

*На правах рукописи*

**Васильев Богдан Юрьевич**



**МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВОЙ  
МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОЛЮСОВ И  
АЛГОРИТМА ХУКА-ДЖИВСА**

*Специальность 1.6.22. Геодезия*

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

Санкт-Петербург – 2024

Диссертация выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II».

**Научный руководитель:**

доктор технических наук, доцент

*Мустафин Мурат Газизович*

**Официальные оппоненты:**

*Щербаков Владимир Васильевич*

доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет путей сообщения», кафедра «Инженерная геодезия», заведующий кафедрой;

*Канахин Николай Владимирович*

кандидат технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I», кафедра «Инженерная геодезия», доцент.

**Ведущая организация** – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий», г. Новосибирск

Защита диссертации состоится **26 июня 2024 г. в 13:00** на заседании диссертационного совета ГУ.8 Санкт-Петербургского горного университета императрицы Екатерины II по адресу: 199106, г. Санкт-Петербург, 21-я В.О. линия, д.2, ауд. № 1171а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского горного университета императрицы Екатерины II и на сайте [www.spmi.ru](http://www.spmi.ru).

Автореферат разослан 26 апреля 2024 г.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ  
диссертационного совета



КУЗИН  
Антон Александрович

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность темы.**

Развитие компьютерных технологий позволяет создавать цифровые аналоги реальных процессов с высокой точностью, которая ранее была недоступна. Выполнение исследований в данном направлении соответствует распоряжениям правительства РФ от 21 декабря 2021 г. № 3759-р «Об утверждении стратегического направления в области цифровой трансформации науки и высшего образования» и от 20 мая 2023 года №1315-р «Об утверждении Концепции технологического развития на период до 2030 года», которые указывают на необходимость развития цифровых технологий и цифровизации производства. В утвержденной стратегии развития одна из главных ролей отводится цифровым моделям, которые совместно с программным обеспечением определяют качество производственного процесса. Применительно к задачам геодезии широко применяются цифровые модели рельефа (ЦМР), используемые как математическое приближение к рельефу земной поверхности для составления топографических карт и планов, обеспечения этапов проектирования и строительства зданий и инженерных сооружений, в том числе в горном деле, геодезического (маркшейдерского) мониторинга за деформациями земной поверхности, для безопасного освоения территорий, определения пригодности земель для сельскохозяйственного освоения, а также во многих науках о Земле. Важно отметить, что цифровые модели рельефа, наиболее приближенные к реальной земной поверхности, обеспечивают решение задачи прогноза её поведения с использованием расчетных методов и контроля процесса сдвижения путём геодезических наблюдений.

Существуют программы по обработке этих измерений и построения цифровых моделей рельефа с использованием различных методов пространственной интерполяции: кригинга, естественного соседа, триангуляции, радиальной базисной функции, минимальной кривизны, обратного расстояния. При этом каждый метод обладает своими недостатками: метод «Кригинг» сильно зависит от выбора вариограммы; методы «Естественный сосед» и «Обратное расстояние» чувствительны к выбросам, плотности и однородности

данных; метод «Триангуляция» недостаточно восстанавливает нелинейные зависимости в данных; метод «Радиальная базисная функция» некорректно обрабатывает участки с резкими изменениями кривизны поверхности на коротких расстояниях, поверхность построенная методом «Минимальная кривизна» не обязательно содержит исходные данные. Выбор метода пространственной интерполяции напрямую влияет на качество построения цифровой модели рельефа. В связи с возрастанием требований к точности построения цифровых моделей рельефа требуется разработка новых методов восстановления связей между геопространственными данными, так как эти связи определяют функциональную зависимость высотного положения определяемой точки от плановых координат.

Большая часть методов пространственной интерполяции, используемых для построения математических моделей рельефа, требует построения регулярной сети для снижения вычислительной нагрузки, в то время как геодезические измерения, выполняемые для получения данных о рельефе земной поверхности, являются нерегулярными. В таком случае переход от данных к регулярной сети приводит к снижению точности построения из-за аппроксимации в области узловых точек. Альтернативным подходом является построение нерегулярной сети триангуляции, которая не требует перехода к регулярной сети и корректно описывает участки с резким изменением кривизны поверхности, но слабо учитывает нелинейные связи между геопространственными данными.

Кроме того, современные методы получения геопространственной информации обладают высокой избыточностью. Поэтому, большой научно-практический интерес представляет снижение объема данных для построения цифровых моделей рельефа (исключение избыточных данных без потери качества), построенных по облакам точек. В этой связи решение обозначенных вопросов является актуальной задачей геодезии.

Содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности по пунктам 7, 11 и 12.

**Степень разработанности исследуемого направления:**

следует отметить ученых, разработки которых позволили существенно расширить область научных знаний о методах построения цифровых моделей рельефа: Ф.С. Бахарев, В.И. Волков, В.Н. Гусев, Е.А. Жалковский, Н.Д. Жданов, В.И. Кафтан, А.В. Комиссаров, А.А. Кочнева, А.И. Майданич, А.А. Майоров, А.И. Мартыненко, А.Н. Медянцеv, М.Г. Мустафин, Б.А. Новаковский, Р.В. Пермяков, Т.Е. Самсонов, А.Д. Сашурин, В.А. Середович, Е.Ю. Тюшевский, В. В. Щербаков, Е.И. Халугин, Л.И. Чернова и др.

Научное исследование опирается также на труды зарубежных ученых, которые посвятили свои исследования анализу и оптимизации методов пространственной интерполяции, используемых при построении цифровых моделей рельефа: Arun P. V., Ajvazi B., Bektaş S, Căţeanu M., Ciubotaru A., Czimmer K. A., Erdede S. B., Grohmann C. H., Guth P. L., Habib M., Hui Z., Li D., Jin S., Van Niekerk A. и др.

