ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания и контрольные задания к самостоятельной работе для студентов специальности 21.05.06

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра общей и технической физики

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания и контрольные задания
к самостоятельной работе
для студентов специальности 21.05.06

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 537.2 (073)

ФИЗИКА. Электростатика. Методические указания и контрольные задания к самостоятельной работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *К.Л. Левин, Ю.И. Кузьмин, Т.В. Стоянова*. СПб, 2019. 69 с.

Содержат материалы для самостоятельной подготовки студентов по теме «Электростатика».

Предназначены для студентов специальности 21.05.06 «Нефтегазовые техника и технологии».

Научный редактор доц. *В.В. Томаев*

Рецензент проф. *В. М. Цаплев* (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических указаниях по теме «электростатика» содержатся теоретические сведения и примеры решения задач, призванных способствовать самостоятельной работе студентов в качестве внеаудиторного чтения и выполнения расчётно-графических работ.

Начиная с исторического аспекта, рассматриваются эксперименты по генерации электрических зарядов и исследованию их взаимодействия (закон Кулона), вводятся понятия напряжённости поля, потенциала. Рассматривается их связь. Вводится понятие потока. Теорема Остроградского-Гаусса выводится в интегральной и дифференциальной форме. Даются необходимые математические определения в формализации с использованием оператора Гамильтона. Обсуждается визуализация электрического поля с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

Каждый из разделов снабжён примерами задач с решениями.

В конце предлагаются задачи для самостоятельного решения.

ПРЕДМЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Сложно сказать какие опыты навели человечество на мысль о существовании электрических зарядов. Возможно, этому послужили опыты с янтарём, обладающим, говоря современным языком, способностью к электризации. Этот опыт легко повторить в домашних условиях. Если натереть кусочек янтаря тканью, к нему будут притягиваться мелкие диэлектрические предметы, например, клочки бумаги.

Явление электризации также можно наблюдать при ношении одежды, в состав которой входит синтетика. При ношении такой одежды между вами и окружающими предметами могут проскакивать искры.

Сами по себе указанные опыты ещё не свидетельствуют о наличии в природе электрических зарядов. Скорее, они могут наводить на подобные мысли.

Если попросить студентов объяснить опыт с янтарём, можно услышать примерно следующее: «При трении янтаря тканью, электроны переходят с янтаря на ткань. И поэтому, поскольку разноимённые заряды притягиваются к кусочку янтаря (или эбонитовой палочке, или расчёске, если опыт проводить не с янтарём, а с эбонитовой палочкой или расчёской) будут притягиваться кусочки бумаги». Хотя в начале курса «Электричество и магнетизм» студенты ещё «официально» не знакомы с понятием электрического заряда и условиями взаимодействия зарядов, у студентов есть знания из школьного курса физики и источников информации по элементарной физике, таких, как научно-популярная литература и интернет. Поэтому студенты думают, что могут объяснить этот на первый взгляд простой опыт «с бумажками». На самом деле в предлагаемом объяснении содержится логическое несоответствие. Если электроны переходят с янтаря на ткань (что соответствует действительности), то почему к янтарю притягиваются электрически незаряженные кусочки бумажки? Заряды вряд ли смогли перейти с ткани на эти кусочки, потому что как ткань, так и бумага обладает очень высоким электрическим сопротивлением. Следовательно, предлагаемое студентами объяснение является неверным.

С правильным объяснением данного явления мы познакомимся в процессе изучения электростатики.

Электростатикой называется раздел физики, занимающийся изучением стационарных (не зависящих от времени) электрических полей, созданных неподвижными (в лабораторной системе отсчёта) зарядами.

Экспериментальное подтверждение существования электрических зарядов следует из закона Кулона. Для того чтобы провести опыт Кулона, необходимо, получить электрические заряды. Одним из способов их получения является опыт с янтарём. В лабораторных условиях для получения, а точнее, разделения электрических зарядов используют устройство, называемое электрофорной машиной.

ОПЫТ ПО РАЗДЕЛЕНИЮ ЗАРЯДОВ

Экспериментально разделение зарядов трением реализовано в так называемой электрофорной машине. Именно такое устройство для разделения зарядов пользовалось до конца XVIII века в технических источниках тока. В электрофорной машине (ЭМ) диски машины приводятся во вращение в противоположных направлениях. На дисках нанесены металлические полоски, заряд с которых снимают неподвижно закреплённые кисточки. Конструкция машины позволяет снимать заряд таким образом, чтобы положительный и отрицательный заряды накапливались на разных обкладках конденсатора, представляющего в нашем случае так называемую лейденскую банку.

Простейшая Лейденская банк выглядит как стеклянный цилиндр, одна из образующих которого обвёрнута листом металлической фольги. Система, состоящая из двух лейденских банок, представляет собой обычный электрический конденсатор, в котором заряд одного знака накапливается на одной, а противоположного – на другой обкладке, разделённых диэлектриком. В данном примере механическая энергия преобразуется в электрическую энергию.

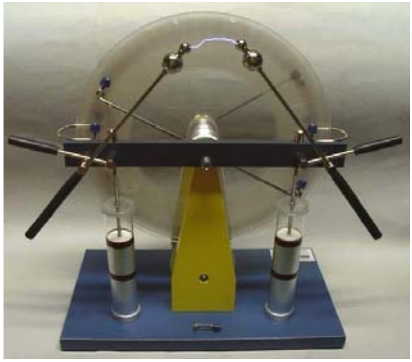


Рис. 1. Электрофорная машина.

Если подсоединить к разным полюсам лейденской банки провода и сблизить их концы, заряды начнут переходить с одного провода на другой. Такой процесс в воздухе сопровождается образованием искры и характерным треском.

Электрические заряды, полученные с помощью электрофорной машины, можно использовать для постановки опыта Кулона.

ЗАКОН КУЛОНА

Рассмотрим два проводящих шарика. Один из них неподвижно зафиксирован, другой уравновешен на упругой нити так, что в уравновешенном состоянии соприкасается с первым. Шарики будем считать абсолютно одинаковыми. Сообщим одному из шариков электрический заряд, например, снятый с Лейденской банки. Заряды распределяться между ними одинаково. К примеру, если на первый перешло 1000 электронов, то после соприкосновения на обоих будет по 500. И тут будем наблюдать то, что наблюдал Кулон. Одноименно заряженные шарики начнут отталкиваться. Силу, с которой они отталкиваются, легко найти, зная вращательную упругость нити. Окажется, что сила, с которой шарики отталкиваются, обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами шариков. Видоизменим опыт. Учитывая, что заряды на Лейденских банках в точности равны и противоположны по знаку, передадим разным шарикам разноимённые заряды с разных Лейденских банок. Предварительно добьёмся того, чтобы равновесному положению соответствовало некоторое угловое расстояние меду шариками. Тогда нить, на которой подвешен второй шарик, закрутится на некоторый угол, указывая на притяжение шариков, сила которого будет обратно пропорциональна квадрату расстояния, так же как и в первом случае – сила отталкивания.

Задумаемся о носителях заряда в первом и втором из рассматриваемых случаях. Носителем отрицательного заряда является электрон. Понятие «электрон» как неделимая частица ввёл электрохимик Дж. Стоуни в 1894 г., обнаружен он был позже: в 1897 г. Э. Вихертом и Дж. Томсоном. Немного забегая вперёд отметим, что такой «удобной» частицы, как электрон, для переноса положительного заряда не существует. Положительный заряд несёт в себе так называемый «протон», который достаточно трудно привести в движение. Почему же можно говорить о перетекании положительного заряда? Да просто потому, что перетекание в одну сторону (например, слева направо) отрицательного заряда равносильно перетеканию в противоположную сторону (справа налево) положительного заряда. Обобщая, можно сформулировать закон Кулона. Сила взаимодействия двух точечных неподвижных заряженных тел в вакууме прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы (Рис. 3). В данной форме закон сформулировал Шарль Кулон в 1785 г. В скалярной форме (упрощённо) закон можно записать как

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}, \qquad (1)$$

где r — расстояние между зарядами (рис. 3).

Рис. 2. Схематическое изображение опыта Кулона.

Более правильно записать закон Кулона в *векторной* форме:

$$\vec{F} = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \qquad (2)$$

где q_1 и q_2 заряды, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ радиус-векторы, проведённые из начала координат к взаимодействующим зарядам. При этом будем учитывать (Рис. 4)[1]:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (3)$$

и

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^{\,2}} \qquad (4)$$

Иногда пользуются формулировкой в несколько иной форме записи:

[1] Напомним, что значок « $\equiv$ » имеет смысл «переобозначение» или, по-другому, «тождественное равенство».

$$\vec{F}_{21} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{|\vec{r}_{21}|^3}\cdot\vec{r}_{21}. \qquad (5)$$

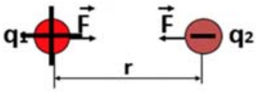


Рис. 3 К закону Кулона

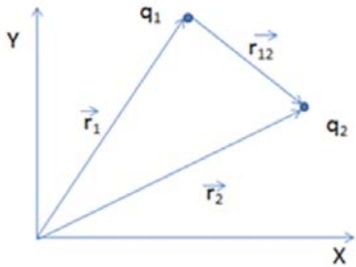


Рис. 4. Напоминание правила вычитания векторов.

Коэффициент k в формулах, записанных выше, не имеет специального названия. Справедливо:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad (6)$$

где

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м}, \qquad (7)$$

и называется электрической постоянной. Так же, как и k, ε_0 встречаются только в системе СИ и существуют для придания величинам размерности, принятой в инженерных расчётах. Они не имеют особого физического смысла. В системе СГС их нет. Единца электрического заряда «Кулон» (Кл) равна заряду, переносимому током силой один ампер за одну секунду.

Дальнодействие закона Кулона. Закон Кулона является так называемым «дальнодействующим» законом, поскольку сила взаимодействия зарядов пропорциональна квадрату расстояния в степени минус два. Такую же зависимость имеет гравитационное взаимодействие, про которое известно, что оно связывает звезды в пределах одной галактики и галактики в скоплениях. Однако на больших расстояниях его никто не проверял, поэтому «дальнодействие» закона Кулона носит характер математически обоснованной гипотезы. Отметим, что взаимодействия, пропорциональные более высоким степеням расстояния в знаменателе, как, например, Ван-Дер-Ваальсово (Таблица. 3), в отличие от дальнодействующих, называются близкодействующими.

СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Обсуждая закон Кулона приходится считаться с экспериментально установленным фактом: наэлектризованные предметы взаимодействуют (притягиваются или отталкиваются) на расстоянии. При этом для того, чтобы охарактеризовать силу взаимодействия, вводят понятие заряда, а для того, чтобы объяснить сам факт взаимодействия, вводят понятие электрического поля. Про электрическое поле можно сказать только то, что оно проявляется при взаимодействии зарядов, и это форма существования материи. Если бы не закон Кулона, об электрическом поле не было бы ничего известно. Начнём разбираться с введёнными понятиями более подробно.

Важнейшими свойствами электрического заряда являются:

— дискретность;

— сохраняемость.

Инвариантность по отношению к преобразованию Лоренца. Свойство дискретности заключается в том, что мельчайшие порции измеряемых экспериментально зарядов равны или кратны заряду электрона. Из ядерной физики известно, что существуют и дробные заряды, равные одной трети и двум третям заряда электрона. Частицы, носящие такие заряды, называются кварки. Из кварков состоят протоны и нейтроны. Однако в свободном состоянии кварки обнаружить не удаётся. Отсутствие в природе свободных кварков называется принципом кваркового ограничения (конфайнмента). Впрочем, обсуждают наличие свободных кварков, оставшихся после Большого Взрыва, однако найти их, если они действительно есть, очень сложно.

