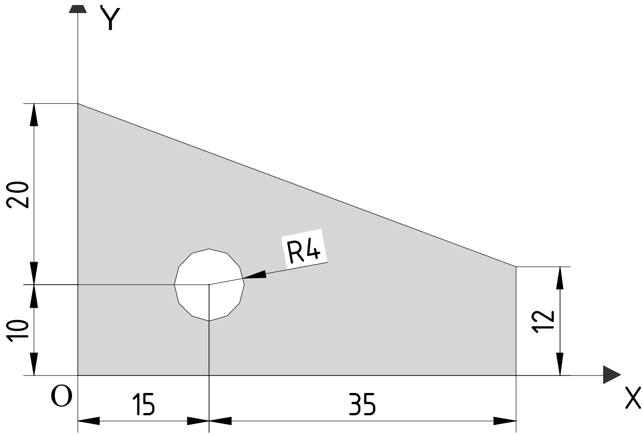



Рис. 2.18

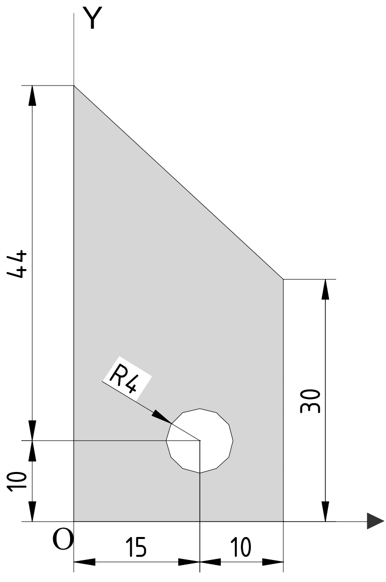



Рис. 2.19

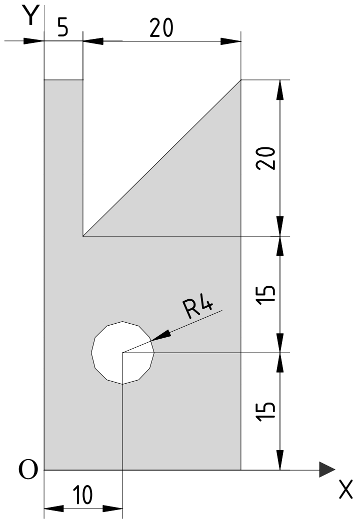



Рис. 2.20

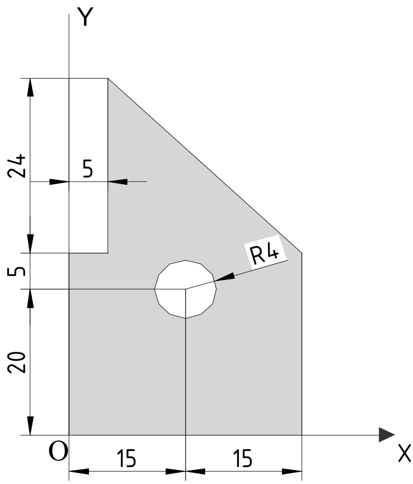



Рис. 2.21

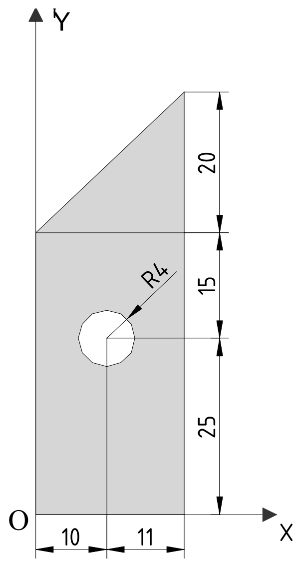



Рис. 2.22

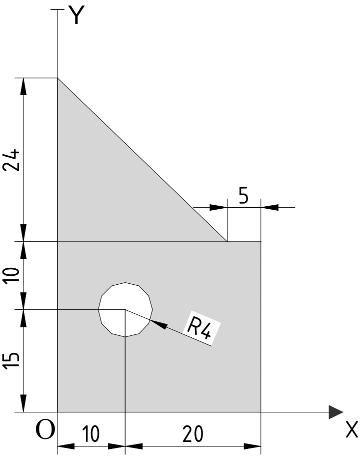



Рис. 2.23

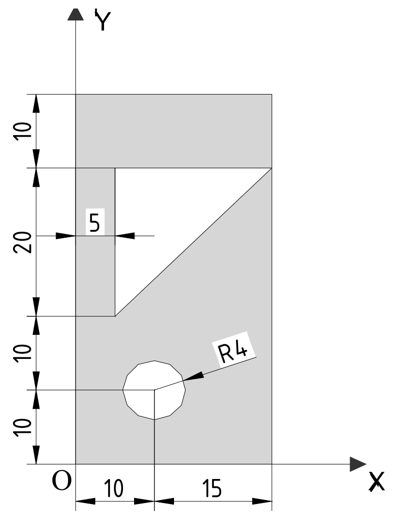


Рис. 2.24

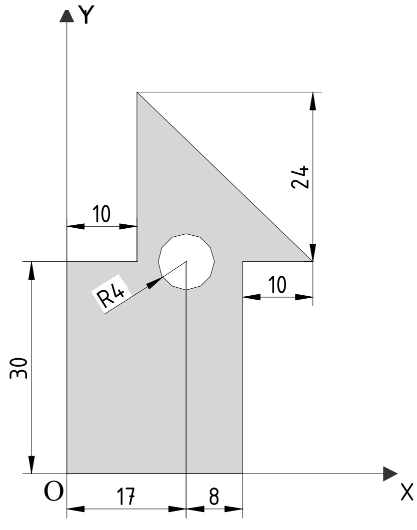


Рис. 2.25

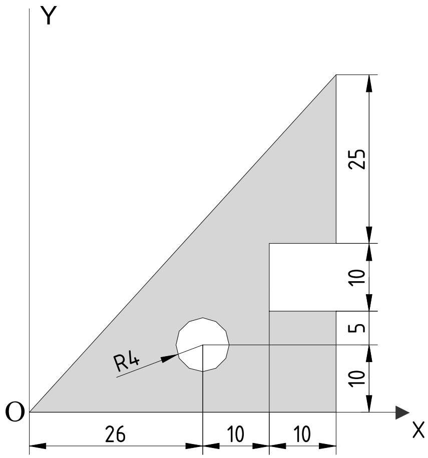



Рис. 2.26

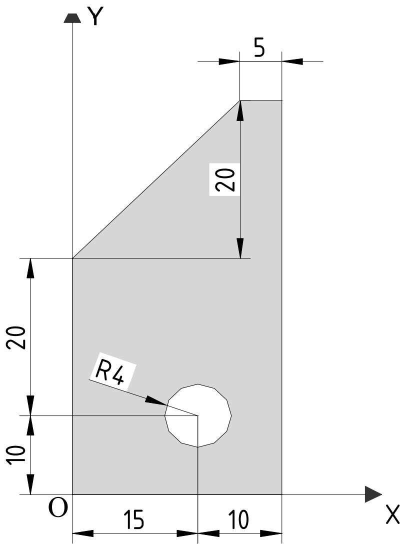



Рис. 2.27

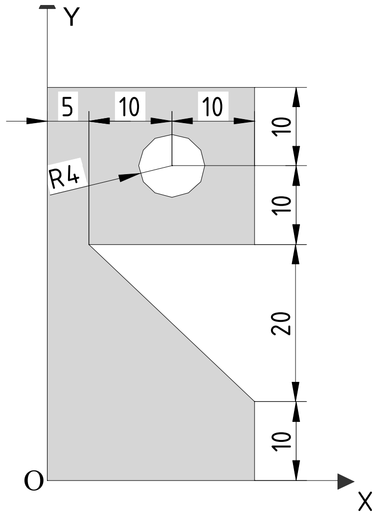



Рис. 2.28

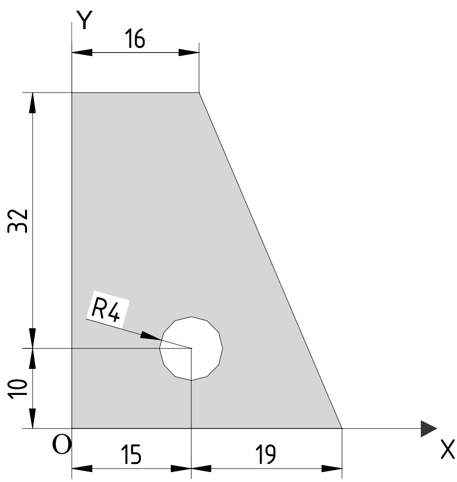



Рис. 2.29

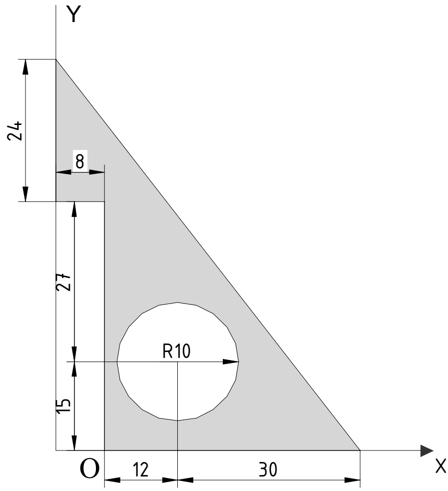



Рис. 2.30

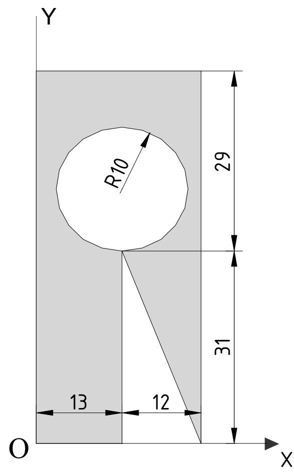



Рис. 2.31

# 3. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

***Задание.*** Движение точки задано координатным способом на плоскости Oxy. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени $t_1$. Векторы $\bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{w}_{1\tau}, \bar{w}_{1n}$ показать на рисунке.

***Пример 3.1.*** Движение точки задано уравнениями $x = 6\sin t,\ y = 4\cos 2t;\ t_1 = 5\pi/4$ с.

***Решение***.

*А*. Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = x/6 \quad , \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t\,.$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2\,.$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos 2t \le 1$ следует, что $-6 \le x \le 6$, $-4 \le y \le 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 3.1.

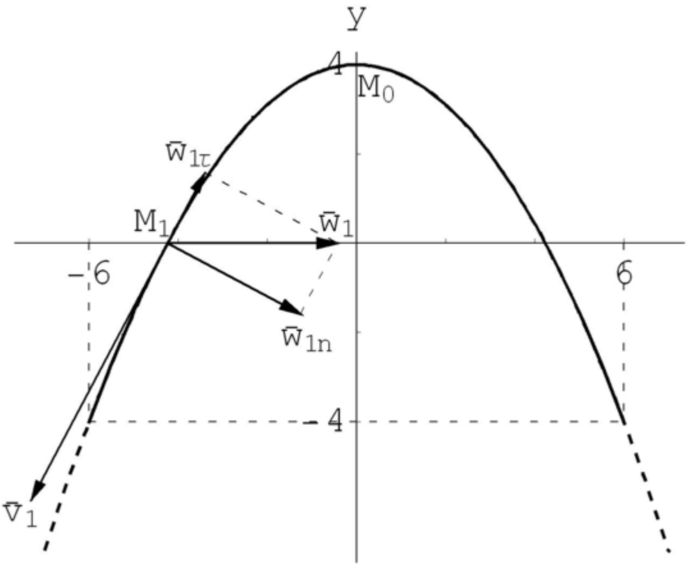



