

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальности 08.05.01*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра строительства горных предприятий
и подземных сооружений

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальности 08.05.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2022

УДК 622.281(075.8У)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ: Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *М.А. Карасев, Н.А. Беляков, П.Э. Вербилло* СПб., 2022. 45 с.

Представлены модели деформирования строительных материалов и геоматериалов, а также методики прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива и конструкций подземных сооружений в рамках нелинейной теории.

Методические указания составлены применительно к программе курса «Нелинейные задачи строительной механики» для студентов специальности 08.05.01 «Уникальные здания и сооружения», специализация «Строительство подземных сооружений».

Научный редактор: зав. кафедрой строительства горных предприятий и подземных сооружений Санкт-Петербургского горного университета проф. *А.Г. Протосеня*.

Рецензенты: канд. техн. наук. *А.Б. Максимов* (ООО «Геотехническое бюро»)

© Санкт-Петербургский
горный университет, 2022

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях рассмотрены вопросы деформирования материалов и геоматериалов. Первый раздел носит справочный характер и содержит базовые сведения о напряжениях, деформациях и напряженно-деформированном состоянии (НДС) элементарного объема. Далее рассмотрены модели деформирования строительных материалов и геоматериалов, а также теоретические и прикладные положения методик прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива и конструкций подземных сооружений в рамках нелинейной теории.

При разработке учебно-методических указаний предполагалось, что обучающиеся ознакомлены с базовым функционалом программного комплекса Abaqus/CAE [10]. Описание включает только краткую последовательность построения модели, а также задание свойств пластического деформирования материалов.

1. БАЗОВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

1.1. Общие сведения

Данный раздел в методических указаниях к практическим занятиям носит справочный характер и предназначен для получения базовых представлений о напряжениях, деформациях и напряженно-деформированном состоянии (НДС) элементарного объема. Представлены основные элементы теории упругости и теории пластического течения.

1.2. Напряжения и деформации

Внешние силы, которые действуют на твёрдое тело, можно разделить на две группы: поверхностные и массовые (объемные).

Поверхностные силы являются результатом взаимодействия двух тел. Примером поверхностных сил являются давление одного тела на другое при соприкосновении, давление здания на грунт, давление газа или жидкости на стенки сосуда и т.д.

Поверхностные силы характеризуются интенсивностью q_v , т.е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, по которой распределена эта сила. Интенсивность поверхностной силы также называется давлением. Размерность давления выражается в H/m^2 (или $Па$). Проекции (компоненты) давления q_v на оси координат x, y, z обозначаются X_v, Y_v, Z_v , соответственно. Здесь v – внешняя нормаль к поверхности тела, к которой приложена эта сила.

Массовые силы распределены по всей массе тела. Примером массовых сил являются сила тяжести, магнитные силы, силы инерции для тела, находящегося в движении, и т.д. Массовые силы, отнесённые к единице объёма (т.е. интенсивности массовых сил, называемые объёмными силами), также раскладывают на три проекции: X, Y, Z . Их размерность – H/m^3 . Действие температуры при неравномерном нагреве тела с использованием метода устранения деформации при решении задач также сводится к поверхностным и массовым силам.

Проекция интенсивности внешней нагрузки считается положительной, если её направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси. Поверхностные и массовые силы, так же, как и параметры НДС, являются функциями координат точки.

В твёрдом теле всегда имеют место внутренние силы, которые выражают взаимодействие молекул между собой и обеспечивают существование твёрдого тела, его прочность. При действии на тело внешних сил оно деформируется. Вследствие деформирования возникают дополнительные внутренние силы.

Для исследования возникающих в теле внутренних сил воспользуемся методом сечений, который применим к находящемуся в равновесии телу, нагруженному внешними силами (рис. 1.1).

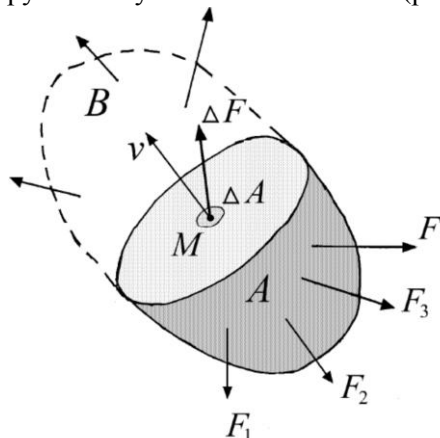


Рис. 1.1. Плоское сечение твердого деформируемого тела

Мысленно разрежем тело произвольной плоскостью на две части *A* и *B* и отбросим часть *B*. Оставшаяся часть *A* также находится в равновесии под воздействием приложенных внешних сил F_1, F_2, F_3, \dots и системы внутренних сил, распределённых по сечению и представляющих собой действие удалённой части *B* на часть *A*.

Выделим в плоскости сечения вокруг точки *M* элементарную площадку ΔA , весьма малую по сравнению с размерами сечения, но достаточно большую по сравнению с расстояниями между отдельными молекулами тела.

Обозначим через ΔF главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку ΔA . Тогда напряжением внутренних сил, или полным напряжением p_v в точке M тела на лежащей в плоскости сечения площадке ΔA с нормалью v называется предел отношения:

$$p_v = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

Аналогично можно определить полные напряжения в остальных точках этого и других сечений, проведённых через тело.

Полное напряжение является вектором: оно характеризуется величиной и направлением. В общем случае вектор полного напряжения наклонён к площадке ΔA , на которой он действует, и не совпадает с направлением нормали v к площадке. Поэтому вместо полного напряжения p_v удобнее рассматривать его составляющие в сечениях, параллельных координатным плоскостям.

Для этого в окрестности точки O тела, нагруженного внешними силами, вырежем элементарный параллелепипед (рис. 1.2), рёбра dx , dy , dz которого параллельны координатным осям x , y , z , а грани – параллельны координатным плоскостям xOy , xOz , yOz . На гранях этого параллелепипеда действуют полные напряжения, которые можно разложить на нормальную (нормальное напряжение) и касательную (касательное напряжение) составляющие к грани. В свою очередь, касательное напряжение можно разложить на две составляющие, параллельные координатным осям. В результате на каждой грани параллелепипеда действует по три напряжения – одно нормальное и два касательных. Напряжения обозначаются греческими буквами: σ (читается «сигма») – нормальные напряжения, τ (читается «тау») – касательные напряжения.

Первый индекс в обозначении напряжений указывает ось, параллельно которой направлено напряжение, а второй индекс – ось, параллельно которой направлена внешняя нормаль к грани параллелепипеда, на которой действует напряжение. Если сказать короче, то первый индекс указывает направление напряжения, а второй – площадку, на которой оно действует.

В общих разделах механики принято следующее правило знаков для напряжений: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) направление, то напряжение поло-

жительно в случае, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. В соответствии с приведённым правилом знаков положительные нормальные напряжения являются растягивающими, а отрицательные – сжимающими. На рисунке (Рис. 1.2 **Ошибка! Источник ссылки не найден.**) показаны положительные направления напряжений. Напряжения, так же, как и интенсивность поверхностной нагрузки, выражаются в H/m^2 (Па).

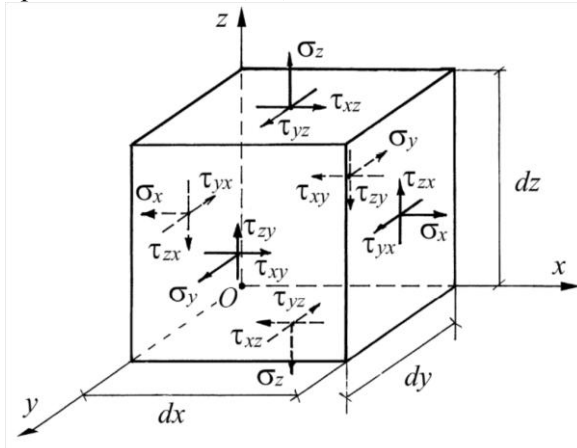


Рис. 1.2. Разложение напряжений на гранях элементарного объема

В отличие от общих разделов механики, в геомеханике правило знаков напряжений противоположно. Это значит, что положительными нормальными напряжениями считаются сжимающие напряжения, а отрицательными – растягивающие. В горном массиве еще до проведения горных работ сформировалось естественное напряженное состояние, которое по меньшей мере обусловлено собственным весом горных пород. Это естественное напряженное состояние имеет вид объемного неравнокомпонентного сжатия, и именно поэтому сжимающие нормальные напряжения считаются положительными.

Принята следующая запись напряжений и деформаций, которая в дальнейшем будет использоваться при описании моделей деформирования среды. Напряженное состояние в точке представ-

ляет собой тензор второго порядка σ , который содержит 9 компонент напряжений:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ – компоненты нормальных напряжений; $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ – компоненты касательных напряжений.

Тензор деформаций ε запишем как

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ – компоненты нормальных относительных деформаций; $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zx}$ – компоненты деформаций формоизменения в тензорной форме.

