

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет**

Кафедра механики

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ БАЛОК МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

*Методические указания к самостоятельной работе
для студентов специальности 21.05.04*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021**

УДК 624.04 (073)

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ. Расчет балок методом начальных параметров: Методические указания к расчетно-графической работе / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *В.Л. Трушко, М.Ю. Насонов, М.Ю. Платовских*. СПб, 2021. 21 с.

Рассмотрен расчет статически неопределимых балок методом начальных параметров. Приведены правила составления уравнений, подробно рассмотрено решение примеров и указан порядок выполнения задания.

Методические указания предназначены для студентов специальности 21.05.04 "Горное дело".

Научный редактор проф. *В.Л. Трушко*

Рецензент д.ф.-м.н. *Л.В. Миранцев* (Институт проблем машиноведения (ИПМАШ))

Введение

В методических указаниях рассмотрены основы расчета статически неопределимых балок методом начальных параметров. Приведены правила составления уравнений и примеры построения эпюр. Рассмотрено решение примеров и указан порядок выполнения задания.

1. Основные принципы расчета

В основу метода начальных параметров положено дифференциальное уравнение изгиба призматической балки

$$EI V_{(x)}'''' = q(x),$$

где E – модуль продольной упругости; I_x – осевой момент инерции сечения балки; $V(x)$ – прогиб балки; $q(x)$ – интенсивность внешней нагрузки (рис. 1).

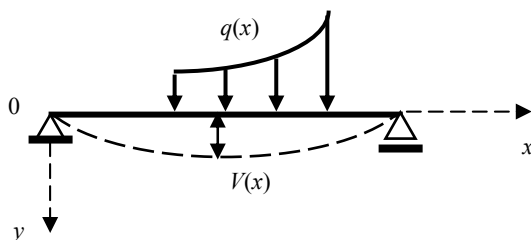


Рис. 1. Схема нагружения балки, работающей на изгиб

Решение дифференциального уравнения призматической балки имеет вид

$$V_{(x)} = \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx - \frac{Q_0 x^3}{3! EI} - \frac{M_0 x^2}{2! EI} + V'_0 x + V_0.$$

2. Примеры расчетов статически неопределимых балок

2.1. Пример № 1

Расчет статически неопределимой балки при действии равномерно распределенной нагрузки

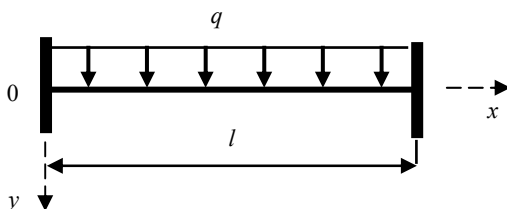


Рис. 2. Схема нагружения балки к примеру 1

Решение для балки, приведенной на рис. 2, получим в виде уравнения

$$V_{(x)} = \frac{qx^4}{4!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI} + V'_{(x)} + V_0.$$

Граничные условия на концах балки имеют нижеследующий вид.

При $x = 0$: $V_0 = 0$ и $V'_0 = 0$;

при $x = l$: $V_l = 0$ и $V'_l = 0$.

Представим граничные условия при $x = 0$ –

$$V_{(x)} = \frac{qx^4}{4!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI}.$$

Для подстановки граничных условий при $x = l$ продифференцируем уравнение

$$V'_{(x)} = \frac{qx^3}{3!EI} - \frac{Q_0 x^2}{2!EI} - \frac{M_0 x}{EI}.$$

Подставим вторую пару граничных условий при $x = l$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{(l)} = \frac{ql^4}{4!EI} - \frac{Q_0 l^3}{3!EI} - \frac{M_0 l^2}{2!EI} = 0 \\ V'_{(x)} = \frac{ql^3}{3!EI} - \frac{Q_0 l^2}{2!EI} - \frac{M_0 l}{EI} = 0 \end{array} \right\}.$$

Решим систему уравнений и найдем:

$$Q_0 = \frac{q \cdot l}{2} \text{ и } M_0 = -\frac{ql^2}{12}.$$

Получим уравнение изогнутой оси балки –

$$V_{(x)} = \frac{qx^4}{4!EI} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{3!EI} + \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{x^2}{2!EI}.$$