Рис. 3.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории $M_0$ с координатами (при $t_0 = 0$) $x_0 = 0$, $y_0 = 4$.

*В*. Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x = \dot{x} = 6\cos t,\ v_y = \dot{y} = -8\sin 2t,$$

$$w_x = \ddot{x} = -6\sin t,\ w_y = -16\cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}\ ,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36\sin^2 t + 256\cos^2 2t}\ .$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-36\sin t\cos t + 128\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}}\ .$$

*C*. Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t = t_1 = 5\pi/4$ с имеем координаты точки $M_1$:

$$x_1 = 6\sin\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} = -4{,}24 \text{ м},\ y_1 = 4\cos\frac{5\pi}{2} = 0\,.$$

Следовательно, точка $M_1$ находится на оси абсцисс (рис. 2.1). По формулам предыдущего пункта находим:

$$v_1 = \sqrt{36\cdot 0{,}5 + 64} = \sqrt{82} = 9{,}06 \text{ м/с},\ v_x = 6\cos\frac{5\pi}{4} < 0\ .$$

Последнее означает, что вектор скорости $\overline{v}_1$ направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_x = -6\sin\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ м/с}^2,\ w_y = -16\cos\frac{5\pi}{2} = 0,\ w_1 = 4{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{w}_1$ направлен вдоль оси *Ox* вправо. Далее:

$$w_{1\tau} = \frac{-36\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0}{9{,}06} = -1{,}99 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{1n} = \sqrt{w_1^2 - w_{1\tau}^2} = \sqrt{(4{,}24)^2 - (1{,}99)^2} = 3{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{w_{1n}} = \frac{82}{3{,}75} = 21{,}9 \text{ м}.$$