В векторной форме напряженное состояние в точке σ можно записать через 6 компонент напряжений, 3 нормальных напряжения и 3 касательных:

$$\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})^T. \quad (1.4)$$

Деформации в векторной форме можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx})^T \\ &= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})^T \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – компоненты относительных деформаций формоизменения в векторной форме.

Величины главных напряжений не зависят от положения координатных осей x, y, z , т.е. от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты уравнения (1.6):

$$\left. \begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_{2\sigma} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_{3\sigma} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей координат, т. е. они являются инвариантами. Коэффициенты $I_{1\sigma}$, $I_{2\sigma}$, $I_{3\sigma}$ называются, соответственно, первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений.

Таким образом, инварианты тензора напряжений – это характеристики напряжённого состояния, не зависящие от выбора системы координат.

Величина σ_0 называется средним нормальным напряжением:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (1.7)$$

Инварианты тензора напряжений можно выразить через главные напряжения, для чего в формулах (1.11) касательные напряжения следует положить равными нулю, а нормальным напряжениям дать индексы 1, 2 и 3 главных напряжений. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_{2\sigma} &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_{3\sigma} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Интенсивность нормальных напряжений определяется по формуле:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (1.9)$$

Октаэдрические напряжения можно определить по следующей формуле:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2. \quad (1.10)$$

Интенсивность деформации формоизменения определяются по следующей формуле:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \quad (1.11)$$

1.3. Основы теории упругости

Общие положения. Взаимосвязь между деформациями ε и напряжениями σ в общем случае записывается через матрицу упругости $[D]$, которая содержит в себя набор коэффициентов, определяющих поведение среды:

$$\sigma = [D]\varepsilon. \quad (1.12)$$

В рамках теории упругости взаимосвязь между приращением напряжений $d\sigma$ и упругих деформаций $d\varepsilon^e$ определяется матрицей упругости $[D^e]$:

$$d\sigma = [D^e]d\varepsilon^e. \quad (1.13)$$

В общем виде матрица упругости $[D^e]$ представляет собой тензор 4-го порядка, который содержит 36 упругих констант:

$$[D^e] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Изотропная среда. Для пород, в которых анизотропия деформационных свойств отсутствует или проявляется незначительно, матрица упругости для изотропного материала на может быть в общем виде представлена следующим образом:

$$[D^e] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

или через упругие константы E и ν следующим образом:

$$\mathbf{D}_{gl}^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

где c_{ij} – коэффициенты матрицы упругости; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

Матрица податливости для изотропного материала \mathbf{C}_{gl}^e найдем, взяв обратную матрицу от матрицы упругости \mathbf{D}_{gl}^e :

$$\mathbf{C}_{gl}^e = (\mathbf{D}_{gl}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Для того, чтобы изотропная матрица упругости/податливости имела смысл, вводятся следующие ограничения на ее константы:

$$\begin{aligned} E &> 0; \\ -1 < \nu < 0.5. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уравнение (1.12) с учетом матрицы упругости изотропной линейно-деформируемой среды (1.16) можно представить набором из шести уравнений, которые связывают соответствующие компоненты напряжений с деформациями:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}]; \quad (1.19)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu - 2\nu^2} [v\varepsilon_{xx} + (1 - \nu)\varepsilon_{yy} + v\varepsilon_{zz}];$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1 - \nu - 2\nu^2} [v\varepsilon_{xx} + v\varepsilon_{yy} + (1 - \nu)\varepsilon_{zz}];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy};$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{yz};$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xz}.$$

Значения деформационных характеристик среды изотропной линейно-деформируемой среды E и ν при известных напряжениях и деформациях можно определить по следующим формулам, приняв, что ε_{zz} является продольной деформацией, а $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ являются поперечными деформациями:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}} = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}; \quad (1.20)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}.$$

Альтернативные упругие характеристики изотропной линейно-деформируемой среды, модуль сдвига G и модуль объемного сжатия K определяются как:

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{\tau_{xz}}{\gamma_{xz}}; \quad (1.21)$$

$$K = \frac{p}{\varepsilon_v},$$

или могут быть пересчитаны через характеристики среды E и ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad (1.22)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)},$$

где p – средние напряжения; ε_v – объемные деформации.

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (1.23)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

В условиях невозможности бокового расширения связь между нормальными напряжениями и деформации в направлении приложения нагрузки осуществляется через одометрический модель деформации, который определяется по следующей формуле:

$$E_{oed} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}. \quad (1.24)$$

1.4. Основы теории пластического течения

Закон пластического течения необходим для определения приращения пластических деформаций. В общем виде рассматривается, что в обобщенном пространстве напряжений существует пластический потенциал – нормальный вектор, направленный от пластического потенциала и соответствующий данному напряженному состоянию, который является вектором приращения пластических деформаций. Закон пластического течения может быть выражен в виде следующей формулы

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (1.25)$$

где $d\lambda$ – пластический множитель; g – пластический потенциал.

Взаимосвязь между приращением напряжений $d\sigma$ и полных деформаций $d\varepsilon$ можно выразить в форме уравнения

$$d\sigma = [D^{ep}]d\varepsilon, \quad (1.26)$$

где $[D^{ep}]$ – упругопластическая матрица.

Вектор приращения полных деформаций $d\varepsilon$ можно разделить на две части следующим образом

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \quad (1.27)$$

где $d\varepsilon^e$ – вектор приращения упругих деформаций; $d\varepsilon^p$ – вектор приращения пластических деформаций.

Подставив уравнение (1.27) в уравнение (1.13), выразим приращение вектора напряжений следующим образом

$$d\sigma = [D^e](d\varepsilon - d\varepsilon^p). \quad (1.28)$$

Приращение пластических деформаций найдем из закона пластического течения. Подставим уравнение (1.25) в уравнение (1.28), и получим следующее выражение

$$d\sigma = [D^e]d\varepsilon - \lambda[D^e]\frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (1.29)$$

Пластический множитель λ все еще остается неизвестным, необходимо провести дополнительные преобразования для его нахождения.

Когда материал испытывает упругопластическое деформирование, последующее нагружение должно удовлетворять условию совместности (напряженное состояние в точке должно находиться на поверхности пластического течения). Математически условие совместности может быть выражено следующим образом

$$df = f(\sigma + d\sigma, k + dk) = 0. \quad (1.30)$$

Применив цепное правило дифференцирования, получим:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f^T}{\partial k} dk = 0. \quad (1.31)$$

Параметр упрочнения k связан с пластическими деформациями следующим образом:

$$d\mathbf{k} = \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} d\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (1.32)$$

Подставив уравнение (1.32) в уравнение (1.31) получим:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0. \quad (1.33)$$

Подставим уравнение (1.25) в уравнение (1.33) получим:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (1.34)$$

Отсюда, найдем величину пластического множителя λ :

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma}}{\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}. \quad (1.35)$$

Определив неизвестное значение пластического множителя λ , подставим уравнение (1.29) в уравнение (1.35):

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e] d\boldsymbol{\varepsilon}}{\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e] \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}. \quad (1.36)$$

Отсюда, взаимосвязь между приращениями напряжений и полных деформаций можно выразить следующим образом:

$$d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{[\mathbf{D}^e] \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e]}{\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e] \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.37)$$

После преобразований, упругопластическую матрицу среды выразим следующим образом:

$$[\mathbf{D}^{ep}] = [\mathbf{D}^e] - \frac{[\mathbf{D}^e] \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e]}{\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\mathbf{D}^e] \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}. \quad (1.38)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ НА ОСНОВАНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

1.5. Общие положения

Цель работы – изучение условия пластичности Мизеса и прогноз изменения напряженного состояния среды, подчиняющейся условию пластичности Мизеса, при различных видах воздействия.

Задачи работы:

1. Изучить основные теоретические положения упругопластической модели, основанной на условии пластичности Мизеса.
2. Выполнить построение конечно-элементной модели для проведения численных экспериментов материала при различных видах напряженного состояния.
3. Получить представление о характере изменения напряженно-деформированного состояния элементарного объема при различных траекториях его нагружения.

Модели, основанные на условии пластичности Мизеса, применяются для выполнения прогноза напряженно-деформированного состояния сред, пластическое поведение которых не зависит от величины средних напряжений (например, некоторые виды сталей). Данная модель позволяет прогнозировать развитие пластических деформаций при произвольных траекториях изменения напряженного состояния такой среды.

В работе рассмотрены основные теоретические положения условия пластичности Мизеса. Представлена методика проведения виртуального эксперимента в программном комплексе Abaqus/Standard.

1.6. Теоретические положения

Поверхность пластического течения в пространстве главных напряжений представляет собой цилиндр, вытянутый вдоль гидростатической оси p (рисунок 2.1). Размер цилиндра в девиаторной

плоскости не изменяется. В меридиональной плоскости след поверхности пластического течения представляет собой линию, расположенную параллельно гидростатической оси. В плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ поверхность пластического течения представляет собой овал. При изотропном упрочнении поверхность пластического течения расширяется во всех направлениях на одинаковую величину. Величина предельного значения интенсивности нормальных напряжений q не зависит от величины средних напряжений.