**Целью работы** является разработка метода повышения точности построения цифровой модели рельефа.

**Идея работы** состоит в уточнении поверхности локального участка цифровой модели рельефа точками, полученными при интерполяции с применением теории полюсов и метода Хука-Дживса, используемого для обоснования пространственного положения полюсов, с возможностью регуляризации модели с помощью предельного ограничивающего угла.

**Задачи исследования:**

Поставленная в диссертационной работе цель достигается посредством решения нижеуказанных задач:

1. Анализ существующих методов построения цифровых моделей рельефа для обоснования и разработки детальной методики исследований;
2. Разработка метода построения математической модели рельефа с использованием основ теорий полюсов и оптимизации.
3. Оценка точности построения цифровых моделей рельефа общепринятыми методами пространственной интерполяции и предлагаемым;

4. Сравнительный анализ точности построения предлагаемым и общепринятыми методами;

5. Разработка общих рекомендаций по применению разработанного метода.

**Объект исследования** – цифровая модель рельефа.

**Предмет исследования** – математические методы построения цифровых моделей рельефа.

**Научная новизна работы:**

1. Разработан метод построения цифровой модели рельефа с уточнением локальных участков базовой поверхности на основе теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса как подход с восстановлением связей между геопространственными данными в локальной области с использованием характеристического многочлена и обоснованием пространственного положения полюсов его составляющих;

2. Разработан способ регуляризации математической модели рельефа, построенной по облакам точек, при использовании теории полюсов для управления областью поиска при восстановлении связей между геопространственными данными;

3. Усовершенствован алгоритм определения высотного положения дополнительной точки на уточняющей поверхности элемента рассматриваемой системы.

**Научные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработанный метод создания цифровой модели рельефа на основе облаков точек с помощью применяемых совместно теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса повышает точность построения цифровых моделей рельефа в сравнении с основными методами интерполяции более чем на 15%;

2. Выбор полюсов в локальной области описывающих поверхность дискретного элемента следует выполнять с использованием предельного ограничивающего угла, что обеспечивает управление аппроксимирующими кривыми при восстановлении нелинейных связей между геопространственными данными;

3. При интерполяции для уточнения поверхности дискретного элемента необходимо определять высотное положение

добавляемой точки, которое в разработанном методе построения цифровой модели рельефа рассчитывается с помощью обратных операций в барицентрических координатах.

**Теоретическая и практическая значимость.** *Теоретическая значимость* работы состоит в том, что в ходе разработки метода построения цифровой модели рельефа с применением теории полюсов и метода Хука-Дживса были получены результаты, которые указывают на возможность восстанавливать связи между геопространственными данными в сложных структурных условиях. *Практическая значимость* полученных результатов состоит в том, что с использованием разработанного метода была повышена точность построения цифровых моделей рельефа объектов минерально-сырьевого комплекса по натурным наблюдениям для решения прикладных задач. Разработанный метод построения математической модели рельефа принят к использованию в производственном процессе компанией ООО «Лаборатория Инжиниринга» для построения цифровых моделей рельефа, что подтверждается актом внедрения от 02.10.2023.

**Методология и методы исследования:** при выполнении исследования применялись следующие методы: теории полюсов, Хука-Дживса, теории ошибок геодезических измерений, сравнительного анализа, пространственной интерполяции, наименьших квадратов.

**Степень достоверности результатов исследования подтверждается** корректной постановкой цели и задач диссертационной работы, планированием экспериментальных исследований, применением теоретических основ методов теории полюсов, обсуждением основных результатов исследования на научных конференциях, экспериментальным моделированием разработанных методов при построении цифровых моделей рельефа на натурных данных. Результаты диссертационной работы согласуются с выводами, полученными другими отечественными и зарубежными исследователями.

**Апробация результатов исследования.** Основные положения и результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях: XVIII Международный форум-конкурс

студентов и молодых ученых «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), Всероссийская научно-практическая конференция «Новые технологии при недропользовании» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), XXI Международная научно-практическая конференция «Современные методы и технологии управления социально-экономическими и инженерными системами и процессами» (г. Минск, 2022 г.), XI Международная горнопромышленная конференция «Баренц-арктическое экономическое партнерство» (г. Кировск, 2022 г.), XXXI Международный научный Симпозиум «Неделя Горняка-2023» (г. Москва, 2023 г.).

**Личный вклад автора** состоит в постановке цели и задач исследования; анализе зарубежных и отечественных литературных источников по созданию цифровых моделей рельефа; разработке метода заполнения пропусков в триангуляционной поверхности на основе восстановления пространственной связи между декомпозированной гранью триангуляции и смежными гранями с использованием теории полюсов и метода Хука-Дживса оптимизации с применением ограничивающего предельного угла для управления степенью обобщенности заполняющей поверхности; выполнении оценки точности построенных цифровых моделей рельефа и определения достоверности предлагаемых методов; анализе и обобщении результатов экспериментальных исследований; апробации результатов исследований на научных конференциях; написании научных публикаций по теме диссертации.

#### **Публикации**

Результаты диссертационного исследования в достаточной степени освещены в 5 печатных работах, в том числе в 2 статьях – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (далее – Перечень ВАК), в 2 статьях – в изданиях, входящих в международные базы данных и системы цитирования (Scopus). Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.



### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой из них, заключения и библиографического списка. Содержит 158 страниц машинописного текста, 87 рисунков и 17 таблиц и список литературы из 141 наименования и 2 приложений.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность научному руководителю д.т.н., доценту Мустафину М.Г. за ценные советы и наставления; преподавателям и сотрудникам кафедры инженерной геодезии Санкт-Петербургского горного университета императрицы Екатерины II за всестороннюю помощь на каждом этапе исследования.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы работы, сформулированы цель, задачи работы и научная новизна, раскрыты теоретическая и практическая значимости исследования и изложены основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** выполнен анализ состояния изученности вопроса о построении цифровых моделей. Рассмотрены методы пространственной интерполяции, используемые для восстановления связей между исходными геопространственными данными при построении цифровых моделей рельефа, а также сформулированы предложения по улучшению результатов интерполяции. По результатам выполненного анализа обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи научного исследования.

**Во второй главе** по выполненным теоретическим исследованиям разработан метод построения поверхности локального участка цифровой модели рельефа с использованием методов теории полюсов и метода Хука-Дживса. Разработан метод регуляризации математической модели поверхности локального участка, получаемой в результате интерполяции предлагаемым методом, с использованием предельного ограничивающего угла между обрабатываемым дискретным элементом и смежными. Предложено улучшение процесса интерполяции с использованием разработанного метода с помощью обратного перехода от барицентрических координат.

**В третьей главе** выполнены экспериментальные исследования разработанного метода построения поверхности локального участка цифровой модели рельефа с использованием методов теории полюсов и метода Хука-Дживса. Проведена оценка точности построенных математических моделей с использованием разработанного метода и общепринятых методов пространственной интерполяции.

**В четвертой главе** выполнен сравнительный анализ и даны общие рекомендации по использованию разработанного метода построения цифровой модели рельефа.

**В заключении** сформулированы основные научные и практические выводы по работе.

Основные результаты отражены в следующих защищаемых положениях:

**1. Разработанный метод создания цифровой модели рельефа на основе облаков точек с помощью применяемых совместно теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса повышает точность построения цифровых моделей рельефа в сравнении с основными методами интерполяции более чем на 15%.**

Для построения поверхности локального участка цифровой модели рельефа с использованием совместно методов теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса требуется выполнить построение характеристического многочлена, например, 3-го порядка, состоящего из полюсов, обеспечивающих изменение гладкости поверхности. Характеристический многочлен 3-го порядка со смежными полюсами и избыточными измерениями приведен на рисунке 1.

Для повышения точности построения математической модели рельефа определение положения полюсов требует обоснования с использованием избыточных данных, которыми выступают точки земной поверхности, например, полученные в результате классификации геопространственных данных и не относящиеся к ключевым точкам.

Определение положения полюса, корректно аппроксимирующего избыточные измерения в локальной области, предлагается выполнять с использованием алгоритма Хука-Дживса.

Данный метод хорошо адаптирован к поиску решения в многомерном пространстве параметров без необходимости выполнять затратные вычисления векторов градиента, а также с возможностью приближенного поиска для увеличения производительности.

Важно отметить, что так как полюса аппроксимируют подмножество избыточных измерений ( $n$ ), принадлежащее дискретному элементу  $D_e$ , то снижается конечный объем информации, необходимой для построения цифровой модели рельефа с использованием разработанного метода, так как  $n$ -измерений описываются 6 уравнениями положения полюсов.

Для поиска оптимального положения плоскости  $P^*$  следует использовать метод конфигураций (Хука – Дживса). Для минимизации ошибки положения плоскости следует использовать целевую функцию, вычисляемую по формуле (1):

$$f = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (dev_j - \overline{dev})^2}{m-1}} \quad (1)$$

где  $m$  – количество точек земной поверхности внутри области, ограниченной набором полюсов с исключением 5% наибольших и наименьших значений;

$\overline{dev}$  – усеченное среднее значение отклонений точек земной поверхности с исключением 5% наибольших и наименьших значений;

$dev$  – отклонение точки земной поверхности от оптимизируемого положения плоскости, которое вычисляется по формуле (2):

$$dev = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{0.5}} \quad (2)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  - координаты точки земной поверхности внутри области поиска;

$a, b, c, d$  - составляющие уравнения плоскости, относительно которой вычисляется отклонение.

Так как влияние больших по величине отклонений в одном полюсе будет влиять на поиск оптимального положения всего набора, то усеченное среднее позволит увеличить робастность метода.

Обобщенный алгоритм оптимизации положения полюсов:

1. Задать нулевое положение набора полюсов  $P^0$ , например, через среднее значение вектора нормали для набора по формуле (3):

$$P^0 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

где  $x_n, y_n, z_n$  - координаты проекции трех точек полюса исходной грани, принадлежащего исследуемому набору полюсов.

2. Определить значение коэффициента уменьшения шага поиска  $\gamma > 1$ ;

3. Задать значение шага поиска  $\theta$  в градусной мере, чтобы выполнять поворот набора полюсов при вершине вокруг оси  $x$  и  $y$ , проходящей через соответствующую набору вершину исходной грани.

4. Выделить подмножество точек земной поверхности  $GP_e$ , которое принадлежит пространственной области поиска, ограниченной внешними ребрами набора полюсов.

5. Задать значение  $\varepsilon > 0$ , при котором исследующий поиск будет остановлен, так как шаг достигнет своего наименьшего установленного значения;

6. Выполнить исследующий поиск: из начального положения плоскости  $P^0$  сделать шаг  $\theta$  во всех возможных направлениях, при условии, что новый набор координат  $\overline{P}^0$  не соответствует начальному  $\overline{P}^0 \neq P^0$ . Под шагом понимается поворот плоскости относительно соответствующей вершины исходной грани триангуляции в пространстве на угол  $\theta$  и  $-\theta$ . В таком случае вершина исходной грани триангуляции не изменит своего высотного положения, что позволит согласовать процесс оптимизации с исходными измерениями, которые не должны быть искажены.