**Задачи 1 – 30:** уравнения движения и момент времени $t_1$ указаны в табл. 3.1.

*Таблица 3.1*

| № задачи | $x$, м | $y$, м | $t_1$,с | № задачи | $x$, м | $y$, м | $t_1$,с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $4\cos t$ | $\sin t$ | $3\pi/4$ | 16 | $8\sqrt{2}\cos t$ | $12\sqrt{2}\sin t$ | $3\pi/4$ |
| 2 | $4e^{-t}$ | $3e^{t}$ | 0 | 17 | $4e^{-t}$ | $8e^{t}$ | 0 |
| 3 | $4\sqrt{2}\sin t$ | $3\cos 2t$ | $3\pi/4$ | 18 | $3\sqrt{2}\cos t$ | $12\cos 2t$ | $\pi/4$ |
| 4 | $2\sin t$ | $8\cos t$ | $3\pi/4$ | 19 | $4\sqrt{2}\sin t$ | $3\sqrt{2}\cos t$ | $5\pi/4$ |
| 5 | $8t$ | $12e^{-t}$ | 0 | 20 | $2t$ | $3e^{-t}$ | 1 |
| 6 | $2t$ | $4\sin t$ | $\pi/6$ | 21 | $4\sqrt{2}\cos t$ | $3\cos^2 t$ | $3\pi/4$ |
| 7 | $2\cos^2 t$ | $7\sin 2t$ | $\pi/8$ | 22 | $5\sqrt{2}\cos t$ | $12\sqrt{2}\sin t$ | $5\pi/4$ |
| 8 | $5e^{t}$ | $4e^{-t}$ | 0 | 23 | $4\sqrt{2}\cos t$ | $3\cos^2 t$ | $3\pi/4$ |
| 9 | $t$ | $2\sin t$ | $5\pi/6$ | 24 | $8\sqrt{2}\sin t$ | $6\cos^2 t$ | $5\pi/4$ |
| 10 | $3\sqrt{2}\cos t$ | $5\sqrt{2}\sin t$ | $5\pi/4$ | 25 | $30\sqrt{2}\sin t$ | $16\sqrt{2}\cos t$ | $3\pi/4$ |
| 11 | $2t$ | $4e^{t}$ | 0 | 26 | $2t$ | $4\cos t$ | $2\pi/3$ |
| 12 | $\sqrt{2}\sin t$ | $2\cos 2t$ | $5\pi/4$ | 27 | $2\sqrt{2}\cos t$ | $2\cos 2t$ | $7\pi/4$ |
| 13 | $6\sqrt{2}\sin t$ | $5\sqrt{2}\cos t$ | $7\pi/4$ | 28 | $2\cos t$ | $t$ | $\pi/3$ |
| 14 | $3e^{t}$ | $4e^{-t}$ | 0 | 29 | $3\sqrt{2}\cos t$ | $4\cos^2 t$ | $\pi/4$ |
| 15 | $8\sqrt{2}\sin t$ | $5\cos^2 t$ | $\pi/4$ | 30 | $10\sqrt{2}\sin t$ | $4\cos 2t$ | $3\pi/4$ |

# 4. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

***Задание.*** Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени *t* или в заданном положении.

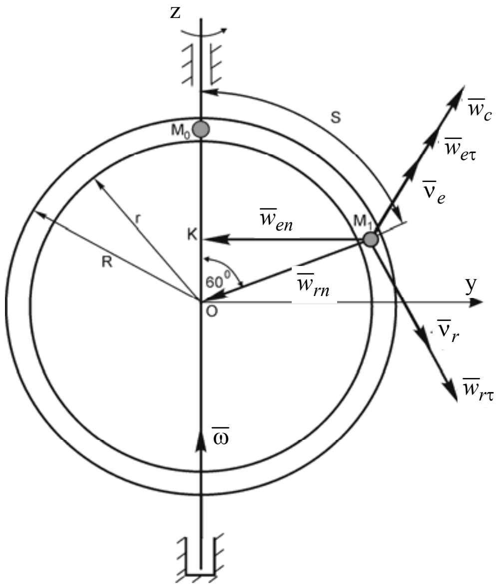



Рис. 4.1

***Пример 4.1.*** Точка движется внутри кольца радиуса 0,2 м по закону $s = 0{,}05\pi\, t^2 \big/ 3$ м (см. рис. 3.1). В свою очередь, кольцо вращается вокруг своего диаметра в направлении, указанном на рисунке, с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с$^2$.

В начальный момент кольцо находилось в покое, $t_1 = 2$ с.

***Решение***. Проанализируем движение. Движение точки внутри кольца – относительное; движение, которое сообщает точке вращающееся кольцо, – переносное; движение точки относительно неподвижной Земли – абсолютное. Найдем положение точки на окружности в заданный момент времени, подставив в формулу относительного движения $t_1 = 2$ с: $s_1 = 0{,}05\pi \cdot 2^2 \big/ 3 = 0{,}2\pi / 3$ м.

За 2 с точка в относительном движении описала дугу $0{,}2\pi/3$ м которой соответствует центральный угол $M_0OM_1 = M_0M_1/R = 0{,}2\pi/3 \cdot 0{,}2 = \pi/3$ рад, или 60°.

Абсолютную скорость точки $M$ найдем по теореме сложения скоростей $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, где $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ – соответственно относительная и переносная скорости точки.

Относительная скорость $v_r = ds/dt = 0{,}1\pi t/3$ м/с. В момент времени $t_1 = 2$ с $v_r = 0{,}2\pi/3 = 0{,}21$ м/с. Эта скорость направлена по касательной к окружности кольца.

Переносная скорость $v_e = h\omega$, где $h$ – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость кольца.

Так как вращение по условию равнопеременное $(\varepsilon = const)$, то угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t_1$, т.к. $\omega_0 = 0$.

Тогда $\omega = 0{,}5 \cdot 2 = 1$ рад/с. В свою очередь, $h = M_1K = OM_1 \sin 60° = 0{,}2\sqrt{3}/2 = 0{,}1\sqrt{3}$ м.

Это дает $v_e = 0{,}1\sqrt{3} \cdot 1 = 0{,}17$ м/с.

Переносная скорость перпендикулярна плоскости кольца и направлена от нас. Таким образом, $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, и модуль абсолютной скорости можно вычислить по теореме Пифагора: $v = \sqrt{v_r^2 + v_в^2} = \sqrt{0{,}21^2 + 0{,}17^2} = \sqrt{0{,}74} \approx 0{,}27$ м/с.