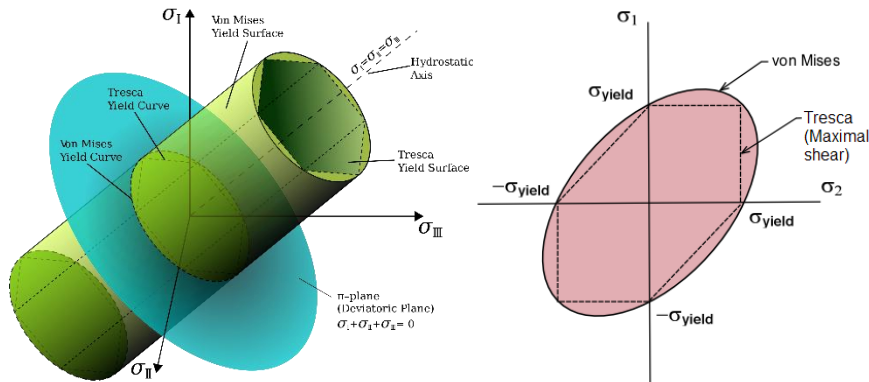


Рис. 2.1. Графическое изображение поверхности пластического течения Мизеса: а – в пространстве действия главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; б – в плоскости действия главных напряжений σ_1, σ_2 .

Математически, условие пластичности Мизеса выражается следующим образом:

$$J_2 = k^2, \quad (2.1)$$

где k – предел текучести материала при чистом сдвиге.

Величина предела текучести материала при чистом сдвиге соотносится с величиной предела текучести при одноосном сжатии для условия пластичности по следующей формуле:

$$k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}, \quad (2.2)$$

где σ_y – предел текучести материал в условиях одноосного растяжения.

Подставив формулу (2.2) в (2.1) получим следующую запись:

$$\sigma_y = \sqrt{3J_2}, \quad (2.3)$$

или через интенсивность нормальных напряжений выражение (2.3) выразим как:

$$\sigma_y = q, \quad (2.4)$$

Сведем уравнения для определения эквивалентных напряжений по Мизесу в таблицу (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Сводная таблица уравнений условия пластичности Мизеса при различном напряженном состоянии

Напряженное состояние	Граничные условия	Уравнение условия пластичности Мизеса
Обобщенное	Без ограничений	
Обобщенное в главных напряжениях	$\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{31} = 0$ $\sigma_{23} = 0$	$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$
Плоское напряжение	$\sigma_{33} = 0$ $\sigma_{31} = 0$ $\sigma_{23} = 0$	$q = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}$
Плоское напряжение в главных напряжениях	$\sigma_3 = 0$ $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{31} = 0$ $\sigma_{23} = 0$	$q = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$
Чистый сдвиг	$\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$ $\sigma_{31} = 0$ $\sigma_{23} = 0$	$q = \sqrt{3} \sigma_{12} $
Одноосное растяжение	$\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$ $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{31} = 0$ $\sigma_{23} = 0$	$q = \sigma_1$

1.7. Методика построения численной модели прогноза НДС элементарного объема

Для изучения механического поведения упругопластической модели, основанной на условии пластичности Мизеса, выполним построение элементарного объема с размерами 1.0x1.0x1.0 м. Модель предназначена для исследования изменения напряженно-деформированного состояния элементарного объема в условиях одноосного и трехосного сжатия.

Последовательность создания численной модели, следующая:

1. В модуле **Part** выполняется построение кубика с размерами 1.0x1.0x1.0 м (рис. 2.2)

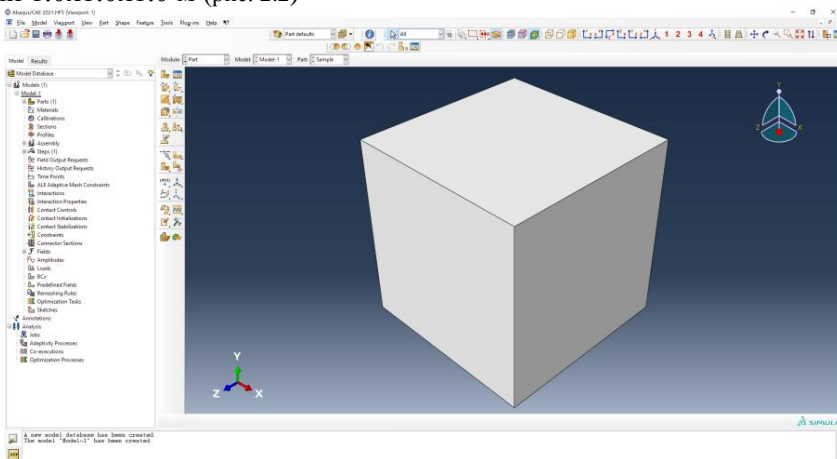


Рис. 2.2 – Создание элементарного объема с размерами 1.0x1.0x1.0 м

2. В модуле **Properties** создается материал со следующими параметрами: модуль упругости – 210 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.3. Пластические свойства приведены как зависимость (рис. 2.3) между напряжениями и эквивалентными пластическими деформациями (в условиях одноосного растяжения). В качестве условия пластичности принято условие Мизеса, закон упрочнения – изотропное упрочнение.

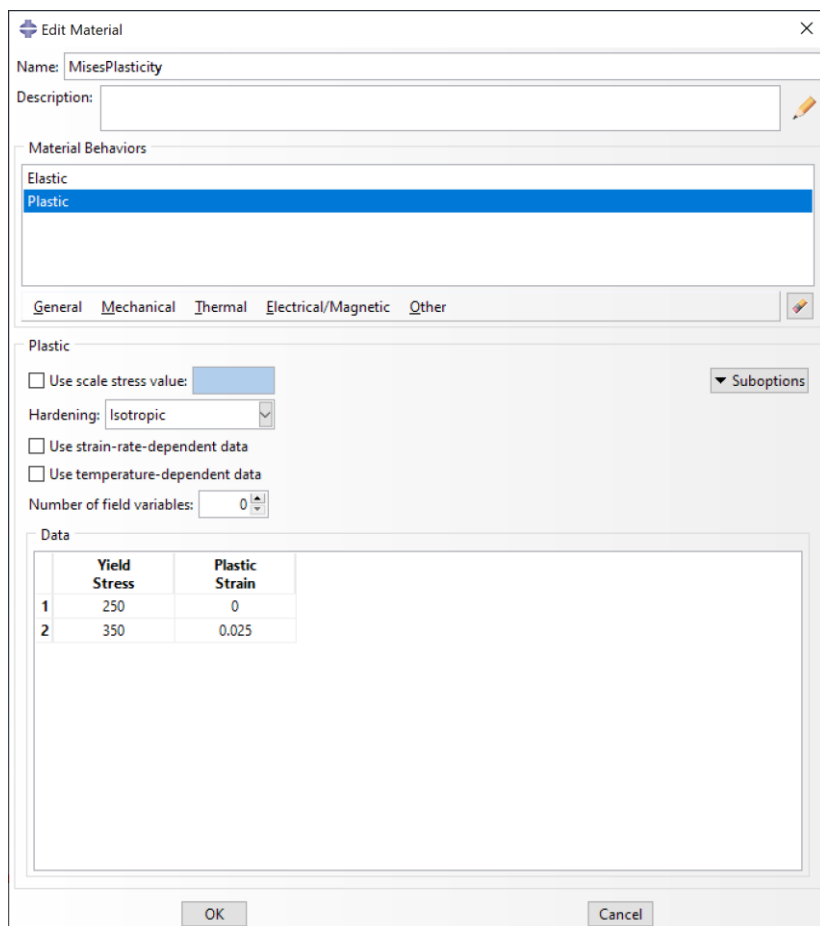


Рис. 2.3 – Задание пластических характеристик материала согласно условию Мизеса

3. В модуле **Assembly** осуществляется расположение созданного геометрического объекта в расчетной области в исходных координатах.

4. Рассматриваемая задача решается в два расчетных шага, идеализирующих условие одноосного и трехосного сжатия. На первом шаге формируются граничные условия, моделирующие формирование всесторонней нагрузки. На втором шаге к границам модели

прикладываются граничные условия, моделирующие передачу осевой нагрузки на образце.

Таким образом для задания первого шага создаем в модуле **Step** расчетный шаг **Static, General**. Все параметры расчетного шага оставляем по умолчанию (рисунок 2.4).