Наиболее важными для нас носителями заряда, помимо электронов, являются протоны (Табл. 1) заряд которых в точности равен электронному, но противоположен по знаку. Так же полезно различать позитроны – частицы с зарядом, совпадающим с зарядом электрона, но противоположным по знаку, и массой в точности равной массе электрона, и антипротоны – частицы с зарядом, равным заряду электрона (то есть отрицательным зарядом), и массе, равной массе протона. Для полноты картины отметим, что существуют частицы, нейтроны, масса которых близка к массе протона, но заряд равен нулю. В отличие от ранее описанных частиц, нейтроны не являются стабильными. Среднее время их жизни составляет порядка 18 минут, что не много и не мало с точки зрения ядерной физики.

Стабильность позитронов и антипротонов довольно условна. Будучи стабильными «по отдельности» они являются так называемыми «античастицами» – то есть «противоположностями» классических частиц. Наша Вселенная состоит из классических частиц. Это значит, что если позитрон в результате какой-либо ядерной реакции зародится в нашей Вселенной, он будет существовать до тех пор, пока не встретится с электроном. А эта встреча, если не принимать никаких специальных мер, произойдёт скоро, поскольку электроны входят в состав всех молекул. При взаимодействии электрона с позитроном или протона антипротоном произойдёт аннигиляция – превращение вещества в «чистую» энергию в соответствии с формулой Эйнштейна

Таблица 1.

Некоторые элементарные частицы и их основные характеристики.

Характеристика	Название				
	Протон	Нейтрон	Электрон	Антипротон	Позитрон
Заряд, Кл	$+1{,}6\cdot10^{-19}$	0	$-1{,}6\cdot10^{-19}$	$-1{,}6\cdot10^{-19}$	$+1{,}6\cdot10^{-19}$
Масса, кг	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$9{,}1\cdot10^{-31}$	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$9{,}1\cdot10^{-31}$

$$E=mc^2 \tag{8}$$

Для нас в этом курсе имеют значение только электроны и протоны. Теоретически возможно получить атомы, состоящие из отрицательно заряженных антиядер и позитронов, находящихся на квантовых орбитах вокруг них. Вещество, сделанное из таких атомов, носит название антивещества. Если атом, состоящий из протона и электрона, называется водородом, то описанный выше атом, состоящий из антипротона и позитрона, носит название антиводорода. Антиводород в малых количествах удаётся получить в ускорителях.

Закон сохранения электрического заряда (ЗСЭЗ) является таким же фундаментальным законом, как и закон сохранения импульса, момента импульса и энергии. Для иллюстрации данного закона, рассмотрим ЗСЭЗ в химии и ядерной физики.

Чтобы лучше понять закон сохранения электрического заряда полезно сформулировать принцип, который хотя не является законом, но все же является достоверным фактом о Вселенной. Этот принцип называется принципом электронейтральности Вселенной. Другими словами, количество положительных и отрицательных зарядов в точности одинаково (Рис. 5). Эта одинаковость является усреднённой. Другими словами, в конкретных точках пространства могут преобладать электрические заряды одного либо другого знака. Математически ЗСЭЗ можно записать как

$$\sum q_i^+ + \sum q_j^- = 0, \tag{9}$$

(глобально) или:

$$\sum q_k = const, \tag{10}$$

(локально).

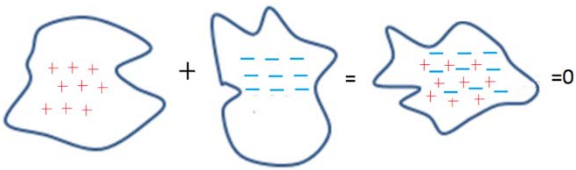


Рис. 5. Свойство сохранения электрического заряда.

Пример ЗСЭЗ в химии. Рассмотрим растворение поваренной соли в воде:

$$NaCl \rightarrow Na^{+} + Cl^{-}$$

В твёрдом состоянии кубическая подрешётка ионов натрия входит в кубическую подрешётку ионов хлора. При переходе в раствор ионы обоих знаков начинают двигаться хаотически, однако электронейтральность раствора в целом сохраняется в строгом соответствии с ЗСЭС.

Пример ЗСЭЗ в ядерной физике. Рассмотрим реакцию аннигиляции позитрона и электрона:

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\,h\nu, \tag{11}$$

где h – постоянная Планка, ν – частота. (11) предлагает только один из возможных (но наиболее вероятных) каналов взаимоуничтожения электрон – позитронной пары, в результате которой получается пара виртуальных фотонов, способных дать рождения паре практически любых частиц, но чаще всего эти «любые» частицы оказываются реальными фотонами.[2] Суммарный заряд частиц в левой части реакции равен нулю. Как известно, фотоны – беззарядовые частицы, поэтому суммарный заряд частиц в правой части так же равен нулю.

Что же касается третьего фундаментального свойства ЭЗ – инвариантности по отношению к преобразованиям Лоренца, то оно значит, что заряд при переходе к релятивистским скоростям не испытывает релятивистских поправок.

Электрическое поле Закон Кулона имеет место за счёт существования особой формы материи – электрического поля, о котором в электростатике мы и знаем только потому, что с его помощью осуществляется взаимодействие между зарядами. Электрическое поле является векторной величиной и обычно обозначается латинской буквой $\vec{E}$. Размерностью электрического поля в системе СИ является вольт на метр (В/м). Для случая неподвижных зарядов электрическое поле так же иногда называют «электростатическим полем».

Таким образом, можно сформулировать следующие важнейшие свойства электрического поля:

Подчиняется принципу суперпозиции. Действует на заряды в соответствии с законом Кулона.

Принцип суперпозиции полей. Суммарное поле, складывающееся из отдельных полей, вычисляется как векторная сумма каждого из полей в отдельности:

$$\vec{E}_{\sum} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots\ldots + \vec{E}_n = \sum_1^n \vec{E}_i, \tag{12}$$

где E_i, – поля, создаваемые каждым из зарядов системы, состоящей из n зарядов, в отдельности, что графически показано для системы, состоящей из двух зарядов, на Рис. 6.

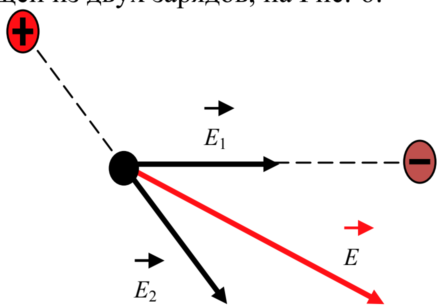


Рис. 6. Принцип суперпозиции полей.

Действие поля на заряды. Полагая, что сила взаимодействия зарядов пропорциональна напряжённости электрического поля, можно записать:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \tag{13}$$

Переписывая данную формулу через закон Кулона, можно определить напряжённость поля как:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \tag{14}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор, соединяющий заряды, $\vec{r}/|\vec{r}|$ – единичный вектор, определяющий направление от заряда q на q'.Отметим, что часто $1/4\pi\varepsilon_0$ обозначают через k, чьё значение округлённо можно принять равным $9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Таким образом, напряжённость является силовой характеристикой электрического поля, обратно пропорциональной квадрату расстояния (Рис. 7). В любой точке пространства электрическое поле направлено по лучу, соединяющему эту точку пространства с зарядом. Направление вектора поля считают совпадающим с направлением движения пробного положительного заряда, помещённого в точку, где есть электрическое поле.

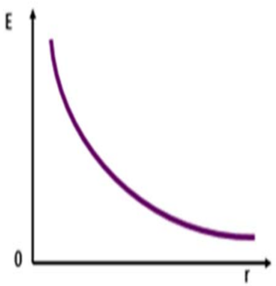


Рис. 7. Зависимость напряжённости от расстояния

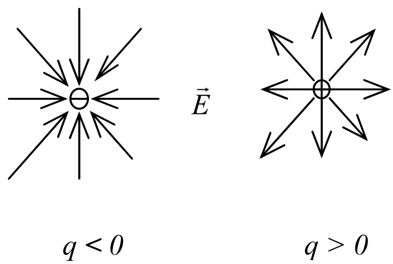


Рис. 8. Графическое изображение вектора напряженности электрического поля, создаваемого положительным и отрицательным зарядами

КОНСЕРВАТИВНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле, характеризуемое вектором напряжённости. Покажем, что силы электрического поля консервативны, а само поле потенциально.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила $\vec{F}$, которую можно представить как

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = F(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (15)$$

где $F(r)$ – модуль силы. Для того, чтобы доказать, что электрическое поле потенциально, нужно доказать, что силы электрическое поле поля консервативны.

Из курса механики известно, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек. Электрическое поле является центральным, следовательно, оно консервативно. Подтвердим это расчётами. Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом q по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2 (Рис. 3). Перемещение по траектории (dl) можно разложить на две составляющие: по прямой, соединяющей заряды ($dl_{\parallel}$), и перпендикулярно ей ($dl_{\perp}$). Работа dA будет равна:

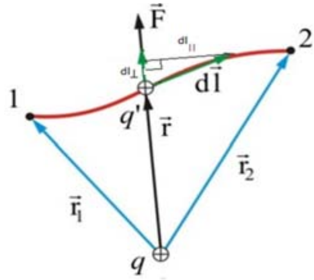


Рис. 9. Иллюстрация к доказательству консервативности электрического поля

$$dA = F \cdot dr = F(dl_{\parallel} + dl_{\perp}). \tag{16}$$

Учитывая, что $dl_{\parallel} \parallel r \Rightarrow F \cdot dl_{\parallel} = F \cdot dl_{\parallel} \cdot \cos 0^0 = Fdr$, где $r=|\vec{r}|$ и $dl_{\perp} \perp r \Rightarrow F \cdot dl_{\perp} = F \cdot dl_{\perp} \cdot \cos 90^0 = 0$. Таким образом:

$$dA = k\frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr \tag{17}$$

И полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{18}$$

Из этого уравнения видно, что работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только от координат начальной и конечной точек перемещения, что подтверждает, что силы поля консервативны, а само поле – потенциально.

Пример. Вычисление работы по перемещению заряда

Определим работу по перемещению заряда для следующего случая: заряд 1 нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1 м от поверхности металлической сферы радиусом 0,1 м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-5} Кл/м^2. На заряд со стороны электростатического поля действует сила. Поэтому при перемещении заряда в электростатическом поле совершается работа. Электрическое поле является потенциальным. Это значит, что работа по перемещению заряда не зависит от пути, по которому перемещается заряд, а зависит только от начального и конечного положения заряда.

Работа может быть представлена через разность потенциальных энергий частицы в электрическом поле:

$$A_{поля} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \left[A_{поля}\right] = \text{Дж}.$$

Площадь плоскости бесконечна и также бесконечен заряд, находящийся на плоскости. Поверхностной плотностью заряда σ называется отношение заряда плоскости Q к её площади S.

$$\sigma = \frac{Q}{S}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$$

Поверхностная плотность заряда – конечная величина, характеризующая степень заряженности бесконечной плоскости (Рис. 10).

Дано:

$q = 10^{-9}$ Кл

$R = 0{,}1$ м

$\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2

$r_2 = 0{,}1$ м

$r_1 = \infty$

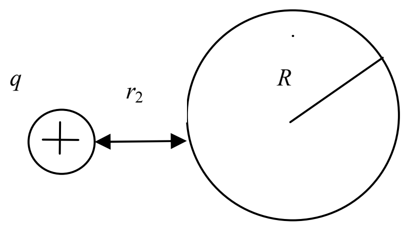


Рис. 10

Решение:

$A = W_2 - W_1$;

$W = \varphi \cdot q; \quad \varphi_1 = 0,$

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1) = q\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r+R},$$

$Q = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma$,

$$A = \frac{4\pi R^2 \sigma'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r+R\right)} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\left(r+R\right)} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-2}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} = 56497\text{Дж}.$$

Ответ: $A = 56497$ Дж

Пример решения задачи

Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующих на четвёртый заряд, помещённый на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд и напряжённость поля в точке его расположения (Рис. 11).

Дано:

$q = 1$нКл.

$a = 0,2$м,

$H = 0,6$мкН.