Абсолютное ускорение найдем по теореме Кориолиса

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c, \tag{4.1}$$

где $\bar{w}_r$, $\bar{w}_e$ и $\bar{w}_c$ – соответственно относительное, переносное ускорение и ускорение Кориолиса.

Относительное и переносное ускорения можно разложить на составляющие по касательным и нормалям к соответствующим траекториям (относительная и переносная траектории – окружности радиуса $R$ с центром в точке $O$), т.е. $\bar{w}_r = \bar{w}_{rn} + \bar{w}_{r\tau}$, $\bar{w}_e = \bar{w}_{en} + \bar{w}_{e\tau}$.

Тогда равенство (4.1) примет вид:

$$\overline{w} = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau} + \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau} + \overline{w}_c. \qquad (4.2)$$

Нормальное относительное ускорение $w_{rn} = v_r^2 / R = 0{,}21^2 / 0{,}2 = 0{,}22$ м/с$^2$, вектор $\overline{w}_{rn}$ направлен по радиусу $M_1 O$ к центру.

Касательное относительное ускорение $w_{r\tau} = d^2 s / dt^2 = 0{,}1\pi/3 = 0{,}1$ м/с$^2$, вектор $\overline{w}_{r\tau}$ направлен по касательной к окружности кольца, как показано на рис. 4.1.

Нормальное переносное ускорение $w_{en} = h\omega^2 = 0{,}1\sqrt{3} \cdot 1^2 = 0{,}17$ м/с$^2$, вектор $\overline{w}_{en}$ направлен по $M_1 K$ к оси вращения. Касательное переносное ускорение $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0{,}1\sqrt{3} \cdot 0{,}5 = 0{,}087$ м/с$^2$, вектор $\overline{w}_{e\tau}$ перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Ускорение Кориолиса $\overline{w_c} = 2\overline{\omega} \times \overline{v_r}$. Модуль этого ускорения $w_c = 2\omega\, v_r \sin\left(\overline{\omega} \,^\wedge\, \overline{v}_r\right)$. Вектор $\overline{\omega}$ направлен по оси вращения вверх, поэтому $\left(\overline{\omega}, \,^\wedge\, \overline{v}_r\right) = 150°$. Тогда $w_c = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}5 = 0{,}21$ м/с$^2$, вектор $\overline{w}_c$ перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Введем систему координат, связанную с вращающимся кольцом, причем плоскость *yOz* совместим с плоскостью кольца, ось Oz направим по оси вращения, а ось *Ox* – перпендикулярно плоскости кольца, к нам. Спроектируем теперь равенство (4.2) на выбранные оси:

$$w_x = -w_{e\tau} - w_c = -0{,}087 - 0{,}21 \approx -0{,}3 \text{ м/с}^2; \quad w_y = -w_{rn}\cos 30° +$$

$$+ w_{r\tau}\cos 60° - w_{en} = -0{,}22\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}1 \cdot 0{,}5 - 0{,}173 = -0{,}31 \text{ м/с}^2;$$

$$w_z = -w_{rn}\cos 60° - w_{r\tau}\cos 30° = -0{,}22 \cdot 0{,}5 - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-0{,}3)^2 + (-0{,}31)^2 + (-0{,}2)^2} = 0{,}48 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 4.1.** Горизонтальная платформа радиусом 0,5 м вращается равноускоренно с угловым ускорением 0,25 рад/с$^2$ из состояния покоя. В момент начала вращения из положения $A$ выходит из состояния покоя движется равноускоренно в направлении $AB$ с относительным ускорением $w_r = 0{,}05$ м/с$^2$; $t_1 = 2$ с (рис. 4.2).

**Задача 4.2.** Прямоугольная пластинка $ABCD$ вращается вокруг стороны AB по закону $\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,t^2$ рад. Вдоль $EF$ ($EF \perp AB$) движется точка по закону $s = t^4$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.3).

**Задача 4.3.** Диск радиусом 1 *м* вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с$^2$. По ободу диска в сторону, противоположную направлению вращения, движется точка $M$ по закону $s = 0{,}2t^2$ м; $t_1 = 5$ с (рис. 4.4).

**Задача 4.4.** Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 1 м, вращается вокруг вершины О равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением 3 рад/с$^2$. В момент начала вращения из вершины $A$ выходит точка с начальной относительной скоростью 2,5 м/с и движется по катету $AB$ с постоянным ускорением 3 м/с$^2$; $t_1 = 1/3$ с (рис. 4.5).

**Задача 4.5.** Диск вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. По радиусу диска движется точка по закону $S = \left(1 + t^2\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.6).

**Задача 4.6.** Решить задачу 3.3 при условии, что точка движется в сторону вращения, а $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$, $s = t^2$ м, $t_1 = 2/3$ с (рис. 4.4).

**Задача 4.7.** Равнобедренный прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. Точка движется по гипотенузе согласно закону $s = \sqrt{5}\left(1 + t^2\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.7).

**Задача 4.8.** Диск радиусом $R = \sqrt{3}/3$ м и вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с$^2$. По стороне $AB$ вписанного равностороннего треугольника движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2$ м/с$^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она придет в положение *B*, если в этот момент $\omega = 6$ рад/с и $v_r = 5\sqrt{3}/12$ м/с (рис. 4.8).

**Задача 4.9.** Диск вращается равноускоренно из состояния покоя вокруг своего диаметра с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. По радиусу диска из центра движется точка по закону $s = \left(1 + t^2\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.9).

**Задача 4.10.** Квадрат со стороной 1 м равноускоренно вращается вокруг своей вершины *O* с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с$^2$. По стороне *AB* движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1$ м/с$^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины *B*, если в этот момент $v_r = 0{,}5$ м/с, а $\omega = 2$ рад/с (рис. 4.10).

**Задача 4.11.**Круглая пластинка вращается вокруг своего диаметра по закону $\varphi = \left(7t^2 - 11t\right)$ рад. По радиусу *OA* движется точка по закону $s = \sqrt{2}\, t^2$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.11).

**Задача 4.12.** Равносторонний треугольник со стороной 1 м вращается вокруг своей вершины *O* по закону $\varphi = \sqrt{3}\left(t^2 + 2t\right)$ рад. По стороне *AB* движется точка по закону $s = \left(7/4\, t + 5/2\, t^2\right)$ м; $t_1 = 0$ (рис. 4.12).

**Задача 4.13.** Полая трубка вращается равноускоренно из состояния покоя в плоскости чертежа с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. Внутри трубки движется точка по закону $s = \left(1 + t^2\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.13).