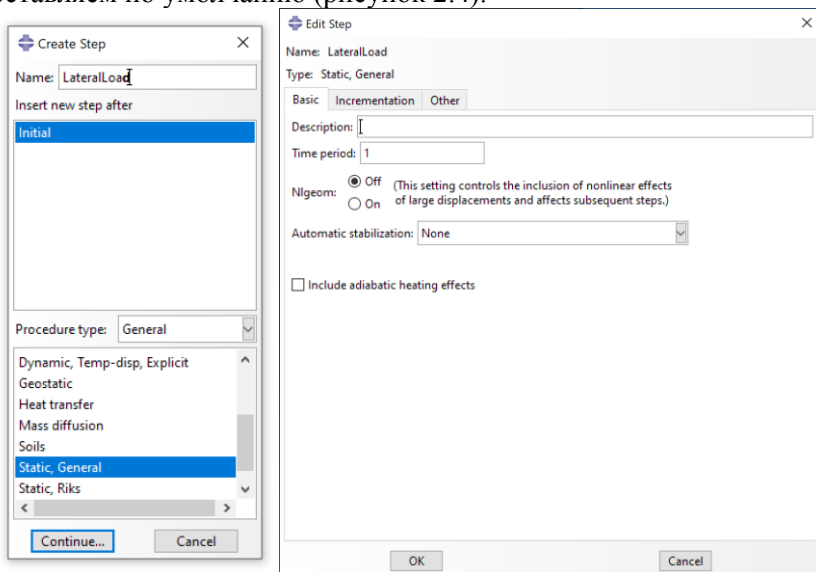


Рис. 2.4. Задание расчетного шага, соответствующего всестороннему обжатию элементарного объема

Для задания второго шага в модуле **Step** задаем расчетный шаг **Static, General** и во вкладке **Incrementation** определяем **Increment size** следующим образом:

- Initial – 0.05;
- Minimum – 1E-5
- Maximum – 0.05.

Остальные настройки расчетного модуля **Static, General** оставляем по умолчанию. Измененные настройки способствуют повышению частоты записи расчетных данных для их последующей обработки.

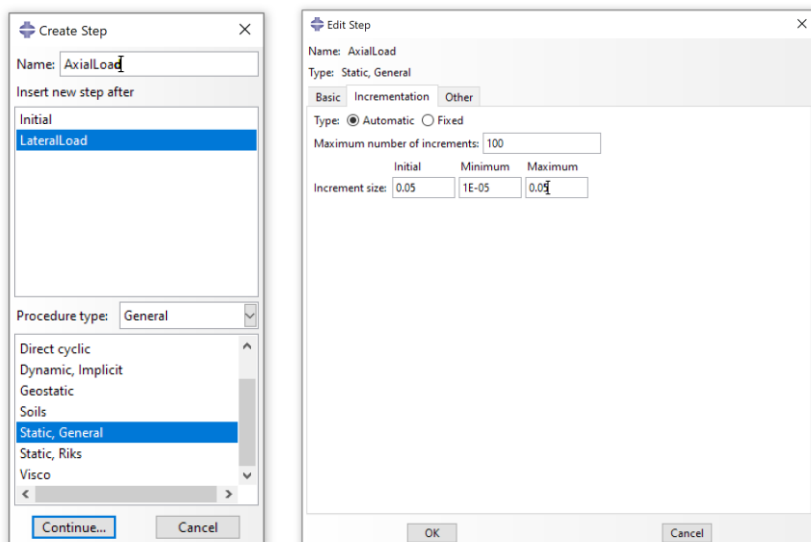


Рис 2.5. Параметры задания расчетного шага, соответствующего осевому нагружению предварительно обжатого со всех сторон элементарного объема

5. В модуле **Load** задаются граничные условия в виде ограничений смещений, а также нагрузки, моделирующие передачу осевого воздействия на элементарный объем.

Выполняем закрепление элементарного объема по трем взаимно перпендикулярным границам модели в направлении, нормальном к рассматриваемой границе (рис. 2.6). Всестороннее обжатие задается в виде равномерно распределенного давления, которое прикладывается к трем незакрепленным границам модели. Осевая нагрузка задается в виде вынужденных смещений. Вынужденные смещения прикладываются к верхней границе модели, величина которых принимается равной 0.1 м.

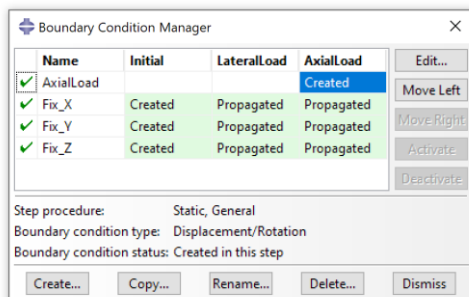
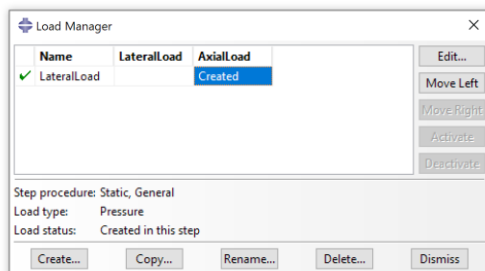
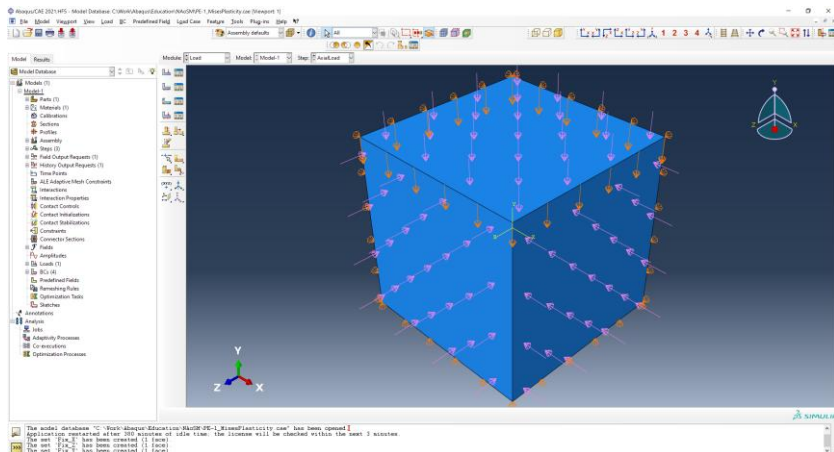


Рис. 2.6. Граничные условия для моделирования условий одноосного и трехосного сжатия

6. В модуле **Mesh** выполняется разбивка модели на один призматический конечный элемент типа C3D8R, Hourglass control = Enhanced (рис. 2.7).

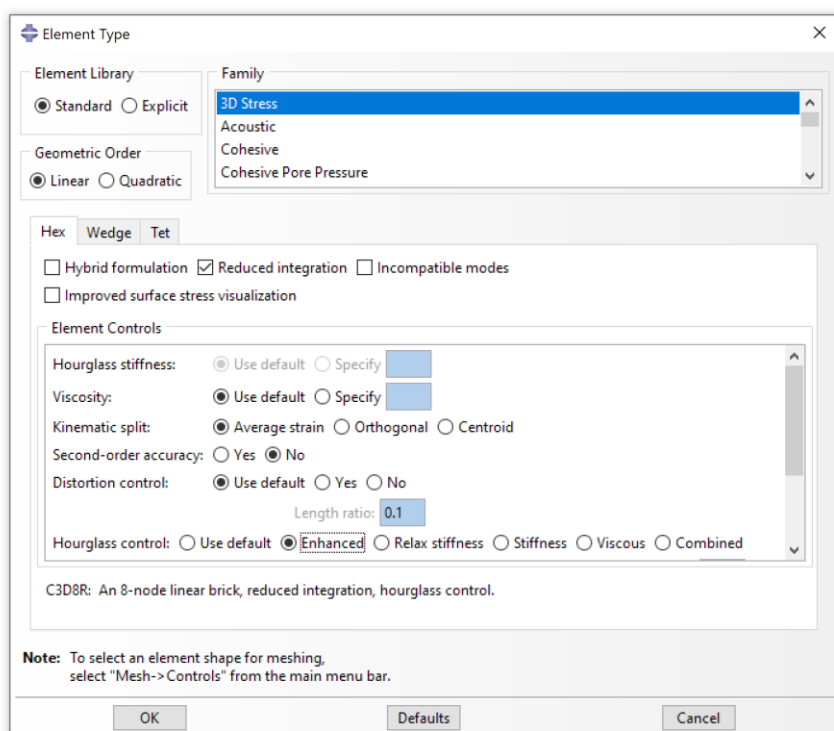


Рис. 2.7. Выбор типа конечного элемента в модуле Mesh

7. На заключительном этапе выполняется отправка сформированной модели на расчет через модуль **Job**.

1.8. Анализ НДС элементарного объема

Выполним расчет изменения НДС элементарного объема в условиях одноосного сжатия, а также при трех значениях бокового обжатия, равных 10, 50 и 100 МПа. На основании выполненных расчетов построим эпюры изменения НДС (первое значение – ось абсцисс, второе значение – ось ординат):

- Напряжения q – Осевые деформации ε_1 ;
- Напряжения q – Средние напряжения p ;
- Объемные деформации ε_v – Осевые деформации ε_1 .

