

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Санкт-Петербургский горный университет**

**Кафедра строительства горных предприятий  
и подземных сооружений**

# **МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

*Методические указания к практическим занятиям  
для студентов специальности 21.05.06*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2020**

УДК 624.012.45 (073)

**МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ:** Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Н.А. Беляков, П.Э. Вербило, А.В. Алексеев*. СПб, 2020. 32 с.

В методических указаниях приведены необходимые исходные и справочные данные для решения комплекса практических задач механики сплошной среды применительно к горному массиву, включающего построение паспорта объемной прочности горной породы на основании результатов испытаний и прогноз напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности горных выработок с использованием различных геомеханических моделей его поведения.

Предназначены для студентов специальности 21.05.06 «Нефтегазовые техника и технологии» специализации «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».

Научный редактор проф. *А.Г. Протосеня*

Рецензент канд. техн. наук *М.О. Лебедев* (ОАО «НИПИИ «Ленметрогипротранс»)

© Санкт-Петербургский  
горный университет, 2020

## **МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

***Методические указания к практическим занятиям  
для студентов специальности 21.05.06***

Сост.: *Н.А. Беляков, П.Э. Вербило, А.В. Алексеев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой  
строительства горных предприятий и подземных сооружений

Ответственный за выпуск *Н.А. Беляков*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 29.06.2020. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 1,9. Усл.кр.-отт. 1,9. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 50 экз. Заказ 419.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

## Оглавление

Общие понятия и определения.....	4
1. Построение паспорта объемной прочности горной породы .....	9
2. Расчет прочности и устойчивости обсадной трубы скважины....	14
3. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния массива горных пород в окрестности горной выработки кругового очертания	17
4. Определение размеров зоны предельного состояния вокруг выработки в анизотропном (слоистом) массиве пород.....	21
5. Расчет нормальных тангенциальных напряжений на неровном контуре выработки кругового очертания.....	22
Библиографический список.....	26
Приложение 1 – исходные данные для расчетно-графической работы №1 .....	27
Приложение 2 – исходные данные для расчетно-графической работы №2 .....	29
Приложение 3 – исходные данные для расчетно-графической работы №3 .....	30
Приложение 4 – исходные данные для расчетно-графической работы №4 .....	31
Приложение 5 – исходные данные для расчетно-графической работы №5 .....	32

## ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Напряжение в твердом деформируемом теле** – это интенсивность действующих в твердом теле внутренних сил.

**Напряженное состояние твердого деформируемого тела** – это полное описание напряжений в пределах рассматриваемого объема твердого тела, формирующихся в нем в результате внешнего физического воздействия.

**Деформация в твердом деформируемом теле** – это взаимное перемещение точек твердого деформируемого тела друг относительно друга в результате внешнего физического воздействия.

**Деформированное состояние твердого деформируемого тела** – это полное описание деформаций в пределах рассматриваемого объема твердого тела, формирующихся в нем в результате внешнего физического воздействия.

**Напряженно-деформированное состояние твердого деформируемого тела** – это совокупность полного описания напряжений и соответствующих им деформаций в пределах рассматриваемого объема твердого тела, формирующихся в нем в результате внешнего физического воздействия

Напряжения и деформации в твердом деформируемом теле принято рассматривать в привязке к плоским сечениям этого тела, называемым площадками. Площадка – это произвольное плоское сечение, проведенное через твердое деформируемое тело.

Напряженное и деформированное состояние твердого деформируемого тела в механике сплошных сред принято рассматривать как совокупность напряженного состояния точек, расположенных внутри объема, занимаемого телом. В этом случае вследствие выполнения условия сплошности (континуальности) среды предполагается, что функции распределения напряжений и деформаций для точек внутри рассматриваемого объема твердого деформируемого тела являются непрерывными и не имеют разрывов.

Через каждую точку твердого деформируемого тела можно провести неограниченное количество площадок. Знать напряженное или деформированное состояние в точке твердого деформируемого

тела – это значит знать напряжения или деформации в каждой из таких площадок. Знать напряженное или деформированное состояния твердого деформируемого тела – это значит знать величины напряжений и деформаций во всех площадках, проходящих через все точки в пределах рассматриваемого объема твердого деформируемого тела.

**Полным напряжением в точке твердого деформируемого тела** называется предел отношения равнодействующей внутренних сил к площади площадки, проходящей через точку, при условии стягивания этой площадки в точку.

В механике принято выполнять разложение полных напряжений на две компоненты – нормальные и касательные напряжения.

**Нормальным напряжением в точке твердого деформируемого тела** называется предел отношения нормальной проекции равнодействующей внутренних сил к площади площадки, проходящей через точку, при условии стягивания этой площадки в точку. Очевидно, что нормальное напряжение всегда ориентировано по нормали к площадке, в которой оно действует. Знак нормального напряжения определяет характер его действия – растяжение или сжатие. В геомеханике принято считать положительными напряжения сжатия, а отрицательными – растяжения.

**Касательным напряжением в точке твердого деформируемого тела** называется предел отношения проекции равнодействующей внутренних сил на касательную ось, лежащую в плоскости площадки, к площади площадки, проходящей через точку, при условии стягивания этой площадки в точку. Касательное напряжение действует в плоскости площадки в направлении касательной оси. Знак касательного напряжения определяет направление угловой деформации, которая им вызывается.

**Напряженное состояние в точке твердого деформируемого тела** – это совокупность полных напряжений, действующих в площадках, проходящих через точку твердого деформируемого тела.

Для однозначного задания напряженного состояния в точке твердого деформируемого тела достаточно знать полные

напряжения (или результаты их разложения на нормальные и касательные напряжения) в любых трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку.

**Полные деформации в точке твердого деформируемого тела**, полностью характеризующие ее перемещения в пределах рассматриваемого объема твердого деформируемого тела, принято разделять на две компоненты – линейные и угловые.

**Относительные линейные деформации** – это деформации, характеризующие изменение расстояния между двумя произвольными бесконечно близко расположенными точками твердого деформируемого тела в результате внешнего физического воздействия. Прямая, проведенная едү этими точками, определяет направление линейной деформации. В твердых деформируемых телах линейные деформации определяют изменение линейных размеров тела при деформировании, что в общем случае вызывает изменение объема тела и его формы. Линейные деформации вызываются действием нормальных напряжений. В геомеханике принято положительными считать деформации сжатия, а отрицательными – растяжения.