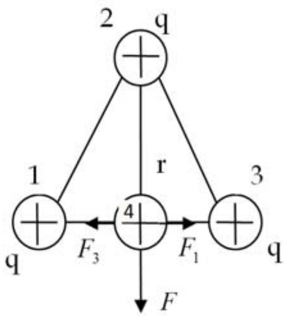


Рис. 11

Решение:

Из рисунка видно, что равнодействующая зарядов (1) и (3) на четвертый заряд равна нулю. Следовательно, сила действующая на этот заряд, определяется действием заряда (1) и может быть найдена по закону Кулона, расстояние между зарядами находим из прямоугольного треугольника.

$$F = \frac{q \cdot q_0'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r = a\,\mathrm{Cos}\,\pi/6.$$

Обозначая пробный заряд через q_0, вычисляем его значение и проверяем размерность:

$$F = \frac{qq_0' 4}{4\pi\varepsilon_0 a^2 3} = \frac{qq_0}{3\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 a^2 F}{q},$$

$$[q_0] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}} = \text{Кл},$$

$$q_0 = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}04 \cdot 6 \cdot 10^{-7'}}{10^{-9}} = 2 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}.$$

По соотношению между зарядом и силой находим напряжённость:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-9}} = 300\,\text{Н}/\text{Кл}, \quad [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$$

Ответ: $q_0 = 2 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}, \quad E = 300\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$

ПОТЕНЦИАЛ

Можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – потенциальную энергию. Если центральных сил несколько, то исходя из принципа суперпозиции сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

где *n* общее чисто сил, i индекс суммирования. Можно показать, что общая работа A_{12}, равная разности потенциальных энергий

$$A_{12} = W_2 - W_1 \tag{19}$$

будет равна сумме работ, совершаемой каждой силой в отдельности (20)(19). Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, не зависит от формы пути и сумма: следовательно

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i . \tag{20}$$

Можно подсчитать работу, совершаемую при изменении расстояния между зарядами от r_2 до r_1. Поскольку выше показано, что силы электрического поля консервативны, а само поле потенциально, то такая работа не зависит от формы траектории, а только от расстояния между зарядами.

$$A_{12} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} (-\frac{1}{r}) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}), \tag{21}$$

где q и q' — рассматриваемые заряды. Таким образом:

$$A_{12} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}).$$

Если заряды сближаются до расстояния r_1 из бесконечности (Рис. 12), то работа будет равной:

$$A_{12} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \Big|_{r_2=\infty} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1}. \tag{22}$$

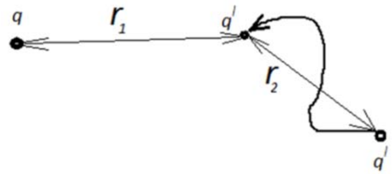


Рис.12. К расчету энергии системы зарядов

Вспоминая, что работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком и обозначая расстояние между зарядами через r получим

$$W_1 = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.,\tag{23}$$

где $r = r_2 - r_1$. При этом необходимо учитывать знак зарядов. Отметим сходство этой формулы с формулой энергии гравитационного взаимодействия. Отсутствие знака минус происходит от необходимости учитывать два знака зарядов. В случае гравитационного взаимодействия массы всегда притягиваются. Массы не бывают разных знаков. В случае взаимодействия одноименных зарядов, энергия системы будет отрицательной, и наоборот. Однако отношение энергии к заряду будет для всех зарядов одним и тем же. Эта величина и называется потенциалом, равным отношению работы по перемещению заряда из бесконечности в данную точку к величине этого заряда. Из (23) имеем:

$$\varphi_1 = \frac{W_1}{q} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}.\tag{24}$$

Видно, что физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что потенциал точки, удалённой в бесконечность, равен нулю. Когда говорят «потенциал некоторой точки» – имеют в виду разность потенциалов между этой точкой и точкой, удалённой в бесконечность.

Таким образом, потенциал точки пространства, созданный электрическим полем, численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность (или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля).

Потенциал является скалярной величиной, что делает его удобным для вычисления напряжённости ЭП.

Поскольку ЭП подчиняется принципу суперпозиции, то потенциал обладает свойством аддитивности. Потенциал в точке, созданный системой зарядов, равен сумме потенциалов, созданных каждым из зарядов.

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots.. = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . \tag{25}$$

Размерностью потенциала является «вольт» (В).

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Величина, определённая в (23) определяет энергию системы, состоящей из двух зарядов. Обобщая (23) на систему, состоящую из нескольких зарядов получаем, что энергия системы зарядов равна работе, которую нужно совершить для того, чтобы сблизить заряды на данное расстояние из бесконечности.

Вычисленная таким образом работа и называется энергией системы зарядов. Заметим, что энергия системы одноименных зарядов отрицательная (заряды отталкиваются), а разноименных – положительная (заряды притягиваются).

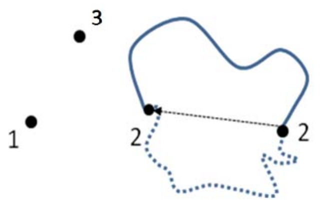


Рис. 13. К нахождению энергии системы зарядов

Вычислим энергию системы, состоящей из трех зарядов:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right). \qquad (26)$$

Обобщая на неограниченное число зарядов:

$$U == \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \qquad (27)$$

где N число зарядов, ($i \neq j$). Для исключения суммирования пары дважды, в этой формуле применён коэффициент 1/2.

Пример. Вычисление энергии кристаллической решётки

Выведем формулу подсчета энергии связи атомов кристаллической решети, образующей объёмную гранецентрированную структуру, например, поваренной соли (NaCl) (Рис. 14).

В основе энергии связи лежит электростатическое взаимодействие, следовательно, можно применить знания, полученные при вычислении энергии связи электрических зарядов, для вычисления внутренней энергии связи кристаллической решетки.

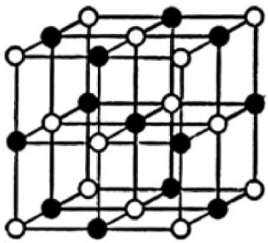


Рис. 14. Гранецентрированная решётка, состоящая из атомов двух сортов

В объёмной гранецентрированной решетке, кубическая подрешетка атомов одного вида (натрия) находится в подрешётке атомов другого вида (хлора). Рассчитаем энергию кулоновского взаимодействия, приходящую на одну ионную пару. Для подсчёта, учтём взаимодействие только ближайших атомов и просуммируем по их числу с использованием (27). Суммируя по ближайшим соседям с учётом количества одинаковых пар, получаем:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + ...\right), \tag{28}$$

Первое слагаемое появляется от шести ближайших ионов натрия, расположенных на расстоянии а, второй от двенадцати ионов хлора, расположенным по углам куба, и т.д.

Чем большее количество пар взаимодействие учитывать, тем точнее получается результат. В первом приближении его можно оставить в записанном виде. Подсчет дает ответ:

$$U = -1,748\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\alpha\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}, \tag{29}$$

где a — кратчайшее расстояние между атомами одного вида, $\alpha = 1,748$ — постоянная Маделунга.

Определение энергии связи кристалла поваренной соли экспериментальными методами даёт значение близкое к теоретическому, что свидетельствует о правильности применённого подхода.

СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛА И НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим связь потенциала φ с напряжённостью электрического поля E. Запишем выражение для работы, совершаемой ЭП при переносе заряда:

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}. \tag{30}$$

Найдём отношение этой работы к заряду:

$$dA / q = d\varphi = q\vec{E}d\vec{l} \ / \ q = \vec{E}d\vec{l}. \tag{31}$$

Таким образом:

$$d\varphi = \vec{E}d\vec{l}. \tag{32}$$

Если разность потенциалов создаётся напряжением *U*, прикладываемым между пластинами, находящимися на расстоянии *l*, в области однородности справедливо:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = El. \tag{33}$$

Теперь понятно, почему размерностью напряжённости ЭП является В/м. Из (32) следует:

$$d\varphi = E_x dx + E_y dy + E_z dz. \tag{34}$$

Разделяя данное выражение в проекциях на Декартовы оси получаем:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \tag{35}$$

$$E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \tag{36}$$

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz}, \tag{37}$$

Учитывая, что:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z, \tag{38}$$

где *i, j, k* — орты, можно «собрать» *E* через его проекции на оси Декартовой координатной системы, используя оператор Гамильтона «набла» ($\vec{\nabla}$):

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{d}{dx} + \vec{j}\,\frac{d}{dy} + \vec{k}\,\frac{d}{dz}, \tag{39}$$

Данный оператор удобен тем, что будучи формально подставляем в разные математические формулы в виде либо векторного либо скалярного произведения, он дает математически корректные с точки зрения векторного анализа выражения. Хотя оператор набла и является дифференциальным оператором, им можно алгебраически оперировать как с обычным вектором.

Подставляя (24) в (39), можно записать:

$$\vec{E} = -(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}) = -(\vec{i}\,\frac{d}{dx} + \vec{j}\,\frac{d}{dy} + \vec{k}\,\frac{d}{dz})\varphi. \qquad (40)$$

В применении к скаляру оператор Гамильтона называется градиентом, что в буквальном переводе с английского означает «изменение» (grad). Таким образом

$$\vec{E} = -grad\varphi. \qquad (41)$$

или

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi \qquad (42)$$

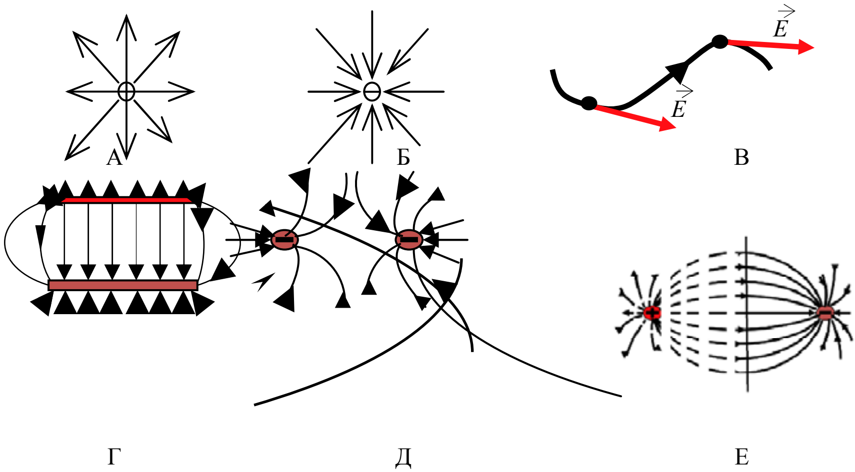


Рис. 15. Линии напряженности ЭП для случаев: А – точечного положительного заряда; Б – точечного отрицательного заряда; В – произвольной системы зарядов; Г – двух разноименных заряженных плоскостей; Д – системы, состоящей из двух одноименных зарядов; Е – системы, состоящей из заряда и проводящей скорости

Заметим, что потенциал содержит всю информацию об электрическом поле, являясь при этом скалярной величиной в отличие от векторной – напряженности ЭП, что в ряде случаев делает его более удобной характеристикой ЭП, чем напряженность ЭП.

Линии напряжённости (или силовые линии электрического поля) – это непрерывные линии, касательные к которым в каждой точке, через которую они проходят, совпадают с векторами напряжённости. Пример силовых линий ЭП для зарядов различных конфигураций показан на рис. 15. Как видно, силовые линии вблизи точечного заряда всегда расходятся радиально от точки, в которой находится заряд (А, Д, Б, Е). Это и понятно: при $r \to 0$ в формуле (14) $E \to \infty$, следовательно, влиянием других источников ЭП вблизи заряда можно пренебречь. При достаточном удалении от заряда линия ЭП может быть искривлённой (В).

Для случая двух разноимённо заряженных плоскостей, применяя принцип суперпозиции, получаем картину, из которой видно, что на достаточном удалении от краев линии напряжённости параллельны, (Г). Для построения картинки линий, создаваемых зарядом и проводящей плоскости, применяем, так называемый, принцип отражения, заключающийся в том, что заряд, находящийся вблизи бесконечной проводящей плоскости взаимодействует с плоскостью так же, как если бы по другую сторону плоскости поместили заряд равный по величине, но противоположный по знаку (Е). Такими образом, силовые линий ЭП всегда начинаются на положительном, а заканчиваются на отрицательном заряде.