Построим эпюры развития НДС (рис. 2.8).

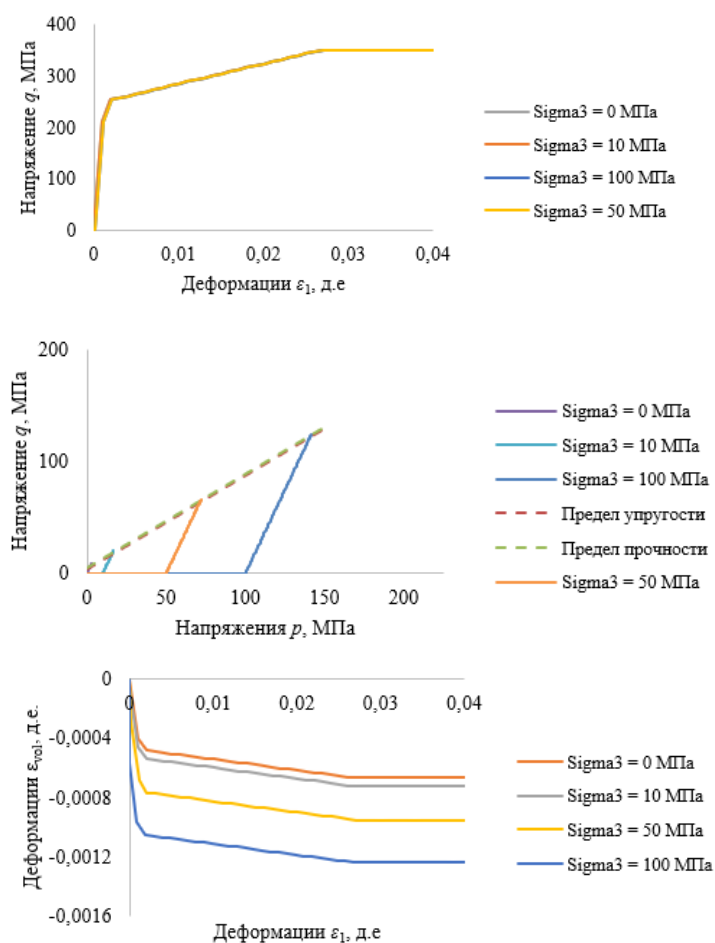


Рис. 2.8. Закономерности развития НДС элементарного объема

1.9. Требования к содержанию расчетно-графической работы

В пояснительной записке к расчетно-графической работе должны быть представлены следующие разделы:

1. Введение

2. Основные расчетные формулы
3. Построение диаграммы деформирования материала
4. Построение численной модели прогноза НДС элементарного объема
5. Результаты численного моделирования
6. Выводы по работе
7. Список использованных источников.

В работе необходимо выполнить построение диаграмм деформирования материала как на основании аналитического расчета, по представленным в методических указаниях формулам, так и на основании численного расчета. Выполнить сравнение представленных показателей. Полученные общие диаграммы деформирования материала разделить на стадии упругого и пластического деформирования.

Все численные расчеты выполнить в программном комплексе Abaqus. Все построения диаграмм выполнить в программном комплексе Excel.

Пояснительная записка должна быть оформлена с учетом требований ГОСТ.

1.10. Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы.

Типовые исходные данные, требуемые для обоснования параметров объемно-планировочного решения станции метрополитена глубокого заложения, сведены в таблицу (таблица 2.2).

Таблица 2.2

Типовые исходные данные для выполнения расчетно-графической работы «Исследование формирования напряженно-деформированного состояния среды на основании условия пластичности Мизеса»

№ Варианта	Предел текучести σ_y , МПа	Закон упрочнения	Схема нагружения	Примечание
1	200	1	1	-
2	225	2	2	-

Продолжение таблицы 2.2

3	250	3	3	-
4	275	4	1	-
5	300	1	2	-
6	200	2	3	-
7	225	3	1	-
8	250	4	2	-
9	275	1	3	-
10	300	2	1	-
11	200	3	2	-
12	225	4	3	-
13	250	1	1	-
14	275	2	2	-
15	300	3	3	-
16	200	4	1	-
17	225	1	2	-
18	250	2	3	-
19	275	3	1	-
20	300	4	2	-
21	200	1	3	-
22	225	2	1	-
23	250	3	2	-
24	275	4	3	-
25	300	1	1	-

Схемы нагружения сведены в таблицу (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Схема нагружения элементарного объема

Схема нагружения	Стадия нагружения	
	Первая	Вторая
1	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
2		$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$
3		$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Схемы изотропного упрочнения материала элементарного объема сведены в таблицу (

таблица 2.4). Примеры диаграмм изотропного упрочнения материала при величине σ_y , равной 250 МПа, представлены ниже (

таблица 2.4).

Таблица 2.4

Схема изотропного упрочнения материала элементарного объема

Схема изотропного упрочнения	Параметры изотропного упрочнения
1	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.4\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.5\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
2	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.45\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.6\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
3	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.2\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.25\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
4	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.35\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.55\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$

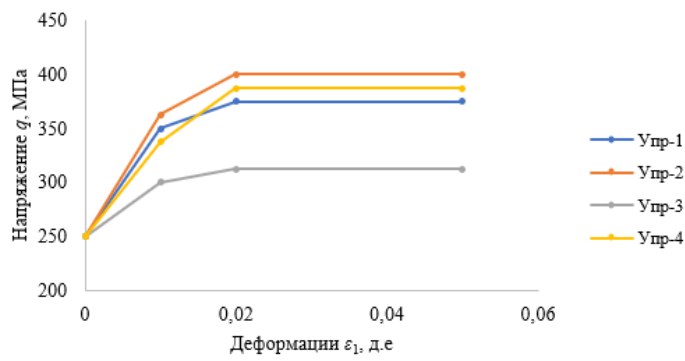


Рис. 2.9. Диаграмма пластического упрочнения материала: Упр-1 - Упр-4 – схемы изотропного упрочнения

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ НА ОСНОВАНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДРУКЕРА-ПРАГЕРА

1.11. Общие положения

Цель работы – изучение условия пластичности Друкера-Прагера и прогноз изменения напряженного состояния среды, подчиняющейся условию пластичности Друкера-Прагера, при различных траекториях нагружения.

Задачи работы:

1. Изучить основанные теоретические положения упругопластической модели основанной на условии пластичности Друкера-Прагера.
2. Выполнить построение конечно-элементной модели для проведения численных экспериментов материала при различных видах напряженного состояния.
3. Получить представление о характере изменения напряженно-деформированного состояния элементарного объема при различных траекториях его нагружения.

Модели основанные на условии пластичности Друкера-Прагера применяются для выполнения прогноза напряженно-деформированного состояния сред, пластическое поведение которых не зависит от величины средних напряжений (например, некоторые виды сталей). Данная модель позволяет прогнозировать развитие пластических деформаций при произвольных траекториях изменения напряженного состояния такой среды.

В работе рассмотрены основные теоретические положения условия пластичности Друкера-Прагера. Представлена методика проведения виртуального эксперимента в программном комплексе Abaqus/Standard.

1.12. Теоретические положения

Классическая поверхность пластического течения Друкера-Прагера в пространстве главных напряжений представляет собой конус, вытянутый вдоль гидростатической оси p (рисунок 3.1). В девиаторной плоскости след поверхности пластического течения представляет собой окружность, в меридиональной плоскости наклонную линию. Величина предельных величин интенсивности нормальных напряжений q зависит от величины средних напряжений p . В плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ поверхность пластического течения представляет урезанный эллипс.

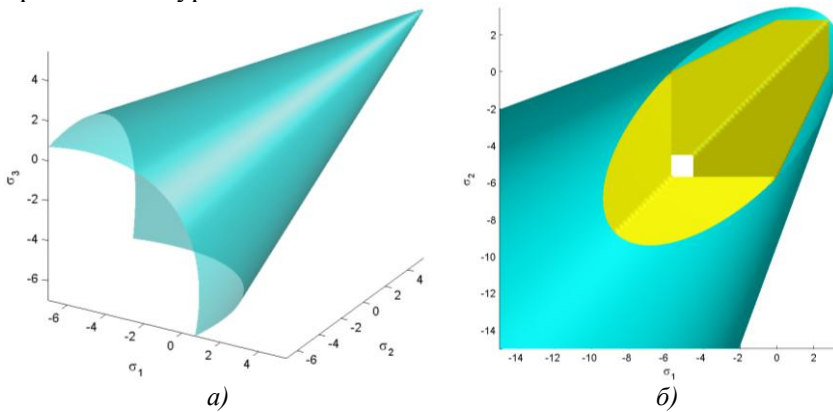


Рис. 3.1. Графическое изображение поверхности пластического течения Друкера-Прагера: a – в пространстве действия главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; b – в плоскости действия главных напряжений σ_1, σ_2 .