**Угловые деформации** – это деформации, характеризующие изменение угла между тремя произвольными бесконечно близко расположенными точками твердого деформируемого тела в результате внешнего физического воздействия. Три точки, между которыми измеряется угол однозначно задают плоскость, сечение которой твердого деформируемого тела является площадкой, поэтому угловые деформации возникают в площадках. В твердых деформируемых телах угловые деформации характеризуют искажение формы тела при его деформировании. Угловые деформации вызываются действием касательных напряжений.

**Деформированное состояние в точке твердого деформируемого тела** – это совокупность линейных деформаций, возникающих по всем направлениям, и угловых деформаций, возникающих во всех площадках, которые проходят через точку твердого деформируемого тела.

Для однозначного описания деформированного состояния в точке твердого деформируемого тела достаточно знать линейные

деформации, возникающие по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям, проходящим через точку твердого деформируемого тела, и величины угловых деформаций, возникающих в трех взаимно перпендикулярных площадках, заданными этими направлениями.

Напряженное и деформированное состояния в точке твердого деформируемого тела принято описывать с помощью тензора (соответственно, тензора напряжений и тензора деформаций). Тензор напряжений (деформаций) – это многомерный вектор, который записывается в виде квадратной матрицы с размерами  $3 \times 3$ , содержащей в себе результаты разложения компонент напряжений (деформаций) на любых трех взаимно перпендикулярных площадках.

Одно и то же напряженное и деформированное состояния в точке твердого деформируемого тела можно описать множеством различных тензоров напряжений и деформаций, выполняя разложение компонент напряжений и деформаций на разных взаимно перпендикулярных площадках, каждые из которых соответствуют задаваемой ими пространственной системе координат. Среди всего этого множества вариантов всегда будет существовать и причем только один такой вариант ориентации площадок, что для него величины касательных напряжений или угловых деформаций, действующих в площадках, будут нулевыми. Такие площадки, также как и задаваемую ими систему координат и ее оси, принято называть главными. Действующие в главных площадках нормальные напряжения называются **главными напряжениями**. Возникающие в направлении главных осей деформации называются **главными деформациями**.

Напряженные состояния в зависимости от количества ненулевых компонент главных напряжений принято разделять на три основных вида:

1. Трехосные (объемные) напряженные состояния;
2. Двухосные (плоские) напряженные состояния;
3. Одноосные напряженные состояния.

**Напряжение при одноосном напряженном состоянии** – это величина внутреннего усилия, приходящаяся на единицу площади площадки.

**Диаграмма напряжений Мора** – это графическая интерпретация напряженного состояния в точке твердого деформируемого тела.

**Предельное напряженное состояние** – это напряженное состояние твердого деформируемого тела, предшествующее его разрушению.

**Предельная диаграмма Мора** – это графическая интерпретация предельного напряженного состояния.

**Прочность** – это свойство горной породы воспринимать внешнее физическое воздействие без разрушения. Прочность горных пород, как и большинства строительных материалов, в значительной степени зависит не только от природных свойств, но и от вида напряженного состояния, для которого производится ее оценка. При прочих равных условиях прочность горных пород при одноосных напряженных состояниях меньше, чем прочность при плоских и объемных напряженных состояниях.

**Предел прочности** – это наибольшая величина напряжений, которую может выдержать образец из данного материала без разрушения.



# 1. ПОСТРОЕНИЕ ПАСПОРТА ОБЪЕМНОЙ ПРОЧНОСТИ ГОРНОЙ ПОРОДЫ

**Цель работы:** выполнить построение паспорта объемной прочности горной породы аналитическим методом по данным одноосных испытаний.

## **Исходные данные:**

В качестве исходных данных в расчетно-графическом работе даны результаты определения пределов прочности при одноосных испытаниях образцов горной породы. Испытания при одноосном сжатии выполнены методом одноосного сжатия образцов правильной формы между плоскими плитами, а испытания на одноосное растяжение – методом разрушения цилиндрических образцов по образующим.

## **Расчетные положения:**

1. Статистическая обработка результатов испытаний.

Средние арифметические значения пределов прочности следует определять по формулам:

$$\bar{\sigma}_{\text{сж}}^0 = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{сж}}^i}{n},$$
$$\bar{\sigma}_{\text{р}}^0 = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{р}}^i}{n},$$

где  $\sigma_{\text{сж}}^i$  и  $\sigma_{\text{р}}^i$  – соответственно результаты  $i$ -го определения предела прочности при одноосном сжатии и растяжении;  $n$  – количество испытаний.

Отклонения от среднего для каждого  $i$ -го испытания следует определять по формулам:

$$A_{\text{сж}}^i = \sigma_{\text{сж}}^i - \bar{\sigma}_{\text{сж}}^0,$$
$$A_{\text{р}}^i = \sigma_{\text{р}}^i - \bar{\sigma}_{\text{р}}^0.$$

Среднегеометрические отклонения следует определять по формулам:

$$\Delta_{\text{сж}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{\text{сж}}^i)^2}{n - 1}},$$

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_p^i)^2}{n-1}}$$

Коэффициент вариаций следует определять по формулам:

$$V_{сж} = \frac{\Delta_{сж}}{\bar{\sigma}_{сж}} \cdot 100\%,$$

$$V_p = \frac{\Delta_p}{\bar{\sigma}_p} \cdot 100\%.$$

Коэффициент вариаций при вычислениях следует округлять по общематематическим правилам до целого числа.

Надежность испытаний следует определять согласно таблице 2 приложения ГОСТ 21153.8-88 [4]. Относительную погрешность испытаний при этом считать равной максимально допустимой для используемых методов испытаний (для условий данной расчетно-графической работы 20%).

## 2. Построение паспорта прочности.

**Паспорт прочности горной породы** – это огибающая предельных кругов Мора, построенная в системе координат  $\sigma$ - $\tau$  (нормальное - касательное напряжения).

Для построения аналитического паспорта прочности вводится гипотеза о том, что все горные породы имеют единую форму огибающей предельных кругов Мора, которая описывается условием Протодяконова:

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 - a^2} \right)^{\frac{3}{8}},$$

где  $\tau_{max}$  – максимальное сопротивление породы сдвигу при гипотетически полностью закрывшихся под действием нормальных напряжений трещинах и порах;  $\sigma_k$  – нормальное напряжение относительно начала координат, перенесенного в точку пересечения огибающей с осью абсцисс;  $a$  – параметр формы огибающей.