Продифференцируем найденное уравнение 3 раза и получим уравнение изгибающих моментов и поперечных сил:

$$V'_{(x)} = \frac{qx^3}{3!EI} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{2!EI} + \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{x^2}{EI};$$

$$V''_{(x)} = \frac{qx^2}{2!EI} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{x}{EI} + \frac{ql^2}{12EI};$$

$$V'''_{(x)} = \frac{qx}{EI} - \frac{ql}{2EI};$$

$$M_{(x)} = -EIV'''_{(x)} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{ql^2}{12};$$

$$Q_{(x)} = -EIV''_{(x)} = -qx + \frac{ql}{2}.$$

Построим эпюры прогибов, углов поворота сечений балки, изгибающих моментов и перерезывающих сил при $q = \text{const}$ (рис. 3).

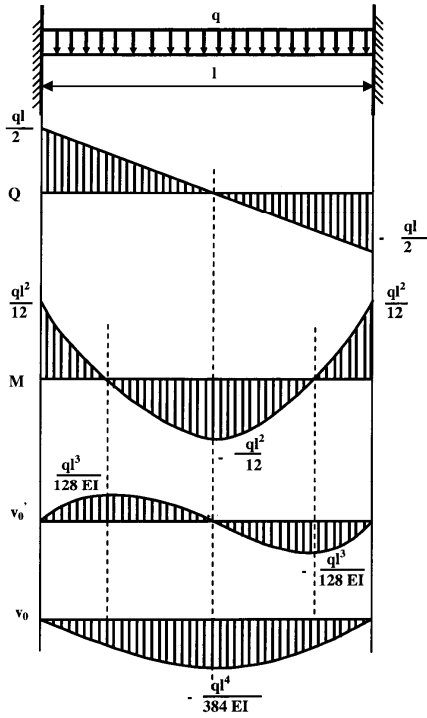


Рис. 3. Построение эюр Q , M , $V'(x)$ и $V(x)$ к примеру 1

2.2. Пример № 2

Расчет статически неопределимой балки при действии сосредоточенной силы

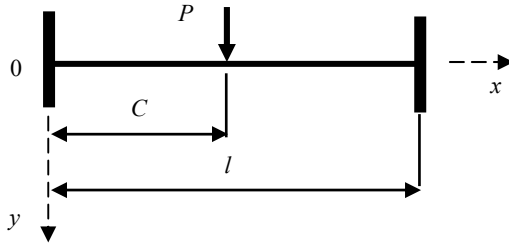


Рис. 4. Схема нагружения балки к примеру 2

Решение для балки, приведенной на рис. 2, получим в виде уравнения

$$V_{(x)} = \int_c \frac{P(x-c)^3}{3!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI} + V'_x + V_0.$$

Граничные условия на концах балки имеют нижеследующий вид.

При $x = 0$: $V_0 = 0$ и $V'_0 = 0$;

при $x = l$: $V_l = 0$ и $V'_l = 0$.

Подставим граничные условия при $x = 0$ –

$$V_{(x)} = \int_c \frac{P(x-c)^3}{3!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI}.$$

Подставим в уравнение граничные условия при $x = l$:

$$V_{(x)} = \frac{P(x-c)^3}{3!EI} - \frac{Q_0 l^3}{3!EI} - \frac{M_0 l^2}{2!EI} = 0.$$

$$V'_{(x)} = \frac{P(x-c)^2}{2!EI} - \frac{Q_0 l^2}{2!EI} - \frac{M_0 l}{EI} = 0.$$

Решим систему уравнений и найдем:

$$M_0 = \frac{P(l-c)^2}{l} \left(\frac{l-c}{l} - 1 \right) \text{ и } Q_0 = \frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right).$$

Получим уравнение изогнутой оси балки –

$$V_{(x)} = \parallel_c \frac{P(x-c)^3}{3!EI} - \frac{x^3}{3!EI} \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right] - \frac{x^2}{2!EI} \left[\frac{P(l-c)^2}{l} \left(\frac{l-c}{l} - 1 \right) \right].$$