Вычисление нового положения плоскости после шага, в общем случае, выполняется по формуле (4):

$$\begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \times T \times R_Y \times T_{обр.} \quad (4)$$

где  $T$  - матрица переноса нулевого положения обрабатываемой плоскости, определяемая с использованием формулы (5):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_e & y_e & z_e & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

где  $x_e, y_e, z_e$  - координаты вершины исходной грани триангуляции, соответствующей оптимизируемому набору полюсов;

$R_Y$  - матрица поворота нулевого положения обрабатываемой плоскости, которая определяется по формуле (6):

$$R_Y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

где  $\theta$  - значение шага в угловой мере;

$T_{обр.}$  - матрица обратного переноса нулевого положения обрабатываемой плоскости, которая определяется по формуле (7):

$$T_{обр.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_e & -y_e & -z_e & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

7. Вычислить значения целевой функции:  $f^+$  при шагах в направлении  $\theta$  и  $f^-$  при шаге в направлении  $-\theta$  с использованием множества содержащего точки земной поверхности в области поиска.

В общем виде значение целевой функции вычисляется по формуле (1).

8. Определить наименьшее значение целевой функции:

а. Если значения целевой функции  $f^+$  и  $f^-$  превышают значение целевой функции  $f^0$ , вычисленное для нулевого положения  $P^0$ , то поиск завершается и  $P^* = P^0$ .

б. Если хотя бы одно значение меньше, то  $P$  принимает значения, соответствующее целевой функции с наименьшим значением, а затем выполняется переход к п.9.

9. Проверить выполнение условия завершения алгоритма через минимальное значение шага:

а.  $\|\theta\| < \varepsilon$  - алгоритм прекращает минимизацию целевой функции, при этом результирующему значению положения плоскости назначается текущее:  $P^* = P^0$ .

б.  $\|\theta\| > \varepsilon$  - требуется уменьшить значение шага с использованием коэффициента  $\gamma$ :

$$\theta = \frac{\theta}{\gamma} \quad (8)$$

после чего перейти к п.10.

10. Сделать шаг в направлении минимума целевой функции, определенном в п.8 и зафиксировать новое положение плоскости  $P^n$ .

11. Повторить исследующий поиск, согласно п.6 из нового положения обрабатываемой плоскости  $P^n$ .

12. Определить новые значения целевой функции  $f^{n+}$  и  $f^{n-}$  при шаге от положения плоскости  $P^n$  в направлении  $\theta$  и  $-\theta$  соответственно:

а.  $f^n < f^0$  - изменить значения  $P^0 = P^{-0}$  и  $P^{-0} = P^n$ , после чего перейти к п.8.  
 $f^n > f^0$  - изменить значение  $P^0 = P^{-0}$ , после чего перейти к п.б.

Оценка точности построенных цифровых моделей рельефа с использованием разработанного метода выполнялась по 3 параметрам: «СКО, м» (основной), «Отклонение точек  $> 1/3 h$ , %» и «Отклонение точек  $> h$ , %». Распределения параметров, приведенные на рисунках 2-3 свидетельствуют о повышении точности построения цифровой модели рельефа при построении предлагаемым методом, так как математическое ожидание смещено в сторону начала координат, а стандартное отклонение уменьшено в сравнении с другими методами построения. При проведении сравнительного анализа методов построения с разработанным, определено увеличение точности построения разработанным методом на 15.48% в наихудшем примере из рассматриваемых, что подтверждается данными, приведенными в таблице 1 и также указывает на применимость разработанного метода при восстановлении связей между геопространственными данными.

**2. Выбор полюсов, в локальной области описывающих поверхность дискретного элемента, следует выполнять с использованием предельного ограничивающего угла, что обеспечивает управление аппроксимирующими кривыми при восстановлении нелинейных связей между геопространственными данными.**

В теории полюсов для интерполяции новой точки используются все наборы полюсов. Однако, требуется ограничить область поиска пространственной информации, чтобы исключить влияние смежных с исходной граней, отмеченных серым цветом на рисунке 4 в которых значение угла между исходной и смежной гранью превышает устанавливаемый предел.

При таком подходе при интерполяции учитывается только однородная пространственная информация, так как полюса, содержащиеся в смежных гранях триангуляции, которые находятся за

границей заданного предельного угла не учитываются при дальнейшей обработке, как это отмечено на рисунке 5.

Вычисление предельного ограничивающего угла между двумя гранями осуществляется по следующим формулам (9-12):

1) если угол  $\alpha < 90^\circ$ , то:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (9)$$

2) если угол  $\alpha > 90^\circ$  и  $\alpha < 180^\circ$ , то:

$$\alpha = 180 - \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (10)$$

3) если угол  $\alpha > 180^\circ$  и  $\alpha < 270^\circ$ , то:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) - 180 \quad (11)$$

4) если угол  $\alpha > 270^\circ$ , то:

$$\alpha = 360 - \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (12)$$

где  $A_1, B_1, C_1$  – переменные в общем уравнении плоскости для исходной грани триангуляции;

$A_2, B_2, C_2$  – переменные в общем уравнении плоскости для смежной грани триангуляции.

Таким образом, использование предельного ограничивающего угла как инструмента регуляризации модели требуется для управления аппроксимирующими кривыми при восстановлении нелинейных связей между геопространственными данными, что обеспечивает контроль за гладкостью интерполирующей поверхности.