Для построения паспорта прочности условие Протодяконова переводят в безразмерные координаты:

$$l = 0,73 \left( \frac{K^2}{K^2 + 1} \right)^{\frac{3}{8}},$$

где  $l$  и  $K$  – это соответственно безразмерные аналоги напряжений  $\tau$  и  $\sigma$ , которые связаны между собой через параметр формы огибающей:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_k - \sigma_0 = K \cdot a - \sigma_0, \\ \tau &= l \cdot a,\end{aligned}$$

где  $\sigma_0$  – параметр переноса начала координат.

Вводят безразмерные радиусы предельных кругов Мора для одноосного сжатия  $q_1$  и одноосного сжатия  $q_2$ . Тогда:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\bar{\sigma}_{сж}^0}{\bar{\sigma}_p^0}.$$

Из таблицы 3 ГОСТ 21153.8-88 [4] по известному соотношению  $\frac{q_2}{q_1}$  определяют значения  $q_2$  и  $K_1 + q_1$ . Значения из таблицы определяют с учетом линейной интерполяции, которую следует выполнять по формулам:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

где  $x$  – точное значение  $\frac{q_2}{q_1}$ ;  $x_1$  и  $x_2$  – ближайšie табулированные значения  $\frac{q_2}{q_1}$ ;  $y_1$  и  $y_2$  – ближайšie табулированные значения  $q_2$  или  $K_1 + q_1$ .

Параметр формы огибающей следует определять по формуле:

$$a = \frac{\bar{\sigma}_{сж}^0}{2q_2}.$$

Параметр переноса начала координат следует определять по формуле:

$$\sigma_0 = a(K_1 + q_1).$$

Определение точек огибающей выполняется в следующей последовательности:

1. Определяются координаты точек, ограничивающих паспорт прочности справа и слева (точки А и В на рисунке 1).

Для точки А:

$$\tau_A = 0, l_A = 0, K_A = 0, \sigma_A = -\sigma_0.$$

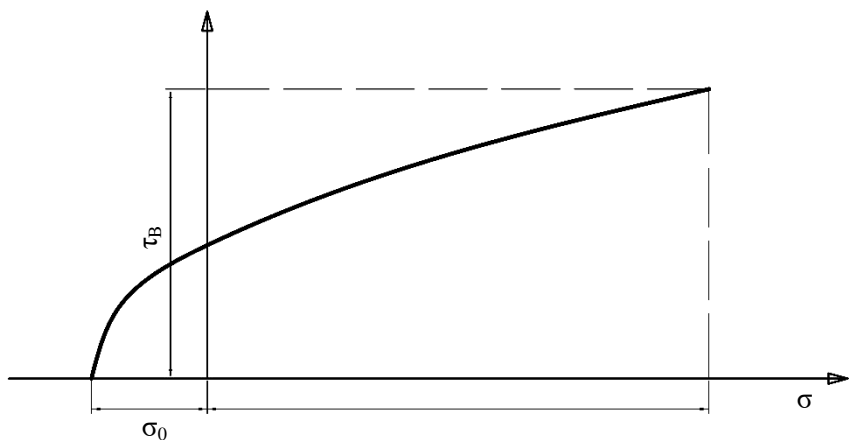


Рис. 1. Схема к определению координат точек огибающей

Для точки В:

$$\sigma_B = 1,5\bar{\sigma}_{\text{сж}}^0, K_B = \frac{1,5\bar{\sigma}_{\text{сж}}^0 + \sigma_0}{a}, l_B = 0,73 \left( \frac{K_B^2}{K_B^2 + 1} \right)^{\frac{3}{8}}, \tau_B = l_B \cdot a.$$

Ограничение для паспорта прочности справа выбрано исходя из условия адекватного описания прочности горных пород условием Протодяконова по результатам экспериментальных исследований.

2. На промежутке значений безразмерной координаты  $K$  от 0 до  $K_B$  следует выбрать еще по меньшей мере 8 точек. Для этих промежуточных значений  $K$  следует определить по вышеприведенным формулам последовательно значения  $\sigma$ ,  $l$  и  $\tau$ . Полученные точки системе координат  $\sigma$ - $\tau$  следует соединить плавной линией, это кривая и есть аналитический паспорт объемной прочности.

В конечном итоге паспорт прочности должен строиться по меньшей мере по 10 точкам, причем из них в зоне растягивающих нормальных напряжений должно лежать как минимум 2 точки за исключением точки А.

Проверку правильности построения паспорта прочности следует выполнять путем построения предельных кругов Мора для одноосного сжатия и одноосного растяжения с диаметрами соответственно  $\bar{\sigma}_{\text{сж}}^0$  и  $\bar{\sigma}_p^0$ . Паспорт построен верно, если каждый из

построенных предельных кругов Мора коснулся огибающей только в одной точке.

**Последовательность выполнения расчетно-графической работы:**

1. Выполнить статистическую обработку результатов одноосных испытаний, определить их надежность и сделать выводы о достаточности количества образцов в серии испытаний для обеспечения репрезентативности выборки.
2. Выполнить расчет параметра переноса начала координат и параметра формы огибающей.
3. Выполнить расчет координат крайних точек огибающей.
4. Выполнить расчет координат промежуточных точек огибающей и построить по ним паспорт объемной прочности.
5. Выполнить проверку правильности построения паспорта объемной прочности путем вписывания предельных кругов Мора одноосного сжатия и растяжения.

## 2. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБСАДНОЙ ТРУБЫ СКВАЖИНЫ

**Цель работы:** проверить расчетом прочность и устойчивость обсадной трубы скважины, пробуренной в жесткопластическом массиве горных пород.

**Исходные данные:** в породном массиве пробурена скважина диаметром  $d$ , обсаженная для обеспечения устойчивости стальной трубой с толщиной  $t$ . Скважина пересекает слой покрывающей толщи пород мощностью  $h_1$  и входит в слой обводненных пород на глубину  $h_2$ . В слое обводненных пород содержатся воды с известным гидростатическим напором. Проверить расчетом прочность и устойчивость обсадной трубы с заданными параметрами. Выполнить подбор наиболее рациональной толщины обсадной трубы по условиям прочности и устойчивости.

Привести расчетную схему и эпюры распределения геостатического и гидростатического давлений на обсадную трубу скважины.