**Задача 4.14.** Квадрат со стороной 1 м вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с$^2$ вокруг центра *O*. По стороне *AB* движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1$ м/с$^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет положения В, если в момент $\omega = 2$ рад/с, момент $v_r = 1$ м/с (рис. 4.14).

**Задача 4.15.** Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = \left(2t^2 - 7t\right)$ рад вокруг оси *O*. К центру по радиусу диска движется точка по закону $s = 0{,}1\,t^2$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.15).

**Задача 4.16.** Квадрат вращается вокруг своего центра *O* по закону $\varphi = \left(16t^2 - 28t\right)$ рад. По диагонали квадрата движется точка по закону $s = t^2$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.16).

**Задача 4.17.** Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен $\sqrt{2}$ м вращается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с$^2$ вокруг вершины *O*. По гипотенузе движется точка по закону $s = \left(t^2 - t + 2\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.17).

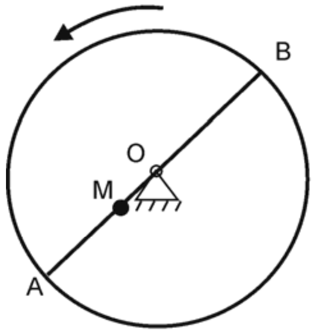



Рис. 4.2

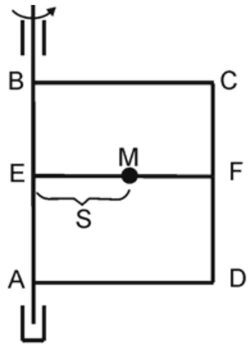



Рис. 4.3

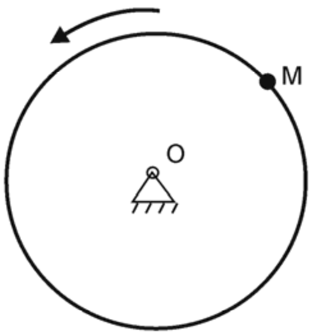



Рис. 4.4

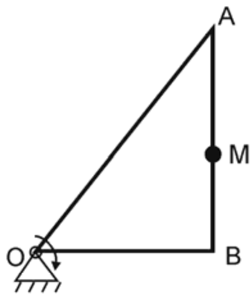



Рис. 4.5

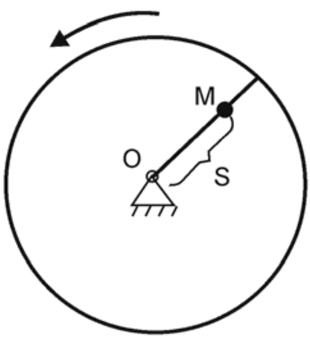



Рис. 4.6

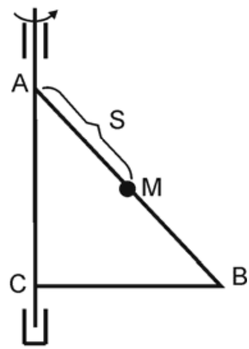



Рис. 4.7

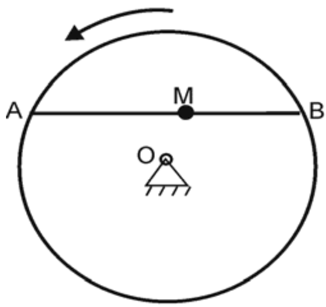



Рис. 4.8

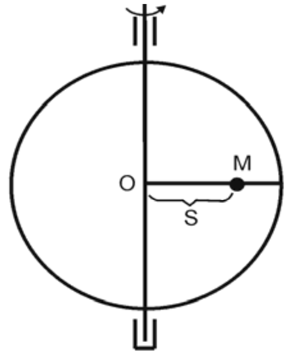



Рис. 4.9

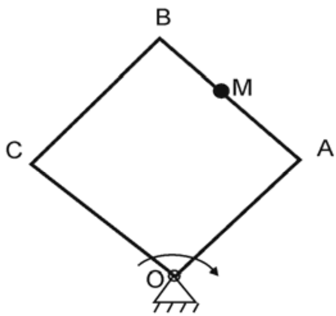



Рис. 4.10

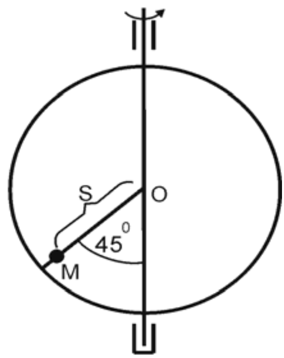



Рис. 4.11

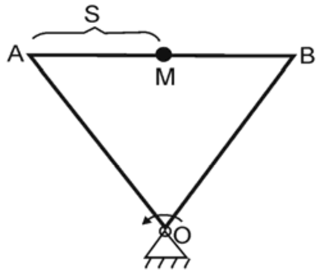



Рис. 4.12

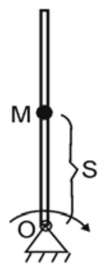



Рис. 4.13

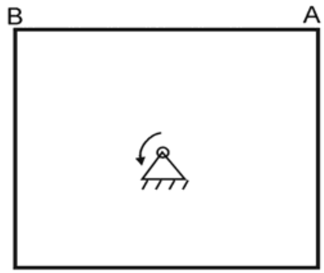



Рис. 4.14

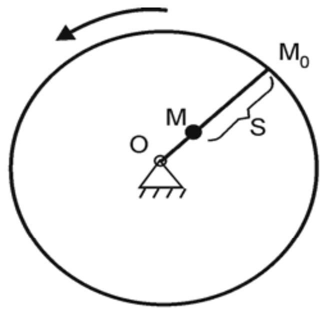



Рис. 4.15

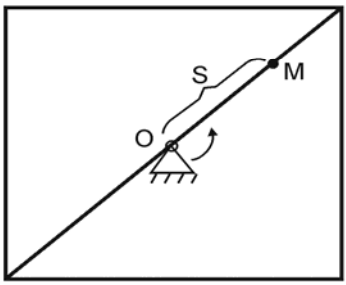



Рис. 4.16

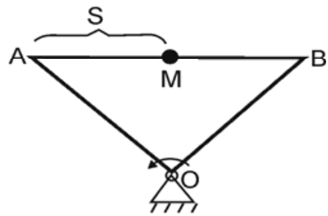



Рис. 4.17

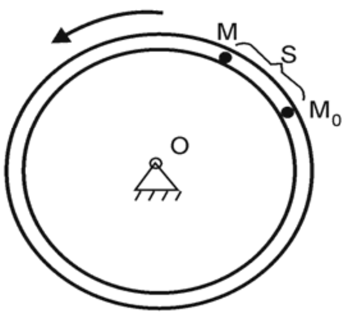



Рис. 4.18

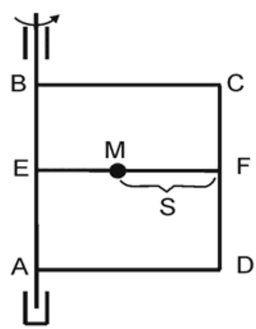



Рис.4.19

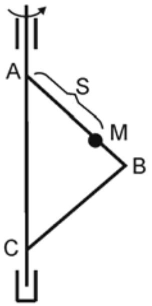



Рис. 4.20

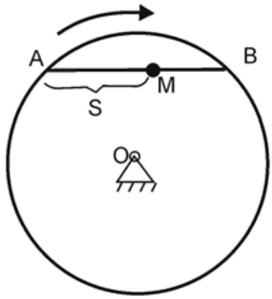



Рис. 4.21

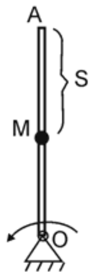



Рис.4.22

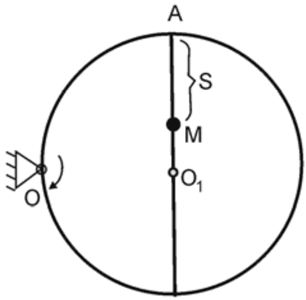



Рис.4.23

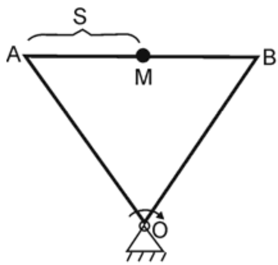



Рис. 4.24

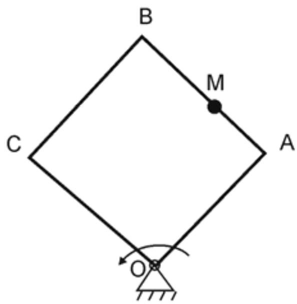



Рис. 4.25

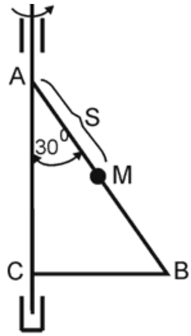



Рис. 4.26

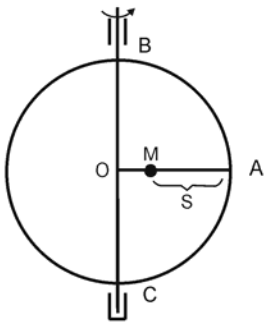



Рис. 4.27

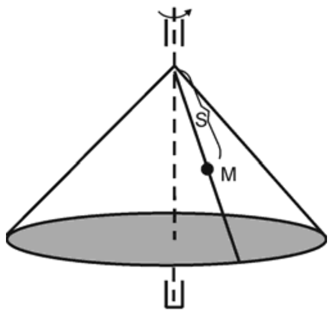



Рис. 4.28

**Задача 4.18.** Полное кольцо радиусом $R$ = 1 м вращается без начальной угловой скорости вокруг оси $O$ с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с$^2$. Внутри кольца движется точка по закону $s = \left(t^2 - t + 1\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.18).

**Задача 4.19.** Прямоугольная пластинка $ABCD$ вращается вокруг стороны $AB$ по закону $\varphi = \left(2t^2 - 7t\right)$ рад. Вдоль $FE$ ($FE \perp AB$) движется точка по закону $s = 0{,}1t^2$ *м*. Ширина пластинки $BC$ = 0,6 м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.19).

**Задача 4.20.