Эквипотенциальные поверхности. Для графического отображения потенциала служат «эквипотенциальные поверхности» – поверхности, соединяющие точки, с одинаковым потенциалом.

Рассмотрим пример построения эквипотенциальной поверхности для случая двух проводников, находящихся под разным потенциалом: металлической пластины (1) и стержня (2). Такую систему можно собрать следующим образом. Возьмём прямоугольную кювету, заполненную электропроводящим раствором, например, однопроцентным раствором поваренной соли (рис. 14). Расположим параллельно одной из сторон пластину (1), а с противоположной стороны поместим расположенный вертикально отрезок проволоки (2). Батарея (4) создаёт между (1) и (2) разность потенциалов. Разность потенциалов между зондом (3) и электродом (2) снимает вольтметр V.

Для построения эквипотенциальных поверхностей достаточно нанести эпюру точек, лежащих под одинаковым потенциалом, внутри прямоугольника со сторонами, соответствующими границам кюветы. В этом случае эквипотенциальные поверхности будут выглядеть как линии, поскольку случай двухмерный.

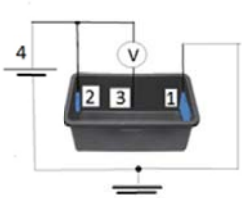


Рис.16. Кювета для графического определения потенциала

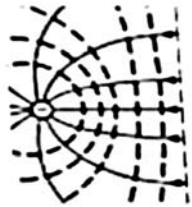


Рис. 17. Пример эквипотенциальной поверхности для случая, показанного рисунком выше. Эквипотенциальные поверхности даны пунктиром

При анализе полученной картины можно заметить, что потенциал точек, близких к плоской металлической пластине примерно одинаков, незначительно отличаясь в сторону уменьшения. Следовательно, потенциал всех точек проводника можно считать одинаковым. Речь здесь идет только о «хорошем» проводнике, например, о медном. В случае образца с меньшей удельной электропроводностью, например, пластмассе, смешанной с частичками углерода, потенциал в его различных точках уже не будет одинаков.
Нетрудно заметить, эквипотенциальные поверхности и силовые линии ЭП всегда перпендикулярны.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Для нас имеет особое значение случай двух разных по знаку, но одинаковых по модулю электрических зарядов, изображённый на

(Д). Такая система называется электрическим диполем. Поговорим о ней более подробно.

Электрическим диполем называется система, состоящая из двух равных по модулю разноимённых точечных зарядов, разнесённых в пространстве на некоторое расстояние, называемое плечом диполя, которым называется отрезок, соединяющий отрицательный заряд с положительным.

Дипольным моментом $\vec{P}$ называется вектор, равный произведению плеча диполя на модуль заряда, и направленный от отрицательного заряда к положительному (Кл м).

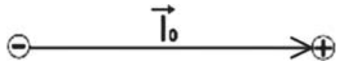


Рис.18. Электрический диполь

$$\vec{P} = q\vec{l}\,. \tag{43}$$

Понятие диполя имеет большое практическое значение потому, что при определённых условиях многие электрически нейтральный молекулы способны приобретать свойства диполя. Явление приобретения веществом дипольного момента под действием внешнего электрического поля называется поляризацией и подробно рассматривается в разделе физики конденсированного состояния. Детальное описывает поляризацию теория Дебая.

Упрощённо механизм поляризации можно представить следующим образом. Всякое вещество имеет в своём строении равное количество положительных и отрицательны зарядом. Примером может служить кристалл поваренной соли, имеющий ионное строение ($Na + Cl^-$). Другим примером является атом водорода, в котором вокруг точечного положительно заряженного ядра сферически симметрично распределена отрицательно заряженная электронная плотность. При внесении вещества в электрическое поле, заряды незначительно смещаются относительно своего положения равновесия, формируя структуру, состоящую из электрических диполей (Рис. 19).

Поляризация молекул вещества под действием электрического поля, заключающаяся в возникновении в веществе диполей, приводит к ослаблению электрического поля внутри вещества. Количественно такого рода ослабление можно охарактеризовать с помощью так называемой «диэлектрической проницаемости».

Ионный (полярный) диэлектрик А   Неполярный диэлектрик Б

Рис. 19. Примеры поляризации диэлектриков при внесении во внешнее электрическое поле.

Диэлектрической проницаемостью называется отношение напряжённости электрического поля в вакууме к таковой в веществе ($E_{вак}/E_{в\text{-}ва}$).

Соответственно, $\varepsilon_в$ равна единице. Поскольку подавляющее большинство веществ ослабляют электрическое поле, то в них ε больше единицы (Таблица 2).

Таблица 2.

Значения диэлектрической проницаемости некоторых веществ.

Вещество	ε
Вакуум	1
Воздух (н.у.)	≈ 1
Вода	81
Пластмассы	3 – 7

Пример. Вычисление потенциала, создаваемого электрическим диполем

Вспомним, что диполь является системой, состоящей из двух разноименных точечных зарядов (Рис. 20).

$$\varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}(r_- - r_+)$$

При выполнении условия $r \geq 10l$, можно положить, что

$$r_- r_+ \approx r^2 \text{ и } |r_- - r_+| = l_0 \operatorname{Cos}\theta \ .$$

Тогда:

$$\varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} l_0 \operatorname{Cos}\theta \ .$$

Или с учётом в точках, расположенных достаточно далеко от диполя, потенциал диполя равен:

$$\varphi = \frac{p \operatorname{Cos}\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \tag{44}$$

то (44) удобно переписать через скалярное произведение как

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}. \tag{45}$$

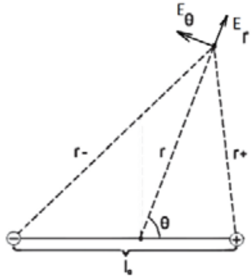


Рис.20. К вычислению потенциала диполя

Пример. Вычисление напряжённости электрического поля, создаваемого диполем

Для того, чтобы вычислить напряжённость электрического поля, создаваемого диполем, воспользуемся соотношением (41) применив его (45). При этом будем учитывать, два заряда, составляющие диполь и точка пространства, в которой вычисляем напряженность, образуют плоскость. (Три точки всегда задают плоскость). Следовательно, можно решать задачу в полярных координатах, проводя дифференцирование по расстоянию и углу пользуясь математическими правилами, существующими для этого.

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\,\mathrm{Cos}\,\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2pC\,\mathrm{os}\,\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}.$$

Отметим, что компонента E_θ направлена перпендикулярно E_r Тогда модуль напряжённости равен:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\,\mathrm{Cos}^2\,\theta},$$

Из полученных формул видно, что на продольной оси диполя:

$$\theta = 0,\ E_z = 0,\ E = E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3},$$

а на перпендикулярной оси:

$$\theta = \pi/2,\ E_r = 0,\ E = E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3},$$

Вычислим силы, действующие на диполь в электрическом поле. Рассмотрим два случая:

1. ***Случай однородного поля.*** Если электрическое поле однородно, то на положительный и отрицательный заряд будут действовать одинаковые силы. В случае, когда направление поля параллельно дипольному моменту, силы полностью компенсируют друг друга и с диполем ничего не происходит (Рис. 21). Если дипольный момент не параллелен полю, то на диполь будет действовать вращающий момент, стремящийся развернуть его в направлении поля.

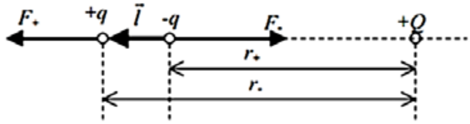


Рис. 21. Диполь в однородном электрическом поле, направление которого парал-эльному моменту

Этот вращающий момент будет равен произведению дипольного момента на напряжённость электрического поля.

$$\vec{N} = q\left[\vec{l}, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right].$$

2. ***Случай неоднородного поля***. Если поле неоднородно, то, как и в предыдущем случае, будет присутствовать сила, стремящаяся развернуть дипольный момент по направлению поля. В случае, когда диполь уже развернут, а поле существенно неоднородно на расстояниях, сравнимых с плечом диполя, на отрицательный и положительный заряд будут действовать разные силы, результирующая которых будет направлена в сторону усиления поля. Для определённости будем считать, что поле создано точечным положительным зарядом. Рассчитаем величину этой силы исходя из закона Кулона.

$$F = F_1 + F_2 = \frac{(-q)Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_-^2} + \frac{(+q)Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_+^2},$$

где r_- и r_+ расстояния от пробного заряда Q до зарядов (-q) и (+q). Выносим общий множитель за скобки и используем формулу разности квадратов:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{r_+^2}\right) = \frac{qQ(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_+^2 r_-^2},$$

далее учитываем, что на продолжении оси диполя:

$$(r_+ - r_-)(r_+ + r_-) = 2lr,$$

где r – среднее арифметическое расстояние от диполя до пробного заряда:

$$r = \frac{r_+ + r_-}{2},$$

тогда

$$F = \frac{2Qlqr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{2pq}{r^3}.$$

Это сила, с которой диполь втягивается в область более сильного поля. Теперь становится понятным объяснение опыта с кусочками бумаги, притягивающимися к наэлектризованной палочке, обсуждаемом выше.

Кусочки бумаги являются диэлектриком, поляризующимся в области неоднородного поля, создаваемого палочкой. Поэтому они и притягиваются к палочке, втягиваясь в область более сильного поля. Отметим, что в электрическом поле поляризуются не только диэлектрики, но и проводники, которые так же будут втягиваться в область более сильного электрического поля.

Вооружившись знаниями о поведении диполя в неоднородном ЭП, теперь мы можем попытаться объяснить принцип действия электрофорной машины (ЭМ), что не так просто, как кажется на первый взгляд. Итак, при вращении дисков во взаимно обратных направлениях в какой-то момент возникает случайный диполь, один из зарядов которого снимается со стороны случайно оказавшейся положительной, а другой – отрицательной обкладки. Диполь вызывает неоднородное электрическое поле, заставляющее втягиваться в него другие диполи. В силу симметричного характера конструкции ЭФ, это опять-таки диполи, возникающие на разных обкладках. Заряды продолжают течь на Лейденские банки, на которых накапливаются все увеличивающиеся заряды до того момента, как значение зарядов становится настолько большим, что вызывает поверхностные токи по диэлектрику и пробой воздуха, что и демонтируется весьма красочно в опытах по физике.

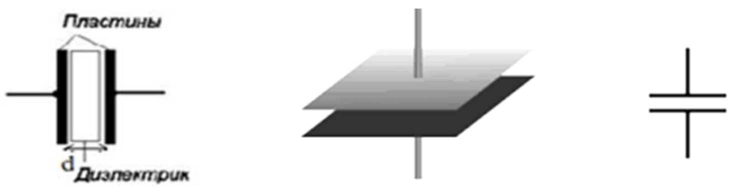
КОНДЕНСАТОР

Было бы неполным, обсуждая законы электростатики, упустить важный пример практического применения электрического поля в устройстве, способном его накапливать, называемым «конденсатором».

Конденсатором называется двухполюсник, представляющий собой два проводника, разделённые диэлектриком. Такое устройство, способно накапливать энергию в виде электрического поля. Основной характеристикой конденсатора является ёмкость, являющаяся отношением заряда к потенциалу на обкладках.

$$C = Q/U \qquad (46)$$

На Рис. 22 показана конструкция элементарного конденсатора и обозначение его на схеме. Конструкция конденсаторов не ограничивается плоскопараллельными пластинами.



А Б С

Рис. 22. Устройство плоского конденсатора (А, Б) и обозначение его на схеме (С)

Промышленность выпускает многообразие конденсаторов, различающихся как по способу накопления заряда, так и по конструкции (Рис. 23).

Рис. 23. Элементное исполнение различных конденсаторов.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Подсчитаем заряд, накапливаемый на обкладках конденсатора.