**3. При интерполяции для уточнения поверхности дискретного элемента необходимо определять высотное положение добавляемой точки, которое в разработанном методе**



**построения цифровой модели рельефа рассчитывается с помощью обратных операций в барицентрических координатах.**

При интерполяции по теории полюсов для определения высотного положения точки, принадлежащей построенной интерполирующей поверхности, в трехмерном случае требуется выполнить переход от характеристического многочлена 3-го порядка к 1-му, что может быть выполнено, например, с использованием барицентрических координат. При этом из-за механизма перехода между характеристическими многочленами вычислить высотное положение определяемой точки затруднительно из-за смещения планового положения в ходе перехода. Для решения данной задачи требуется выполнить обратный переход от барицентрических координат определяемой точки к барицентрическим координатам полюса следующим образом:

1. Определим барицентрические координаты точек внутри декомпозированного, например, из многочлена 3-го порядка полюса по формуле (13):

$$\begin{aligned} b_{1pp} &= b_{1p} / 3 \\ b_{2pp} &= b_{2p} / 3 \\ b_{3pp} &= b_{3p} / 3 \end{aligned} \quad (13)$$

где  $b_{1p}, b_{2p}, b_{3p}$  – барицентрические координаты интерполируемой точки  $P$ .

Так как все полюса подобны исходному, но их площадь меньше площади исходной грани в 3 раза, то барицентрические координаты для каждого полюса будут одинаковыми.

2. Вычислим пространственные координаты точек внутри всех полюсов многочлена 3-го порядка по известным барицентрическим координатам определяемой точки. Для этого потребуется решить систему линейных уравнений с 2 неизвестными плановыми координатами по формуле (14):

$$\begin{cases} x_n(y_1 - y_2) + y_n(x_2 - x_1) = 2s_1 - x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_n(y_2 - y_3) + y_n(x_3 - x_2) = 2s_2 - x_2y_3 + x_3y_2 \end{cases} \quad (14)$$

где  $x_{1-3}, y_{1-3}$  – плановые координаты вершин полюса;

$x_n, y_n$  – координаты определяемой точки внутри полюса;  
 $S_{1-3}$  вычисляются по формуле (15):

$$\begin{aligned} S_1 &= b_{1pp} S \\ S_2 &= b_{2pp} S \\ S_3 &= b_{3pp} S \end{aligned} \quad (15)$$

где  $S$  – площадь соответствующего полюса.

3. Вычисление координаты  $Z$  определяемых точек внутри полюсов выполняется по формуле (16):

$$Z = \frac{-a \cdot X - b \cdot Y - d}{c} \quad (16)$$

где  $a, b, c, d$  переменные в уравнении плоскости полюса;

$X, Y$  – плановые координаты интерполируемой точки.

Визуальное представление определения координат по методу обратного использования барицентрических координат приведено на рисунке 6.

Таким образом обратное использование барицентрических координат позволяет определять высотное положение определяемых точек, принадлежащих интерполирующей поверхности, полученной с использованием теории полюсов с учетом смещения при выполнении операции уменьшения индекса (переход от характеристического многочлена 3-го порядка к 1-му).

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе решена актуальная научная задача разработки метода повышения точности построения цифровой модели рельефа, имеющая важное значение для геодезии.

По результатам выполнения диссертационной работы сделаны следующие выводы:

1. На основе выполненных исследований, включающих совместное использование теории полюсов и алгоритма Хука-Дживса по натурным измерениям и компьютерного моделирования, разработан метод построения цифровой модели рельефа с уточнением поверхностей локальных участков за счет добавления новых точек, принадлежащих нелинейной поверхности.

2. Сравнительный анализ разработанного метода построения цифровой модели с аналогами, в том числе методами кригинга, естественного соседа, триангуляции, радиальной базисной функции, минимальной кривизны, обратного расстояния показал, что использование разработанного метода при построении цифровых моделей рельефа приводит к повышению точности более чем на 15%

3. На основе полученных результатов выполнено обоснование использования предельного ограничивающего угла при интерполяции с использованием разработанного метода, обеспечивающего регуляризацию математической модели рельефа и управление аппроксимирующими кривыми с помощью изменения области поиска при исключении из обработки смежных граней, морфометрические характеристики которых отличаются от интерполируемой.

4. Усовершенствован метод определения высотного положения интерполируемой точки с обратным использованием барицентрических координат для расширения классического подхода к операции снижения индекса полюсов и исключения смещения при определении высотного положения определяемой точки.

5. Разработаны общие рекомендации по применению предлагаемого метода при построении цифровых моделей рельефа, которые являются основой инженерной методики для решения прикладных задач с использованием интерполяции с помощью разработанного метода.

Дальнейшее развитие темы диссертации предполагает проведение исследований, направленных на разработку методики построения цифровых моделей рельефа для горнотехнических объектов и нормативной документации по их использованию.

#### **СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

*Публикации в изданиях из Перечня ВАК:*

1. Мустафин, М.Г. Развитие методов построения цифровой модели рельефа по данным многоточечных маркшейдерско-геодезических измерений / М.Г. Мустафин, Б.Ю. Васильев, В.В. Глазунов // Маркшейдерский вестник. – 2022. – № 2. – С. 33–40.

2. Мустафин, М.Г. Диагностирование и определение аномальных зон магистральных трубопроводов на подводных переходах с использованием цифровой модели рельефа / М.Г. Мустафин, Н.С. Павлов, В.А. Вальков, Б.Ю. Васильев, // Вестник СГУГиТ. – 2023. – Т.28. - № 1. – С. 33–44.