** Равнобедренный треугольник вращается вокруг гипотенузы $AC$ без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с$^2$. По катету $AB$ движется точка по закону $s = \sqrt{2}\left(5t^2 - 3t + 8\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.20).

**Задача 4.21.** Круглый диск радиусом $R = \sqrt{3}/3$ м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с$^2$. По стороне $AB$ вписанного шестиугольника движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3t^2 - 1\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.21).

**Задача 4.22.** Решить задачу 4.18, предполагая, что точка движется в сторону, противоположную направлению вращения; $\varepsilon = 2$ рад/с$^2$; $R$ = 1 м; $s = t^2$ м (рис. 4.18).

**Задача 4.23.** Кривошип $OA$ длиной 0,6 м вращается по закону $\varphi = \left(2t^2 - 7t\right)$ рад. Вдоль кривошипа от $A$ к $O$ движется точка по закону $s = 0{,}4t^2$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.22).

**Задача 4.24.** Круглый диск радиусом 1,5 м вращается в плоскости чертежа вокруг оси $O$ по закону $\varphi = \left(t^2 - t\right)$ рад. По диаметру $AB$ движется точка по закону $s = t^2$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.23).

**Задача 4.25.** Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}/3$ м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с$^2$. По стороне $AB$ движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3t^2 - 1\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.24).

**Задача 4.26.** Квадрат со стороной 1 м равноускоренно вращается вокруг своей вершины O с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с$^2$. По стороне $AB$ движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2$ м/с$^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины $B$, если в этот момент $v_r = 1$ м/с, а $\omega = 2$ рад/с (рис. 4.25).

**Задача 4.27.** Прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета $AC$ по закону $\varphi = 0{,}1\left(t^2 - 8t\right)$ рад. По гипотенузе $AB$ по закону $s = \left(1 + t^2\right)$ м движется точка; $t_1 = 1$ с (рис. 4.26).

**Задача 4.28.** Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = \left(2t^2 - 7t\right)$ рад вокруг своего диаметра. По радиусу $OA$ диска ($AO \perp BC$) от A к центру движется точка по закону $s = 0{,}1t^2$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.27).

**Задача 4.29.** Конус, имеющий прямой угол при вершине, вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = \left(t^2 + 6t\right)/8$ рад. По образующей конуса движется точка по закону $s = \sqrt{2}\left(2t^2 - 3t + 5\right)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.28).

**Задача 4.30.** Решить задачу 4.24 в предположении, что направление вращения диска изменилось на противоположное (рис. 4.23).

# 5. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

***Задание***. Найти для заданного механизма скорости точек $A$, $B$ и $M$.

***Пример 5.1***. Диск радиуса $R$ катится без скольжения по плоскости. Центр его $A$ движется по закону $s = f(t)$. Скорость точек $A$, $B$ и $M$ найти для момента $t_1$ (рис. 5.1).Пусть
$R = 0,12$ м;
$s = (0,24t - 0,01t^3)$ м;
АМ = 0,08 м; $\beta = 5\pi/3$;
$t_1 = 2$ с.