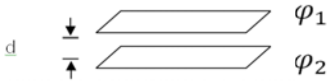


Рис. 24. К подсчёту заряда на конденсаторе

По определению напряжённости поля через разность потенциалов:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}; [E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Ниже мы вычислим напряжённость поля, создаваемое заряженной плоскостью. Пока воспользуемся этим результатом без вывода:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \tag{47}$$

В конденсаторе две обкладки, поэтому напряжённость поля между ними будет в два раза больше. Выразим плотность зарядов через разность потенциалов и расстояние между обкладками:

$$\sigma = \varepsilon_0\varepsilon E = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}. \tag{48}$$

Помножим полученный результат на площадь обкладок конденсатора S, принимая во внимание, что

$$Q = \sigma S. \quad (49)$$

Тогда получаем:

$$Q = \Delta\varphi\varepsilon_0\varepsilon/\mathrm{d} = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (50)$$

Величина, являющуюся коэффициентом пропорциональности между зарядом и напряжением на конденсаторе, называется емкостью и обозначается буквой C.

$$C = \varepsilon_0\varepsilon S / d.$$

ЭНЕРГИЯ КОНДЕНСАТОРА

Энергию заряженного конденсатора можно вычислить путём вычисления энергии, которую необходимо затратить для переноса элементарного заряда с одной обкладки на другую. Для этого умножим силу, действующую на заряд (F), на расстояние между обкладками d:

$$A = F \cdot d = E \cdot q \cdot d = \varphi \cdot q \quad (51)$$

$$dW = \varphi_{12} dq = \frac{q}{C} dq = \frac{qdq}{C} \quad (52)$$

где φ_{12} – разность потенциалов между обкладками.

Далее проинтегрировав (52), получим

$$W = \frac{1}{C}\int qdq = \frac{q^2}{2C}. \quad (53)$$

В результате получим три формулы для энергии конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}Uq = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (54)$$

Вычисление плотности энергии электрического поля

Для вычисления плотности энергии ЭП проще всего подсчитать энергию плоского конденсатора, взяв за основу (27):

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\right)(Ed) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} Sd = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2 V}{2}. \tag{55}$$

Найдём плотность энергии, разделив (55) на объем между обкладками (V) в виде:

$$\omega_E = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2}. \tag{56}$$

Проинтегрировав плотность энергии ЭП по объёму, несложно вычислить энергию, заключённую в электрическом поле произвольной формы:

$$W = \int \omega_E dV = \varepsilon\varepsilon_0 \int \frac{1}{2} E^2(V) dV. \tag{57}$$

Таким образом, видим, что плотность энергии пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Определить потенциал поля в точке расположения заряда 4 (Рис. 25).

Решение:

Потенциал является энергетической характеристикой электрического поля. Он обладает свойством аддитивности, поэтому потенциал поля в точке 4 будет равен алгебраической сумме потенциалов от остальных

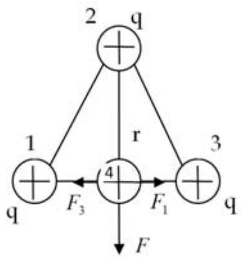


Рис. 25

зарядов. Для его нахождения воспользуемся принципом суперпозиции и, учитывая, что потенциалы от 1 и 3 зарядов одинаковы и применяя формулу (24) для потенциала точечного заряда получим:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{kq}{r}, \tag{58}$$

и применяя данную формулу к системе зарядов, получим:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(2\frac{1}{a/2} + \frac{1}{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}(4 + \frac{1}{\mathrm{Cos}\,30^0}), [\varphi] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Н}}{\text{кг}^2\cdot\text{м}} = \text{В}$$

$$\varphi = \frac{10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}2}(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}) = 232\text{В}.$$

Учитывая, что все заряды положительные, в данной задаче потенциалы складывались.

Ответ: φ = 232 В.

Задача 2

Два шарика по 0,2 г подвешены в общей точке на нитях длиной 0,5 м. Шарикам сообщили заряд и нити разошлись на угол 90°. Определить напряженность и потенциал поля в точке подвеса шариков (Рис. 26).

Дано:

$m = m_1 = m_2 = 0{,}2\text{Г}$,

$l = 0{,}5\text{м}$,

$\alpha = 90^0$

Решение:

Запишем условие баланса сил в равновесии:

$$m\vec{g} + F_{\text{Кл}} + \vec{T} = 0.$$

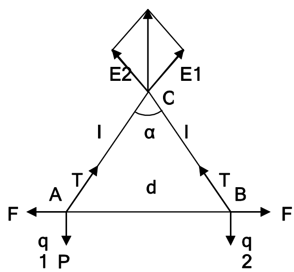


Рис. 26

Спроецируем векторное уравнение баланса сил на оси координат:

$$\text{Ox:}F_{\text{Кл}} = \vec{T}\,\mathrm{Sin}\,\alpha,$$

$$\text{Oy:}mg = T\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Расстояние между шариками найдём по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{2}l.$$

Поскольку шарики одинаковые и имеют одинаковый заряд, можно рассмотреть один из них. Силы, действующие на шарик:

$$F_{\text{Кл}} = \vec{T}\,\mathrm{Sin}\,\alpha,$$
$$mg = T\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Из этого следует:

$$\left|\vec{F}_{\text{Кл}}\right| = \left|\vec{P}\right|.$$

Подставляя формулы для закона Кулона и веса, с учётом равенства зарядов, получаем:

$$k\frac{q^2}{2l^2} = mg \Rightarrow q = \sqrt{2l^2 mg / k}.$$

Из равенства зарядов и расстояний до точки подвеса имеем, что напряженности электрического поля, созданные этими шариками в точке подвеса, равны по модулю:

$$\left|E_{AC}\right| = \left|E_{BC}\right| = k\frac{q}{l^2}.$$

Суммарная напряженность в точке подвеса равна:

$$E_C = \sqrt{E_{AC}^2 + E_{BC}^2} = \sqrt{2}\left|E_{AC}\right| = k\frac{q}{l^2},$$

$$E_C = \frac{2\sqrt{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}8}}{0{,}5} = 1{,}68 \text{ кВ/м.}$$

Из тех же самых соображений, потенциалы электрического поля, созданные этими шариками в точке подвеса, так же равны по модулю:

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} = k\frac{q}{l}.$$

Суммарный потенциал в точке подвеса равен:

$$\varphi_C = \varphi_{AC} + \varphi_{BC} = k\frac{2q}{l} = 2\sqrt{2kmg},$$

$$\varphi_C = 2\sqrt{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8} = 1{,}188\text{кВ}.$$

Ответ: E_C = 1.68 кВ/м; φ_C = 1.188 кВ.

Задача 3

Заряд 1 нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1 м от поверхности металлической сферы радиусом 0,1 м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-5} Кл/м². Определить работу по перемещению заряда (Рис. 27).

Дано:

q = 1нКл = $1\cdot 10^{-9}$ Кл;
r = 0,1 м;
R = 0,1 м;
$\sigma = 10^{-5}\,\text{Кл}/\text{м}^2$.

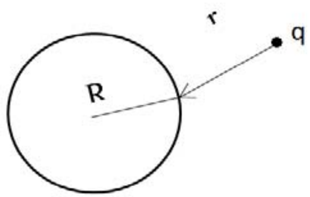


Рис. 27

Решение:

Разность потенциалов между начальной и конечной точкой перемещения заряда равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}.$$

Потенциал точки, которая находится в бесконечности равен нулю, φ_1 = 0. φ_2 – потенциал поля в точке на расстоянии (R + r) от центра сферы. Определим его:

$$\varphi_2 = k\frac{q_0}{(R+r)},$$

где: $k = 9{\cdot}10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$. q_0 – заряд на поверхности сферы. Заряд на поверхности сферы определим, зная поверхностную плотность.

$$\sigma = \frac{q_0}{S}; \sigma = \frac{q_0}{4\pi R^2}; q_0 = 4\pi R^2\sigma.$$

Определим работу перемещения заряда:

$$A = (\varphi_1 - k\frac{4\pi R^2\sigma}{(R+r)})q,$$

где $|A| = 5{,}652{\cdot}\ 10^{-5}$Дж. Знак работы зависит от знаков зарядов. При одноименных знаках работа отрицательная так как выполняется против сил поля. При разноимённых знаках работа положительная (поле выполняет работу).

Ответ: $5{,}652{\cdot}\ 10^{-5}$Дж.

Задача 4

Пылинка массой $8{\cdot}10^{-15}$ кг удерживается в равновесии между горизонтально расположенными обкладками плоского конденсатора. Разность потенциалов между обкладками 490 В, а зазор между ними 1 см. Определить, во сколько раз заряд пылинки больше элементарного заряда (Рис. 28).

Дано:
$m = 8\ 10^{-15}$ кг;
$g = 9{,}81$ м/с^2;
$U = 490$ В;
$d = 1$ см $= 0{,}01$ м;
$e = 1{,}6\ 10^{-19}$ Кл
Найти:
n-?

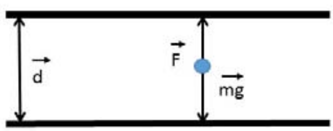


Рис. 28

Решение:

В проекции на вертикальную ось, баланс сил, действующих на пылинку:

$$F = mg.$$

Сила, действующая на заряд со стороны электрического поля, уравновешивается силой тяжести пылинки. Эту силу, действующую со стороны электрического поля, несложно выразить через потенциал на обкладках:

$$F = qE = q\frac{U}{d},$$

где q – заряд на пылинке. Отсюда:

$$q = \frac{mgd}{U}.,$$

Проверим размерность:

$$\left[q\right] = \frac{\text{кг}(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})\text{м}}{\text{В}} = \frac{\text{кг}(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})\text{Кл}}{\text{Дж}} = \frac{\text{кг}(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})\text{мКл}}{\text{кг}(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})} = \text{Кл}.$$

Вычислим количество избыточных элементарных зарядов на пылинке

$$n = \frac{q}{e} = \frac{mgd}{Ue} = \frac{8 \cdot 10^{-15} \cdot 9,81 \cdot 0,01}{490 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 5

Электрон влетает в пространство между обкладками плоского конденсатора в середине зазора в направлении, параллельном обкладкам со скоростью $\upsilon = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. При какой минимальной разности потенциалов на обкладках электрон не вылетит из конденсатора, если длина конденсатора 10 см, а расстояние между его обкладками 1 см (Рис. 29)?

Дано:
$v = 2 \cdot 10^7 \frac{м}{c}$;
$l = 10$ см $= 0{,}1$ м;
d=1 см=0, 01 м;
$e = 1{,}6 \cdot\ 10^{-19}$Кл;
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Найти: $U_{\min}$.

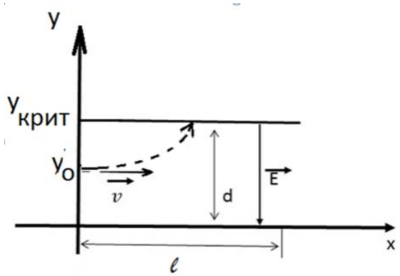


Рис. 29

Решение:

Электрон в конденсаторе двигается по параболе. Электрическое поле стремится притянуть электрон к обкладке. При некотором критическом значении поля электрон упадет на обкладку. Данное значение можно вычислить, составив уравнения движения по осям вдоль и перпендикулярно обкладок конденсатора. Направим ось ординат OY перпендикулярно направлению влета:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{at^2}{2}. \qquad (59)$$

Зададим y как $y_{крит} = d - y_0$, а y_0 как точку влёта, тогда:

$$y_{крит} = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{at_{крит}^2}{2}, \qquad (60)$$

где $t_{крит}$ – критическое время, за которое частица не выйдет за пределы конденсатора при равномерном движении вдоль оси x.

