СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 21.05.04

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра высшей математики

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальности 21.05.04*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

УДК 517.53(073)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Элементы теории функций комплексного переменного: Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *М.А. Керейчук,, В.В. Ивакин.* СПб, 2021. 46 с.

Методические указания содержат задания для практических занятий по теории функций комплексного переменного для студентов специальности 21.05.04 Горное дело специализации «Электрификация и автоматизация горного производства».

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Рецензент д-р физ.-мат. наук проф. *С.И. Перегудин* (Санкт-Петербургский государственный университет)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 21.05.04

Сост. *М.А. Керейчук, В.В. Ивакин*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой высшей математики

Ответственный за выпуск *М.А. Керейчук*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 03.09.2021. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,7. Усл.кр.-отт. 2,7. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 75 экз. Заказ 782.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

Введение

Данные методические указания дают практические навыки при решении задач теории функций комплексного переменного. Они предназначены для оказания помощи студенту при самостоятельном изучении материала и выполнении контрольных работ по заданному разделу. Книга содержит основные теоретические положения, а также в конце каждого раздела задания для самостоятельной работы. Эти задания разбираются и решаются самостоятельно каждым студентом во время практических занятий с использованием лекционного материала при непосредственной консультационной поддержке преподавателя. Разбор и решение этих заданий позволяют студентам уяснить и освоить основные понятия и методы указанного раздела высшей математики.

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексные числа. Исходные определения.

Определение. Выражение

$$z = x + iy$$

(здесь x, y – вещественные числа; i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$) называется комплексным числом; числа x и y называются соответственно вещественной и мнимой частями комплексного числа и обозначаются соответственно $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$.

Если мнимая часть числа равна нулю ($z = x + 0 \cdot i = x$), то число является чисто вещественным. Таким образом, множество всех вещественных чисел является подмножеством множества всех комплексных чисел.

Число, у которого равна нулю вещественная часть ($z = 0 + iy = iy$), называется чисто мнимым.

Число вида $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно-сопряженным к числу $z = x + iy$.

Очевидно, что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда одновременно равны их вещественные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

В частности, $z = 0$, если $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Рассмотрим плоскость с декартовой прямоугольной системой координат $0xy$. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку плоскости $M(x, y)$ (рис.1.1) и обратно, каждой точке плоскости соответствует комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой реализовано такое соответствие, называется комплексной плоскостью. Так как на оси $0x$ располагаются чисто вещественные числа $z = x + 0 \cdot i = x$, то она называется вещественной осью. На оси $0y$ располагаются чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, и эта ось называется мнимой осью.

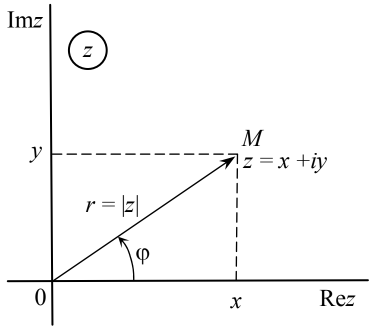

Рис.1.1

Тригонометрическая форма комплексного числа

Иногда удобнее сопоставлять комплексное число $z = x + iy$ не с точкой плоскости $M\left(x,\, y\right)$, а с радиусом-вектором $\overline{OM}$ этой точки, т.е. с вектором, который соединяет начало координат с рассматриваемой точкой. В этом случае можно говорить о модуле комплексного числа, равном модулю вектора $\overline{OM}$:

$$r = |z| = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.1}$$

Из свойств комплексно-сопряженных чисел следует, что $r = \sqrt{z\bar{z}}$.

Угол, образованный осью $0x$ и вектором $\overline{OM}$, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$, где $-\infty < \mathrm{Arg}\, z < \infty$. Отметим, что для $z = 0$ аргумент не определен. Очевидно, что величина аргумента комплексного числа z определяется неоднозначно. Наименьшее по модулю значение аргумента называется его главным значением и обозначается $\arg z$. Таким образом,

$$-\pi < \arg z \le \pi\ ;\ Arg z = \arg z + 2\pi n\,,\, n \in z\,. \tag{1.2}$$

Если учесть, что $\varphi = \arg z$ и $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, то получим

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (1.3)$$

Равенство (1.3) называется тригонометрической формой комплексного числа в отличие от ранее введенной, называемой алгебраической. Т.о. имеем

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$,

$\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Пример 1.1. Записать в тригонометрической форме следующие числа: 1) $z = 3i$; 2) $z = i - \sqrt{3}$.

Решение. 1. $z = 0 + 3i$; $r = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$;

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow z = 3(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$. Комплексная плоскость с точкой z представлена на рис.1.2.

2. $z = -\sqrt{3} + 1\cdot i$; $r = \sqrt{3+1} = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, где

$\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$. Графическое изображение числа приведено на рис.1.3. Таким образом,

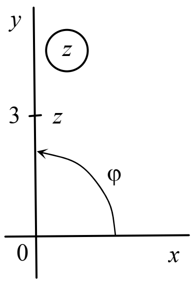

Рис.1.2

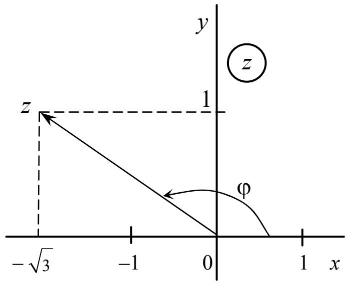

Рис.1.3

$$z = i - \sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Замечание. В силу того, что функция $\operatorname{tg}\varphi$ имеет период π, то при определении $\arg z$ по зависимости (1.2), необходимо дополнительно учитывать номер четверти, которой принадлежит комплексное число z.

Легко убедиться, что два комплексных числа будут равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, пропорциональное 2π:

$$\begin{matrix} z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \end{matrix} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \ k \in z \end{cases}$$

Замечание. Действительное число x так же может быть записано в тригонометрической форме, а именно:

$x = |x|(\cos 0 + i\sin 0)$ при $x > 0$,

$x = |x|(\cos\pi + i\sin\pi)$ при $x < 0$,

$0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ может принимать любое значение.

Действия над комплексными числами

Введем операции над комплексными числами, рассматривая их как многочлены первого порядка относительно мнимой единицы i.

1.*Сложение и вычитание комплексных чисел*

Имеем $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$.

Таким образом,

$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$; $\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$.

Для комплексно-сопряженных чисел получим

$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z$,

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im} z$.

Для данных операций справедливы следующие свойства:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативность сложения или перестановочный закон.

2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ – ассоциативность сложения или сочетательный закон.

Пример 1.2. Пусть $z_1=2+3i$; $z_2=4-5i$. Найти комплексно-сопряженные к ним числа и произвести операции сложения и вычитания.

Решение. Вычислим комплексно-сопряженные числа: $\bar{z}_1=2-3i$; $\bar{z}_2=4+5i$.