### **Расчетные положения:**

В рамках данного расчетно-графического задания предполагается использование жесткопластической модели массива пород. Для этой модели коэффициент бокового распора следует определять следующим образом:

$$\lambda = tg^2 \left( \frac{90 - \varphi}{2} \right),$$

где  $\varphi$  – угол внутреннего трения.

Расчетная схема для определения расчетного давления на обсадную трубу скважины приведена на рисунке 2. На эту расчетную схему нанесены типовые эпюры распределения геостатического и гидростатического давления на обсадную трубу скважины.

Для определения величины геостатического давления на глубине  $h$  от земной поверхности следует использовать следующую формулу:

$$P_{\text{геост}} = \lambda_i \gamma h = \gamma \cdot h \cdot tg^2 \left( \frac{90 - \varphi_i}{2} \right),$$

где  $\lambda_i$  и  $\varphi_i$  – соответственно коэффициент бокового распора и угол внутреннего трения  $i$ -го слоя.

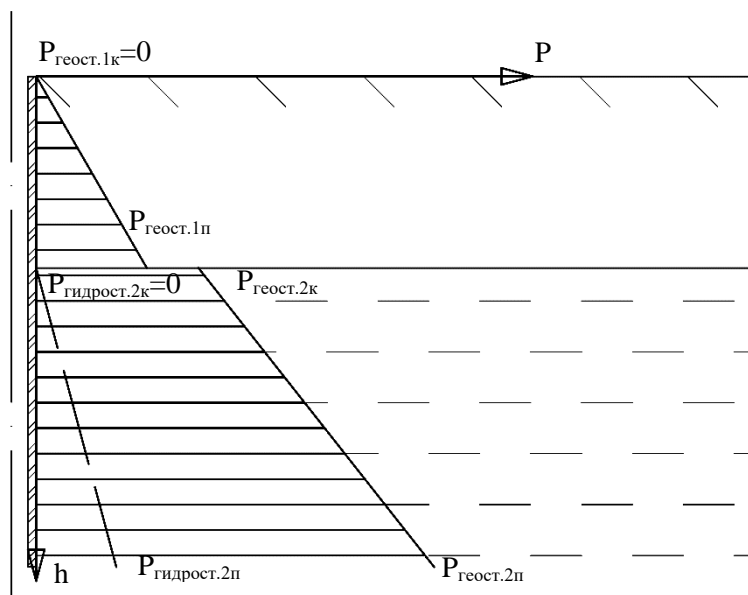


Рис. 2. Расчетная схема для определения давления на обсадную трубу скважины

Для определения величины гидростатического давления на глубине  $h$  от уровня грунтовых вод следует использовать следующую формулу:

$$P_{\text{гидрост}} = \gamma_w h,$$

где  $\gamma_w = 10 \text{ кН/м}^3$  – удельный вес воды.

Расчетную нагрузку на обсадную трубу следует определять по следующей формуле:

$$P_{\text{расч}} = P_{\text{геост.макс}} + P_{\text{гидрост.макс}},$$

где  $P_{\text{геост.макс}}$  и  $P_{\text{гидрост.макс}}$  – соответственно наибольшие значения гидростатического и геостатического давлений по трассе скважины. Стальные несущие конструкции следует проверять расчетом на прочность и устойчивость под действием расчетной нагрузки. Расчетная схема при выполнении расчетов на прочность и устойчивость приведена на рисунке 3.

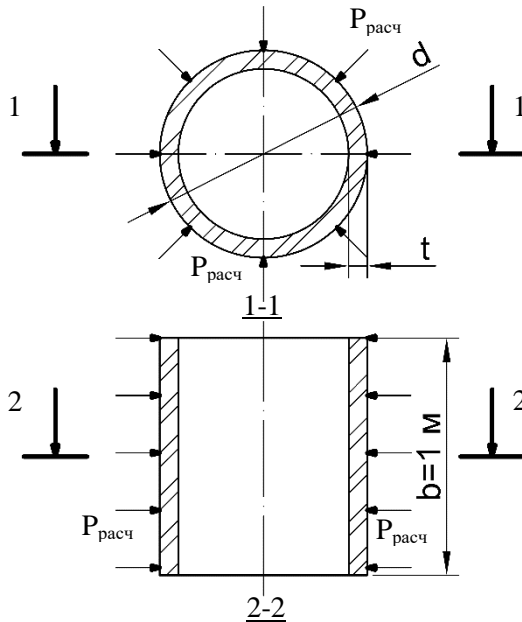


Рис. 3 Расчетная схема участка обсадной трубы для проверки расчетом на прочность и устойчивость

Проверку расчетом на прочность следует выполнять исходя из следующего условия:

$$\sigma = \frac{P_{\text{расч}} \cdot r_{\text{ср}}}{b \cdot t} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

где  $r_{\text{ср}} = (d + t)/2$  – радиус трубы по середине толщины стенки;  $\sigma_{\text{доп}} = 370$  МПа – расчетное сопротивление материала трубы (стали).

Расчет минимально необходимой толщины стенки трубы по условию прочности следует выполнять по вышеприведенной формуле, выразив из нее  $t$  и полагая, что  $\sigma = \sigma_{\text{доп}}$ .

Проверку расчетом на устойчивость следует выполнять исходя из следующего условия:

$$P_{\text{кр}} = \frac{3 \cdot E^* \cdot I}{r_{\text{ср}}^3} \geq P_{\text{расч}},$$



где  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  – условная физическая жесткость материала трубы (стали);  $E = 210$  ГПа – модуль упругости стали;  $\nu = 0,2$  – коэффициент Пуассона стали;  $I = \frac{bt^3}{12}$  – момент инерции продольного сечения трубы.

Расчет минимально необходимой толщины стенки трубы по условию устойчивости следует выполнять по вышеприведенной формуле, выразив из нее  $t$  и полагая, что  $P_{\text{расч}} = P_{\text{кр}}$ .

В качестве минимально необходимой толщины стенки трубы следует принимать максимальную расчетную толщину стенки, полученную по условиям прочности и устойчивости.

#### **Последовательность выполнения расчетно-графической работы:**

1. Выполняется определение величин геостатического давления по трассе обсадной трубы скважины и отстраивается эпюра.
2. Выполняется определение величин гидростатического давления по трассе обсадной трубы скважины и отстраивается эпюра.
3. Определяется величина расчетной нагрузки на обсадную трубу скважины.
4. Выполняется проверка обсадной трубы с заданными параметрами на прочность. Определяется минимально необходимая толщина стенки обсадной трубы по условию прочности.
5. Выполняется проверка обсадной трубы с заданными параметрами на устойчивость. Определяется минимально необходимая толщина стенки обсадной трубы по условию устойчивости.