Математически условие пластичности Друкера-Прагера выражается следующим образом:

$$\sqrt{J_2} = A + BI_1, \quad (3.1)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; A, B – параметры условия пластичности.

Условие пластичности Друкера-Прагера через величины интенсивности нормальных напряжений q и средних напряжений p :

$$q = d + p \operatorname{tg} \beta, \quad (3.2)$$

где d – сцепление в осях $p - q$; β – угол внутреннего трения в осях $p - q$.

В программном продукте Abaqus линейное условие пластичности Друкера- Прагера дано более в общем виде:

$$t - p \operatorname{tg} \beta - d = 0; \quad (3.3)$$

$$t = \frac{1}{2} q \left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \left(\frac{r}{q} \right)^3 \right]$$

где t – модифицированный показатель интенсивности нормальных напряжений; r третий инвариант девиатора напряжений; K – показатель, контролирующий форму поверхности пластического течения в зависимости от величины средних нормальных главных напряжений σ_2 (рис 3.2).

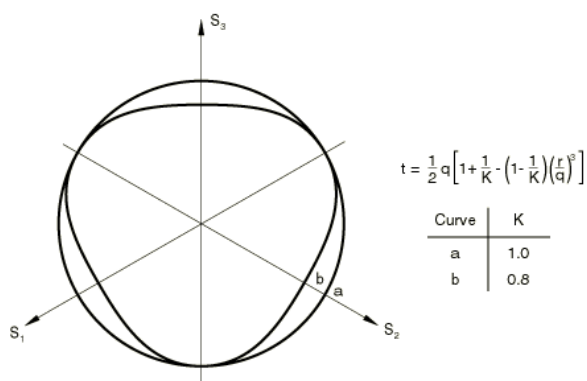


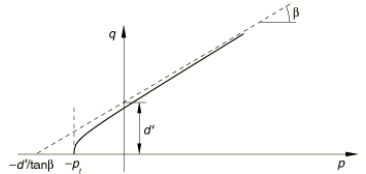
Рис 3.2. Изменение формы линейной поверхности пластического течения Друкера- Прагера в зависимости от показателя K

Помимо линейного условия пластичности Друкера-Прагера в программном комплексе Abaqus есть также и другие условия пластичности, в частности гиперболическое и экспоненциальное (

таблица 3.1).

Таблица 3.1

Условия пластичности Друкера-Прагера в программном комплексе Abaqus

Напряженное состояние	Уравнение	Графическое представление условия пластичности Друкера-Прагера в меридиональной плоскости
Линейный	$t - p \operatorname{tg} \beta - d = 0.$	
Гиперболический	$\sqrt{l_0^2 + q^2} - p \operatorname{tg} \beta - d' = 0;$ $l_0 = d' - p_t \operatorname{tg} \beta;$ $d' = \sqrt{l_0^2 + d^2}.$	
Экспоненциальный	$aq^b - p - p_t = 0;$ $p_t = ad^b.$	

Примечание: p_t – прочность материала в условиях гидростатического растяжения; a, b – параметры модели.

1.13. Методика построения численной модели прогноза НДС элементарного объема

Для изучения механического поведения упругопластической модели, основанной на условии пластичности Друкера-Прагера, выполним построение элементарного объема с размерами 1.0x1.0x1.0 м. Модель предназначена для исследования изменения напряженно-деформированного состояния элементарного объема в условиях одноосного и трехосного сжатия.

Последовательность создания численной модели следующая:

1. В модуле **Part** выполняется построение кубика с размерами 1.0x1.0x1.0 м (рисунок 3.3):

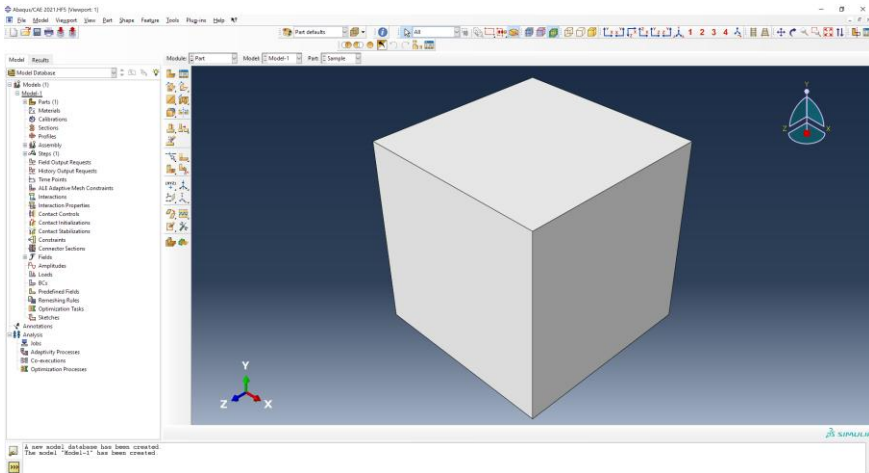


Рис. 3.3. Создание элементарного объема с размерами 1.0x1.0x1.0 м

2. В модуле **Properties** создается материал со следующими параметрами: модуль упругости – 1000 МПа, коэффициент Пуассона – 0.3. Пластические свойства для различных условий пластичности Друкера-Прагера (рисунок 3.4) между напряжениями и эквивалентными пластическими деформациями. В качестве условия пластичности принято условие Друкера-Прагера, закон упрочнения – изотропное упрочнение.

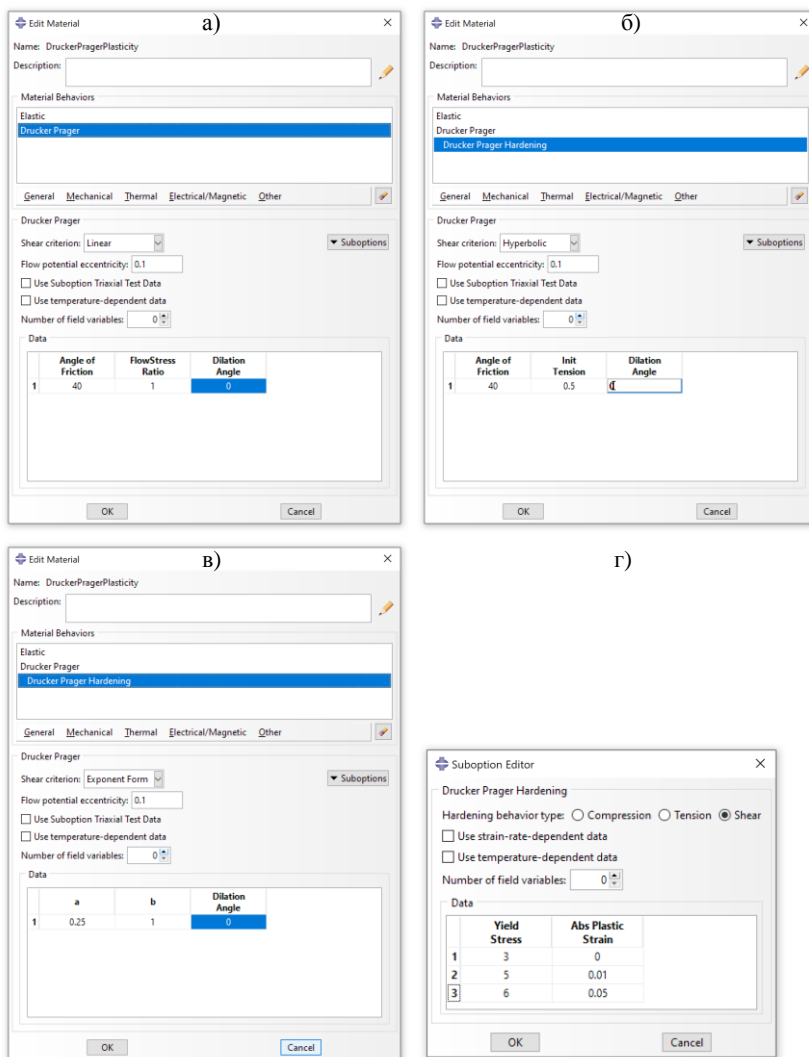


Рис. 3.4. Задание пластических характеристик материала согласно условию Друкера-Прагера: a – линейное условие пластичности; b – гиперболическое условие пластичности; v – экспоненциальное условие пластичности; z – закон упрочнения.

3. В модуле **Assembly** осуществляется расположение созданного геометрического объекта в расчетной области в исходных координатах.

4. Рассматриваемая задача решается в два расчетных шага, идеализирующих условие одноосного и трехосного сжатия. На первом шаге формируются граничные условия, моделирующие формирование всесторонней нагрузки. На втором шаге к границам модели прикладываются граничные условия, моделирующие передачу осевой нагрузки на образец.

Таким образом, для задания первого шага создаем в модуле **Step** расчетный шаг **Static, General**. Все параметры расчетного шага оставляем по умолчанию (рисунок 3.5).