Произведем указанные операции:

$$z_1+z_2=(2+3i)+(4-5i)=(2+4)+(3-5)i=6-2i;$$

$$\bar{z}_1-\bar{z}_2=(2-3i)-(4+5i)=(2-4)+(-3-5)i=-2-8i;$$

2. Умножение комплексных чисел

Определение. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число, которое получается, если мы перемножаем эти числа как двучлены по правилам алгебры, учитывая, что

$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i$ и т.д., и вообще при любом целом k

$i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$

На основании этого правила имеем

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+y_1y_2i^2=$$

$$=x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)-y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Соответственно

$$\operatorname{Re}(z_1z_2)=x_1x_2-y_1y_2;\quad \operatorname{Im}(z_1z_2)=x_1y_2+x_2y_1.$$

Пример 1.3. Пусть $z_1=2+3i$; $z_2=4-5i$. Найти произведение этих чисел

Решение.

$z_1z_2=(2+3i)(4-5i)=8-10i+12i-15i^2=8+2i+15=23+2i$;

Для данной операции справедливы следующие свойства:

1. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ – коммутативность умножения.
2. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ – ассоциативность умножения.
3. $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ – дистрибутивность или распределительный закон.

4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

<u>Замечание.</u> Произведение двух комплексно-сопряженных чисел

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 .$$

Таким образом, произведение сопряжённых комплексных чисел равняется квадрату модуля каждого из них.

Если два числа заданы в тригонометрической форме (1.3), то их произведение выполняется следующим образом

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Следовательно, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а одним из значений аргумента является сумма аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \ ; \ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi k , \ k \in \mathrm{Z} .$$

Пример 1.4. Найти произведение чисел $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Запишем числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = \sqrt{3} - i ; \ r_1 = \sqrt{3+1} = 2 ; \ \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} ; \ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} ;$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} ; \ r_2 = \sqrt{1+3} = 2 ; \ \operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3} ; \ 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ \varphi_2 = \frac{\pi}{3} .$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] =$$

$$= 2 \cdot 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right] =$$

$$= 4 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2\sqrt{3} + 2i ;$$

3.Деление комплексных чисел

Деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить число $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$, нужно умножить делимое и делитель на число, сопряжённое делителю. Тогда делителем будет действительное число, разделив на которое действительную и мнимую части делимого, получим частное

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2-iy_2\right)}{\left(x_2+iy_2\right)\left(x_2-iy_2\right)}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2-i^2y_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}=$$

$$=\frac{\left(x_1x_2+y_1y_2\right)+i\left(x_2y_1-x_1y_2\right)}{x_2^2+y_2^2}\ .$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ;\ \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ .$$

Пример 1.5. Пусть $z_1=2+3i$; $z_2=4-5i$. Найти $\frac{z_1}{z_2}$ и $\frac{z_2}{z_1}$

Решение. Произведем указанные операции:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+10i+12i+15i^2}{16-25i^2}==\frac{-7+22i}{41}=-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$$

;

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{4-5i}{2+3i}=\frac{(4-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{8-12i-10i+15i^2}{4-9i^2}==\frac{-7-22i}{13}=-\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i$$

.

Справедливо следующее свойство: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Если два числа заданы в тригонометрической форме (1.3), то можно записать правило деления комплексных чисел $\left(z_2\neq 0\right)$ в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Таким образом, модуль частного комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент равен разности соответствующих аргументов:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Argz_1-Argz_2+2\pi k,\quad k\in z\cdot$$

Пример 1.6. Найти частное чисел $z_1=\sqrt{3}-i$ и $z_2=1+i\sqrt{3}$.

Решение. Запишем числа в тригонометрической форме:

$$z_1=\sqrt{3}-i;\ r_1=\sqrt{3+1}=2;\ \operatorname{tg}\varphi_1=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{\pi}{2}<\varphi_1<0\Rightarrow\varphi_1=-\frac{\pi}{6};$$

$$z_2=1+i\sqrt{3};\ r_2=\sqrt{1+3}=2;\ \operatorname{tg}\varphi_2=\sqrt{3};\ 0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]=$$

$$=\frac{2}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=0-1\cdot i=-i.$$

4.Возведение комплексного числа в целую положительную степень.
Применяя метод математической индукции, из правила умножения комплексных чисел получим правило возведения их в целую положительную степень:

$$z^2=zz=rr\left[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)\right]=\left|z^2\right|(\cos2\varphi+i\sin2\varphi);$$

$$z^3=z^2z=r^2r\left[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)\right]=r^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi),$$

т.е. для любого целого положительного n справедлива формула Муавра

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Пример 1.7. Пусть $z=1+i\sqrt{3}$. Найти z^3.

Решение. Записав комплексное число z в тригонометрической форме

$$z=1+i\sqrt{3};\ r=\sqrt{1+3}=2;\ \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3};\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{3};$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

получим

$$z^3 = 2^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1 + 0\cdot i) = -8\,.$$

Если найти z^3 алгебраическим способом (на основе формулы бинома Ньютона), то получим:

$$z^3 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot 1\left(i\sqrt{3}\right)^2 + \left(i\sqrt{3}\right)^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\,i - 9 - 3\sqrt{3}\,i = -8\,.$$

5.Извлечение корня из комплексного числа.

Извлечь корень целой положительной степени n из комплексного числа z означает следующее: найти такое комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$, чтобы выполнялось равенство вида $w^n = z$. Пусть $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $w = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, тогда имеем

$$w^n = \rho^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя правило равенства двух комплексных чисел, получим

$$\rho^n = r \quad\Rightarrow\quad \rho = \sqrt[n]{r}\,;$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k\in z \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\quad k\in z\,.$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \qquad (1.4)$$

Очевидно, что при $k = n,\ n+1, \ldots$ получим уже найденные ранее корни в силу 2π-периодичности функций $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Следовательно, корень n-й степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений.

Легко заметить, что все значения корня $\sqrt[n]{z}$ на комплексной плоскости будут являться вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

Пример 1.8. Вычислить $\sqrt[6]{-8}$.

Решение. Запишем комплексное число $z=-8$ в тригонометрической форме:

$$z=-8=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right);\ r=8;\ \varphi=\pi\ ,$$

и воспользуемся формулой (1.4). Тогда

$$\sqrt[6]{-8}=\sqrt[6]{8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)}=\sqrt[6]{8}\left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi\left(2k+1\right)}{6}+i\sin\frac{\pi\left(2k+1\right)}{6}\right].$$

Найдем корни: при $k=0$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);$$

при $k=1$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}i\ ;$$

при $k=2$

$$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right);$$

при $k=3$

$$z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);$$

при $k=4$

$$z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}i\ ;$$

при $k=5$

$$z_6=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot$$

При $k=6$ корень z_6 совпадает с z_1, корень z_7 с z_2 и т.д. Все найденные значения корня изображены на рис.1.4.

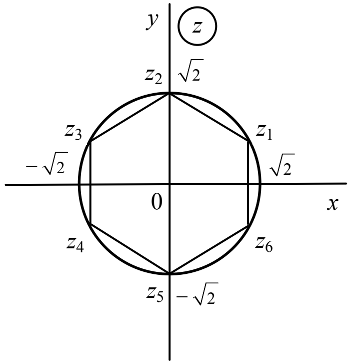

Рис.1.4

Если множество вещественных чисел считать подмножеством комплексных чисел, а любое вещественное число x – комплексным с нулевой мнимой частью: $x = x + 0 \cdot i$, то тогда из любого вещественного числа, в том числе и из отрицательного, можно извлечь квадратный корень (имеющий два различных значения). Таким образом, любое квадратное уравнение на множестве комплексных чисел будет иметь два корня.