*Публикации в изданиях, входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus:*

3. Мустафин, М.Г. Анализ точности построения цифровых моделей рельефа на основе данных периодического воздушного лазерного сканирования горнопромышленного объекта / М.Г. Мустафин, А.А. Кологривко, Б.Ю. Васильев // Горный журнал. – 2023. – № 2. – С. 1-14. DOI: 10.17580/gzh.2023.02.09

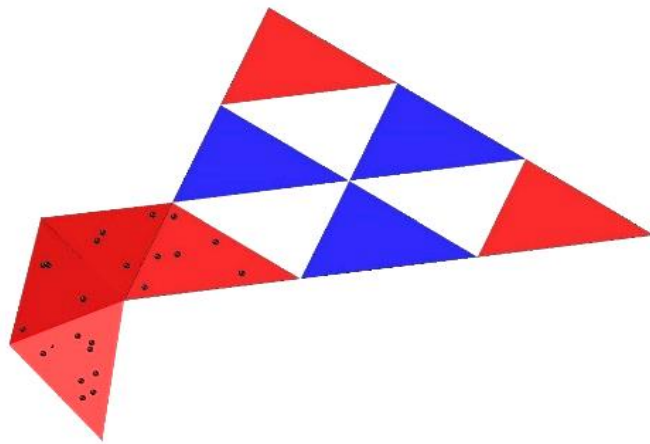
4. Мустафин, М.Г. Анализ и оптимизация цифровых моделей рельефа горнопромышленного объекта с открытым типом разработки / Б.Ю. Васильев, М.Г. Мустафин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 9. – С. 141–159. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2023\_9\_0\_141.

*Публикации в прочих изданиях:*

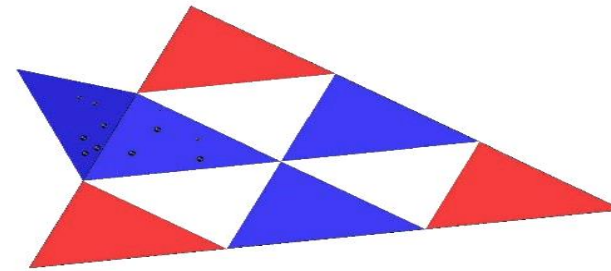
5. Васильев, Б.Ю. Исследование точности построения цифровых моделей рельефа различными методами пространственной интерполяции // Сборник материалов XXI Международной научно-практической конференции «Современные методы и технологии управления Социально-экономическими и инженерными Системами и процессами», БНТУ, Минск, 2022.

*Патенты:*

6. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2023660393 Tri Optima (Оптимизация триангуляции). Заявка № 2023619282: заявл. 12.05.2023: опубл. 19.05.2023 / Васильев Б.Ю., Мустафин М.Г.; заявитель федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский горный университет»



а.



б.

Рисунок 1 – Характеристический многочлен 3-го порядка с избыточными измерениями (черные сферы) и набором полюсов: а – при вершине; б – при ребре.

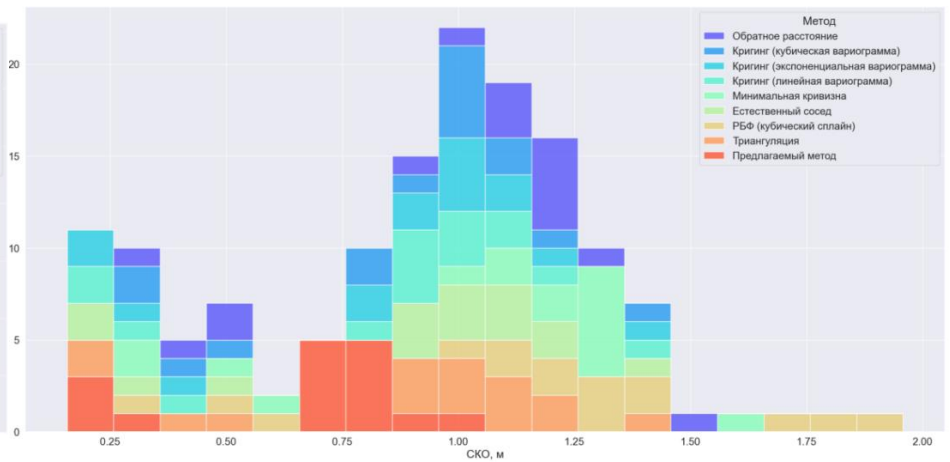
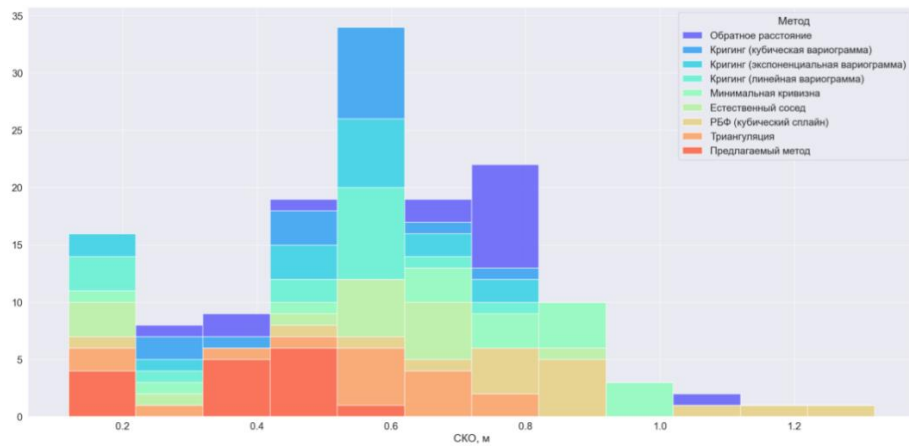


Рисунок 2 – Гистограмма оценки точности математических моделей рельефа по параметру СКО с пространственным разрешением: а – 3м, б – 5м