По оси OX движение равномерное и может быть записано как

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t.$$

Выбирая координату точки влёта равной нулю, найдём критическое время, полагая координату равной длине конденсатора

$$t_{\text{крит}} = \frac{l}{\upsilon_{0x}}. \qquad (61)$$

Подставляя, (61) в (60) , находим ускорение, с которым должен двигаться электрон, чтобы не вылететь за пределы конденсатора. Оно оказывается равным $4 \cdot 10^{16}$ м/с^2. Теперь нетрудно вычислить минимальную разность потенциалов между обкладками

$$ma = F = eE = e\frac{U_{\min}}{d} \Rightarrow U_{\min} = \frac{adm}{e},$$

что в результате вычислений дает 2275 В.
Ответ: $U_{min}=2275$ В

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Теорема Остроградского-Гаусса (ТОГ), которую мы собираемся обсудить, является, так же как и теорема Стокса, математической теоремой, доказанной учеными Остроградским и Гауссом для некоторых векторных функций. Выяснилось, что теорема Остроградского-Гаусса без каких-либо модификаций устанавливает связь между электрическими зарядами и созданным ими электрическим полем, представляя собой в какой-то степени более общую и изящную формулировку закона Кулона. Иногда ТОГ для краткости называют теоремой Гаусса.

Впервые ТОГ применял (интуитивно) Лагранж в 1867 году, преобразовывая тройные интегралы в двойные с помощью интегрирования по частям. Историческая справка: Гаусс Карл Фридрих проводил исследования в многих разделах физики.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г. сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).

Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

В 1813, 1830 гг показал общий метод преобразования тройного интеграла к поверхностному.

Остроградский Михаил Васильевич, отечественный математик и механик. Учился в Харьковском университете, совершенствовал знания в Париже.

Основные научные работы написаны им в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. В 1826 году вывел математическую формулировку теоремы Остроградского-Гаусса в общем виде, представив её в виде теоремы в 1831 году.

Для того, чтобы сформулировать ТОГ, введем понятие потока силовых линий ЭП.

Потоком линий однородного электрического поля Ф называют количество силовых линий, пронизывающих площадь S перпендикулярно площади. (Рис. 30).

Если все элементы площадки перпендикулярны силовым линиям и поле напряженностью E однородно, то можно записать:

$$\Phi = ES. \qquad (62)$$

Для неоднородного поля и площадки $\mathrm{d}S$ произвольной ориентации по отношению к силовым линиям необходимо использовать дифференциальное соотношение для элементарного потока $\mathrm{d}\Phi$ в виде скалярного произведения

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}d\vec{S}. \qquad (63)$$

Напомним, что под вектором площади понимается вектор, имеющий направление нормали к площади, и численно равный площади.

$$\vec{S} = \vec{n}S, \tag{64}$$

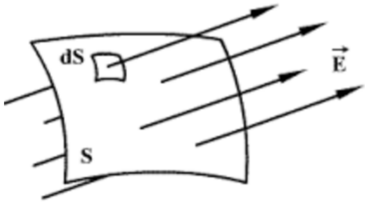


Рис. 30. Пример потока линий ЭП через поверхность произвольной формы

Можно сформулировать следующие свойства потока:
1. Поток через замкнутую поверхность, суммарный заряд внутри которой равен нулю, так же равен нулю;
2. Поток – это скаляр, который, в зависимости от направления поля может быть либо положительным, либо отрицательным.

В качестве примера рассмотрим поток через различные поверхности, изображенные на Рис. 31. Поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi > 0$ Поверхность A_2 окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi < 0$ и направлен внутрь. Если считать, что оба заряда одинаковы, то поток через поверхность A, окружающую оба заряда, равен нулю.

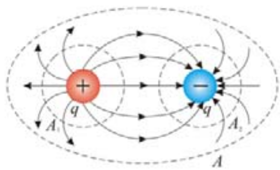


Рис. 31. Поток через различные поверхности, окружающие систему зарядов

Для того, чтобы сформулировать ТОГ запишем поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную элементарную площадку dS в направлении нормали (Рис. 32):

$$\mathrm{d}\Phi_{\vec{E}} = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha = E_n dS. \tag{65}$$

Интегрируя (63), получаем:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int E_n dS. \qquad (66)$$

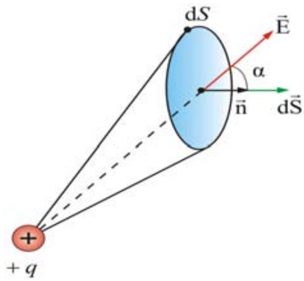


Рис. 32. Расчёт потока через замкнутую поверхность произвольной формы

Подсчёт потока линий ЭП через сферическую замкнутую поверхность.

Применим полученные формулы для подсчета потока вектора через сферическую замкнутую поверхность S_1, окружающую точечный заряд q (Рис. 33).

Выберем центр сферы совпадающим с центром заряда. Радиус сферы S_1 равен R_1. В каждой точке поверхности S_1 проекция E на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1^2}, \qquad (67)$$

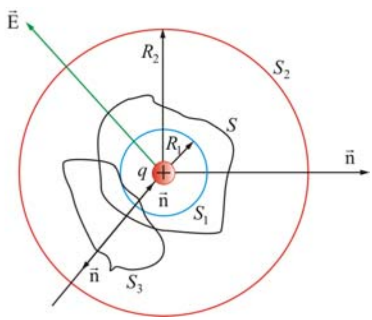


Рис. 33. Вычисление потока через сферическую поверхность

тогда поток через поверхность S_1 равен:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{68}$$

или

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{69}$$

Аналогично можно подсчитать поток через сферу S_2:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \cdot 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{70}$$

Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме

Можно показать, что (69) определяет поток через произвольную поверхность S, ограничивающую заряд q. Аналогичное справедливо для нескольких зарядов внутри поверхности интегрирования.

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_{S} E_n dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}. \tag{71}$$

Таким образом, полный поток вокруг системы зарядов, алгебраическая сумма которых равна q будет:

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{72}$$

и равным нулю вокруг области, не содержащей заряды. Формулу (71) называют теоремой Остроградского-Гаусса (ТОГ) для случая электрических зарядов, хотя в действительности уравнение скорее является следствием из формулы Гаусса-Остроградского, математическую формулировку которой приведем далее.

Формулу (71) нередко расширяют на случай области, содержащей распределённые заряды. Поскольку

$$\sum_i q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{73}$$

и

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{74}$$

Поток можно записать:

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{75}$$

Формула (75) распространяет теорему Остроградского-Гаусса на случай распределенных зарядов.

Понятие о дивергенции

Для понимания дальнейшего изложения необходимо ввести величину, называемую дивергенцией. Рассмотрим векторную функцию E, непрерывную вместе со своими производными. Вычислим ее поток через замкнутую поверхность и разделим его на объем ΔV, который ограничивает замкнутая поверхность, затем вычислим предел отношения, устремив объем к нулю, в результате получим:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S}. \tag{76}$$

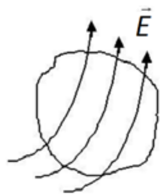


Рис. 34. Поток векторной функции через замкнутую поверхность произвольной формы (случай плоскости)

выражение, которое является математическим определением дивергенции, не зависящим от системы координат. В Декартовой системе дивергенцию можно записать как

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{77}$$

Слово «дивергенция» является транслитом английского «divergence» (истечение). Действительно, если представить себе векторную функцию как поток воды через некоторое поперечное сечение, то дивергенция будет количеством воды, проходящим за единицу времени.

Как и градиент, дивергенцию можно записать с помощью оператора «набла». Напомним, что оператор набла в применении к скалярной функции имеет смысл градиента, а в применении к векторной – дивергенции.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \tag{78}$$

Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме в дифференциальной форме.

Удобно применять в ряде случаев дифференциальную формулировку ТОГ. Вспомним (74). Пусть заряд распределён в объёме со средней плотностью $\langle\rho\rangle$. Тогда:

$$\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\langle\rho\rangle\Delta V}{\varepsilon_0}. \tag{79}$$

Разделив (79) на ΔV получим:

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}. \tag{80}$$

Теперь устремим ΔV к нулю, стягивая его к интересующей нас точке. При устремлении объёма к нулю средняя плотность заряда становится равной локальной плотности:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{81}$$

Обобщая (76) и (81), получим:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{82}$$

что является формулировкой ТОГ в применении к электрическим зарядам в дифференциальной форме. Записывая скалярное произведение, точку нередко пропускают так же, как и стрелочку над «набла» (оператором Гамильтона):

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{83}$$

Дифференциальная формулировка теоремы Гаусса через потенциал. Учитывая (78) перепишем (83) как:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = \nabla\left(-\nabla\varphi\right) = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi. \tag{84}$$

Бывает удобно записывать ТОГ через потенциал:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{85}$$

При записи(84) мы ввели так называемый оператор Лапласа (Δ), который в Декартовых координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}. \tag{86}$$

Между оператором Лапласа и Гамильтона существует следующее соотношение, в справедливости которого Читатель легко убедится самостоятельно:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2 = \Delta\varphi. \tag{87}$$

Формула Гаусса-Остроградского

В заключение приведем математическую формулировку ТОГ безотносительно к электрическому полю:

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{A} = \oint\!\!\oint_S \vec{A}\vec{n}\mathrm{d}S, \qquad (88)$$

здесь $\vec{A}$ – любая непрерывная векторная функция, обладающая некоторыми математическими особенностями, имеющими отношение к непрерывности, которые любознательный читатель может найти в специализированных учебниках [2]. Справедливость (88) и ее применимость к электростатике несложно проверить, подставив плотность заряда в левую часть данного уравнения, понимая под A напряжённость электрического поля E. Тогда, осуществив интегрирование по объёму, перейдём к полному заряду q, заключённому внутри поверхности. Правая же часть (88) даст поток. Формула (88) и называют формулой Гаусса-Остроградского.

Нетрудно заметить, что с математической точки зрения (88) устанавливает связь между тройным интегралом (по объему, трех переменных) и двойным (по поверхности, двух переменных), то есть позволяет понижать порядок интегрирования.

В дальнейшем в этом курсе (выходящем за рамки данного пособия) будет изучаться еще одна теорема подобного рода – теорема Стокса, позволяющая переходить от интеграла по площади (двух переменных) к интегралу по кривой (одной переменной), существенно облегчая решение многих задач.

Интегральная форма ТОГ в применении вычислению характеристик электрического поля

Переписав предыдущее уравнения для электрического поля, получаем универсальную формулировку ТОГ в её «истинно математическом» виде:

---

[2] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Москва: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{E} = \oiint\limits_S \vec{E}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S. \qquad (89)$$

Значение ТОГ позволяет в некоторых случаях значительно упростить подсчет напряженности электрического поля, чем можно убедиться, изучив следующие примеры.

Применение ТОГ для вычисления напряжённости поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

Для вычисления напряжённости поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, рассмотрим бесконечную плоскость, заряженную с плотностью заряда σ, представив в виде производной заряда по площади:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}.$$

Рассечём плоскость цилиндром, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания, соответственно, параллельны. Будем считать, что место пересечения плоскостью находится точно в середине сторон цилиндра. Подсчитаем суммарный поток линий электрического поля Φ_E через замкнутую поверхность цилиндра. Он будет равен сумме потоков через образующие цилиндра и плоскости его оснований. В силу определения потока, поток через образующие равен нулю, поскольку вектор напряжённости поля параллелен стенкам цилиндра ($E_{\mathrm{n}} = 0$).

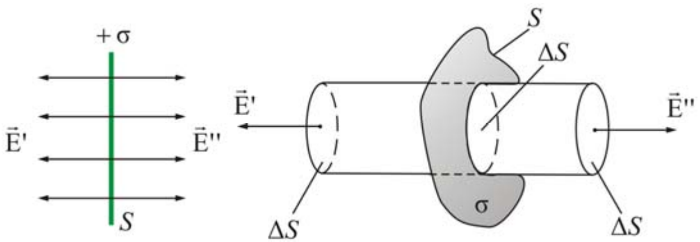


Рис. 35. Иллюстрация к вычислению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

Поток через плоскости оснований цилиндра будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta S E.$$

Внутри поверхности заключён заряд. Следовательно, из теоремы Остроградского-Гаусса получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta S E = \sigma \Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}, \qquad (90)$$

откуда видно, что напряжённость поля, бесконечной плоскости S равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (91)$$

Применение ТОГ для вычисления напряжённости поля бесконечной равномерно заряженной нити

Аналогично предыдущему случаю, применим ТОГ для вычисления напряжённости ЭП, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью.