В высшей алгебре доказывается утверждение, которое называется основной теоремой алгебры: уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

всегда имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Пример 1.9. Решить уравнение $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Решение. Воспользуемся общей формулой корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в предположении ее справедливости и при отрицательном дискриминанте $(D < 0)$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$. Здесь $D = 36 - 52 = -16$.

Для вычисления $\sqrt{D}$ будем считать D комплексным числом и воспользуемся формулой (1.5). Представив D в тригонометрической форме:

$$D=-16=16\left(\cos\pi+i\sin\pi\right),\ \Rightarrow\ r=16,\ \varphi=\pi,$$

получим

$$\sqrt{D}=\sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right),$$

и при $k=0$ и $k=1$ соответственно

$$\left(\sqrt{D}\right)_1=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=4i\ ;$$

$$\left(\sqrt{D}\right)_2=4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-4i.$$

Окончательно

$$x_{1,\,2}=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm2i.$$

Показательная форма комплексного числа

Справедлива формула

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \qquad (1.5)$$

Это есть формула Эйлера, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Представим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right).$$

По формуле Эйлера

$$r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=re^{i\varphi}$$

Выражение $z=re^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Пример 1.10. Представить числа 1 и i в показательной форме.

Решение. Имеем $1=\cos2k\pi+i\sin2k\pi=e^{2k\pi i}$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме производятся следующим образом.

Если $z_1=r_1e^{i\varphi_1}, z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то

1. $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3. $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

4. $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $\quad (k = 0,1,2........n-1)$

Задания для самостоятельной работы к параграфу 1

1. Для комплексных чисел z_1 и z_2 найти $z_1 + z_2$; $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $z_1 - \bar{z}_2$; $z_1 z_2$; z_1 / z_2 и z_2 / z_1. Обозначить заданные числа и полученные результаты на комплексной плоскости. Заданные числа: 1) $z_1 = 3 + i, z_2 = 1 - 2i$; 2) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 4 + i$; 3) $z_1 = 6 - i,\ z_2 = i - 3$; 4) $z_1 = i + 1; z_2 = -2 - i$.

2. Записать в тригонометрической и показательной форме, найти модуль, аргумент и главное значение аргумента для следующих комплексных чисел: 1) $3i$; 2) $-i$; 3) 2; 4) –2; 5) $1 + i$; 6) $-1 - i$; 7) $\sqrt{3} - i$; 8) $1 - i\sqrt{3}$; 9) $2 + 5i$; 10) $-2 + 5i$; 11) $2 - 5i$; 12) $-2 - 5i$.

3. Вычислить: 1) $1/i$; 2) $(1+i)/(1-i)$; 3) $2/(1-3i)$; 4) $(1+2i)^6$; 5) $(2+i)^7 + (2-i)^7$; 6) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$; 7) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$; 8) $\dfrac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$; 9) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

4. Вычислить, пользуясь тригонометрической формой комплексного числа, следующие числа: 1) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$; 2) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^8$; 3) $(1+i)^{25}$; 4) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 5) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}$; 6) $\dfrac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{50}}$.

5. Вычислить следующие числа: 1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[8]{1}$; 3) $\sqrt{1-i}$; 4) $\sqrt{3+4i}$; 5) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

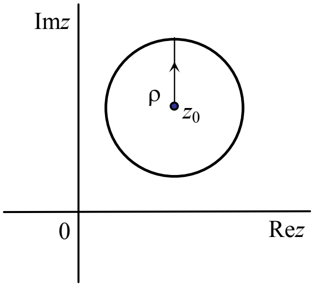

Рис.2.1

§2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Последовательность комплексных чисел.

Внутренность круга радиусом ρ с центром в точке z_0, т.е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \rho$, называется ρ-окрестностью точки z_0 (рис.2.1).

Число $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, можно найти такой номер $N(\varepsilon) > 0$, начиная с которого, т.е. при всех $n \geq N$, выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Иначе говоря, для $\forall\varepsilon$-окрестности z_0 все члены последовательности z_n, начиная с некоторого номера $n = N$, попадут внутрь этой окрестности.

Если $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 0,1....n....)$, то

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon,$$

откуда легко получить, что равенство $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ равносильно существованию двух пределов: $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Пусть последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_{n,\ldots}$ такова, что для $\forall M > 0$ можно найти такой номер *N*, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n| > M$, т.е. модули членов последовательности, начиная с некоторого номера становятся больше любого, сколь угодно большого, положительного числа $M > 0$. В этом случае считают, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Такой предел последовательности называют бесконечно удаленной точкой.

Окрестностью бесконечно удаленной точки называется внешность круга радиусом R с центром в начале координат. Таким образом, R-окрестность бесконечно удаленной точки задается неравенством $|z| > R$. В этом случае определение бесконечного предела примет вид $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если для любого сколь угодно большого числа $\forall R > 0$ существует такой номер N, что при всех $n \geq N$ точки z_n попадут в R-окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. будет выполняться неравенство $|z_n| > R$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся; если последовательность не имеет предела или имеет бесконечный предел, она называется расходящейся.

Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной плоскостью.

Определение функции комплексного переменного.

Пусть даны 2 плоскости комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv.$ Рассмотрим множество точек D в плоскости z и множество точек G в плоскости W.

Определение. Если каждому числу $z \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие определённое комплексное число $W \in G$, то на множестве D задана однозначная функция комплексного переменного, отображающая множество D в множество G. Обозначение $W = f(z)$.

Например, функция $w = z^2$ определена однозначно, причем на всей комплексной плоскости, так как для любого $z = x + iy$, имеем

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т.е любому комплексному числу z соответствует одно, единственное значение z^2.

Определение. Множество D называют областью определения функции $f(z)$. Если каждая точка множества G является значением функции, то G - область значений этой функции или образ множества D при помощи функции $f(G)=f(D)$. Говорят также, что функция f отображает D на G.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \qquad ((x,y)\in D),$$

где $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z),\ \ v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$ - действительные функции от переменных x и y.

Например, если $w=z^2$, то $u(x,\ y)= \ =x^2-y^2;\ \ v(x,y)=2xy$.

Определение. Если каждой точке z поставлено в соответствие два и более значений W, это означает, что на множестве комплексных чисел задана многозначная функция $W=f(z)$.

Функция $w=\operatorname{Arg}z$ многозначна и определена во всех точках комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$, для которой аргумент не определен.