### 3. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ КРУГОВОГО ОЧЕРТАНИЯ

**Цель работы:** рассчитать величины и оценить закономерности распределения компонент напряжений и смещений в окрестности незакрепленной горной выработки кругового очертания, расположенной в изотропном линейно-упругом массиве.

**Исходные данные:**

Рассчитать компоненты напряжений  $\sigma_R$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{R\theta}$  в изотропном упругом массиве пород на контуре и в окрестности незакрепленной выработки кругового очертания при коэффициентах бокового распора  $\lambda=1$  и  $\lambda=\lambda_2$ . Для этих же условий рассчитать величины смещений контура выработки  $u_r$  и  $u_\theta$ .

Для построения эпюр при  $\lambda=\lambda_2$  рассмотреть направления с угловой координатой  $\theta=0, 45$  и  $90^\circ$ . Безразмерный радиус  $r=R/R_0$  ( $R$  – текущий радиус;  $R_0$  – радиус выработки) принимать в диапазоне от 1 до 12 (не менее 10 точек).

**Расчетные положения:**

В рамках данного расчетно-графического задания предполагается использование линейно-упругой модели массива пород. Для этой модели коэффициент бокового распора следует определять согласно гипотезе Динника:

$$\lambda = \frac{\nu}{1 - \nu},$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона массива горных пород.

Для определения компонент напряженного состояния в окрестности горной выработки воспользуемся решением задачи Кирша из теории упругости:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \gamma H \left[ \frac{1 + \lambda}{2} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1 - \lambda}{2} \left( 1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_\theta &= \gamma H \left[ \frac{1 + \lambda}{2} \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1 - \lambda}{2} \left( 1 + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_z &= \gamma H \left[ \lambda - \nu \cdot \frac{1 - \lambda}{2} \cdot \frac{4}{r^2} \cdot \cos 2\theta \right],\end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = -\gamma H \frac{1-\lambda}{2} \left( 1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) \sin 2\theta,$$

где  $r = \frac{R}{R_0}$  – приведенное расстояние до рассматриваемой точки массива в окрестности горной выработки;  $R$  – расстояние до рассматриваемой точки массива в окрестности горной выработки;  $R_0$  – радиус горной выработки;  $\theta$  – угловая координата (см. рисунок 4).

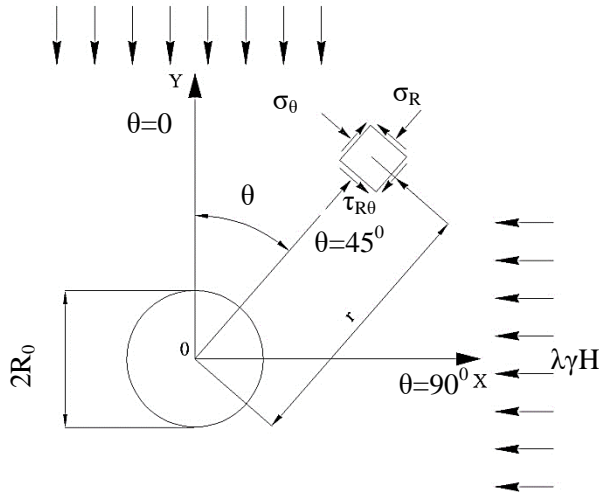


Рис. 4. Расчетная схема к задаче Кирша

Для построения эпюры распределения нормальных тангенциальных напряжений на контуре выработки необходимо задать приведенное расстояние до рассматриваемой точки массива в окрестности горной выработки равным 1 и преобразовать соответствующую формулу решения Кирша в следующий вид:

$$\sigma_{\theta} = \gamma H [1 + \lambda - 2(1 - \lambda) \cos 2\theta].$$

Смещения точек массива в окрестности горной выработки следует определять по следующим формулам:

$$u_r = \frac{\gamma H (1 + \lambda)}{4 \cdot G} \cdot \frac{R_0^2}{R} + \frac{\gamma H (1 - \lambda)}{4 \cdot G} \cdot \frac{R_0^2}{R} \left[ 4 \cdot (1 - \nu) - \frac{R_0^2}{R^2} \right] \cdot \cos 2\theta,$$

$$u_{\theta} = \frac{\gamma H(1 - \lambda)}{4 \cdot G} \cdot \frac{R_0^2}{R} \cdot \left[ 2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) + \frac{R_0^2}{R^2} \right] \cdot \sin 2\theta,$$

где  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$  – модуль сдвига массива горных пород в окрестности горной выработки;  $E$  – модуль деформации массива горных пород в окрестности горной выработки.

Для построения эпюры распределения смещений на контуре выработки следует подставить в вышеприведенные формулы смещений  $R = R_0$ .

**Последовательность выполнения расчетно-графической работы:**

1. Выполняется построение эпюр распределения ненулевых компонент напряжений для случая  $\lambda=1$ .
2. Выполняется построение эпюры распределения нормальных тангенциальных напряжений на контуре незакрепленной горной выработки кругового очертания для случая  $\lambda=1$ .
3. Выполняется построение эпюр распределения смещений породного контура выработки кругового очертания для случая  $\lambda=1$ .
4. Выполняется построение эпюр распределения ненулевых компонент напряжений для направлений с угловой координатой  $\theta=0, 45$  и  $90^0$  для случая  $\lambda= \lambda_2$ .
5. Выполняется построение эпюры распределения нормальных тангенциальных напряжений на контуре незакрепленной горной выработки кругового очертания для случая  $\lambda= \lambda_2$ .
6. Выполняется построение эпюр распределения смещений породного контура выработки кругового очертания для случая  $\lambda= \lambda_2$ .

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЗОНЫ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ В АНИЗОТРОПНОМ (СЛОИСТОМ) МАССИВЕ ПОРОД

**Цель работы:** рассчитать значения и оценить зависимость размеров зоны предельного состояния вокруг горизонтальной выработки от степени анизотропии массива пород и коэффициента бокового распора  $\lambda$ .