Представим нить в виде цилиндра радиуса R, заряженного с постоянной линейной плотностью заряда λ:

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}, \qquad (92)$$

где $\mathrm{d}q$ – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра $\mathrm{d}l$.

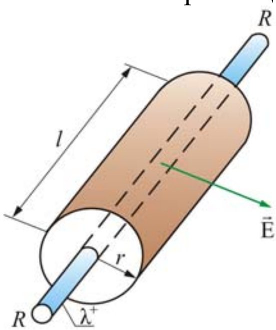


Рис. 36. К вычислению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью

Представим вокруг цилиндра (нити) коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре) радиуса r и длиной l (основания цилиндров перпендикулярно оси). Поток Ф через основания цилиндров равен нулю. Для боковой поверхности цилиндра поток зависит от расстояния r. Следовательно, поток линий вектора электрического поля E через боковую поверхность цилиндра при $r \geq R$, равен:

$$\Phi_{\vec{E}} = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$

На поверхности цилиндра заряд равен $q = \lambda l$, поэтому по тереме Остроградского-Гаусса получим:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

При $r \leq R \quad E(r) = 0,$ что графически изображено на рис. 37.

Применим полученный результат для вычисления потенциала на некотором расстоянии от заряженной нити. Это можно сделать с помощью интегрирования:

$$\varphi_{12} = -\int_{p1}^{p2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{R}^{r/2} 2\lambda\big/_{r} \mathrm{d}r = -2\lambda \ln r / 2 + 2\lambda \ln R.$$

Согласно своему физическому смыслу, потенциал определен с точностью до константы.

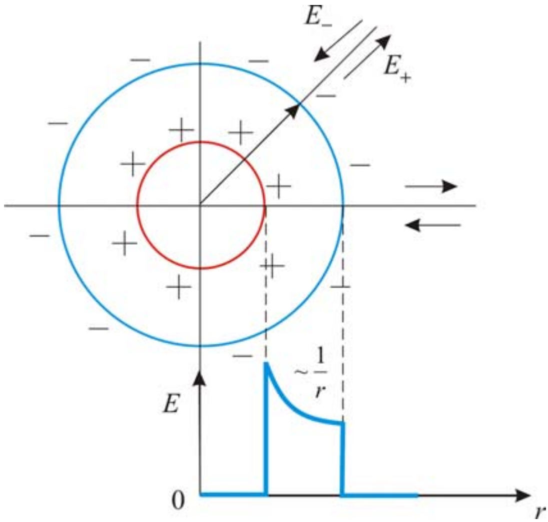


Рис. 37. Зависимость напряженности поля от расстояния для случая равномерно заряженной подповерхностен нити конечной толщины.

Отметим, что потенциал на бесконечности в данном случае взять равным нулю не удастся.

Полезно сопоставить зависимость поля и потенциала от расстояния для объектов различной размерности (Табл. 3) и обдумать полученные результаты. Иногда приходится слышать, что напряженности поля внутри сферически заряженной поверхности по теореме Остроградского-Гаусса равна нулю, поскольку в ней нет электрических зарядов. В действительности теореме Остроградского-Гаусса утверждает, что только дивергенция электрического поля вокруг области, не содержащей заряды, равна нулю, ничего не утверждая при этом про напряженность электрического поля.

На самом деле поле внутри сферической полости действительно равняется нулю, если поверхность заряжена равномерно, но не по теореме Остроградского-Гаусса, а по следствию из теоремы Беркова [3].

---

[3]. Birkhoff, G. D. (1923).Relativity and Modern Physics. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. LCCN 23008297.

Таблица. 3.

Характер зависимости поля и потенциала от расстояния для объектов различной формы/размерности.

Объект	Поле	Потенциал	Примечание
Не определено	$\frac{1}{r^n}$, n≥5	$\frac{1}{r^{n-1}}$	Ван дер Ваальсовы (дисперсионные) взаимодействия
Квадруполь	$\frac{1}{r^4}$	$\frac{1}{r^3}$	
Диполь	$\frac{1}{r^3}$	$\frac{1}{r^2}$	
Точечный заряд	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r}$	
Нить	$\frac{1}{r}$	$\ln r$	
Плоскость	Const	r	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения этой книги вы узнали, как вычислять потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов или проводниками различной формы.

Получили начальные представления об энергии электрического поля, свойствах электрических зарядов.

Ознакомились с принципом действия конденсатора и научились определять его параметры в цепях постоянного тока. Полученные знания будут полезны при дальнейшем изучении курса электричества и магнетизма.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Закон Кулона

1. Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующая на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника равна, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд, напряженность и потенциал поля в точке его расположения.

2. Если в центр квадрата, в вершинах которого находятся заряды по +2 нКл, поместить отрицательный заряд, то результирующая сила, действующая на каждый заряд, будет равна нулю. Вычислить числовое значение отрицательного заряда.

Потенциал. Работа поля

3. Два одинаковых заряда находятся в воздухе на расстоянии 0,1 м друг от друга. Напряжённость поля в точке, удалённой на расстоянии 0,06 м от одного и 0,08 м от другого заряда, равна 10 кВ/м. Определить потенциал поля в этой точке и значение зарядов.

4. Заряд –1 нКл переместился в поле заряда +1,5 нКл из точки с потенциалом 100 В в точку с потенциалом 600 В. Определить работу сил поля и расстояние между этими точками.

5. Два одинаковых заряда находятся в воздухе на расстоянии 0,1 м друг от друга. Напряжённость поля в точке, удалённой на расстоянии 0,06 м от одного и 0,08 м от другого заряда, равна 10 кВ/м. Определить потенциал в этой точке и значение зарядов.

6. Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующих на четвёртый заряд, помещённый на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд, напряжённость и потенциал поля в точке его расположения.

7. Заряд 1 нКл притянулся к бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью 0,2 мкКл/м^2. На каком расстоянии от плоскости находился заряд, если работа сил поля по его перемещению равна 1 мкДж?

8. Заряд 1 нКл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 0,1 м от поверхности металлической сферы

радиусом 0,1 м, заряженной с поверхностной плотностью 10^{-3} Кл/м^2. Определить работу по перемещению заряда.

9. Два шарика массой по 2 мг подвешены в общей точке на нитях длиной 0,5 м. Шарикам сообщили заряд и нити разошлись на угол 90º.Определить напряжённость и потенциал поля в точке подвеса шариков.

10. Какую работу нужно совершить чтобы заряды 1 и 2 нКл, находившиеся на расстоянии 0,5 м сблизились до 0,1 м?

Поток. Теорема Гаусса

11. Поверхностная плотность заряда бесконечной равномерно заряженной плоскости равна 30 нКл/м^2. Определить поток вектора напряжённости через поверхность сферы диаметром 15 см, рассекаемой этой плоскостью пополам.

12. В поле бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 перемещается заряд из точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от плоскости, в точку на расстоянии 0,5 м от нее. Определить заряд, если при этом совершается работа 1 мДж.

Конденсатор. Энергия электрического поля.

13. Вычислить ёмкость батареи, состоящей из трех конденсаторов ёмкостью 1 мкФ каждый, при всех возможных случаях их соединения.

14. Энергия плоского воздушного конденсатора 0,4 нДЖ, разность потенциалов на обкладках 600 В, площадь пластин 1 см^2. Определить расстояние между обкладками, напряжённость и объемную плотность энергии поля конденсатора.

15. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 В. Площадь пластин 1 см^2, напряжённость поля в зазоре между ними 300 кВ/м. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах, ёмкость и энергию конденсатора.

16. В поле бесконечной, равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 перемещается заряд из точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от плоскости, в точку на

расстоянии 0,5 м от неё. Определить заряд, если при этом совершается работа 1 мДж.

17. Два конденсатора одинаковой емкости по 3 мкФ заряжены один до напряжения 100 В, а другой – до 200 В. Определить напряжение между обкладками конденсаторов, если их соединить параллельно: а) одноименно; б) разноименно заряженными обкладками.

18. Заряд на каждом из двух последовательно соединенных конденсаторов ёмкостью 18 пкФ и 10 пкФ равен 0,09 нКл. Определить напряжение: а) на батарее конденсаторов; б) на каждом конденсаторе.

19. Под действием силы притяжения 1 мН диэлектрик между обкладками конденсатора находится под давлением 1 Па. Определить энергию и объёмную плотность энергии поля конденсатора, если расстояние между его обкладками 1 мм.

20. Конденсатор ёмкостью 6 мкФ последовательно соединён с конденсатором неизвестной ёмкости и они подключены к источнику постоянного напряжения 12 В. Определить ёмкость второго конденсатора и напряжения на каждом конденсаторе, если заряд батареи 24 мкКл.

21. Найти объемную плотность энергии электрического поля, создаваемого заряженной металлической сферой радиусом 5 см на расстоянии 5 см от ее поверхности, если поверхностная плотность заряда на ней 2 мкКл/м^2.

22. Заряд 1н Кл находится на расстоянии 0,2 м от бесконечно длинной равномерно заряженной нити. Под действием поля нити заряд перемещается на 0,1 м. Определить линейную плотность заряда нити, если работа сил поля равна 0,1 мкДж.

23. Конденсатор с парафиновым диэлектриком заряжен до разности потенциалов 150 В. Напряжённость поля 6 МВ/м, площадь пластин 6 см^2. Определить ёмкость конденсатора и поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора.

24. Площадь пластин плоского слюдяного конденсатора 1,1 см^2, зазор между ними 3 мм. При разряде конденсатора выделилась энергия 1 мкДж. До какой разности потенциалов был заряжен конденсатор?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника Модуль каждого заряда равен 1,5 нКл, все стороны шестиугольника – по 3 см (Рис. 38).

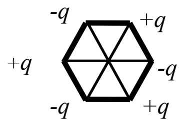


Рис. 38

2. Тонкий стержень длиной 20 см несёт равномерно распределённый заряд $\tau = 0{,}1$ мкКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке А, лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от его конца.

3. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U_1 = 300$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения, пространство между пластинами заполняется эбонитом ($\varepsilon_1 = 3$). Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найдите ёмкость конденсатора C_1 и C_2и поверхностные плотности зарядов σ_1 и σ_2 на пластинах до и после заполнения.

Вариант 2

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника. Модуль каждого заряда равен 1 нКл; сторона шестиугольника – 2 см (Рис. 39).

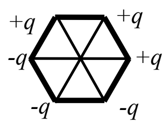


Рис. 39

2. По тонкому полукольцу радиуса 10 см равномерно распределён заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке О, совпадающей с центром кольца.

3. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора 0,1 м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U_1 = 100$ В. При включённом к источнику напряжения конденсаторе, пространство между пластинами заполняется эбонитом ($\varepsilon_1 = 3$). Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найдите ёмкость конденсатора C_1 и C_2и поверхностные плотности зарядов σ_1 и σ_2 на пластинах до и после заполнения.

Вариант 3

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найдите напряжённость электрического поля в центре шестиугольника. Модуль каждого заряда равен 2 нКл; все стороны шестиугольника – по 2 см (Рис. 40).

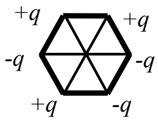


Рис. 40

2. Четверть тонкого кольца, радиусом $R = 10$ см несёт равномерно распределённый заряд $Q = 0{,}05$ мкКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, совпадающей с центром кольца.

3. Дан плоский конденсатор, имеющий три диэлектрические прокладки толщиной 2 мм из стекла ($\varepsilon_1 = 7$), слюды ($\varepsilon_1 = 6$) и парафина ($\varepsilon_1 = 3$), заполняющие весь объём между обкладками. Площадь обкладки конденсатора 200 см^2. Определите ёмкость этого конденсатора и падение напряжения на каждом диэлектрике при подаче на конденсатор напряжения в 50 В. Определите энергию поля, накопленную в конденсаторе, и поверхностную плотность зарядов на каждом диэлектрике.