Продифференцируем найденное уравнение 3 раза и получим уравнение изгибающих моментов и поперечных сил:

$$V'_{(x)} = \parallel_c \frac{P(x-c)^2}{2!EI} - \frac{x^2}{2!EI} \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right] - \frac{x^2}{2!EI} \left[\frac{P(l-c)^2}{l} \left(\frac{l-c}{l} - 1 \right) \right];$$

$$V''_{(x)} = \parallel_c \frac{P(x-c)}{EI} - \frac{x}{EI} \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right] - \frac{x^2}{2!EI} \left[\frac{P(l-c)^2}{l} \left(\frac{l-c}{l} - 1 \right) \right];$$

$$V'''_{(x)} = \parallel_c \frac{P}{EI} - \frac{1}{EI} \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right];$$

$$M_{(x)} = -EIU''_{(x)} = \parallel_c [-P(x-c)] - x \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right] - \left[\frac{P(l-c)^2}{l} \left(\frac{l-c}{l} - 1 \right) \right];$$

$$Q_{(x)} = -EIV'''_{(x)} = \parallel_c (-P) + \left[\frac{6P(l-c)^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{l-c}{l} \right) \right].$$

Построим эпюры прогибов, углов поворота сечений балки, изгибающих моментов и перерезывающих сил (рис. 5).

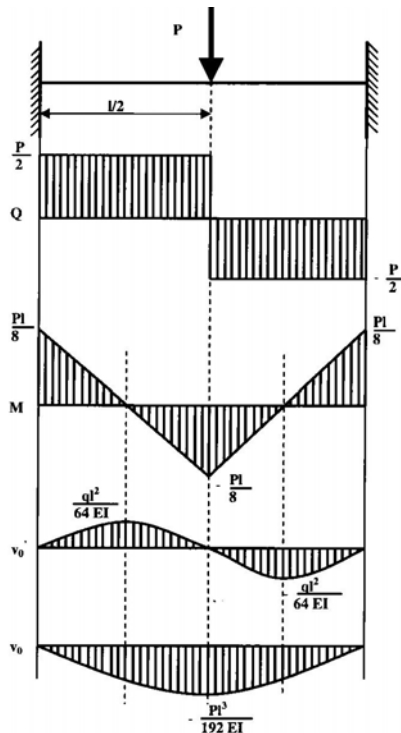


Рис. 5. Построение эпюр Q , M , $V'(x)$ и $V(x)$ к примеру 2

2.3. Пример № 3

Расчет статически неопределимой балки при действии сосредоточенного момента

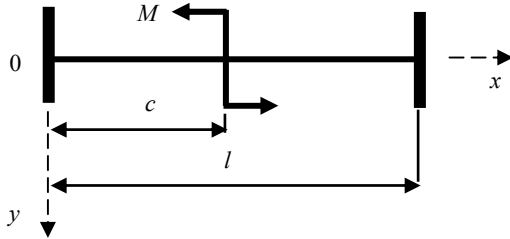


Рис. 6. Схема нагружения балки к примеру 3

$$V_{(x)} = \int_c \frac{M(x-c)^2}{2!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI} + V'_x + V_0.$$

Граничные условия на концах балки имеют нижеследующий вид.

$$\text{При } x = 0: V_0 = 0 \text{ и } V'_0 = 0;$$

$$\text{при } x = l: V_l = 0 \text{ и } V'_l = 0.$$

Подставим граничные условия при $x = 0$

$$V_{(x)} = \int_c \frac{M(x-c)^2}{2!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI}.$$

Для подстановки граничных условий при $x = l$ продифференцируем уравнение

$$V'_{(x)} = \int_c \frac{M(x-c)}{EI} - \frac{Q_0 x^2}{2!EI} - \frac{M_0 x}{EI}.$$

Подставим вторую пару граничных условий при $x = l$:

$$V_{(x)} = \frac{M(l-c)^2}{2EI} - \frac{Q_0 l^3}{6EI} - \frac{M_0 l^2}{2EI} = 0.$$

$$V'_{(x)} = \frac{M(l-c)}{EI} - \frac{Q_0 l^2}{2EI} - \frac{M_0 l}{EI} = 0.$$

Решим систему уравнений и найдем

$$Q_0 = \frac{6M(l-c)c}{l^3} \text{ и } M_0 = \frac{M(l-c)}{l} \left(1 - \frac{3c}{l}\right).$$