**Исходные данные:** незакрепленная протяженная выработка кругового очертания расположена на глубине  $H$  от поверхности в анизотропном (слоистом) упругопластическом массиве. Рассчитать и оценить зависимость радиуса зоны предельного состояния вокруг горизонтальной выработки от коэффициента бокового распора  $\lambda$ . Сравнить полученные зоны предельного состояния пород в анизотропном массиве со средними радиусами зон предельного состояния в изотропном массиве с крайними величинами сцепления ( $C_{\perp}$  и  $C_{\parallel}$ ) и  $\lambda=1$ .

##### **Расчетные положения:**

Испытания образцов горных пород при одноосном сжатии перпендикулярно и параллельно слоистости показывают, что прочность в этих направлениях различна.

Для оценки степени анизотропии введем коэффициент  $K_A$  анизотропии, равный отношению предела прочности на сжатие перпендикулярно слоистости  $R_{\perp}$  к пределу прочности параллельно слоистости  $R_{\parallel}$ . Для пород средней устойчивости значение этого коэффициента изменяется от 2,5 до 1,77, для неустойчивых - от 2,66 до 2,57, а для весьма неустойчивых - около 3,0.

Аппроксимацию сцепления в массиве пород около выработки представим зависимостью:

$$C(\theta) = C(1 + \delta \cos 2\theta),$$

где  $\theta$  - угловая координата точки относительно горизонтальной оси  $Y$ .

При  $\theta = 0$  и  $90^\circ$  получим соответственно:

$$C(0) = C(1 + \delta) = C_{\perp} \text{ и } C(\pi/2) = C(1 - \delta) = C_{\parallel},$$

где  $C = (C_{\perp} + C_{\parallel})/2$  - среднее сцепление;  $\delta = (C_{\perp} - C_{\parallel})/(C_{\perp} + C_{\parallel})$  - показатель анизотропии;  $C_{\perp}$ ,  $C_{\parallel}$  - соответственно сцепление в

массиве при действии нагрузки перпендикулярно слоистости (бок выработки) и параллельно слоистости (кровля выработки).

Для протяженной выработки круглого сечения расчетная схема может быть представлена отверстием в невесомой плоскости (рисунок 5), нагруженной на бесконечности напряжениями  $\gamma H$  и  $\lambda\gamma H$ , где  $\lambda$  - коэффициент бокового распора;  $H$  – глубина заложения выработки;  $\gamma$  - объемный вес пород в массиве.

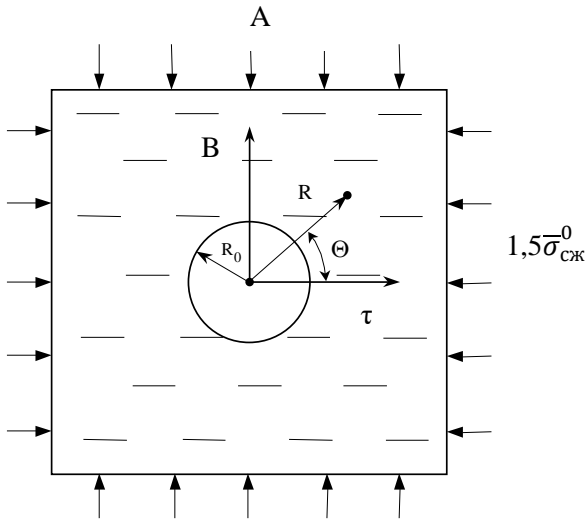


Рис. 5. Расчетная схема к определению размеров зоны предельного состояния

Решение плоской упругопластической задачи показывает, что безразмерный радиус  $r_s$  зоны неупругих деформаций вокруг выработки имеет вид:

$$r_s = r_s^{(0)} \left( 1 + \delta r_s^{(1)} \cos 2\theta \right),$$

где для нулевого приближения (без учета анизотропии):

$$r_s^{(0)} = \left[ \frac{(1 - \sin\varphi)(\lambda_1 \gamma H + C \operatorname{ctg}\varphi)}{p + C \operatorname{ctg}\varphi} \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

для первого приближения (с учетом анизотропии):

$$r_s^{(1)} = \frac{4b\gamma H - C \cos\varphi \left\{ 4 + 2(r_s^{(0)})^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[ \left(\frac{\alpha}{2}-1\right) \cos\chi_0 - \frac{\sin\chi_0(3+2\sin\varphi-4\sin^2\varphi)}{t(1-\sin\varphi)} \right] \right\}}{(\lambda_1 \gamma H + C \operatorname{ctg}\varphi) \sin\varphi + 2\sin\varphi(p + C \operatorname{ctg}\varphi) \frac{1+\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)^2} (r_s^{(0)})^{\alpha-1}},$$

здесь  $p$  - отпор крепи по контуру выработки;

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi};$$

$$t = \sqrt{3 - \sin^2\varphi};$$

$$\chi_0 = \left( t \cdot \ln \frac{1}{r_s^{(0)}} \right) \frac{1}{1 - \sin\varphi};$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \lambda}{2};$$

$$b = \frac{1 - \lambda}{2\delta}.$$

**Последовательность выполнения расчетно-графической работы:**

1. Выполнить расчет радиуса зоны предельного состояния вокруг горной выработки в изотропном упругопластическом массиве горных пород в нулевом приближении  $r_s^{(0)}$  при  $\lambda = 1$  с учетом отпора крепи.
2. Выполнить расчет поправки радиуса зоны предельного состояния вокруг горной выработки в слоистом упругопластическом массиве горных пород в первом приближении  $r_s^{(1)}$  при заданном значении  $\lambda$  с учетом отпора крепи.
3. Выполнить построение зоны предельного состояния вокруг горной выработки.

## 5. РАСЧЕТ НОРМАЛЬНЫХ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА НЕРОВНОМ КОНТУРЕ ВЫРАБОТКИ КРУГОВОГО ОЧЕРТАНИЯ

**Цель работы:** определить распределение нормальных тангенциальных напряжений на неровном контуре выработки кругового очертания, расположенной в изотропном линейно-упругом массиве на глубине  $H$  от земной поверхности.

**Исходные данные:** построить эпюры распределения нормальных тангенциальных напряжений на неровном контуре выработки кругового очертания, расположенной в изотропном линейно-упругом массиве на глубине  $H$  от земной поверхности при коэффициентах бокового распора  $\lambda=1$  и  $\lambda=\lambda_2$ .