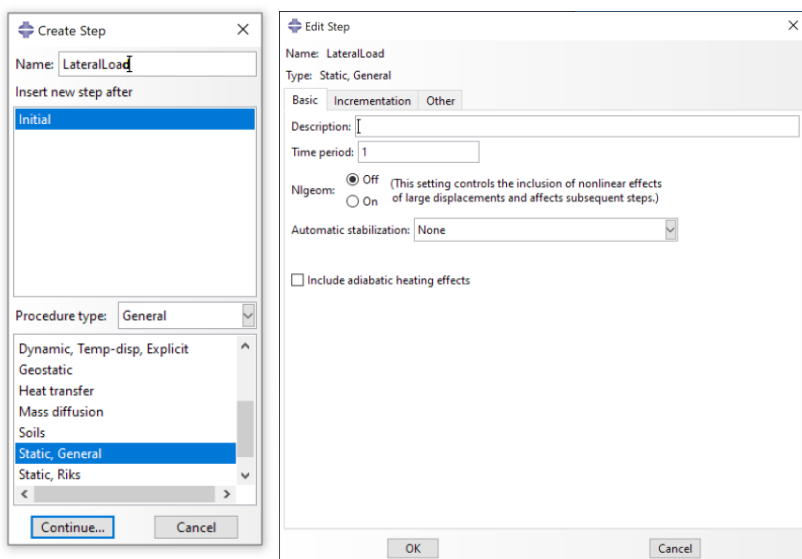


Рис. 3.5. Задание расчетного шага соответствующего всестороннему обжатию элементарного объема

Для задания второго шага в модуле **Step** задаем расчетный шаг **Static, General** и во вкладке **Incrementation** определяем **Increment size** следующим образом:

- Initial – 0.01;

- Minimum – 1E-5;
- Maximum – 0.01.

Остальные настройки расчетного модуля **Static, General** оставляем по умолчанию. Заданные настройки необходимы для повышения частоты записи расчетных данных для их последующей обработки (рисунок 3.6).

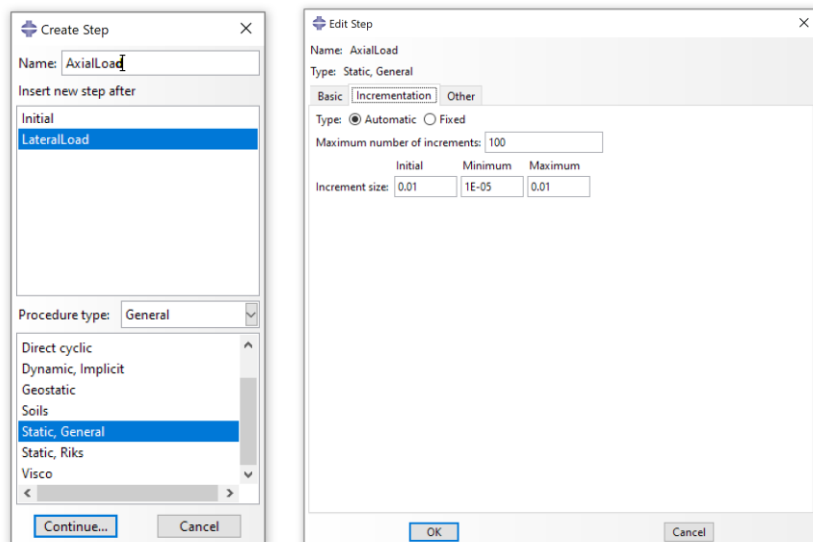


Рис. 3.6. Задание расчетного шага, соответствующего осевому нагружению предварительно обжатого со всех сторон элементарного объема

5. В модуле **Load** задаются граничные условия в виде ограничений смещений, а также нагрузок, моделирующих передачу осевого воздействия на элементарный объем.

Выполняем закрепление элементарного объема по трем взаимно перпендикулярным границам модели в направлении, нормальном к рассматриваемой границе (рисунок 3.7). Всестороннее обжатие задается в виде равномерно распределенного давления, которое прикладывается к трем незакрепленным границам модели. Осевая нагрузка задается в виде вынужденных смещений. Вынужденные

смещения прикладываются к верхней границе модели, величина которых принимается равной 0.1 м.

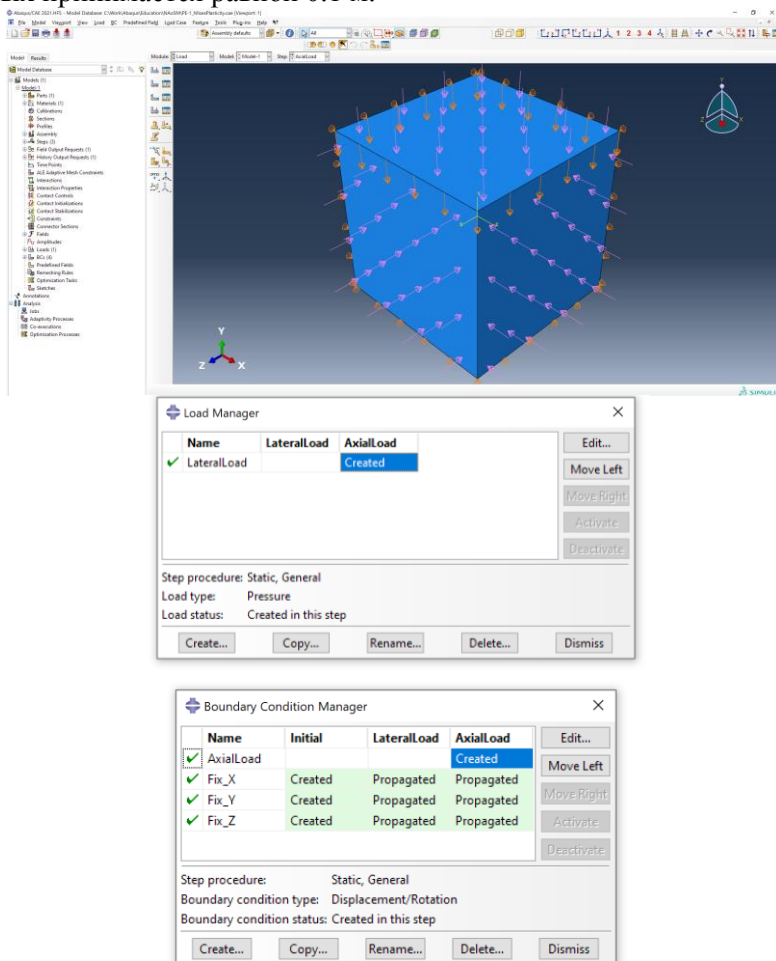


Рис. 3.7. Граничные условия для моделирования условий одноосного и трехосного сжатия

6. В модуле **Mesh** выполняется разбивка модели на один призматический конечный элемент типа C3D8R, Hourglass control = Enhanced (рисунок 3.8).

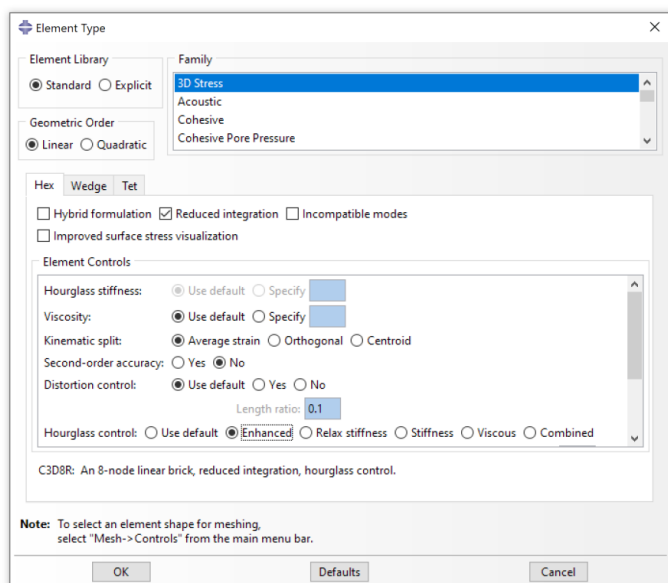


Рис. 3.8. Выбор типа конечного элемента в модуле Mesh

7. На заключительном этапе выполняется отправка сформированной расчётной модели через модуль **Job**.

1.14. Анализ НДС элементарного объема

Выполним расчет изменения НДС элементарного объема в условиях одноосного сжатия, а также при трех значениях бокового обжатия равного 10, 50 и 100 МПа. На основании выполненных расчетов построим эпюры (рис. 3.9) изменения НДС (первое значение – ось абсцисс, второе значение – ось ординат):

- Напряжения q – Осевые деформации ε_1 ;
- Напряжения q – Средние напряжения p ;
- Объемные деформации ε_v – Осевые деформации ε_1 .