Определение. Функция $W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ имеет предел в точке z_0, равный числу $A=a+ib,$ если

$$\lim_{|z-z_0|\to 0}|f(z)-A|=0 \qquad (2.1)$$

В этом случае пишут $\underset{z\to z_0}{f(z)}=A\cdot$

Свойство (2.1) можно записать в виде равенства

$$\lim_{|z-z_0|\to 0}\sqrt{(u-a)^2+(v-b)^2}=0 \qquad (2.2)$$

или в виде двух равенств

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=a, \qquad \lim_{(\mathrm{x,y})\to(x_0,y_0)}v(x,y)=b \qquad (2.3)$$

Для комплексных функций $f(z)$ и $g(z)$ имеют место свойства:

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=\lim_{z\to z_0}f(z)\lim_{z\to z_0}g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \qquad \left(\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0\right) \tag{2.4}$$

Определение. Функция $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в окрестности этой точки , в том числе и в ней самой, и для неё должно выполняться равенство

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0); \quad f(z+\Delta z) - f(z_0) \to 0, \ \ \Delta z \to 0. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) эквивалентно двум равенствам:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0).$$

Следовательно, непрерывность функции f в точке z_0 эквивалентна непрерывности функций u и v в точке (x_0, y_0).

Из свойств (2.4) следует, что сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке z_0 комплексных функций $f(z)$ и $g(z)$ есть непрерывная функция в этой точке. В случае частного надо считать, что $g(z_0) \neq 0$.

Пример 2.1. Функция $W = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна во всех точках комплексной плоскости, т.к.

$$\big||z+\Delta z| - |z|\big| \le |\Delta z| \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0$$

Пример 2.2. Функция $W = z$ также непрерывна во всех точках комплексной плоскости, т.к. $|z + \Delta z - z| = |\Delta z| \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Функция z^n $(n = 2,3...)$ также непрерывна как произведение конечного числа непрерывных функций.

Определение. Множество комплексных чисел D называется областью, если D, как множество точек плоскости, открыто и связно.

Определение. Область D называется односвязной, если любая непрерывная замкнутая самонепересекающаяся кривая, проведённая в

D, ограничивает некоторую область G, целиком принадлежащую D. *Иначе область называется многосвязной.*

Пример 2.3. Кольцо $r < |z| < R$ - многосвязная область, т.к. кривая L (рис.2.2) принадлежит кольцу, но ограничивает область, не входящую целиком в него

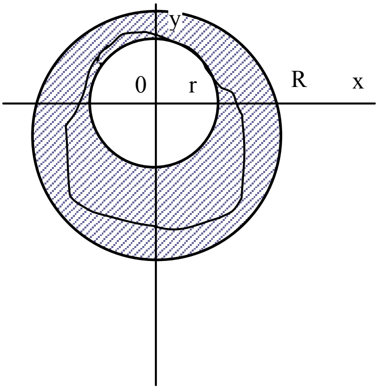

Рис.2.2

Производная функции комплексного переменного.

Пусть задана однозн чная функция $W = f(z)$ в области D комплексной плоскости z.

Определение. Производной от функции $f(z)$ в точке z называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dW}{dz} \tag{2.6}$$

когда Δz любым образом стремится к нулю.

Определение. Функция $f(z)$, имеющая непрерывную производную в любой точке области D комплексной плоскости, называется аналитической функцией в этой области.

Справедливо утверждение, что если производная аналитической функции $f(z)$ не равна нулю в области D, то множество значений G функции $f(z)$ также есть область.

Замечание 1. Если функция $f(z)$ имеет всюду на области D производную $f'(z)$, то эта производная непрерывна всюду в D, т.е. $f(z)$ аналитическая на D.

Замечание 2. Если функция $f(z)$ имеет производную в точке z, то она непрерывна в этой точке ($\Delta W \to 0$ при $\Delta z \to 0$).

Производная от функции $f(z)$ порядка k обозначается через $f^{(k)}(z)$ и определяется по индукции

$$\left(f^{(k-1)}(z)\right)' = f^{(k)}(z) \qquad \left(k = 1,2.....; f^{(0)}(z) = f(z)\right).$$

Зная, что у аналитической в области D функции $f(z)$ производная непрерывна в D, нетрудно заключить, что $f(z)$ имеет в D непрерывные производные любого порядка $f'(z), f''(z).....$

Основные свойства производных функций комплексного переменного аналогичны соответствующим свойствам производных для функций действительного переменного:

$$[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \tag{2.7}$$

$$[u(z)v(z)]' = u'(z)v(z) + v'(z)u(z), \tag{2.8}$$

$$\left[\frac{u(z)}{v(z)}\right]' = \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0), \tag{2.9}$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dv}\frac{dv}{dz} \tag{2.10}$$

Формулу (2.10) надо понимать так: если W есть функция $W = \varphi(v)$ комплексного переменного v, имеющая производную $\frac{dW}{dv} = \varphi'(v)$, а $v = \psi(z)$ - функция от комплексной переменной z, имеющая производную $\frac{dv}{dz} = \psi'(z)$, то производная сложной функции $W = F(z) = \varphi[\psi(z)]$ вычисляется по формуле (2.10).

§3.ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональная функция имеет вид

$$f(z)=\frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots. + b_0}.$$

В частности, дробно-рациональной функцией является многочлен

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 \qquad (3.1)$$

Вычисление значения дробно-рациональной функции в какой-либо точке z сводится к операциям над комплексными числами

Пример 3.1. Вычислить значение функции $W = iz^2 + 2z$ в точке $z = 1 + i$

Имеем

$$W\big|_{z=1+i} = i(1+i)^2 + 2(1+i) = i(1+2i+i^2) + 2 + 2i =$$

$$= i(1+2i-1) + 2 + 2i = 2i^2 + 2 + 2i = -2 + 2 + 2i = 2i$$

2.Экспоненциальная функция

Функция экспоненты комплексного переменного определяется следующим образом: $f(z) = e^z = e^{x+iy}$. Для неё справедливы соотношения

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad \left(e^z\right)^m = e^{mz} \quad (m \text{ - целое}) \qquad (3.2)$$

С учётом первого из этих соотношений и формулы Эйлера (1.5), имеем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (3.3)$$

Тогда $e^x = \left|e^z\right|$ и $\arg e^z = y$. Из этого же равенства следует, что функция e^z периодична и имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] =$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

Вообще можно записать $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad (k = 0, \pm1, \pm2\ldots.)$

Формула (3.3) может быть использована для вычисления значений показательной функции при любых комплексных значениях аргумента.

Пример 3.2. Вычислить значение $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$.

Решение. Подставив в равенство (3.3) $x = 2$ и $y = \dfrac{\pi}{3}$, получим

$$e^{-2+\frac{\pi}{3}i} = e^{-2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3.Тригонометрические функции

Если в формуле Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ заменить z на $(-z)$, то получим $e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$. Складывая и вычитая эти две формулы, определяем

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (3.4)$$

Комплексные функции tgz и $ctgz$ вводятся по аналогии с вещественными функциями

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ .$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq k\pi \qquad (3.5)$$

Перечислим основные свойства тригонометрических функций:

1.Для тригонометрических функций остаются в силе все известные формулы тригонометрии. Например

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x\cos yi - \sin x\sin yi,$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x\cos yi + \cos x\sin yi,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin z_1\cos z_2 + \sin z_2\cos z_1 = \sin(z_1 + z_2)$$

2. $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с периодом 2π. Действительно, в силу периодичности функции e^z имеем

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$\sin(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

Аналогично можно доказать, что tgz и $ctgz$ - периодические функции с периодом π.