Вариант 4

1. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии 10 см друг от друга. Определить напряжённость поля в точке, удалённой от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

2. Две трети тонкого кольца радиусом 10 см несут равномерно распределённый заряд с линейной плотностью 0,2 мкКл/м. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, совпадающей с центром кольца.

3. Плоский конденсатор зарядили с помощью источника ЭДС – $\varepsilon = 200$ В. Затем конденсатор был отключён от источника. Определить напряжение между пластинами, если расстояние между ними увеличить с 0,2 до 0,7 мм, а пространство между пластинами заполнить слюдой ($\varepsilon = 7$). Найдите поверхностную плотность связанных зарядов.

Вариант 5

1. В трёх вершинах квадрата со стороной 0,4 м находятся одинаковые положительные заряды по $5*10^{-9}$ Кл каждый. Найти напряжённость и потенциал поля в четвёртой вершине квадрата.

2. Тонкое полукольцо радиуса 20 см заряжено равномерно зарядом 0,7 нКл. Найдите модуль напряжённости электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

3. Электроёмкость плоского конденсатора равна 1,5 пФ, расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Найти ёмкость конденсатора, если на нижнюю пластину положен лист эбонита толщиной $d_1 = 3$ мм ($\varepsilon_1 = 3$). Определить поверхностную плотность связанных зарядов в эбоните, если к конденсатору приложить напряжение 8,5 В.

Вариант 6

1. В центр квадрата, в вершинах которого находятся положительные заряды величиной 2,3 нКл, помещён отрицательный заряд. Найдите значение этого заряда, если результирующая сила, действующая на заряд, равна нулю.

2. Две бесконечно длинные равномерно заряженные нити расположены параллельно друг другу на расстоянии 10 см. Найти геометрическое место точек, где результирующая напряжённость поля равна нулю, если линейные плотности зарядов нитей имеют значения $\tau_1 = 0,2$ мкКл/м, $\tau_2 = 0,6$ мкКл/м.

3. Конденсатор ёмкостью 16 мкФ последовательно соединён с конденсатором неизвестной ёмкости, и оба они подключены к источнику постоянного напряжения 12 В. Определите ёмкость второго конденсатора, если заряд батареи 24 мкКл.

Вариант 7

1. Два положительных точечных заряда Q и $9 \cdot Q$ закреплены на расстоянии 100 см друг от друга. Определите, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Указать какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения зарядов возможны только вдоль прямой, проходящей через закреплённые заряды.

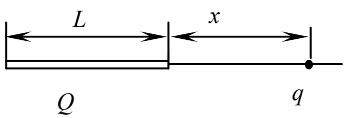


Рис. 41

2. Тонкий стержень, имеющий длину 10 см, равномерно заряжен положительным зарядом 0,05 мкКл. Найдите силу, действующую на точечный заряд q, распо ложенный на расстоянии $x = 20$ см от него, лежащий на продолжении стержня. Найти напряжённость поля в точках, лежащих на продолжении стержня, как функцию расстояния до стержня (Рис. 41).

3. Одной из пластин плоского конденсатора площадью 0,2 м^2 сообщили заряд $3{,}14 \cdot 10^{-9}$ Кл. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. Между пластинами, параллельно им, находится стеклянная пластинка, толщиной $d_1 = 0{,}5$ мм. Определить напряжённость электрического поля в стекле ($\varepsilon = 7$) и в воздухе ($\varepsilon = 1$), поверхностную плотность связанных зарядов и напряжение на конденсаторе.

Вариант 8

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены два положительных и четыре отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника Модуль каждого заряда равен 1,5 нКл; каждая сторона шестиугольника – 3 см (Рис. 42).

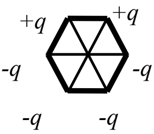


Рис. 42

2. Четверть тонкого кольца, радиусом $R = 10$ см несёт равномерно распределённый заряд $Q = 0{,}05$ мкКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, совпадающей с центром кольца.

3. Конденсаторы ёмкостью $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ заряжены до напряжений $U_1 = 60$ В и $U_2 = 100$ В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими одноимённые заряды.

Вариант 9

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены четыре положительных и два отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника Модуль каждого заряда равен 1,5 нКл; стороны шестиугольника – по 3 см (Рис 43).

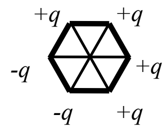


Рис. 43

2. Две трети тонкого кольца несут равномерно распределённый заряд с линейной плотностью $\tau = 2$ мкКл/м. Определить напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, совпадающей с центром кольца, если радиус кольца $R = 10$ см.

3. Конденсаторы ёмкостью $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 5$ мкФ и $C_3 = 10$ мкФ соединены последовательно и находятся под напряжением $U = 850$ В. Определить напряжение и заряд на каждом из конденсаторов.

Вариант 10

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены два положительных и четыре отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника Модуль каждого заряда равен 1 нКл; сторона шестиуголь ника – 3 см (Рис 44).

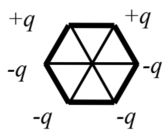


Рис. 44

2. Тонкое кольцо несёт распределённый заряд 0,2 мкКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке А, равноудалённой от всех точек кольца на расстояние r = 20 см. Радиус кольца R = 10 см.

3. Два конденсатора ёмкостями C_1 =2 мкФ и C_2 =5 мкФ заряжены до напряжений U_1 = 100 В и U_2=150 В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими разноимённые заряды.

Вариант 11

1. В вершинах правильного шестиугольника расположены четыре положительных и два отрицательных заряда. Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в центре шестиугольника Модуль каждого заряда равен 2 нКл; каждая сторона шестиугольника – 2 см (Рис. 45).

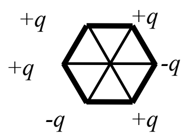


Рис. 45

2. По тонкому кольцу радиуса 20 см равномерно распределён заряд 10 нКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке А, лежащей на оси кольца и удалённой от его центра на расстояние, равное радиусу кольца.

3. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора ёмкостью 100 пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определите, на сколько изменится ёмкость батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить парафином ($\varepsilon_1 = 3$).

Вариант 12

1. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = –20$ нКл и $q_2 = 10$ нКл, находящимися на расстоянии 10 см друг от друга. Определить напряжённость поля в точке, удалённой от первого заряда на $r_1 = 8$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

2. По тонкому полукольцу радиуса 20 см равномерно распределён заряд с линейной плотностью $\tau = 2$ мкКл/м. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, совпадающей с центром кольца.

3. Два конденсатора ёмкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 8$ мкФ соединены последовательно и присоединены к батарее с ЭДС $\varepsilon = 80$ В. Определить заряды конденсаторов и разности потенциалов между их обкладками.

Вариант 13

1. В трёх вершинах квадрата со стороной 0,1 м находятся одинаковые отрицательные заряды по 10^{-9} Кл каждый. Найдите напряжённость и потенциал поля в четвёртой вершине квадрата.

2. По тонкому кольцу радиуса 10 см равномерно распределён заряд $Q = 1$ нКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке А, лежащей на оси кольца и удалённой от его центра на расстояние, равное двум радиусам кольца.

3. Электроёмкость плоского конденсатора равна 1,5 пФ, расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Найти ёмкость конденсатора, если на нижнюю пластину положен лист эбонита толщиной $d_1 = 3$ мм ($\varepsilon_1 = 3$). Определить поверхностную плотность связанных зарядов в эбоните, если к конденсатору приложить напряжение 8,5 В.

Вариант 14

1. Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующих на четвёртый заряд, помещённый на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6 мкН. Определите этот заряд, напряжённость и потенциал поля в точке его расположения.

2. Тонкое кольцо несёт заряд 12,56 мкКл. Определите напряжённость электрического поля, создаваемого распределённым зарядом в точке *A,* равноудалённой от всех точек кольца на расстояние 20 см. Линейная плотность заряда $\tau = 2$ мкКл/м.

3. Одной из пластин плоского конденсатора площадью 0,2 м^2 сообщили заряд $3{,}14 \cdot 10^{-9}$ Кл. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. Между пластинами параллельно им находится стеклянная пластинка, толщиной $d_1 = 0{,}5$ мм. Определите напряжённость электрического поля в стекле ($\varepsilon = 7$) и в воздухе ($\varepsilon = 1$), поверхностную плотность связанных зарядов и напряжение на конденсаторе.

Вариант 15

1. На расстоянии 10 см друг от друга в воздухе находятся два положительных заряда по 1 нКл каждый. Определите напряжённость и потенциал поля в точке находящейся на расстоянии 12 см от зарядов.

2. Тонкий стержень, имеющий длину 20 см, равномерно заряжен положительным зарядом с линейной плотность заряда $\tau = 0{,}2$ мкКл/м. Найдите силу, действующую на точечный заряд q, расположенный на расстоянии $x = 0{,}2$ м от него. Найти напряжённость поля в точках, лежащих на продолжении стержня, как функцию расстояния до стержня (Рис. 46).

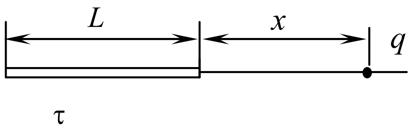


Рис. 46

3. Плоский конденсатор зарядили с помощью источника ЭДС – $E = 100$ В. Затем конденсатор был отключён от источника. Определить напряжение между пластинами, если расстояние между ними увеличить с 0,3 мм до 0,8 мм, а пространство между пластинами заполнить слюдой ($\varepsilon = 7$). Найдите поверхностную плотность связанных зарядов.

Таблица 4

Основные константы

Название	Обозначение	Величина
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}8541878176 2039\cdot10^{-12}$ Ф/м
Заряд электрона (элементарный заряд)	e^-	$-1{,}6021766208\cdot10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$9{,}10938291\cdot10^{-31}$ кг
Электромагнитная постоянная (скорость света)	C	299 792 458 м/с
Масса протона		$1{,}672\,621\,898\cdot10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	h	$6{,}626\,070\,040\cdot10^{-34}$ Дж·с

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ СОКРАЩЕНИЯ (АКРОНИМЫ)

ЗСЭЗ	Закон сохранения электрического заряда
ТОГ	Теорема Остроградского-Гаусса
ЭП	Электрическое поле
ЭквП	Эквипотенциальная поверхность
ЭМ	Электрофорная машина

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Общая физика. Механика. Сборник задач /Варшавский С. П., Макасюк И. В. Рязанцева О.Л. и др. СПб.: СПГГИ, 2000, 74 с.
2. *Детлаф А.А.*, Курс физики. /Детлаф А.А., Яворский Б.М. М.: Высшая школа, 2009, 718 с.
3. *Савельев И.В.* Курс физики в 3 томах. Учеб. пособие М.: Лань, Т. 1., 2016, 415 с
4. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. М.: Бином, 2007, 432с.
5. Общая физика. Механика. Учебное пособие / А.П. Корольков, А.С. Мустафаев, Н.Н. Смирнова и др. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2009.
6. Электродинамика: сб. задач / И. И. Парфёнова, С.В. Егоров, А.С. Мустафаев и др. СПГГУ, СПб, 2011.
6.*Тамм И. Е.,* Основы теории электричества, 9 изд., М., 1976.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.,* Теория поля, 6 изд., М., 1973.
8. *Сивухин Д. В.,* Общий курс физики, 2 изд., т. 3.

9. *P. Debye*, Physik. Z., 36, 193, 1935.
10. *P. Debye* , Chem. Rev., 19, 171, 1936.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968.
12. *Birkhoff, G. D*. (1923). Relativityand Modern Physics. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. LCCN 23008297.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания и контрольные задания к самостоятельной работе для студентов специальности 21.05.06

Сост.: *К.Л. Левин, Ю.И. Кузьмин, Т.В. Стоянова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой общей и технической физики

Ответственный за выпуск *Ю.И. Кузьмин*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 26.06.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 4,1. Усл.кр.-отт. 4,1. Уч.-изд.л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ 602. С 215.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2