Получим уравнение изогнутой оси балки

$$V_{(x)} = \int_C \left[\frac{M(x-c)^2}{2EI} - \frac{x^3}{3EI} \left[\frac{6M(l-c)c}{l^3} \right] - \frac{x^2}{2EI} \left[\frac{M(l-c)}{l} \left(1 - \frac{3c}{l}\right) \right] \right] dx.$$

Продифференцируем найденное уравнение 3 раза и получим уравнения изгибающих моментов и поперечных сил:

$$V'_{(x)} = \int_C \left[\frac{M(x-c)}{EI} - \frac{x^2}{2EI} \left[\frac{6M(l-c)c}{l^3} \right] - \frac{x}{EI} \left[\frac{M(l-c)}{l} \left(1 - \frac{3c}{l}\right) \right] \right] dx;$$

$$V''_{(x)} = \int_C \left[\frac{M}{EI} - \frac{x}{EI} \left[\frac{6M(l-c)c}{l^3} \right] - \left[\frac{M(l-c)}{l} \left(1 - \frac{3c}{l}\right) \right] \right] dx;$$

$$V'''_{(x)} = -\frac{6M(l-c)c}{EI l^3};$$

$$M_{(x)} = -EIV''_{(x)} = \int_C \left[-M + x \frac{6M(l-c)c}{l^3} + \frac{M(l-c)}{l} \left(1 - \frac{3c}{l}\right) \right] dx;$$

$$Q_{(x)} = -EIV'''_{(x)} = \frac{6M(l-c)c}{l^3}.$$

Построим эпюры прогибов, углов поворота сечений балки, изгибающих моментов и перерезывающих сил (рис. 7).

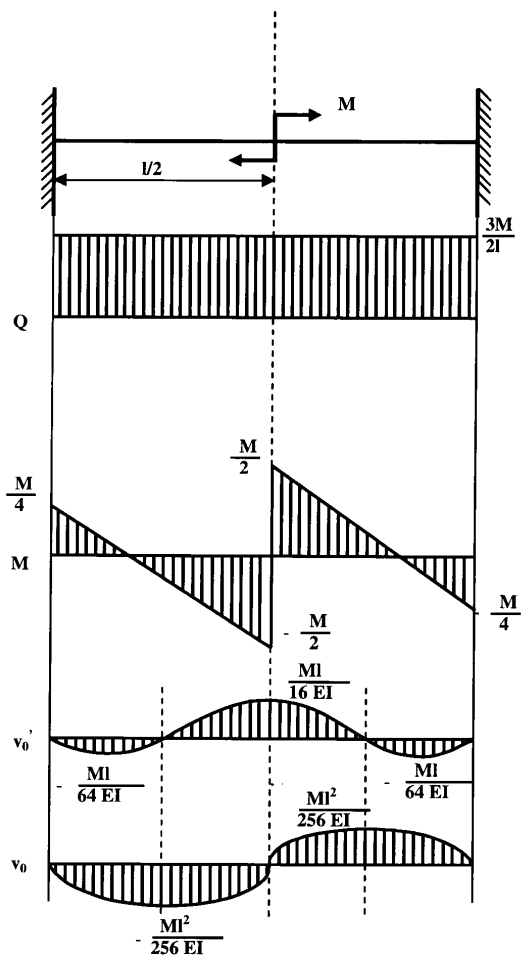


Рис. 7. Построение эюр Q , M , $V'(x)$ и $V(x)$ к примеру 3

2.4. Пример № 4

Расчет статически неопределимой балки при действии равномерно распределенной нагрузки, расположенной на части пролета балки

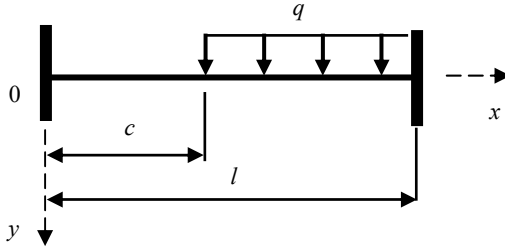


Рис. 8. Схема нагружения балки к примеру 4

Решение получим в виде

$$V_{(x)} = \int_C \frac{q(x-c)^4}{4!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI} + V'_x + V_0.$$

Граничные условия на концах балки имеют нижеследующий вид.

При $x = 0$: $V_0 = 0$ и $V'_0 = 0$;

при $x = l$: $V_l = 0$ и $V'_l = 0$.