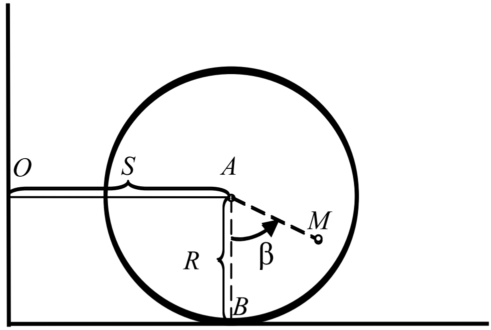



Рис. 5.1

***Решение***.

Скорость точки $A$ $v_A = \left|\dot{S}\right| = \left|0,24 - 0,03t^2\right|$. При подстановке в производную $\dot{S}$ величины заданного момента времени получаем положительную величину. Значит, знак абсолютной величины можно снять, а вектор $\overline{v}_A$ направлен в сторону увеличения координаты $S$, т.е. вправо (рис. 5.2); модуль этой скорости $v_A = 0,24 - 0,03 \cdot 2^2 = 0,12$ м/с.

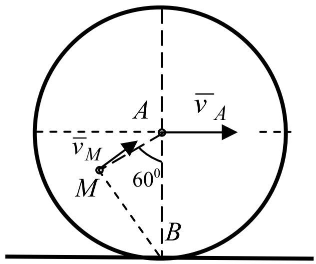



Рис. 5.2

Мгновенный центр скоростей диска совпадает с точкой $B$, так как она находится в контакте с неподвижной плоскостью. Таким образом, $v_B = 0$. Для нахождения угловой скорости воспользуемся формулой $v_A = BA \cdot \omega$, откуда $\omega = v_A / R = 0,12 / 0,12 = 1$ рад/с.

Теперь не трудно найти скорость точки $M$: $v_M = BM \cdot \omega$. По теореме косинусов $BM = \sqrt{AM^2 + R^2 - 2 \cdot AM \cdot R \cdot \cos 60°} =$
$= 10^{-2}\sqrt{64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 0{,}5} = 0{,}04\sqrt{7}$ м. Окончательно
$v_M = 0{,}04\sqrt{7} \cdot 1 = 0{,}1$ м/с.

***Пример 5.2***. Шестеренка I радиуса r приводится в движение кривошипом $OA$, вращающимся вокруг оси $O$ неподвижной шестеренки II радиуса $R$ (рис. 5.3). Пусть угловая скорость кривошипа в данный момент $\omega_O = 1/3$ рад/с; $r = 0{,}3$ м; $R = 0{,}6$ м; $AM = 0{,}1\sqrt{3}$ м; $\beta = 7\pi/6$; кривошип вращается равноускоренно.

***Решение***. Так как точка $A$ принадлежит кривошипу, то скорость ее $v_A = (R + r)\omega_O = (0{,}6 + 0{,}3)/3 = 0{,}3$ м/с. Вектор $\bar{v}_A$ направлен в соответствии с направлением вращения кривошипа так, как показано на рис. 5.4.

Мгновенный центр скоростей совпадает с точкой $B$. Поэтому

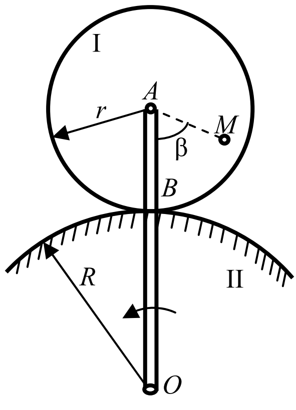


Рис. 5.3

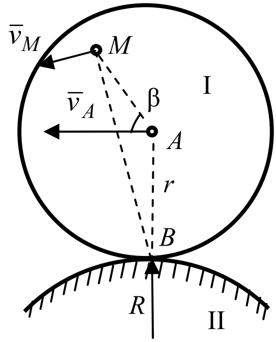


Рис. 5.4

$v_B = 0$. Теперь можно найти угловую скорость шестеренки I. Для скорости точки $A$ можно написать и такое соотношение: $v_A = BA \cdot \omega$. Тогда $r\omega = (R + r)\omega_O$, откуда $\omega = (R + r)\omega_O / r =$
$= (0{,}6 + 0{,}3) \cdot (1/3) / 0{,}3 = 1$ рад/с. Следовательно $v_A = 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}3$ м/с.

Теперь найдем расстояние $BM = \sqrt{AM^2 + r^2 - 2 \cdot AM \cdot r \cdot \cos 150°} = 0{,}1\sqrt{3 + 9 + 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$= 0{,}1\sqrt{21} \cdot 1 = 0{,}45$ м. Теперь не трудно найти скорость точки $M$: $v_M = 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}45$ м/с.

***Пример 5.3***. Кривошип $OA$ нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис. 5.5) имеет в данный момент угловую скорость $\omega_O$. Пусть $r = 0{,}2$ м; $AB = l = 0{,}6$ м; $h = 0{,}2\sqrt{2}$ м; $AM = 0{,}4$ м; $\omega_O = 6$ рад/с; $\varphi = \pi / 4$; кривошип вращается равноускоренно.

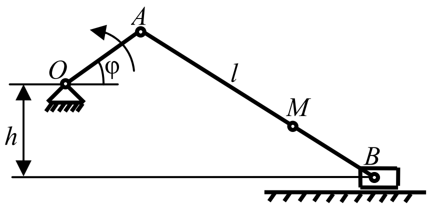



Рис. 5.5

***Решение***. Найдем сначала угол $\psi$ (рис. 5.6). Величину отрезка $AK$ можно подсчитать двумя способами: $AK = r\sin 45° + h$, $AK = l\sin\psi$. Тогда $\sin\psi = (r\sin 45° + h) / l = \left(10\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\right) / 0{,}6 =$ $= \sqrt{2} / 2$; $\psi = 45°$.

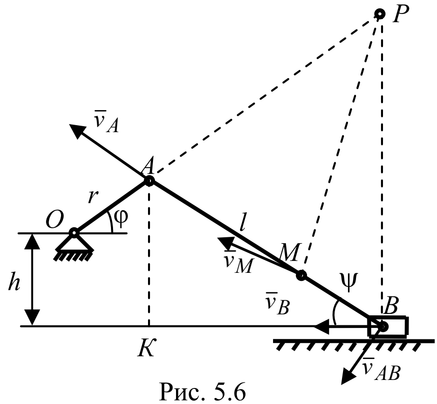


Рис. 5.6

Скорость точки $A$ $v_A = r\omega_O = 0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$ м/с. Вектор скорости точки $B$ направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей шатуна находится в точке $P$ на пересечении перпендикуляров к векторам $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, проходящих соответственно через точки $A$ и $B$.