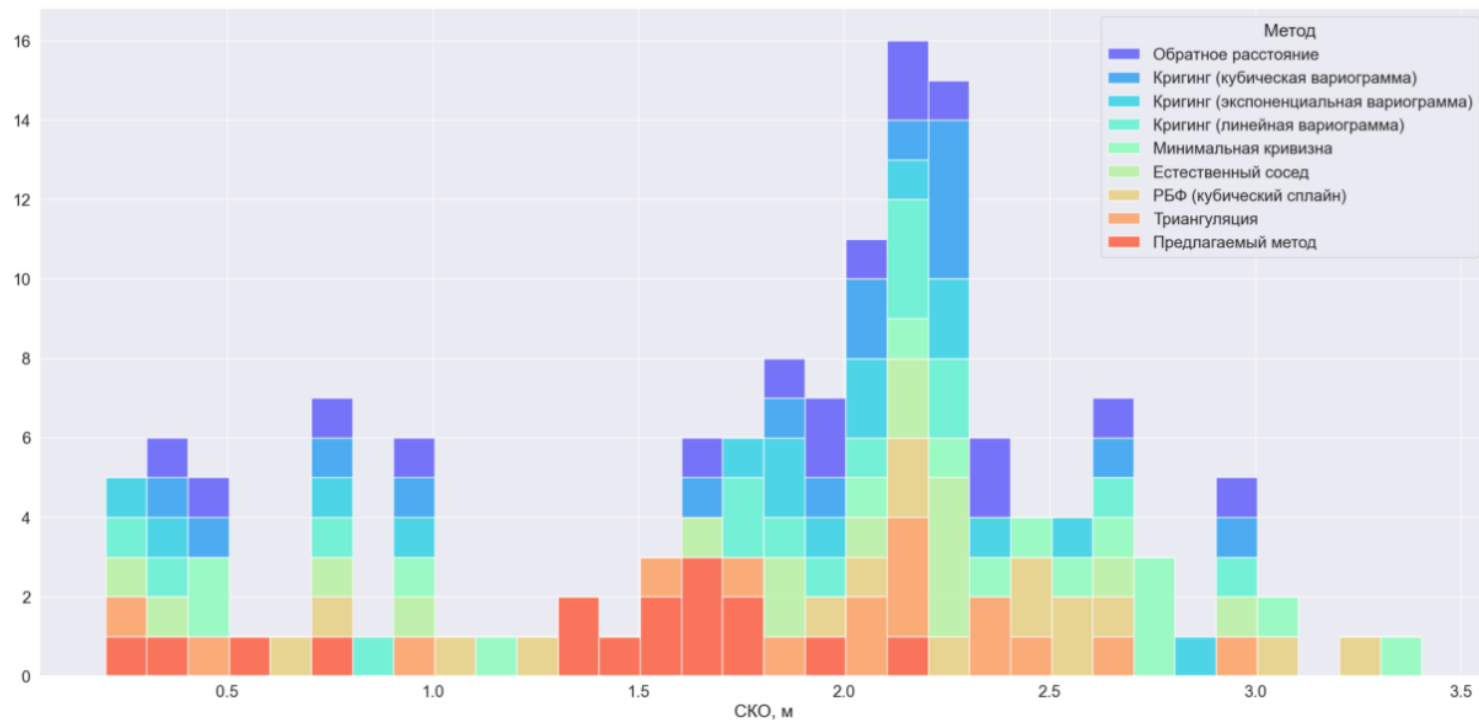
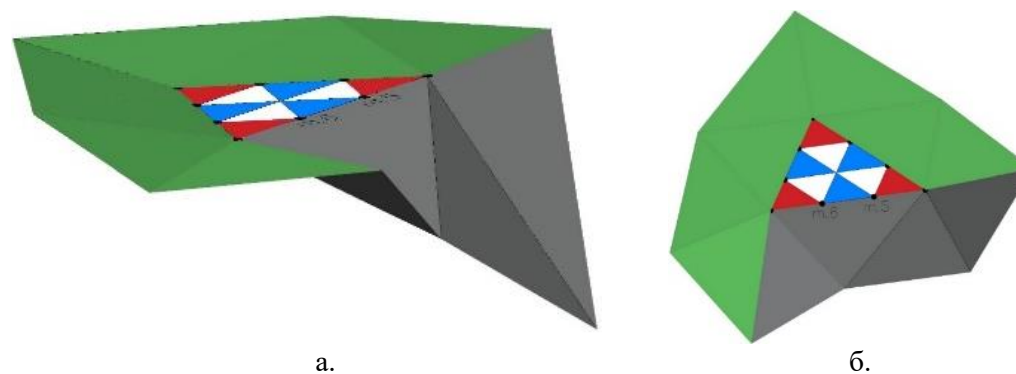


Рисунок 3 – Гистограмма оценки точности математических моделей рельефа по параметру «СКО» с пространственным разрешением 10м



а.

б.

Рисунок 4 – Схематическое представление смежных граней триангуляции участвующих в построении (зеленый цвет) и исключенных с использованием предельного ограничивающего угла (серый цвет): а – перспектива, б – вид сверху

Таблица 1. Фрагмент сравнительного анализа точности

Базовый метод	Наименование участка	Пространственное разрешение, м	Оцениваемый параметр	Значение параметра, полученное предлагаемым методом	Значение параметра, полученное базовым методом интерполяции	Процентное отношение, %	
Пример с наименьшим увеличением точности							
Триангуляция	Равнинный	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	0,44	0,56	21,99	
			Отклонение точек > h, %	0,02	0,03	33,33%	
			СКО, м	0,13	0,15	15,48	
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)		5	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	1,29	1,56	17,12
				Отклонение точек > h, %	0,04	0,05	20,00%
				СКО, м	0,19	0,23	19,89
		10	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	3,46	4,34	20,24
				Отклонение точек > h, %	0,06	0,08	26,68
				СКО, м	0,30	0,38	21,14
Пример с наибольшим увеличением точности							
Кригинг (экспоненциальная вариограмма)	Антропогенный участок P <sub>5</sub>	3	Отклонение точек > 1/3 h, %	4,22	5,34	21,06	
			Отклонение точек > h, %	0,33	0,45	26,56	
			СКО, м	0,45	0,58	22,93	
		5	5	Отклонение точек > 1/3 h, %	9,82	12,56	21,82
				Отклонение точек > h, %	1,01	1,37	26,12
				СКО, м	0,79	1,06	25,69
Кригинг (кубическая вариограмма)		10	10	Отклонение точек > 1/3 h, %	18,56	20,81	25,55
				Отклонение точек > h, %	3,65	4,98	26,70
				СКО, м	1,65	2,17	23,96