Подставим граничные условия при $x = 0$

$$V_{(x)} = \int_C \frac{q(x-c)^2}{2!EI} - \frac{Q_0 x^3}{3!EI} - \frac{M_0 x^2}{2!EI}.$$

Для подстановки граничных условий при $x = l$ продифференцируем уравнение

$$V'_{(x)} = \frac{q(x-c)^3}{3!EI} - \frac{Q_0 x^2}{2!EI} - \frac{M_0 x}{EI}.$$

Подставим вторую пару граничных условий при $x = l$:

$$V_{(l)} = \frac{q(l-c)^4}{4!EI} - \frac{Q_0 l^3}{3!EI} - \frac{M_0 l^2}{2!EI} = 0;$$

$$V'_{(l)} = \frac{q(l-c)^3}{3!EI} - \frac{Q_0 l^2}{2!EI} - \frac{M_0 l}{EI} = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим:

$$M_0 = \frac{q(l-c)^3}{l} \left[\frac{(l-c)}{4l} - \frac{1}{3} \right]; \text{ и } Q_0 = \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right].$$

Получаем уравнение изогнутой оси балки –

$$V_{(x)} = \parallel_c \frac{q(x-c)^4}{4!EI} - \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right] \frac{x^3}{3!EI} - \\ - \frac{q(l-c)^3}{l} \left[\frac{(l-c)}{4l} - \frac{1}{3} \right] \frac{x^2}{2!EI}.$$

Продифференцируем найденное уравнение 3 раза и получаем уравнения изгибающих моментов и поперечных сил:

$$V'_{(x)} = \parallel_c \frac{q(x-c)^3}{3!EI} - \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right] \frac{x^2}{2!EI} - \\ - \frac{q(l-c)^3}{l} \left[\frac{(l-c)}{4l} - \frac{1}{3} \right] \frac{x}{EI};$$

$$V''_{(x)} = \parallel_c \frac{q(x-c)^2}{2!EI} - \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right] \frac{x}{EI} - \\ - \frac{q(l-c)^3}{l} \left[\frac{(l-c)}{4l} - \frac{1}{3} \right] \frac{1}{EI};$$

$$V'''_{(x)} = \parallel_c \frac{q(x-c)}{EI} - \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right] \frac{1}{EI};$$

$$M_{(x)} = -EIV''_{(x)} = \parallel_c - \frac{q(x-c)^2}{2} - \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right] x +$$

$$+ \frac{q(l-c)^3}{l} \left[\frac{(l-c)}{4l} - \frac{1}{3} \right];$$

$$Q_{(x)} = -EIV'''_{(x)} = \parallel_c - q(x-c) + \frac{q(l-c)^3}{l^2} \left[1 - \frac{(l-c)}{2l} \right].$$

Построим эпюры прогибов, углов поворота сечений балки, изгибающих моментов и перерезывающих сил при $q = \text{const}$ (рис. 9).

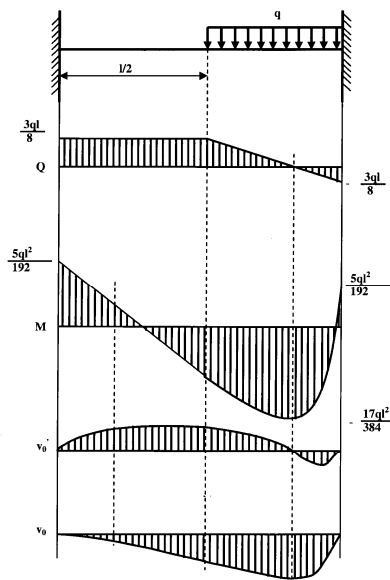


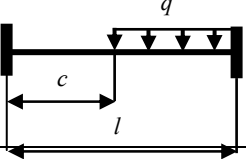
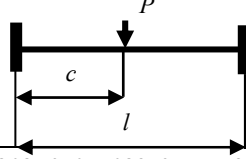
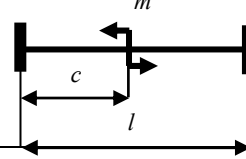
Рис. 9. Построение эпюр Q , M , $V'(x)$ и $V(x)$ к примеру 4