Выполнить сопоставление эпюр распределения нормальных тангенциальных напряжений на ровном (при  $C=0$ ) и неровном контурах выработки при  $\lambda=\lambda_2$ .

**Расчетные положения:**

Для расчета напряжений на неровном контуре выработки неровности статистически заменяются трохоидальными кривыми.

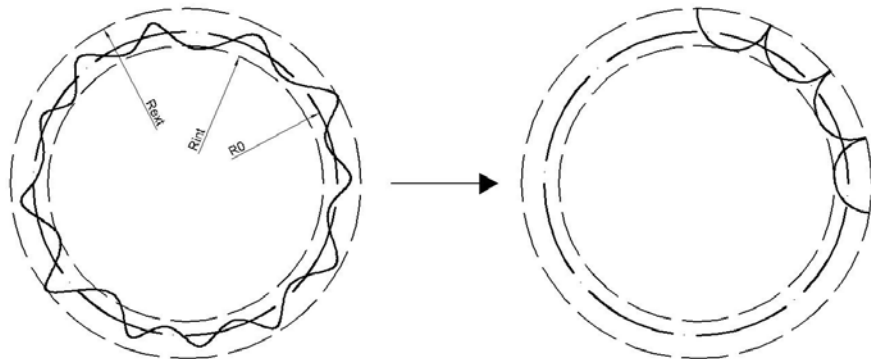


Рис. 6. Схема перехода от фактического неровного контура к модели неровного контура на основе трохоидальных кривых

Неровность контура статистически характеризуется количеством вершин и впадин  $m$  и коэффициентом амплитуды отклонения от нулевого контура в долях радиуса  $C$ :

$$C = \frac{R_i - R_0}{R_0},$$



где  $R_i$  – текущий радиус выработки;  $R_0$  – радиус нулевого контура выработки.

Расчеты следует выполнять с применением следующих формул:

а) при коэффициенте бокового распора  $\lambda \neq 1$ :

$$\sigma_{\theta} = 4\gamma H \cdot \left\{ \frac{0,25(1+\lambda)(1-m^2C^2)}{1+m^2C^2-2mC \cdot \cos([m+1]\theta)} + \frac{(1-\lambda) \cdot [(m^2C^2-2mC^2-1) \cdot \cos 2\theta - 2C \cdot \cos([m-1]\theta)]}{2[1-(m-2)C^2] \cdot [1+m^2C^2-2mC \cdot \cos([m+1]\theta)]} \right\};$$

б) при  $\lambda=1$ :

$$\sigma_{\theta} = 2\gamma H \frac{1 - m^2C^2}{1 + m^2C^2 - 2mC \cdot \cos([m + 1]\theta)},$$

где  $m = n - 1$  – коэффициент, характеризующий количество неровностей контура;  $n$  – количество неровностей контура выработки.

### **Последовательность выполнения расчетно-графической работы:**

1. Выполняется определение статистических параметров неровности контура для создания модели на основе трохоидаальных кривых.
2. Выполняется расчет нормальных тангенциальных напряжений на неровном контуре выработки кругового очертания с учетом шага угловой координаты не более  $0,5^{\circ}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 21153.0-75 «Породы горные. Методы физических испытаний».
2. ГОСТ 21153.2-84 «Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии».
3. ГОСТ 21153.3-85 «Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном растяжении».
4. ГОСТ 21153.8-88 «Породы горные. Методы определения предела прочности при объемном сжатии».
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды: Учебник. М.: «Ленанд», 2014. 320 с.
6. *Баклашов И.В.* Геомеханика: Учебник для вузов. В 2 т. М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2004. Т.1. Основы геомеханики. 208 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1 – ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №1

№ варианта	№ испытания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\sigma_p$ , МПа									
	3,50	3,30	3,20	3,26	3,60	3,28	3,50	3,30	3,54	3,30
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	35,0	34,0	33,0	33,6	35,8	33,8	36,0	34,2	36,2	34,0
2	$\sigma_p$ , МПа									
	1,9	1,7	1,6	1,66	2	1,68	1,9	1,7	1,94	1,7
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	18,5	17,5	16,5	17,1	19,3	17,3	19,5	17,7	19,7	17,5
3	$\sigma_p$ , МПа									
	4,23	4,03	3,93	3,99	4,33	4,01	4,23	4,03	4,27	4,03
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	46,5	45,5	44,5	45,1	47,3	45,3	47,5	45,7	47,7	45,5
4	$\sigma_p$ , МПа									
	0,78	0,58	0,48	0,54	0,88	0,56	0,78	0,58	0,82	0,58
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	9,1	8,1	7,1	7,7	9,9	7,9	10,1	8,3	10,3	8,1
5	$\sigma_p$ , МПа									
	6,08	5,88	5,78	5,84	6,18	5,86	6,08	5,88	6,12	5,88
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	54,2	53,2	52,2	52,8	55	53	55,2	53,4	55,4	53,2
6	$\sigma_p$ , МПа									
	1,27	1,07	0,97	1,03	1,37	1,05	1,27	1,07	1,31	1,07
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	13,4	12,4	11,4	12	14,2	12,2	14,4	12,6	14,6	12,4
7	$\sigma_p$ , МПа									
	6,77	6,57	6,47	6,53	6,87	6,55	6,77	6,57	6,81	6,57
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	62,5	61,5	60,5	61,1	63,3	61,3	63,5	61,7	63,7	61,5
8	$\sigma_p$ , МПа									
	3,63	3,43	3,33	3,39	3,73	3,41	3,63	3,43	3,67	3,43
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	35,9	34,9	33,9	34,5	36,7	34,7	36,9	35,1	37,1	34,9
9	$\sigma_p$ , МПа									
	2,16	1,96	1,86	1,92	2,26	1,94	2,16	1,96	2,2	1,96
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	21,1	20,1	19,1	19,7	21,9	19,9	22,1	20,3	22,3	20,1
10	$\sigma_p$ , МПа									
	1,44	1,24	1,14	1,2	1,54	1,22	1,44	1,24	1,48	1,24
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	14,2	13,2	12,2	12,8	15	13	15,2	13,4	15,4	13,2