Нетрудно найти расстояние $PA$. Действительно, треугольник $ABP$ – прямоугольный и равнобедренный (углы при основании равны 45°). Значит, $AP = l = 0{,}6$ м. Для скорости точки $A$ можно записать $v_A = PA \cdot \omega$, откуда угловая скорость шатуна $\omega = r\omega_O / PA = 0{,}2 \cdot 6 / 0{,}6 = 2$ рад/с.

Теперь по формуле $v_B = PB \cdot \omega$ можно определить скорость точки $B$. Заметим, что $PB = l\sqrt{2}$. Следовательно, $v_B = l\sqrt{2}\omega = = 0{,}6\sqrt{2} \cdot 2 = 1{,}2\sqrt{2} = 1{,}7$ м/с.

Шатун вращается по ходу часовой стрелки. Направление вектора $\bar{v}_{AB}$ показано на рис. 5.6.

Для определения скорости точки $M$ необходимо найти расстояние $PM = \sqrt{AP^2 + AM^2} = 20\sqrt{9+4} = 0{,}2\sqrt{13}$ см. Тогда $v_M = PM \cdot \omega = 0{,}2\sqrt{13} \cdot 2 = 0{,}4\sqrt{13} \approx 1{,}44$ м/с.

**Задачи 5.1 – 5.10.** Диск радиуса $R$ (рис. 5.1) катится без скольжения по плоскости (пример 5.1). Задачи решить для момента времени $t_1$. Данные приведены в табл. 5.1.

*Таблица 5.1*

| Номер задачи | $R$, см | $f(t)$, см | $AM$, см | β, рад | $t_1$, с |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | 2 | $7\sqrt{3}t - 3t^2/2$ | 1 | π/3 | $\sqrt{2}$ |
| 5.2 | $\sqrt{3}$ | $3t^2/2 - 2\sqrt{3}t$ | 0,5 | π/6 | $2\sqrt{2}$ |
| 5.3 | $2\sqrt{2}$ | $3t^2 - 2t$ | $\sqrt{3}/2$ | π/4 | 1 |
| 5.4 | 2 | $\sqrt{3}t^2 - 4t$ | 1 | 5π/6 | $\sqrt{3}$ |
| 5.5 | $2\sqrt{2}$ | $3t^2 - 2t$ | 1 | 4π/3 | 1 |
| 5.6 | 2 | $3t^2/2$ | $\sqrt{2}$ | 5π/6 | $2\sqrt{2}$ |
| 5.7 | 2 | $3t^2/2 + \sqrt{3}t$ | $2\sqrt{2}$ | 7π/4 | $2\sqrt{2}$ |
| 5.8 | $\sqrt{3}$ | $t^2\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/2$ | 7π/6 | 1 |
| 5.9 | 2 | $t^2\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 2π/3 | $2\sqrt{2}$ |
| 5.10 | $\sqrt{3}$ | $t^2\sqrt{3}$ | 1 | 3π/4 | 1 |

**Задачи 5.11 – 5.20**. Шестеренка I радиуса $r$ приводится в движение кривошипом $OA$, вращающимся вокруг оси $O$ неподвижной шестеренки II радиуса $R$ (рис. 5.3, пример 5.2). Данные приведены в табл. 5.2.

*Таблица 5.2*

| Номер задачи | $r$, см | $R$, см | $AM$, см | β, рад | $\omega_O$, рад/с |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.11 | 30 | 44 | 10 | π/3 | 5/12 |
| 5.12 | 4 | 60 | 3 | π/2 | 2/3 |
| 5.13 | 20 | 20 | 6 | π/6 | 3/5 |
| 5.14 | 20 | 15 | 15 | 3π/2 | 5/8 |
| 5.15 | 20 | 20/3 | $5\sqrt{2}$ | 3π/6 | 1/4 |
| 5.16 | 10 | 4/3 | $10\sqrt{3}$ | π | $3\sqrt{3}/4$ |
| 5.17 | 30 | 114 | 5 | 5π/4 | $\sqrt{3}/3$ |

*Продолжение табл. 5.2*

| Номер задачи | $r$, см | $R$, см | $AM$, см | β, рад | $\omega_O$ , рад/с |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.18 | $20\sqrt{3}$ | 60 | $10\sqrt{2}$ | 2π/3 | 1/4 |
| 5.19 | 10 | $40\sqrt{3}$ | $5\sqrt{3}$ | 5π/6 | 5/12 |
| 5.20 | 10 | 20 | $10\sqrt{3}$ | π/3 | $\sqrt{3}$ /3 |

**Задачи 5.21 – 5.30**. Кривошип *OA* нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис. 5.5, пример 5.3). Данные приведены в табл. 5.3.

*Таблица 5.3*

| Номер задачи | $r$, см | $l$, см | $h$, см | φ, рад | $\omega_O$ , рад/с | $AM$, см |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.21 | 10 | 80 | $30\sqrt{2}$ | π | 4 | 40 |
| 5.22 | 10 | 70 | 50 | π | 2 | 20 |
| 5.23 | $10\sqrt{3}$ | 40 | $20\sqrt{3}$ | π | 2 | 10 |
| 5.24 | 10 | 60 | $50\sqrt{2}$ | π | 4 | 50 |
| 5.25 | $10\sqrt{2}$ | 100 | $20\sqrt{3}$ | 7π/4 | 6 | 50 |
| 5.26 | $10\sqrt{2}$ | 100 | $40\sqrt{2}$ | 3π/4 | 6 | 40 |
| 5.27 | $10\sqrt{3}$ | 60 | 55 | π/2 | 10 | 20 |
| 5.28 | $10\sqrt{3}$ | 80 | $33\sqrt{2}$ | 0 | 6 | 60 |
| 5.29 | 20 | 80 | $40\sqrt{3}$ | 0 | 4 | 40 |
| 5.30 | $10\sqrt{3}$ | 40 | 30 | 3π/2 | 4 | 20 |

## РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики: Учебник / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. Спб.: Лань, 2009, 736 с.
https://e.lanbook.com/book/29.

2. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / Тарг С. М. - 20-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 2010, 415 с.

3. *Бать М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Учебное пособие. Том 1: Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. Спб.: Лань, 2013, 672 с.
https://e.lanbook.com/book/4551.

4. *Диевский В.А.* Теоретическая механика: учебное пособие. Спб.: Лань, 2016, 336 с.
https://e.lanbook.com/book/71745.

5. *Диевский В.А.* Теоретическая механика. Сборник заданий: учебное пособие. Спб.: Лань, 2018, 192 с.
https://e.lanbook.com/book/98236.

## Содержание