Библиографический список

1. *В.А. Хохлов* Сопротивление материалов: учебное пособие [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.А. Хохлов [и др.]. Электрон. дан. Томск: ТПУ, 2011. 228 с.
<https://e.lanbook.com/book/10323>
2. *Степин П.А.* Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учеб. Электрон. дан. Санкт-Петербург: Лань, 2014. 320 с.
<https://e.lanbook.com/book/3179>
3. *Кузьмин Л.Ю.* Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: Л.Ю. Кузьмин, В.Н. Сергиенко, В.К. Ломунов. Электрон. дан. Санкт-Петербург: Лань, 2016. 228 с.
<https://e.lanbook.com/book/90004>

Приложение 1

Задание для расчетно-графической работы

Расчетные схемы			
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
			
Параметры расчетных схем			
№ цифры в шифре:	Внешняя нагрузка: <i>q</i> , кН/м; <i>P</i> , кН; <i>M</i> , кН·м	Длина балки: <i>l</i> , м	Участок <i>c</i> , м
1	2	4	2
2	4	2	1
3	6	6	3
4	8	10	4,5
5	10	3	4
6	12	8	5
7	14	7	7
8	16	5	6
9	15	9	8
10	13	14	9
11	11	12	8,5
12	9	11	7,5
13	7	16	5,5
14	5	15	6,5
15	3	18	1,5
16	17	13	3,5
17	18	17	2,5

Пример шифра
для выбора параметров расчетной схемы задания

Шифр *A 145* – буква и цифры означают следующее:

- A* – вид расчетной схемы;
- 1 – внешняя нагрузка ($q = 2$ кН/м);
- 4 – длина балки ($l = 10$ м);
- 5 – длины участка c ($c = 4$ м).

Приложение 2

Варианты заданий к расчетно-графической работе для группы №1

№ по журналу	Расчетная схема	Шифр параметров		
		Нагрузка	Длина	Участок c
1	<i>A</i>	2	1	2
2	<i>A</i>	4	7	18
3	<i>B</i>	12	10	12
4	<i>C</i>	10	5	1
5	<i>B</i>	7	3	17
6	<i>B</i>	9	13	10
7	<i>A</i>	13	6	15
8	<i>C</i>	3	15	11
9	<i>C</i>	5	14	10
10	<i>A</i>	11	2	1
11	<i>B</i>	14	11	14
12	<i>B</i>	1	12	8
13	<i>C</i>	6	4	5
14	<i>A</i>	15	9	3
15	<i>B</i>	10	2	1
16	<i>C</i>	12	3	16
17	<i>C</i>	8	5	1
18	<i>A</i>	1	5	2
19	<i>B</i>	6	7	16
20	<i>B</i>	4	8	3

**Варианты заданий
к расчетно-графической работе для группы №2**

№ по журналу	Расчетная схема	Параметры расчетной схемы		
		нагрузка	длина	участок c
1	<i>B</i>	13	6	6
2	<i>C</i>	12	10	11
3	<i>C</i>	7	3	5
4	<i>A</i>	10	5	1
5	<i>B</i>	11	2	2
6	<i>B</i>	15	9	7
7	<i>A</i>	3	15	9
8	<i>B</i>	1	5	17
9	<i>C</i>	9	13	11
10	<i>A</i>	5	14	12
11	<i>B</i>	7	4	14
12	<i>A</i>	6	4	17
13	<i>A</i>	12	3	1
14	<i>C</i>	14	11	12
15	<i>A</i>	8	5	2
16	<i>B</i>	10	8	13
17	<i>A</i>	14	7	4
18	<i>C</i>	10	2	2
19	<i>B</i>	12	12	14
20	<i>A</i>	9	9	6

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Основные принципы расчета	3
2. Примеры расчетов статически неопределимых балок.....	4
Библиографический список.....	16
Приложение 1	17
Приложение 2	19

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ БАЛОК МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

*Методические указания к самостоятельной работе
для студентов специальности 21.05.04*

Сост.: *В.Л. Трушко, М.Ю. Насонов, М.Ю. Платовских*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
механики

Ответственный за выпуск *В.Л. Трушко*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 17.12.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,2. Усл.кр.-отт. 1,2. Уч.-изд.л. 1,0. Тираж 50 экз. Заказ 1146.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2