Продолжение приложения 1										
11	$\sigma_p$ , МПа									
	0.85	0.65	0.55	0.61	0.95	0.63	0.85	0.65	0.89	0.65
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	7.9	6.9	5.9	6.5	8.7	6.7	8.9	7.1	9.1	6.9
12	$\sigma_p$ , МПа									
	6.34	6.14	6.04	6.1	6.44	6.12	6.34	6.14	6.38	6.14
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	57	56	55	55.6	57.8	55.8	58	56.2	58.2	56
13	$\sigma_p$ , МПа									
	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42	7.42
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3	67.3
14	$\sigma_p$ , МПа									
	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78	8.78
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2	82.2
15	$\sigma_p$ , МПа									
	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02	5.02
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8	42.8
16	$\sigma_p$ , МПа									
	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5	30.5
17	$\sigma_p$ , МПа									
	2.03	1.83	1.73	1.79	2.13	1.81	2.03	1.83	2.07	1.83
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	12.6	11.6	10.6	11.2	13.4	11.4	13.6	11.8	13.8	11.6
18	$\sigma_p$ , МПа									
	10.11	9.91	9.81	9.87	10.21	9.89	10.11	9.91	10.15	9.91
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	94.5	93.5	92.5	93.1	95.3	93.3	95.5	93.7	95.7	93.5
19	$\sigma_p$ , МПа									
	4.34	4.14	4.04	4.1	4.44	4.12	4.34	4.14	4.38	4.14
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	43.6	42.6	41.6	42.2	44.4	42.4	44.6	42.8	44.8	42.6
20	$\sigma_p$ , МПа									
	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45	8.45
	$\sigma_{сж}$ , МПа									
	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9	74.9

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2 – ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №2**

№ варианта	$h_1$ , м	$\gamma_1$ , кН/м <sup>3</sup>	$\Phi_1$ , град.	$h_2$ , м	$\gamma_2$ , кН/м <sup>3</sup>	$\Phi_2$ , град.	$d$ , мм	$t$ , мм
1	46	20,5	14	185	21,3	18	195	5
2	70	21,2	12	150	23,2	15	225	4
3	38	14,3	15	165	24,8	22	135	4
4	61	15,9	11	225	20,8	20	180	4
5	55	16,3	13	155	23,4	22	195	6
6	44	16,7	17	250	22,6	22	225	3
7	60	17,1	12	155	21,8	24	150	5
8	73	17,5	15	250	18,6	14	120	3
9	86	17,9	11	225	23,4	16	205	4
10	99	18,3	13	155	24,8	18	290	4
11	112	18,8	12	250	21,2	15	215	3
12	91	18,7	9	165	22,6	22	165	4
13	70	15,9	11	225	21,3	20	235	5
14	49	16,3	15	225	22,4	22	195	6
15	91	21,2	12	155	23,2	24	225	4
16	99	14,3	15	250	24,8	14	135	2
17	112	15,9	11	225	20,8	16	195	2
18	91	16,3	13	155	23,4	18	225	3
19	70	16,7	17	225	22,6	17	135	5
20	49	17,1	9	120	21,8	15	180	6

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3 – ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №3**

№ варианта	Глубина заложения выработки $H$ , м	Удельный вес пород $\gamma$ , МН/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$\nu$	Сцепление пород $C$ , МПа	Угол внутреннего трения пород $\phi$ , град.
1	630	0,021	1000	0,31	1,8	27
2	480	0,026	1200	0,26	2,0	25
3	630	0,021	810	0,17	2,2	29
4	365	0,023	560	0,44	2,3	32
5	390	0,024	10000	0,23	2,4	24
6	495	0,023	8000	0,25	2,6	38
7	630	0,022	690	0,32	2,7	36
8	380	0,023	1000	0,34	2,0	33
9	440	0,024	1200	0,13	1,9	32
10	680	0,023	810	0,38	1,3	30
11	630	0,022	560	0,43	1,6	34
12	480	0,026	10000	0,20	1,8	24
13	630	0,023	560	0,38	1,4	38
14	365	0,024	10000	0,32	1,5	36
15	390	0,026	8000	0,22	2,2	34
16	410	0,021	690	0,35	1,5	32
17	490	0,023	1000	0,38	1,4	30
18	350	0,024	720	0,35	1,6	24
19	495	0,024	750	0,33	2	38
20	365	0,025	2600	0,31	2,1	36

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4 – ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №4**

№ варианта	Глубина заложения выработки $H$ , м	Удельный вес пород $\gamma$ , МН/м <sup>3</sup>	Сцепление пород $C_{\perp}$ , МПа	Сцепление пород $C_{\parallel}$ , МПа	Угол внутреннего трения пород $\varphi$ , град.
1	960	0,023	6,5	1,5	26
2	420	0,025	5,2	2,0	24
3	485	0,026	4,9	2,3	30
4	745	0,024	8,6	1,6	32
5	875	0,023	4,9	2,4	24
6	670	0,028	8,9	2,1	38
7	450	0,023	5,4	2,4	36
8	1015	0,023	8,5	2,5	34
9	485	0,025	6,4	3,1	32
10	745	0,024	4,2	1,6	30
11	450	0,023	5,6	2,8	34
12	1015	0,028	7,7	3,2	28
13	485	0,023	6,9	1,8	40
14	745	0,021	4,8	2,3	30
15	875	0,024	5,4	2,1	25
16	960	0,023	8,2	1,2	32
17	420	0,028	4,5	3,0	42
18	1040	0,023	9,3	1,9	22
19	480	0,021	5,8	2,6	38
20	525	0,023	8,2	2,2	33

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5 – ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №5**

№ варианта	Глубина заложения выработки $H$ , м	Удельный вес пород $\gamma$ , МН/м <sup>3</sup>	Коэффициент бокового распора $\lambda_2$	$m$	$C$
1	960	0,023	0,65	12	0,123
2	420	0,025	0,6	10	0,123
3	485	0,026	0,55	10	0,123
4	745	0,024	0,5	12	0,123
5	875	0,023	0,65	12	0,152
6	670	0,028	0,7	12	0,152
7	450	0,023	0,75	10	0,152
8	1015	0,023	0,5	10	0,152
9	485	0,025	0,68	14	0,168
10	745	0,024	0,75	14	0,168
11	450	0,023	0,63	10	0,168
12	1015	0,028	0,85	12	0,168
13	485	0,023	0,55	14	0,165
14	745	0,021	0,73	10	0,145
15	875	0,024	0,65	14	0,125
16	960	0,023	0,52	16	0,165
17	420	0,028	0,63	14	0,145
18	1040	0,023	0,62	12	0,125
19	480	0,021	0,80	12	0,145
20	525	0,023	0,55	16	0,165