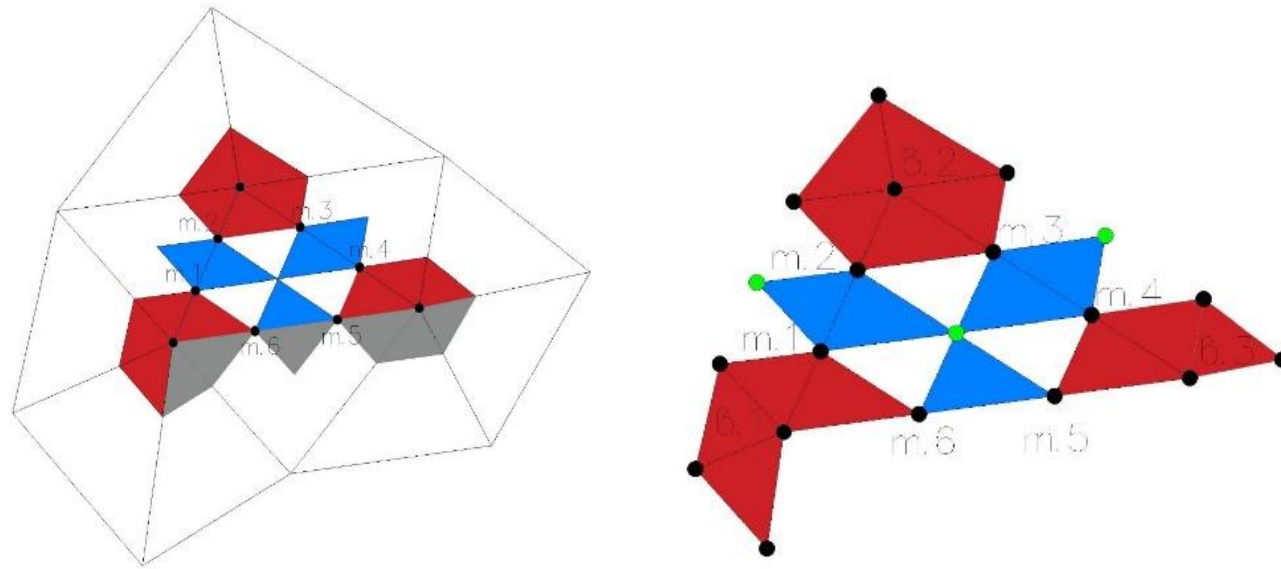


Рисунок 5 – Визуальное представление наборов полюсов характеристического многочлена 3-го порядка участвующих в построении (вид сверху): серым цветом показаны полюса, исключенные из построения

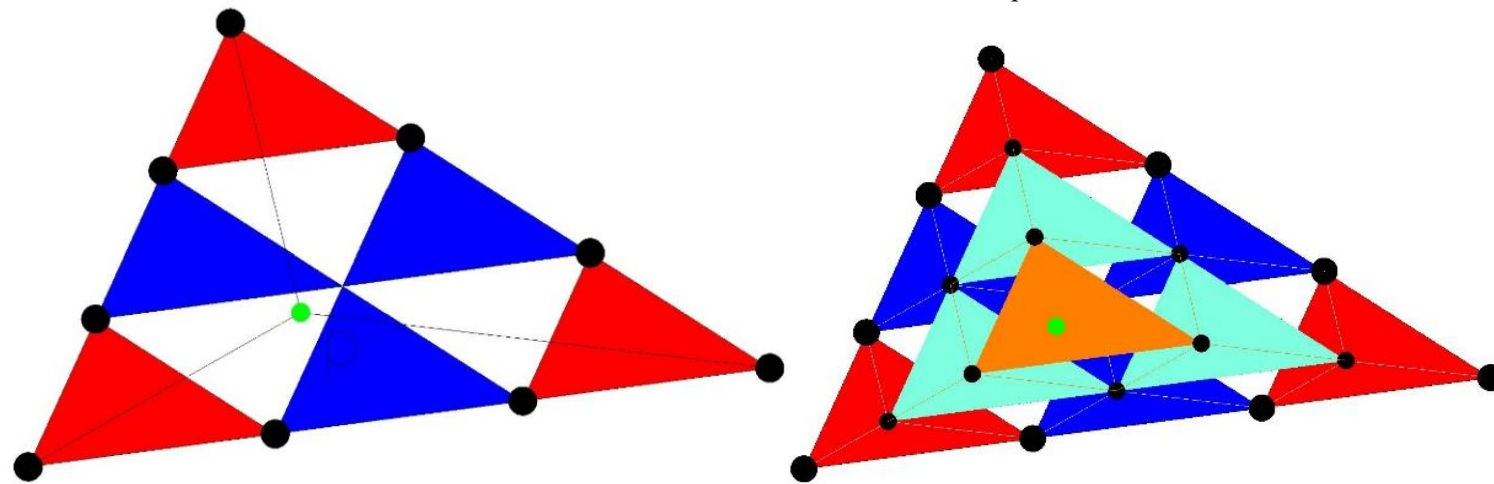


Рисунок 6 – Визуальное представление определения координат с обратным использованием барицентрических координат: зеленая окружность – точка с определяемыми координатами; бирюзовые грани – многочлен 2-го порядка; оранжевая грань – многочлен 1-го порядка (вид сверху)