3.. $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены в комплексной плоскости. Например,

$$\cos 8i=\frac{e^{-8}+e^{8}}{2}>1400.$$

4. Функция $\cos z$ является четной, а функция $\sin z$ – нечетной:

$$\cos(-z)=\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z,$$

$$\sin(-z)=\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z.$$

5. Все корни функций $\sin z$ и $\cos z$ - вещественны.

Пример 3.3. Вычислить значение функции $\cos(2+i)$.

Решение. С учетом равенств (3.3) и (3.4) имеем:

$$\cos(2+i)=\frac{e^{i(2+i)}+e^{-i(2+i)}}{2}=\frac{1}{2}\left[e^{2i-1}+e^{-2i+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e^{-1}(\cos 2+i\sin 2)+e\left[\cos(-2)+i\sin(-2)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)\cos 2-\frac{1}{2}i\left(e-e^{-1}\right)\sin 2$$

Пример 3.4. Вычислить $\operatorname{tg} i$.

Решение. По определению

$$tgi=\frac{\sin i}{\cos i}=\left(\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}\right):\left(\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right)=\frac{e^{-1}-e^{1}}{i(e^{-1}+e^{1})}=$$

$$=\frac{(e-e^{-1})i}{e+e^{-1}}=\frac{e^{2}-1}{e^{2}+1}i.$$

4.Гиперболические функции

Введём в рассмотрение функции, определяемые равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\ \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \qquad (3.6)$$

Эти функции называются синус, косинус, тангенс и котангенс гиперболические соответственно. Из соотношений (3.4) - (3.6) следуют выражения гиперболических функций через тригонометрические и наоборот:

$$\operatorname{sh} z = -i\sin(iz);\ \ \operatorname{ch} z = \cos(iz);\ \ \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz);\ \ \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg}(iz).$$

$$\sin z = -ish(iz);\ \cos z = ch(iz);\ tgz = -ith(iz);\ ctgz = icth(iz). \quad (3.7)$$

На основании этих формул и известных формул тригонометрии можно также заключить, что гиперболические функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$ch^2 z - sh^2 z = 1;\ \ sh2z = 2shzchz;\ \ ch2z = ch^2 z - sh^2 z; \qquad (3.8)$$

$$ch(z_1 + z_2) = chz_1 chz_2 + shz_1 shz_2;\ ch(-z) = chz;\ sh(-z) = -shz$$

Из соотношений (3.7) следует, в частности, периодичность гиперболических функций: для $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ период равен $2\pi i$, а для $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ период равен πi.

Пример 3.5. Вычислить $\operatorname{ch}(1+2i)$.

Решение. Согласно определению функции

$$ch(1+2i) = \frac{e^{1+2i} + e^{-1-2i}}{2} = \frac{1}{2}\left[e(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-1}(\cos 2 - i\sin 2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e + e^{-1}\right)\cos 2 + i\frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)\sin 2 = ch1\cos 2 + ish1\sin 2.$$

5. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция комплексной переменной определяется следующим образом:

$$f(z) = Lnz = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad (3.9)$$

где $z \neq 0,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2...$

Под $\ln|z|$ понимается обычное определение логарифма.

Ввиду многозначности $\operatorname{Arg} z$ функция Lnz также является многозначной, причем ее вещественная часть определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π.

Определение. Главным значением логарифма комплексного переменного будем называть такое значение, которое соответствует главному значению аргумента (при $k=0$): $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Пример 3.6. Вычислить значение функции $\operatorname{Ln} i$.

Решение. Имеем $z=i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{0+1} = 1$; $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

По формуле (3.9)

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Главное значение логарифма числа i (при $k=0$) $\ln i = \dfrac{\pi}{2} i$.

Пример 3.7. Найти $\operatorname{Ln}(3+4i)$ и $\ln(3+4i)$.

Решение. $z = 3+4i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{9+16} = 5$; $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Соответственно $\ln(3+4i) = \ln 5 + i arctg\dfrac{4}{3}$

$$Ln(3+4i) = \ln 5 + (arctg\frac{4}{3} + 2\pi k)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2.....$$

С учетом свойств обычного логарифма и аргумента комплексного числа можно доказать следующие свойства логарифма комплексного числа:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2; \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$Ln(z^n) = nLnz + 2\pi k i; \quad \operatorname{Ln}\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z, \quad k,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \quad (3.10)$$

Отметим также, что для любого комплексного числа справедлива формула

$$e^{Lnz} = z. \quad (3.11)$$

6. Общая степенная функция

С учётом равенства (3.11) можно записать

$$f(z) = z^a = e^{aLnz}, \quad (3.12)$$

где a и z - комплексные числа. В силу многозначности функции Lnz функция (3.12) имеет бесконечно много значений; главное значение $z^a = e^{a\ln z}$.

Если a - вещественное число, то при $a \geq 0$ функция (3.12) будет аналитической на всей комплексной плоскости z, а при $a < 0$ на всей плоскости с выколотой из неё точкой $z = 0$.

7. Общая показательная функция

Согласно равенству (3.11) имеем

$$f(z) = a^z = e^{zLna}, , \qquad (3.13)$$

где a и z – комплексные числа, $a \neq 0$.

В силу многозначности значения $\mathrm{Ln}\, a$ выражение a^z также будет многозначно. Его главным значением будем называть то, которое соответствует главному значению логарифма $\ln a$.

Пример 3.8. Вычислить 2^i

Решение. На основании формулы (3.13) и формулы Эйлера имеем

$$2^i = e^{iLn2} = \cos(Ln2) + i\sin(Ln2)$$

Пример 3.9. Вычислить i^i.

Решение. С учетом формулы (3.13) получим

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left[\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots .$$

Задания для самостоятельной работы к параграфу 3

1. Вычислить следующие логарифмы: 1) $\mathrm{Ln}\,(1+i)$; 2) $\mathrm{Ln}\,(-i)$; 3) $\mathrm{Ln}\,(-3+4i)$.

2. Вычислить степени: 1) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; 2) $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$; 3) e^{3+i}; 4) i^{1+i}; 5) $(1+i)^i$; 6) 3^i.

3. Найти значения функций: 1) $\sin i$; 2) $\cos(1+i)$; 3) $\mathrm{tg}\,(2-i)$; 4) $\mathrm{ch}\, i$; 5) $\mathrm{sh}\,(-2+i)$; 6) $\sin(x+iy)$; 7) $\cos(x+iy)$.

4. Дана функция $w = z^2 + z$. Найти $w(z)$, если: 1) $z = 1+i$; 2) $z = 2-i$; 3) $z = i$; 4) $z = -1$.

5. Дана функция $f(z)=x^2+y^2 i$, где $z=x+iy$. Вычислить: 1) $f(1+2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$; 4) $f(-i)$.

6. Дана функция $w=e^z$. Найти $w(z)$, если z: 1) $z=\dfrac{\pi i}{2}$; 2) $z=\pi(1-i)$; 3) $z=1+\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; $k\in z$.

7. Дана функция $f(z)=\dfrac{1}{x-yi}$, где $z=x+iy$. Вычислить: 1) $f(1+i)$; 2) $f(i)$; 3) $f(3-2i)$.

8. Найти значения функций: 1) $Ln\left(\sqrt{3}+i\right)$; 2) $\ln(1-i)$.