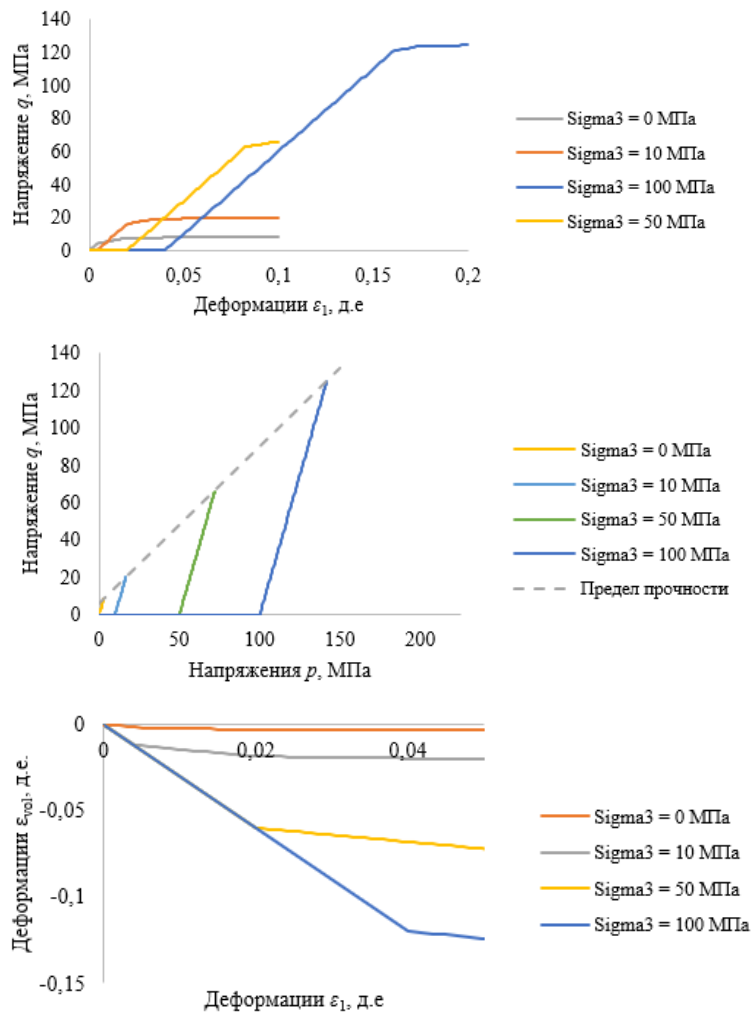


Рис. 3.9. Закономерности развития НДС элементарного объема

1.15. Требования к содержанию расчетно-графической работы

В пояснительной записке к расчетно-графической работе должны быть представлены следующие разделы:

1. Введение
2. Основные расчетные формулы
3. Построение диаграммы деформирования материала
4. Построение численной модели прогноза НДС элементарного объема
5. Результаты численного моделирования
6. Выводы по работе
7. Список использованных источников.

В работе необходимо выполнить построение диаграмм деформирования материала, как на основании аналитического расчета, по представленным в методических указаниях формулам, так и на основании численного расчета. Выполнить сравнение представленных показателей. Полученные общие диаграммы деформирования материала разделить на стадии упругого и пластического деформирования.

Все численные расчеты выполнить в программном комплексе Abaqus. Все построения диаграмм выполнить в программном комплексе Excel.

Пояснительная записка должна быть оформлена с учетом требований ГОСТ.

1.16. Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы.

Типовые исходные данные, требуемые для обоснования параметров объемно-планировочного решения станции метрополитена глубокого заложения сведены в таблицу (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Типовые исходные данные для выполнения расчетно-графической работы
«Исследование формирования напряженно-деформированного состояния среды на основании условия пластичности Друкера-Прагера»

№ Варианта	Предел текучести σ_y , МПа	Закон упрочнения	Схема нагружения	Примечание
1	200	1	1	-
2	225	2	2	-
3	250	3	3	-
4	275	4	1	-
5	300	1	2	-
6	200	2	3	-
7	225	3	1	-
8	250	4	2	-
9	275	1	3	-
10	300	2	1	-
11	200	3	2	-
12	225	4	3	-
13	250	1	1	-
14	275	2	2	-
15	300	3	3	-
16	200	4	1	-
17	225	1	2	-
18	250	2	3	-
19	275	3	1	-
20	300	4	2	-
21	200	1	3	-
22	225	2	1	-
23	250	3	2	-
24	275	4	3	-
25	300	1	1	-

Схемы нагружения сведены в таблицу (таблица 3.3).

Таблица 3.3

Схема нагружения элементарного объема

Схема нагружения	Стадия нагружения	
	Первая	Вторая
1	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
2		$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$
3		$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Схемы изотропного упрочнения материала элементарного объема сведены в таблицу (таблица 3.4). Примеры диаграмм изотропного упрочнения материала при величине σ_y равной 250 МПа представлены ниже (рисунок 3.10).

Таблица 3.4

Схема изотропного упрочнения материала элементарного объема

Схема изотропного упрочнения	Параметры изотропного упрочнения
1	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.4\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.5\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
2	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.45\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.6\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
3	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.2\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.25\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$
4	$q' = \sigma_y; \varepsilon_1' = 0;$ $q'' = \sigma_y + 0.35\sigma_y; \varepsilon_1'' = 0.01;$ $q''' = \sigma_y + 0.55\sigma_y; \varepsilon_1''' = 0.02.$

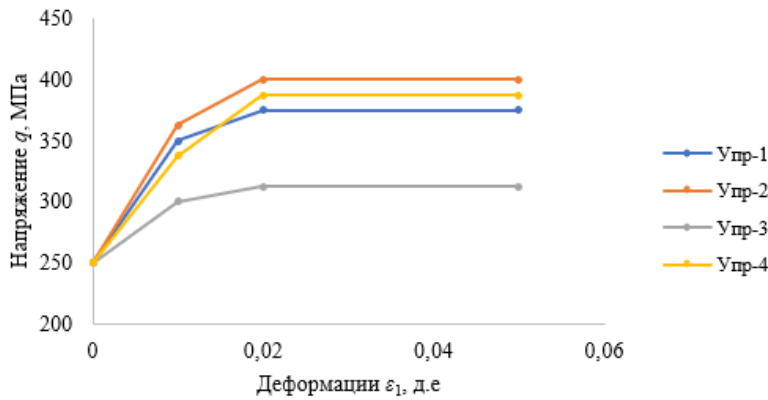


Рис. 3.10 – Диаграмма пластического упрочнения материала: Упр-1 - Упр-4 – схемы изотропного упрочнения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Dunne F., Petrinic N. Introduction to computational plasticity. Oxford University Press; 1st edition. 2005, 241 pages.
2. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity (Interdisciplinary Applied Mathematics, 7). Springer; Corrected edition. 1998, 406 pages.
3. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. – 301 с.
4. Chen W.F., Mizuno E. Nonlinear Analysis in Soil Mechanics. Theory and Implementation. Elsevier. 1990, 621 pages.
5. Dunne F., Petrinic N. Introduction to computational plasticity. Oxford University Press; 1st edition. 2005, 241 pages.
6. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity (Interdisciplinary Applied Mathematics, 7). Springer; Corrected edition. 1998, 406 pages.
7. Chen W.F., Mizuno E. Nonlinear Analysis in Soil Mechanics. Theory and Implementation. Elsevier. 1990, 621 pages.
8. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. Недра, Москва, 1987 г., 221 стр.
9. Беляков Н.А., Карасев М.А., Трушко В.Л. Механика сплошной среды. Санкт-Петербургский горный университет. СПб, 2019. 114 с.
10. Abaqus User manuals. Analysis manual. ([Abaqus 2016 Documentation](#)).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Базовые теоретические теории упругости и пластического течения	4
1.1 Общие сведения.....	4
1.2 Напряжения и деформации.....	4
1.3 Основы теории упругости.....	10
1.4 Основы теории пластического течения.....	13
2 Исследование формирования напряженно-деформированного состояния среды на основании условия пластичности Мизеса	17
2.1 Общие положения.....	17
2.2 Теоретические положения	17
2.3 Методика построения численной модели прогноза НДС элементарного объема.....	20
2.4 Анализа НДС элементарного объема	25
2.5 Требования к содержанию расчетно-графической работы	26
2.6 Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы.	27
3 Исследование формирования напряженно-деформированного состояния среды на основании условия пластичности Друкера-Прагера	32
3.1 Общие положения.....	32
3.2 Теоретические положения	33
3.3 Методика построения численной модели прогноза НДС элементарного объема.....	36
3.4 Анализа НДС элементарного объема	42
3.5 Требования к содержанию расчетно-графической работы	44
3.6 Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы.	44
Библиографический список.....	47

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальности 08.05.01*

Сост.: *М.А. Карасев, Н.А. Беляков, П.Э. Вербило*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
строительства горных предприятий и подземных сооружений

Ответственный за выпуск *М.А. Карасев*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 25.05.2022. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,8. Усл.кр.-отт. 2,8. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 50 экз. Заказ 311.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2