§4. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

Рассмотрим комплексную функцию $W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\ \ (z\in D)$, определённую в области D комплексной плоскости. Пусть она имеет производную в точке $z\in D$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}, \tag{4.1}$$

$$\Delta W=\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\right].$$

Таким образом, при любом способе стремления $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ к нулю должен существовать предел (4.1), равный одному и тому же комплексному числу $f'(z)$. В частности, это должно иметь место, если

a) $\Delta z=\Delta x+i\cdot 0=\Delta x$ и $\Delta x\to 0$ или, если

b) $\Delta z=0+i\Delta y=i\Delta y$ и $\Delta y\to 0$.

В первом случае

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\right.$$
$$\left.+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+$$
$$+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.2}$$

Во втором случае

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\right.$$

$$\left.+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right]=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+$$

$$+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4.3)$$

Но т.к. предел (4.1) существует, то должны выполняться равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (4.4)$$

которые называются условиями Коши-Римана (Эйлера-Даламбера).

Производную $f'(z)$ можно вычислить по формулам (4.2) и (4.3). Помимо них можно также установить формулы

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.5)$$

С помощью этих формул можно получить выражения для производных основных элементарных функций.

Пример 4.1. Найти производную функции $f(z)=e^z$

Решение. $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

Таким образом $u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y.$

По формуле (4.2) $f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z$$

Таким образом $\left(e^z\right)'=e^z$.

Производные основных элементарных функций сведём в таблицу:

1) $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(z)=na_nz^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+...$

2) $f(z)=e^z\Rightarrow f'(z)=e^z$

3) $f(z)=\sin z\Rightarrow f'(z)=\cos z;\quad f(z)=\cos z\Rightarrow f'(z)=-\sin z$

$f(z) = tgz \Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{\cos^2 z}$; $f(z) = ctgz \Rightarrow f'(z) = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$

4) $f(z) = shz \Rightarrow f'(z) = chz$; $f(z) = chz \Rightarrow f'(z) = shz$

$f(z) = thz \Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{ch^2 z}$; $f(z) = cthz \Rightarrow f'(z) = -\dfrac{1}{sh^2 z}$ $(shz,\ chz \neq 0)$

5) $f(z) = Lnz \Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{z}$

6) $f(z) = z^a \Rightarrow f'(z) = az^{a-1}$

7) $f(z) = a^z \Rightarrow f'(z) = a^z Lna$

Определение. Если однозначная функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z и в некоторой ее окрестности, то она называется аналитической (регулярной) или голоморфной в этой точке.

Определение. Функция, аналитическая во всех точках некоторой области *G*, называется аналитической (регулярной) в этой области.

Определение. Точки плоскости, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называются правильными точками этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, где функция $f(z)$ не определена) – особыми точками.

Пример 4.2. Определить, является ли аналитической функция $w = z^2$

Решение. Так как $w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, т.е. $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Коши – Римана выполняются для любых x и y и функция $w = z^2$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Пример 4.3. Определить, является ли аналитической функция $w = \overline{z}$

Решение. Представим функцию в виде $w = \overline{z} = x - iy$ и обозначим $u = x$, $v = -y$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Таким образом, функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Задания для самостоятельной работы к параграфу 4

1. Проверить выполнение условий Коши – Римана для следующих функций: 1) $w = \sin z$; 2) $w = \cos z$; 3) $w = \mathrm{Ln}\, z$; 4) $w = z^n$ (n – целое число).
2. Найти производные функций: 1) $w = \sin z$; 2) $w = z^2$; 3) $w = \mathrm{ch}\, z$.
3. Доказать, что ни в одной точке плоскости следующие функции не являются аналитическими: 1) $w = |z|$; 2) $w = \dfrac{\mathrm{Re}\, z}{z}$.
4. Будут ли дифференцируемы следующие функции, где $z = x + iy$: 1) $f(z) = y + ix$; 2) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$; 3) $f(z) = x^2 + y^2 - 2xiy$; 4) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right)$; 5) $f(x) = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + i \cos x \,\mathrm{sh}\, y$.

Если функция дифференцируема, найти ее производную.

§5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть в области D плоскости z задана аналитическая функция $f\left(z\right) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда функция $f\left(z\right)$ имеет в D непрерывные производные любого порядка. Тогда функции u и v имеют в D непрерывные частные производные любого порядка, а первые производные удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5.1}$$

Продифференцируем первое из этих равенств по x, а второе – по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5.2}$$

Левую часть уравнения (5.2) обозначают символом

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Определение. Уравнение $\Delta u = 0$ (5.3)

называют уравнением Лапласа. Символ $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называют оператором Лапласа.

Определение. Функцию u, имеющую непрерывные частные производные второго порядка в D и удовлетворяющую уравнению Лапласа (5.3), называют гармонической в D.

Таким образом, мы установили, что действительная часть аналитической в D функции является гармонической функцией в D.

Если первое равенство в (5.1) продифференцировать по y, а второе – по x и вычесть второе равенство из первого, то получим $\Delta v = 0$, т.е. и мнимая часть аналитической функции является гармонической функцией.

Однако функция $f(z) = u + iv$, где u и v - произвольные гармонические в D функции, не всегда является аналитической в D. Она будет аналитической, только если функции u и v удовлетворяют в D условиям Коши-Римана.

Можно показать, что если D есть односвязная область, то для всякой гармонической в D функции $u(x, y)$ существует единственная, с точностью до произвольной постоянной, сопряжённая к $u(x, y)$ в D функция $v(x, y)$ такая, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в D.

Таким образом, если нам известно, что функция $f(z)$ является аналитической, и известна её вещественная или мнимая часть, то с помощью условий Коши-Римана можно найти вторую часть, а следовательно, и всю функцию $f(z)$.

Пример 5.1. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4y.$$

Найдем вторые производные и убедимся, что заданная функция является гармонической:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (4x+1)'_x = 4; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (-4y)'_y = -4;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0.$$

Таким образом, уравнение Лапласа (5.2) выполняется.

Функция $w = u + iv$ будет аналитической, если для функций u и v выполняются условия Коши – Римана (5.1). Из первого условия имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4y,$$

откуда

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (-4y)\, dx = -4xy + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая произвольная функция, не зависящая от x. Чтобы найти ее, используем второе условие Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x - 1,$$

но так как $u(x, y) = -4xy + \varphi(y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y)$, то

$$-4x - 1 = -4x + \varphi'(y); \quad \varphi'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \int (-1)\, dy = -y + C,$$

где $C - const$.

Таким образом, имеем $u(x, y) = -4xy - y + C$, окончательно

$w = u + iv = -4xy - y + C + \left(2x^2 - 2y^2 + x\right)i$.

Если в полученном равенстве заменить $z = x + iy$, получим

$$w = \left(2x^2 i - 4xy - 2y^2 i\right) + ix - y + C =$$
$$= 2i\left(x^2 + 2xyi + i^2 y^2\right) + i(x + iy) =$$
$$= 2i(x + iy)^2 + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C$$

Задания для самостоятельной работы к параграфу 5

1. Найти аналитическую функцию переменной $z = x + iy$, если вещественная часть ее задана следующим образом: 1) $x^3 - 3xy^2$; 2) $x^2 - y^2 + 2x$; 3) $x/\left(x^2 + y^2\right)$; 4) $2e^x \sin y$.

2. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если заданы следующие условия: 1) $\operatorname{Im} f(z) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2(1 + i)$; 2) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0$.

3. Дана вещественная часть $u\,(x,\ y) = x^2 - y^2 - x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x + iy$. Найти $f(z)$.

4. Дана мнимая часть $v\,(x,\ y) = x + y$ дифференцируемой функции $f(z)$, $z = x + iy$. Найти $f(z)$.

5. Найти дифференцируемую функцию $f(z) = u + iv$, при следующих условиях: 1) $u(x,\ y) = 2^x \cos(y \ln 2)$; 2) $v(x,\ y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

§6. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть на плоскости комплексного переменного z задана дуга l , в каждой точке которой существует касательная, причем направление касательной изменяется непрерывно при ее движении по кривой. Такие кривые называются гладкими. Начальную точку кривой обозначим z_0 , а конечную - z (если кривая замкнута, то $z = z_0$).

Положительное направление движения по кривой укажем от точки z_0 к точке z (рис.6.1).

Пусть на кривой l задана функция $w = f(z)$, непрерывная во всех точках кривой. Разобьем кривую l произвольным образом на n дуг точками $z_0, z_1....z_n = z$, тогда $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, где $i = 1...n$. На каждой из этих дуг выберем точку ζ_i и составим сумму вида

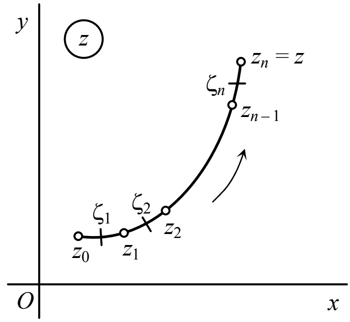

Рис.6.1

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i \tag{6.1}$$

Определение. Предел суммы (6.1) при $n \to \infty$ и $\max\limits_i \Delta z_i \to 0$ называется интегралом от функции $f(z)$ по дуге l и обозначается так:

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i \ . \tag{6.2}$$

Из определения непосредственно следуют свойства интеграла (6.2):

1) $\int\limits_l [f_1(z) \pm f_2(z)]\, dz = \int\limits_l f_1(z)\, dz \pm \int\limits_l f_2(z)\, dz$;

2) $\int\limits_l kf(z)\, dz = k\int\limits_l f(z)\, dz$, где k – комплексная постоянная;

3) $\int\limits_l f(z)\, dz = -\int\limits_{l^-} f(z)\, dz$ (дуга l^- совпадает с дугой l, но имеет противоположное направление);

4) $\int\limits_l f(z)\, dz = \int\limits_{l_1} f(z)\, dz + \int\limits_{l_2} f(z)\, dz$ (дуга l состоит из дуг l_1 и l_2);

5) если $|f(z)| \le M$ при $\forall z \in l$, а длина дуги l равна L, то $\left|\int\limits_l f(z)\, dz\right| \le ML$.

Вычисление интеграла от комплексной функции.

Пусть задано $z = x + iy$; $w = f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$. Тогда

$$\int_l f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \int_l \left(u(x, y)\,dx + iu(x, y)\,dy + iv(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy\right) =$$

$$\int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy\,. \qquad (6.3)$$

Формула (6.3) показывает, что вычисление интеграла от комплексной функции сводится к вычислению двух криволинейных интегралов II рода от вещественных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Пусть дуга l задана параметрическим уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, или

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где α и β соответствуют точкам $z_0 = z(\alpha)$ и $z = z(\beta)$.

Так как $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)\,dt$, то криволинейные интегралы в формуле (6.3) примут вид

$$\int_l f(z)dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(t)\,x'(t) - v(t)\,y'(t)\right]dt + i\int_\alpha^\beta \left[v(t)\,x'(t) + u(t)\,y'(t)\right]dt \qquad (6.4)$$

Если учесть, что $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, то равенство (6.4) можно коротко записать так:

$$\int_l f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)dt\,. \qquad (6.5)$$

Интеграл (6.4) существует для любой непрерывной функции $f(z)$ (функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этом случае также непрерывны) и для любой гладкой кривой l.

Если кривая l кусочно-гладкая и состоит из гладких ориентированных кусков $l_1.....l_n$, то по определению считаем

$$\int_l f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{l_k} f(z)dz \tag{6.6}$$

Пример 6.1. Вычислить $\int_l \operatorname{Re} z dz$ по кривой l, если l – отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1+i$;

Решение. Пусть $z_0 = 0$; $z = 1+i$. Уравнение отрезка, соединяющего точки z_0 и z, имеет вид $y = x$ или в параметрической форме $x = t$, $y = t$, $0 \le t \le 1$. Тогда параметрические уравнения l: $z = t + it = t(1+i)$; $z'(t) = 1+i = const$. Таким образом, имеем

$$\int_l \operatorname{Re} z dz = \int_l x dz = \int_0^1 t(1+i)\, dt =$$

$$= (1+i)\int_0^1 t dt = (1+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1+i).$$

Пример 6.2. Вычислить $\int_l |z|\, dz$, где кривая l – полуокружность радиусом 1 с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости (точка $z_0 = -1$ является начальной, а точка $z = 1$ – конечной).

Решение. Параметрические уравнения полуокружности l имеют вид $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ или $z = \cos t + i\sin t$, причем интегрирование идет от $z_0 = \pi$ до $z = 0$. Имеем $z'(t) = -\sin t + i\cos t$; $|z(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Таким образом, согласно формуле (6.5),

$$\int_l |z|\,dz = \int_\pi^0 (-\sin t + i\cos t)\,dt =$$

$$= (\cos t + i\sin t)\Big|_\pi^0 = 1 - (-1) = 2\,.$$

Пример 6.3. Вычислить $\int_l \frac{dz}{z - z_0}$, где l - окружность с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки

Решение. Уравнение l можно записать в форме $z = z_0 + \rho e^{it}$, где $t \in [0;2\pi]$, ρ - радиус окружности l. Поэтому

$$\int_l \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}\,dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Пример 6.4. Вычислить $\int_l (z - z_0)^n\,dz$ (n- целое, $n \neq -1$), где l - окружность с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки

Решение. $\int_l (z - z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t}\,dt =$

$$= i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = i\rho^{n+1}\,\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

в силу периодичности комплексной экспоненты.

Теорема Коши.

Теорема 1 (Коши) Если функция $w = f(z)$ аналитическая на односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру Г, принадлежащему D, равен нулю:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0\,. \qquad (6.7)$$

Напомним, что область D называется односвязной, если она ограничена одной гладкой или кусочно-гладкой кривой.

Пример 6.5. $\int\limits_{\Gamma} z^n dz = 0 \qquad (n = 0,1,2....),$

$\int\limits_{\Gamma} e^z dz = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} a^z dz = 0 \qquad (a > 0),$

$\int\limits_{\backslash\Gamma} \sin z dz = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} \cos z dz = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} shz dz = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} chz dz = 0,$

где Г – произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур, так как подынтегральные функции аналитические на плоскости z. Они имеют непрерывную производную во всех точках z комплексной плоскости.

Теорема 2. Пусть область D комплексной плоскости ограничена сложным положительно ориентированным кусочно-гладким контуром $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + ... + \Gamma_n$, т.е. при обходе по Г точки D остаются слева (рис.6.2). Тогда для функции $f(z)$, аналитической как в области D, так и на всех контурах $\Gamma_0, \Gamma_1 .... \Gamma_n$, имеет место равенство

$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$

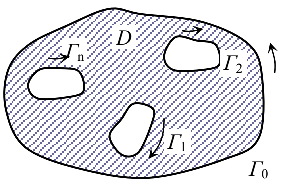

Рис.6.2

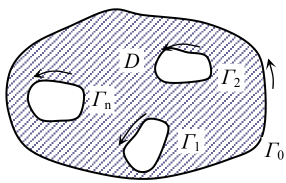

Рис.6.3

Теорема 3. Пусть область D ограничена внешним контуром Γ_0, ориентированным против часовой стрелки, и внутренними контурами $\Gamma_1 .... \Gamma_n$, ориентированными тоже против часовой стрелки (рис.6.3), и пусть на области D и на всех контурах $\Gamma_0, \Gamma_1 .... \Gamma_n$ задана аналитическая функция $f(z)$. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z) dz \tag{6.8}$$

Замечание. Если в теореме 3 $n=1$ (рис.6.4), то

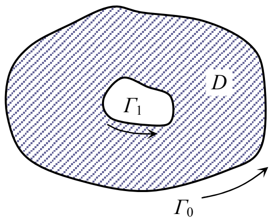

Рис.6.4

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz \tag{6.9}$$

Из равенства (6.9) следует, что равенства, установленные в примерах 6.3 и 6.4 остаются справедливыми, если в них окружность l с центром в точке z_0 заменить на любой замкнутый кусочно-гладкий контур l', содержащий внутри точку z_0 и ориентированный против часовой стрелки:

$$\int\limits_{l'} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \tag{6.10}$$

$$\int\limits_{l'} (z-z_0)^n dz = 0, \quad (n \neq -1) \tag{6.11}$$

Формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной замкнутой области D и на контуре Г, ограничивающем эту область и ориентированном в положительном направлении (рис.6.5), т.е. против часовой стрелки. Тогда имеет место формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}, \tag{6.12}$$

где z_0 - любая точка внутри контура Г.

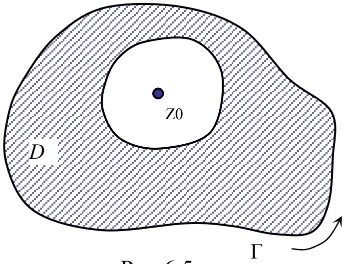

Рис.6.5

Таким образом, аналитическую функцию достаточно определить на контуре Г, а по формуле (6.12) можно автоматически получить её значения в других точках области D.

Замечание. Формула Коши имеет место и для многосвязной области.

Пример 6.6. Вычислить $\int\limits_l \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$, где l – окружность радиусом 2 с центром в точке (0, 3).

Решение. Имеем $\int\limits_l \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int\limits_l \frac{f(z)dz}{z-2i}$, где $f(z) = \frac{e^z}{z}$.

Эта функция аналитическая внутри области, ограниченной контуром l (рис.6.6). точка $z = 2i$ принадлежит этой области. Применяя формулу Коши (6.12), получим

$$\int\limits_l \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} =$$

$$= \pi e^{2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2)$$

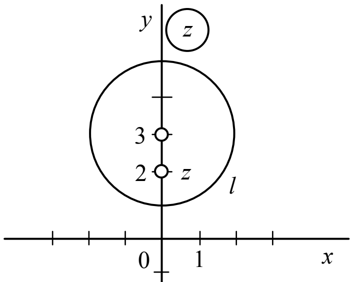

Рис.6.6

Замечание. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной замкнутой области D и на контуре Г, ограничивающем эту область и ориентированном против часовой стрелки, за исключением конечного числа точек $z_1.....z_n$, лежащих на вещественной оси, то для вычисления интеграла $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ можно использовать известную теорему разложения

Пример 6.7. Вычислить

$\int\limits_{\Gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$, где Г – замкнутый контур, внутри которого находятся полюсы
$z=1$, $z=2$, $z=3$.

Решение. Подынтегральная функция аналитическая внутри контура Г кроме точек $z=1$, $z=2$, $z=3$. Имеем

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} =$$

$$= \frac{A(z-2)(z-3) + B(z-1)(z-3) + C(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Отсюда
$z+1 = A(z-2)(z-3) + B(z-1)(z-3) + C(z-1)(z-2)$

При $z=2$: $3 = -B \Rightarrow B = -3$

При $z=3$: $4 = 2C \Rightarrow C = 2$

При $z=1$: $2 = 2A \Rightarrow A = 1$

Таким образом, исходный интеграл представим в виде суммы трёх интегралов:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-1} - 3\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-2} + 2\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-3}.$$

Каждый из этих интегралов равен $2\pi i$ согласно формуле (6.10). Следовательно, исходный интеграл равен:
$2\pi i(1-3+2) = 0$

Задания для самостоятельной работы к параграфу 6

1. Вычислить $\int\limits_{l} \operatorname{Im} z dz$, где l – контур, заданный в виде: 1) отрезка, соединяющего точку 0 с точкой $2+i$; 2) ломаной, состоящей из отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i, и отрезка, соединяющего точку i с точкой $2+i$.

2. Вычислить $\int\limits_{l} |z| \, dz$, где l – отрезок, соединяющий точку –1 с точкой 1.

3. Вычислить $\int\limits_{l} |z|^2 dz$, где l – отрезок, соединяющий точки 0 и $1-i$.

4. Вычислить $\int\limits_{l} \frac{\sin z dz}{z+1}$, где контур l задан следующим образом: 1) $l : |z+1| = 1$; 2) $l : |z-1| = 1$.

5. Вычислить $\int\limits_{l} \frac{dz}{z^2+9}$, где l – окружность радиусом 1, для случаев: 1) центр окружности в точке $z = 2i$; 2) в начале координат.

6. Вычислить $\int\limits_{l} \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$, если точка $z = -2$ находится внутри замкнутого контура l.

7. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, если Г – окружность: 1) $|z| = 1$ 2) $|z| = 3$ 3) $|z| = 5$

Библиографический список

1. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник / А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 104 с.

2. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 102 с.

3. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 207 с.

4. Математический практикум. Часть 5. Теория вероятностей и основы математической статистики. Теория функций комплексной переменной. Операционное исчисление. Элементы теории поля: Учебно-методическое пособие / А.П. Господариков, В.В. Ивакин, И.А. Лебедев, С.Е. Мансурова, А.А. Яковлева. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». – СПб, 2014. – 187 с.

5. *Волынская И.А., Козлова Н.Н.* Математика (дополнительные главы). Учебное пособие. - Горный университет, 2013.

6. *Данко П.Е.* и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов ВУЗов, ч.2-М.: 2016

Содержание